فصل سوم: استدلال ریاضی

بخش سوم: اصل لانه‌ی کبوتر

اصل لانه‌ی کبوتر

اصل لانه‌ی کبوتر یکی از اصل‌های ظاهراً ساده، ولی پرکاربرد است. هر چند که به آن اصل می‌گوییم، ولی در واقع یک قضیه است. برای توضیح فرض کنید می‌خواهیم ۶ کبوتر را در ۵ لانه قرار دهیم. می‌توان نشان داد دست‌کم در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار می‌گیرند. هر چند ممکن است این مطلب بدیهی به نظر برسد ولی اثبات آن از طریق برهان خلف به درک بهتر موضوع کمک می‌کند. فرض می‌کنیم که «در هیچ لانه‌ای بیش از یک کبوتر قرار نگرفته باشد» در این صورت در ۵ لانه حداکثر ۵ کبوتر وارد شده‌اند که این نتیجه با فرض (۶ کبوتر) متناقض است.

قضیه ۲ **اصل لانه‌ی کبوتر: اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m>n$ ، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل دو کبوتر وارد آن شده‌اند.**

تست ۱۶: کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل ۲ نفر آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز از هفته متولد شده‌اند، کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۷۸ ۳) ۸۵ ۴) ۸۸

پاسخ: هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز دارد. بنابراین $۱۲\times۷=۸۴$ لانه داریم:

اسفند و جمعه	و	...	و	فروردین و یک‌شنبه	و	فروردین و شنبه
لانه‌ی ۸۴ اُم				لانه‌ی دوم		لانه‌ی اول

اگر تعداد کبوترها (تعداد افراد) ۸۴ باشد، نمی‌توانیم مطمئن باشیم حداقل لانه‌ای یافت می‌شود که در آن ۲ کبوتر وارد شده‌اند، اما اگر کبوتر ۸۵ ام وارد لانه‌ها شـــود، آن‌گاه مطمئن خواهیم بود که حداقل در یکی از لانه‌ها ۲ کبوتر جای گرفته‌اند. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله ۲ **ثابت کنید اگر ۱۵ کبوتر را در ۷ لانه قرار دهیم، دست‌کم در یکی از لانه‌ها حداقل ۳ کبوتر قرار می‌گیرد.**

راه‌حل: اثبات از طریق برهان خلف بسیار ساده است:

فرض می‌کنیم «در هیچ لانه‌ای بیش از ۲ کبوتر قرار نگرفته باشد». در این صورت در ۷ لانه حداکثر $۷\times۲=۱۴$ کبوتر وارد شده‌اند که این نتیجه نیز با فرض مسأله (۱۵ کبوتر) متناقض است.

قضیه ۳ **(صورت تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتر): اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m>nk$، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+۱$ کبوتر وارد آن شده‌اند.**

توجه: ما در این کتاب در حل تست‌ها از قضیه‌ی بالا استفاده می‌کنیم، اما از نکته‌ی زیر نیز می‌توان استفاده کرد که از همین قضیه به دست آمده است:

نکته‌ی ۹: **اگر m کبوتر را در n لانه جا دهیم $(m>n)$، حداقل یکی از لانه‌ها شامل $[\frac{m-۱}{n}]+۱$ کبوتر است.**

تست ۱۷: در یک کلاس ۵۴ نفری، دست‌کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: این‌گونه ســؤالات (با این انشــاء) که متأسفانه در آزمون‌های سراسری (البته نه در سال‌های اخیر) و سایر آزمون‌ها رواج دارد، مبهم و حتی می‌توان گفت اشــتباه اســت. حتی با این طرز بیان عدد ۵۴ نیز می‌تواند جواب باشــد (هر ۵۴ نفر می‌توانند در یک ماه سال به دنیا آمده باشند). صورت صحیح سؤال به صورت زیر می‌تواند باشد:

در یک کلاس ۵۴ نفری، n چه عددی باشد تا مطمئن باشیم حداقل n نفر ماه تولد یکسان دارند؟

برای حل ســؤال ۵۴ کبوتر داریم و ۱۲ لانه (تعداد ماه‌های ســال) چون $۵۴>۱۲\times۴$، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر نتیجه می‌گیریم حداقل $۴+۱=۵$ کبوتر وارد یکی از لانه‌ها شده‌اند. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

توجه: فرض کنید در هر یک از ماه‌های سال حداکثر ۴ نفر متولد شده‌اند، چون ۱۲ ماه داریم، پس تعداد افراد می‌تواند $۱۲\times۴=۴۸$ نفر باشد که با فرض سؤال (کلاس ۵۴ نفری) در تناقض است.

مسأله ۳ **حداکثر چند کبوتر در ۵ لانه می‌توانند قرار گیرند اگر در هیچ لانه‌ای بیش‌تر از ۳ کبوتر قرار نگیرد؟**

راه‌حل: در هر لانه حداکثر می‌تواند ۳ کبوتر قرار بگیرد. چون ۵ لانه داریم پس در کل حداکثر $۵\times۳=۱۵$ کبوتر می‌توانند وارد لانه‌ها شوند.

مسأله ۴ **حداقل چند کبوتر در ۵ لانه می‌توانند قرار گیرند تا مطمئن شویم لانه‌ای یافت می‌شود که در آن حداقل ۴ کبوتر قرار دارد؟**

راه‌حل: همان‌طور که در مسأله‌ی قبل دیدید، اگر $۵\times۳=۱۵$ کبوتر در لانه‌ها قرار بگیرند، نمی‌توانیم مطمئن باشیم حداقل یک لانه با ۴ کبوتر وجود دارد، زیرا ممکن است در هر لانه ۳ کبوتر قرار گرفته باشد، اما اگر کبوتر شانزدهم را اضافه کنیم، در این صورت مطمئن خواهیم بود که در یکی از لانه‌ها حداقل ۴ کبوتر قرار دارد.

از راه‌حل این مسأله می‌توان نکته‌ی زیر را نتیجه گرفت:

نکته‌ی ۱۰: **حداقل تعداد کبوتر برای این‌که در یکی از n لانه، حداقل m کبوتر قرار گیرد، برابر است با:** $n(m-۱)+۱$

مسأله ۵ **۱۶ کبوتر حداکثر در چند لانه قرار گیرند تا مطمئن شویم حداقل در یکی از لانه‌ها حداقل ۴ کبوتر وجود دارد؟**

راه‌حل: فرض می‌کنیم n لانه داریم. اگر $۴-۱=۳$ کبوتر در هر لانه قرار بگیرند، در این صورت $۳n$ کبوتر داریم. اکنون برای این‌که مطمئن شویم دست‌کم در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر (یکی بیش‌تر) قرار می‌گیرد، باید حداقل $۳n+۱$ کبوتر وارد لانه‌ها کنیم.

برای این‌که حداکثر مقدار n به دست بیاید باید داشته باشیم:

$$۳n+۱\le۱۶\Rightarrow n\le\frac{۱۵}{۳}\Rightarrow n\le۵$$

برای درک بهتر راه‌حل فرض کنید ۶ لانه داشته باشیم. در این صورت ممکن است از این ۱۶ کبوتر، در لانه‌های اول تا سوم هر کدام ۲ کبوتر و در لانه‌های چهارم تا ششم هر کدام ۳ کبوتر قرار گرفته باشند. بنابراین اگر کبوتر شانزدهم در هر یک از لانه‌های اول تا سوم قرار گیرد، در هیچ لانه‌ای ۴ کبوتر وجود ندارد و شرط مسأله برآورده نمی‌شود.

از راه‌حل این مسأله می‌توان نتیجه گرفت:

نکته‌ی ۱۱: **حداکثر تعداد لانه‌ی لازم برای این که m کبوتر وارد آن‌ها کنیم و مطمئن باشیم حداقل در یکی از لانه‌ها دست‌کم p کبوتر قرار دارد برابر است با:** $[\frac{m-۱}{p-۱}]$

تست ۱۸: **۶۵ کبوتر حداکثر در چند لانه‌ی کبوتر قرار گیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کبوتر قرار داشته باشد؟**

۱) ۳۱ **۲)** ۳۲ **۳)** ۳۳ **۴)** ۳۴

پاسخ: فرض می‌کنیم n لانه داریم. اگر ۲ کبوتر در هر لانه قرار گیرند، در این صورت $۲n$ کبوتر داریم. اکنون برای این‌که مطمئن شویم که دست‌کم در یکی از لانه‌ها ۳ کبوتر (بیش از ۲ کبوتر) قرار می‌گیرد، باید حداقل $۲n+۱$ کبوتر وارد لانه‌ها شوند، برای این‌که حداکثر مقدار n به دست بیاید باید داشته باشیم:

$$۲n+۱\le۶۵\Rightarrow n\le۳۲\Rightarrow n_{max}=۳۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

توجه: می‌توانستید با استفاده از نکته‌ی قبل سؤال را حل کنید:

$$p=۳\ ,\ m=۶۵\Rightarrow n_{max}=[\frac{۶۵-۱}{۳-۱}]=۳۲$$

البته استفاده از این نکته توصیه نمی‌شود و راه‌حل اصلی مسأله برای آزمون‌های مختلف و جلسه‌ی کنکور مناسب‌تر و مفیدتر است.

تذکر در بعضی از سؤالات مربوط به اصل لانه کبوتری، بدون توجه به فرمول‌های ذکر شده، فقط باید بدترین حالت ممکن را انتخاب کرد. (منظور حالتی با بیش‌ترین عضو است که شرط مسأله برآورده نمی‌شود.) در مسائل بعد با این روش آشنا می‌شوید.

مسأله ۶ **در ظرفی ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره‌ی قرمز و ۱ مهره‌ی سبز داریم. از این ظرف حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن باشیم از یک رنگ حداقل سه مهره خارج شده است؟**

راه‌حل: بدترین حالت این است که بیش‌ترین تعداد مهره خارج شود، ولی از هیچ رنگی سه مهره خارج نشود. بنابراین باید ابتدا از رنگ مهره‌هایی که تعداد آن‌ها کم‌تر از ۳ تا است، همه‌ی مهره‌ها را کامل خارج کنیم، سپس از هر رنگ دیگر دو مهره خارج می‌کنیم. به این ترتیب از هر رنگ ۲ مهره یا کم‌تر خواهیم داشت و دیگر نمی‌توانیم مهره‌ی دیگری اضافه کنیم. مهره‌ی بعدی باعث می‌شود از یک رنگ حداقل سه مهره داشته باشیم.

حداقل تعداد مهره $(\underset{\text{سفید}}{۲}+\underset{\text{سیاه}}{۲}+\underset{\text{قرمز}}{۲}+\underset{\text{سبز}}{۱})+۱=۸$

مسأله ۷ **زوج‌های مرتبی به فرم (a,b) را که در آن a و b اعداد صحیح هستند به عنوان نقاطی از صفحه‌ی مختصات در نظر بگیرید. حداقل چند زوج مرتب باید داشته باشیم تا مطمئن شویم حتماً دو نقطه وجود دارد که نقطه‌ی وسط آن‌ها طول و عرض صحیح دارد؟**

راه‌حل: از آن‌جا که مختصات وسط دو نقطه با رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید، برای صحیح شدن طول و عرض باید زوج و فرد بودن مختصات را بررسی کنیم.

$$\text{وسط نقطه} = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{x_A+x_B}{۲}, \frac{y_A+y_B}{۲}\right)$$

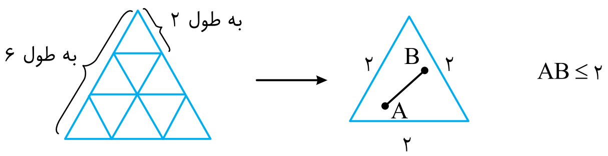
مختصات هر نقطه می‌تواند چهار حالت (زوج , زوج) و (فرد , فرد) و (فرد , زوج) و (زوج , فرد) داشته باشد. اگر این حالت‌ها را به عنوان چهار لانه در نظر بگیریم، در صورتی وسط دو نقطه مختصات صحیح دارد که دو نقطه در یک لانه باشند. برای آن‌که حداقل یکی از این ۴ لانه حداقل دو نقطه داشته باشد، باید دست‌کم ۵ نقطه داشته باشیم.

مسأله ۸ **چند عدد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که در مجموعه‌ی اعداد انتخاب شده دو عدد وجود دارد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است؟**

راه‌حل: ابتدا اعداد را به دسته‌های $\{۵,۱۰\}$، $\{۳,۶\}$، $\{۱,۲,۴,۸\}$، $\{۹\}$ و $\{۷\}$ تقسیم می‌کنیم. اگر دو عدد از یک دسته انتخاب شوند، یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. پس بدترین حالت این است که از هر مجموعه یک عضو را طوری برداریم که هیچ دو عددی بر هم بخش‌پذیر نباشند. ولی اگر ششمین عدد را انتخاب کنیم، حتماً دو عدد در یک دسته قرار می‌گیرند. بنابراین حداقل به ۶ عدد نیاز داریم.

مسأله ۹ **اگر ۱۰ نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ انتخاب شوند، آن‌گاه حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کم‌تر از یا مساوی با t است. مقدار t را طوری تعیین کنید که این جمله همواره درست باشد.**

راه‌حل: ابتدا باید هر ضلع مثلث را به سه قسمت تقسیم کنیم تا ۹ مثلث کوچک‌تر ایجاد شود. حال ۱۰ نقطه (کبوتر) و ۹ مثلث (لانه) داریم. طبق اصل لانه‌ی کبوتر، در یک مثلث حداقل ۲ نقطه قرار می‌گیرد که در بدترین حالت (منظور با بیش‌ترین فاصله) فاصله‌ی آن‌ها به اندازه‌ی طول ضلع مثلث است. بنابراین $t \le ۲$.



نکته‌ی ۱۲: **اگر هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، از اتصال این نقاط با پاره‌خط‌هایی موازی اضلاع مثلث، n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر ایجاد می‌شود.**

چکیده‌ی بخش ۳-۳: اصل لانه‌ی کبوتر

اصل لانه‌ی کبوتر: اگر n لانه و $kn+1$ کبوتر داشته باشیم، در یک لانه حداقل $k+1$ کبوتر داریم (بیش از k کبوتر).

تذکر در حل مسائل مربوط به این اصل، می‌توانیم بدترین حالت را در نظر بگیریم. منظور از بدترین حالت، حالتی با بیش‌ترین عضو است که شرایط مسأله را برآورده نمی‌کند.

دو نکته درباره‌ی شکل‌های هندسی:

۱) حداکثر فاصله‌ی دو نقطه $\begin{cases}\text{در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ضلع مثلث است.}\\ \text{در مربع برابر قطر مربع است.}\end{cases}$

۲) اگر اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع را به n قسمت تقسیم کنیم، از اتصال نقاط تقسیم با پاره‌خط‌هایی موازی اضلاع، n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر حاصل می‌شود.

بخش سوم: اصل لانه‌ی کبوتر

۷۴- در یک کلاس ۳۸ نفری حداقل چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۵- کتابی ۸۰۰ صفحه و هر صفحه ۱۰۰ تا ۲۵۰ کلمه دارد. این کتاب حداقل چند صفحه با کلمات برابر دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۶- در شهری به جمعیت ۷ میلیون نفر، اگر تعداد تارهای موی سر افراد حداکثر ۳۰۰۰۰۰ باشد، حداقل چند نفر وجود دارند که تعداد تارهای موهای سرشان برابر است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۷۷- در یک کلاس ۳۵۶ نفری، حداقل چند نفر دارای ماه و روز هفته‌ی تولد یکسان هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۸- حداکثر چند کبوتر در ۵ لانه می‌تواند قرار گیرد اگر در هیچ لانه‌ای بیش از ۲ کبوتر قرار نگیرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۷۹- حداقل چند کبوتر در ۵ لانه قرار گیرند تا مطمئن شویم لانه‌ای یافت می‌شود که در آن حداقل ۳ کبوتر قرار دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۸۰- حداقل چند نفر در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه سال به دنیا آمده‌اند؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۸۱- حداکثر چند نفر در یک مهمانی شرکت کنند تا مطمئن شویم هیچ ۴ نفری (یا بیش‌تر) نباشند که در یک روز هفته و یک ماه سال به دنیا آمده باشند؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۲۵۳ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۳۷

۸۲- دست کم چند نفر در یک مهمانی شرکت کنند تا مطمئن شویم حداقل ۴ نفر از آن‌ها در یک ماه سال و یک روز هفته متولد شده‌اند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۲۵۲ ۴) ۲۵۳

۸۳- ۱۵ کبوتر حداکثر در چند لانه قرار گیرند تا مطمئن شویم حداقل در یکی از لانه‌ها بیش از ۲ کبوتر وجود دارد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

۸۴- ۳۲ مهره حداکثر چند رنگ متفاوت داشته باشند تا از یکی از رنگ‌ها حداقل ۴ مهره داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۸۵- ۱۲ صندلی به فواصل مساوی دور یک میز دایره‌ای شکل چیده شده‌اند. حداقل چند نفر روی این صندلی‌ها قرار گیرند تا مطمئن شویم حداقل ۲ نفر روبه‌روی هم نشسته‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۶- فردی ۵ پیراهن، ۴ کت و ۷ شلوار دارد که با هم بپوشد. این فرد دست‌کم در چند مهمانی شرکت کند تا یقین حاصل کنیم که دست کم در ۳ مهمانی یک دست لباس را تکراری پوشیده است؟

۱) ۲۸۱ ۲) ۱۴۱ ۳) ۷۱ ۴) ۴۲۱

۸۷- ۳۳ عدد حقیقی به تصادف از بازه‌ی $(0,5)$ انتخاب می‌کنیم. جزء صحیح حداقل چه تعداد از این اعداد با هم برابرند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۸- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سیاه، ۵ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی آبی قرار دارد. بدون نگاه کردن حداقل چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۵ مهره‌ی همرنگ خارج شده است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۸۹- در یک کلاس ۴۳ نفری، هر دانش‌آموز به یکی از ۳ نامزد بهترین معلم مدرسه رأی داده است. معلم انتخابی حداقل چند رأی کسب کرده است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۹۰- در یک کیسه تعدادی مهره با ۹ رنگ مختلف وجود دارند. بدون نگاه کردن حداقل چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم در بین آن‌ها حداقل ۴ مهره هم رنگ وجود دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۷ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۹۱- ۱۷ نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد قرار دارند. حداقل ۲ تا نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها حداکثر .... است.

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۹۲- حداقل چند نقطه درون یک دایره به شعاع $\sqrt{۲}$ قرار دهیم تا مطمئن شویم فاصله‌ی حداقل ۲ تا از آن‌ها حداکثر ۲ است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۷

۹۳- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۵، دست‌کم چند نقطه قرار دهیم تا مطمئن شویم فاصله‌ی حداقل دو تا از آن‌ها، کم‌تر یا مساوی یک است؟

۱) ۶ ۲) ۲۶ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۹۴- حداقل چند نقطه درون مربعی به ضلع ۳ قرار دهیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ تا از آن‌ها فاصله‌ای نابیش‌تر از $\sqrt{۲}$ دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۵- ۳۶ نفر در یک هتل ۵ اتاقی اقامت دارند. در اتاقی که بیش‌ترین افراد اقامت دارند، حداقل چند نفر حضور دارند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۷

۹۶- ۱۰ تیرانداز هر کدام ۵ تیر به ۷ هدف شلیک می‌کنند. اگر هیچ تیری به خطا نرفته باشد، به هدفی که مورد اصابت بیش‌ترین تعداد تیر قرار گرفته، حداقل چند تیر اصابت کرده است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۹۷- در مجموعه‌ای ۳۰ عضوی از اعداد طبیعی، حداقل چند عدد در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ی یکسان دارند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹۸- حداقل چند عدد صحیح را به ۷ تقسیم کنیم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها حداقل ۱۲ عدد وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر است؟

۱) ۷۷ ۲) ۷۸ ۳) ۸۲ ۴) ۸۳

۹۹- در کدام مجموعه لااقل دو عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان بر عدد ۱۰ هستند؟

۱) $\{a^{۱۰}, a^{۱۰}+۱, \dots, a^{۱۰}+۹\}$ ۲) $\{a-۹, a-۸, \dots, a\}$

۳) $\{a+b, a+b+۱۱, \dots, a+b+۹۹\}$ ۴) $\{a, a+۱, a+۲, \dots, a+۱۰\}$

۱۰۰- حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در صفحه داشته باشیم تا مختصات وسط حداقل یکی از پاره‌خط‌هایی که این نقاط را به هم وصل می‌کنند، عددهایی صحیح باشند؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۰۱- حداقل چند نقطه روی یک دایره به شعاع واحد قرار گرفته باشند تا مطمئن باشیم حداقل دو تا از آن‌ها فاصله‌ای نابیش‌تر از ۱ دارند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۲- در یک مسابقه‌ی ماهیگیری ۶۰ ماهی را در یک استخر در اختیار ۷ ماهیگیر قرار داده‌اند. نفر اول (برنده) حداقل چند ماهی گرفته است؟ (همه‌ی ماهی‌ها صید شده‌اند)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

B **۷۱- گزینه‌ی ۴** با توجه به فرض سؤال:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

از طرفی می‌دانیم $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، بنابراین:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

لذا داریم:

$$10^3+12^3+14^3+\cdots+30^3=2^3(5^3+6^3+\cdots+15^3)=8[(1^3+2^3+\cdots+15^3)-(1^3+2^3+3^3+4^3)]$$
$$=8\left(\frac{15^2\times16^2}{4}-\frac{4^2\times5^2}{4}\right)=8(14400-100)=114400$$

C **۷۲- گزینه‌ی ۳** حکم داده شده را $P(n)$ فرض می‌کنیم:

$$P(k):1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}<\frac{k}{2}$$
$$P(k+1):1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}$$

برای این‌که از $P(k)$ به $P(k+1)$ برسیم، باید به طرفین فرض، $\frac{1}{2}$ را اضافه کنیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}<\frac{k+1}{2}$$

بنابراین برای این‌که حکم برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{k+1}-1>2\Rightarrow 2^{k+1}>3$$

C **۷۳- گزینه‌ی ۱** حکم داده شده را $P(n)$ فرض می‌کنیم:

$$P(k):k!>\sqrt{6^k}$$
$$P(k+1):(k+1)!>\sqrt{6^{k+1}}$$

برای این‌که از $P(k)$ به $P(k+1)$ برسیم، باید طرفین فرض را در $(k+1)$ ضرب کنیم:

$$(k+1)!>\sqrt{6^k}(k+1)$$

بنابراین برای این‌که حکم برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$\sqrt{6^k}(k+1)>\sqrt{6^{k+1}}\Rightarrow k+1>\sqrt{6}$$

برای تشـخیص محدوده‌ی k، باید بفهمیم پایه‌ی اسـتقرا چه عددی اسـت. برای این منظور، با توجه به گزینه‌ها که پایه‌ی استقرا را ۳ یا ۵ معرفی می‌کنند، برای این دو مقدار نامساوی را بررسی می‌کنیم.

$$n=3:\quad 3!=6\ ,\ \sqrt{6^3}=6\sqrt{6}\quad\Rightarrow n!<\sqrt{6^n}$$
$$n=5:\quad 5!=120\ ,\ \sqrt{6^5}=36\sqrt{6}\quad\Rightarrow n!>\sqrt{6^n}$$

پس حکم به ازای $n\geq5$ برقرار است.

A **۷۴- گزینه‌ی ۱** دانش‌آموزان را براساس ماه تولدشان دسته‌بندی می‌کنیم. لذا ۱۲ دسته خواهیم داشت. چون $38>12\times3$ نتیجه می‌گیریم حداقل ۱+۳ دانش‌آموز ماه تولد یکسانی دارند.

توجه: فرض کنید در هر ماه حداکثر ۳ نفر به دنیا آمده باشـند (در هیچ ماهی ۴ نفر به دنیا نیامده باشـند)، چون ۱۲ ماه داریم، پس حداکثر $36=3\times12$ نفر در کلاس وجود دارد که با فرض سؤال در تناقض است.

A **۷۵- گزینه‌ی ۳** اگر صفحه‌ها را براساس تعداد کلماتشان دسته‌بندی کنیم $151=1+100-250$ نوع صفحه داریم که همان تعداد لانه‌هاست. هم‌چنین تعداد صفحات کتاب تعداد کبوترهاسـت. چون $800>151\times5$ پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر نتیجه می‌گیریم حداقل $6=1+5$ صفحه با کلمات برابر داریم.

(B) **۷۶- گزینه‌ی (۲)** اگر افراد را بر حسب تعداد تار موهایشان دسته‌بندی کنیم، ۳۰۰۰۰۱ دسته داریم (از صفر مو تا ۳۰۰۰۰۰ مو) که همان تعداد لانه‌هاست. ۷۰۰۰۰۰۰ کبوتر داریم و چون ۷۰۰۰۰۰۰>۲۳×۳۰۰۰۰۱ ، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر، حداقل ۲۳+۱ فرد با تعداد موی یکسان داریم.

(B) **۷۷- گزینه‌ی (۴)** اگر بخواهیم دانش‌آموزان را براساس ماه تولد (۱۲ ماه) و روز هفته‌ی تولدشان (۷ روز) دسته‌بندی کنیم ۱۲×۷=۸۴ دسته خواهیم داشت (دسته‌ی اول ماه فروردین و روز شنبه، دسته‌ی دوم ماه فروردین و روز یکشنبه، ... و دسته‌ی هشتاد و چهارم ماه اسفند و روز جمعه). چون ۳۵۶>۸۴×۴، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر نتیجه می‌گیریم حداقل ۵=۱+۴ دانش‌آموز روز و ماه تولد یکسان دارند.

(A) **۷۸- گزینه‌ی (۱)** در هر لانه حداکثر می‌تواند ۲ کبوتر قرار بگیرد. چون ۵ لانه داریم، پس در کل حداکثر ۱۰=۲×۵ کبوتر می‌توانند وارد لانه‌ها شوند.

(A) **۷۹- گزینه‌ی (۲)** اگر ۱۰=۲×۵ کبوتر در لانه‌ها قرار گیرند، ممکن است در هر لانه ۲ کبوتر قرار گرفته باشد. پس اگر یک کبوتر دیگر وارد لانه‌ها شود (کبوتر یازدهم)، آن‌گاه در یکی از لانه‌ها حداقل ۳ کبوتر قرار می‌گیرد.

(A) **۸۰- گزینه‌ی (۲)** در این سؤال ۱۲ لانه داریم (۱۲ ماه سال). اگر ۲۴=۲×۱۲ دانش‌آموز در کلاس باشند، ممکن است در هر ماه ۲ نفر به دنیا آمده باشند، ولی اگر یک نفر دیگر به کلاس اضافه کنیم، آن‌گاه در یکی از ماه‌ها حداقل ۳ نفر به دنیا آمده‌اند. لذا جواب برابر است با ۲۵=۱+۲۴.

توجه: برای این سؤال هم‌چنین می‌توانید از نکته‌ی (۱۰) استفاده کنید: حداقل تعداد کبوتر برای این‌که در یکی از $n=12$ لانه، حداقل $m=3$ کبوتر قرار گیرد برابر است با $n(m-1)+1=12(3-1)+1=25$.

(B) **۸۱- گزینه‌ی (۱)** اگر بخواهیم افراد را بر اساس ماه تولد و روز تولدشان دسته‌بندی کنیم ۱۲×۷=۸۴ دسته خواهیم داشت:

فروردین و شنبه	و	فروردین و یکشنبه	و	...	و	اسفند و جمعه
لانه‌ی اول		لانه‌ی دوم				لانه‌ی ۸۴ اُم

در هر دسته حداکثر می‌تواند ۳ نفر قرار گیرد، لذا حداکثر تعداد افراد برابر است با ۲۵۲=۳×۸۴

(B) **۸۲- گزینه‌ی (۴)** در این سوال ۸۴=۷×۱۲ لانه داریم (۱۲ ماه سال و ۷ روز هفته) حتی اگر ۲۵۲=۳×۸۴ نفر در مهمانی حضور داشته باشند، ممکن است در هر لانه ۳ کبوتر قرار گرفته باشد. پس ۲۵۳امین کبوتر (یک کبوتر بیش‌تر) مشکل را حل می‌کند.

توجه: برای حل سؤال با استفاده از نکته‌ی (۱۰) با توجه به این‌که $n=84$ و $m=4$ جواب برابر است با $n(m-1)+1=84(4-1)+1=253$

(B) **۸۳- گزینه‌ی (۲)** اگر n لانه داشته باشیم و در هر لانه ۲ کبوتر قرار گیرند در این صورت $2n$ کبوتر داریم. برای این‌که دست کم در یکی از لانه‌ها ۳ کبوتر (بیش از ۲) قرار گیرد، باید حداقل $2n+1$ کبوتر داشته باشیم (یک کبوتر به $2n$ اضافه کردیم) لذا داریم:

$$15 \geq 2n+1 \Rightarrow 2n \leq 14 \Rightarrow n \leq 7$$

توجه: برای درک بهتر فرض کنید ۸ لانه داریم در این صورت ممکن است در لانه‌ی اول تا هفتم ۲ کبوتر و یک کبوتر نیز در لانه‌ی هشتم قرار گیرد، یعنی ممکن است در هیچ لانه‌ای ۳ کبوتر قرار نگیرد.

(B) **۸۴- گزینه‌ی (۱)** هر رنگ را یک لانه فرض می‌کنیم. اگر n لانه داشته باشیم و در هر لانه ۳ کبوتر (مهره) قرار گیرد، در این صورت $3n$ مهره داریم. برای این‌که در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر قرار گیرد باید حداقل $3n+1$ مهره داشته باشیم (یک مهره به $3n$ اضافه می‌کنیم) لذا داریم:

$$3n+1 \leq 32 \Rightarrow 3n \leq 31 \Rightarrow n \leq 10$$

پس حداکثر ۱۰ رنگ مختلف خواهیم داشت.

توجه: برای درک بهتر فرض کنید ۱۱ رنگ مختلف داریم. در این صورت ممکن است از رنگ اول تا دهم هر کدام ۳ مهره و ۲ مهره از رنگ یازدهم داشته باشیم.

(B) **۸۵- گزینه‌ی (۴)** صندلی‌ها را براساس ویژگی‌شان (روبه‌روی هم بودن) دسته‌بندی می‌کنیم. در این صورت ۶ دسته‌ی دوتایی داریم. حال اگر ۷=۱+۶ نفر روی این صندلی‌ها قرار گیرند، طبق اصل لانه‌ی کبوتر حداقل در یکی از دسته‌ها ۲ نفر قرار می‌گیرند.

(B) **۸۶- گزینه‌ی (۱)** ابتدا همه‌ی حالت‌ها (لانه‌ها) را تعیین می‌کنیم. لباس‌های این فرد به ۱۴۰ حالت سِت می‌شود.

$$\text{لانه‌ها} = \underset{\text{پیراهن}}{5} \times \underset{\text{کت}}{4} \times \underset{\text{شلوار}}{7} = 140$$

حتی اگر فرد در ۲×۱۴۰ مهمانی شرکت کند، می‌تواند در هر لانه ۲ کبوتر قرار بگیرد. پس در ۲۸۱اُمین مهمانی این شرط برآورده می‌شود که حداقل در یک لانه دست‌کم ۳ کبوتر باشد، یعنی فرد حداقل در ۳ مهمانی یک دست لباس یکسان پوشیده باشد.

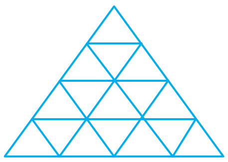
B **۸۷- گزینه‌ی ۳** برای هر عدد حقیقی مانند x که $۰<x<۵$، داریم $[x]\in\{۰,۱,۲,۳,۴\}$، پس اگر هر یک از اعداد صحیح $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ را لانه‌ی کبوتر (۵ لانه) و ۳۳ عدد حقیقی را تعداد کبوترها فرض کنیم، چون $۶\times۵>۳۳$، پس در حداقل یک لانه حداقل $۷=۱+۶$ کبوتر قرار می‌گیرد.

C **۸۸- گزینه‌ی ۴** اگر ۱۴ مهره خارج کنیم نمی‌توانیم مطمئن باشیم ۵ مهره‌ی هم‌رنگ داریم، زیرا ممکن است ۳ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی خارج کرده باشیم؛ اما اگر پانزدهمین مهره را خارج کنیم، می‌توانیم مطمئن باشیم حداقل ۵ مهره‌ی قرمز یا ۵ مهره‌ی آبی داریم.

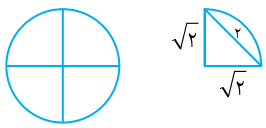
B **۸۹- گزینه‌ی ۳** هر نامزد را یک لانه فرض می‌کنیم، پس ۳ لانه داریم و ۴۳ کبوتر. چون $۳\times۱۴<۴۳$، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر، حداقل $۱۵=۱+۱۴$ کبوتر در یک لانه قرار گرفته‌اند.

توضیح: فرض کنید معلم منتخب ۱۴ رأی (یا کمتر) کسب کرده باشد پس ۲ نامزد دیگر نیز نمی‌توانند بیش‌تر از ۱۳ رای کسب کرده باشند! یعنی حداکثر $۴۰=۲\times۱۳+۱۴$ رأی در صندوق ریخته شده که برخلاف فرض سؤال است.

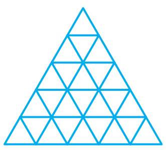
C **۹۰- گزینه‌ی ۱** مهره‌های کیسه را براساس رنگشان دسته‌بندی می‌کنیم. لذا ۹ دسته (به تعداد رنگ‌ها) خواهیم داشت. اگر ۳×۹ مهره از کیسه خارج کنیم نمی‌توانیم مطمئن باشیم که بین آن‌ها حداقل ۴ مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد، زیرا ممکن است از هر یک از ۹ دسته دقیقاً ۳ مهره انتخاب شده باشد. اما اگر $۹\times۳+۱$ مهره خارج کنیم، بنابر اصل لانه‌ی کبوتر، چون $۲۸>۲۷$ حداقل ۴ مهره از یک دسته‌اند.



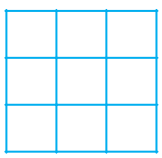
C **۹۱- گزینه‌ی ۱** مثلث را به $۱۶=۱-۱۷$ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۴}$ تقسیم می‌کنیم. چون $۱۷>۱۶$، پس دو تا از این نقاط درون یکی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یا روی ضلع‌های آن قرار دارد. لذا فاصله‌ی دو تا از این ۱۷ نقطه حداکثر $\frac{۱}{۴}$ است.



C **۹۲- گزینه‌ی ۱** با توجه به شکل، اگر دایره را به ۴ ربع دایره‌ی مساوی تقسیم کنیم و ۵ نقطه را درون دایره قرار دهیم، چون $۵>۴$، پس ۲ تا از این نقاط درون یکی از ربع دایره‌ها یا روی محیط آن قرار می‌گیرند و چون شعاع دایره $\sqrt{۲}$ است، پس فاصله‌ی ۲ تا از این ۵ نقطه حداکثر ۲ است.



C **۹۳- گزینه‌ی ۲** طول ضلع مثلث اولیه برابر ۵ است. برای آن که فاصله‌ی حداقل دو نقطه در آن کم‌تر از یا مساوی با ۱ باشد، باید ضلع مثلث‌های کوچک‌تر را یک واحد در نظر بگیریم. بنابراین هر ضلع مثلث اولیه را به ۵ قسمت تقسیم می‌کنیم که در این صورت ۲۵ مثلث کوچک‌تر تشکیل می‌شود. پس ۲۵ لانه داریم و برای رسیدن به مطلوب سؤال باید ۲۶ کبوتر در آن‌ها قرار دهیم.



C **۹۴- گزینه‌ی ۴** با توجه به شکل، اگر مربع به ضلع ۳ را به ۹ مربع به ضلع واحد تقسیم کنیم و ۱۰ نقطه را درون مربع اصلی قرار دهیم، چون $۱۰>۹$، پس ۲ تا از این نقطه‌ها درون یکی از مربع‌ها یا روی ضلع آن‌ها قرار می‌گیرد و چون قطر مربع واحد برابر $\sqrt{۲}$ است، لذا فاصله‌ی ۲ تا از این ۱۰ نقطه حداکثر $\sqrt{۲}$ است.

B **۹۵- گزینه‌ی ۱** اتاق‌ها را لانه و افراد را کبوتر فرض می‌کنیم. چون $۵\times۷>۳۶$، لذا طبق اصل لانه‌ی کبوتر حداقل $۸=۱+۷$ نفر در یکی از اتاق‌ها اقامت دارند.

B **۹۶- گزینه‌ی ۳** در کل $۵۰=۱۰\times۵$ تیر به ۷ هدف اصابت کرده است. اگر هر هدف را یک لانه و هر تیر را یک کبوتر فرض کنیم، چون $۷\times۷<۵۰$، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر، حداقل $۸=۱+۷$ کبوتر در یک لانه قرار گرفته‌اند.

توجه: فرض کنید به هدف مورد نظر ۷ تیر اصابت کرده باشد. در این صورت به هر یک از ۶ هدف دیگر نیز حداکثر ۷ تیر اصابت کرده است، یعنی در کل $۴۹=۷\times۷$ تیر به هدف‌ها اصابت کرده، در حالی که طبق فرض سؤال ۵۰ تیر به هدف‌ها شلیک شده است.

B **۹۷- گزینه‌ی ۱** باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۷ یکی از اعداد $\{۰,۱,\dots,۶\}$ است. لذا ۷ لانه داریم (به تعداد باقی‌مانده‌ها) و ۳۰ کبوتر و چون $۴\times۷<۳۰$، پس حداقل $۵=۱+۴$ عدد در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ی یکسان دارند.

C **۹۸- گزینه‌ی ۲** باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح بر ۷ یکی از ۷ عدد $\{۰,۱,\dots,۶\}$ است. اگر هر باقی‌مانده را یک لانه فرض کنیم، آن‌گاه ۷ لانه داریم. اگر $۷۷=۷\times(۱-۱۲)$ عدد (کبوتر) داشته باشیم ممکن است در هر لانه ۱۱ کبوتر قرار بگیرد، ولی اگر یک عدد دیگر اضافه کنیم، آن‌گاه در یکی از لانه‌ها حداقل ۱۲ کبوتر قرار می‌گیرند. لذا جواب برابر است با $۷۸=۱+۷۷$.

توجه: برای حل این سوال هم‌چنین می‌توانید از نکته‌ی (۱۰) استفاده کنید:

$$n=۷,m=۱۲\Rightarrow \text{جواب}=n(m-۱)+۱=۷(۱۲-۱)+۱=۷۸$$