فهرست

فصل ۱: آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل ۲: گراف و مدل‌سازی

فصل ۳: ترکیبیات

فصل ۴: آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل ۵: احتمال

فصل ۶: آمار توصیفی و استنباطی

درس ۲

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

این درس از سه قسمت تشکیل شده است. در بخش اول با مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن و ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم؛ در قسمت دوم دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م صحبت می‌کنیم و بالأخره به قضیهٔ تقسیم و افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک آن می‌پردازیم.

- بخش‌پذیری در اعداد صحیح
  - عادکردن
    - مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن
    - ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن
    - مضرب و مقسوم‌علیه
    - معادله‌های عادکردن
    - اعداد اول
    - باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم بر ۸
  - ب.م.م و ک.م.م
    - مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک
    - مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک
    - ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م
    - متباین‌سازی
  - قضیهٔ تقسیم و کاربردها
    - قضیهٔ تقسیم
    - پیداکردن باقی‌مانده و خارج قسمت
    - افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

خب! حالا وقتش است برویم سراغ این درس و ببینیم چه خبر است؟

مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن

تساوی $۳ \times ۵ = ۱۵$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵، از سه دستهٔ ۵تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است. به همین خاطر، می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵، عدد ۱۵ را می‌شمارد؛ چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵تایی شمرد. *(۳ دستهٔ پنج تاییِ سیب می‌شود، ۱۵ سیب و سیبی باقی نمی‌ماند.)*
این شمارش یا عادکردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند: $۵|۱۵$

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد، به‌طوری که: $a = bq$

در این صورت می‌گویند b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را و می‌نویسند: $b | a$

از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

$a = bq \Leftrightarrow$ { a بر b بخش‌پذیر است. / b می‌شمارد a را (b عاد می‌کند a را) }

(خیلی چیز ساده‌ایه! مثلاً وقتی می‌گیم ۶ بر ۲ بخش‌پذیره یعنی ۲ عاد می‌کند ۶ رو، یعنی $۲|۶$)

دو نکته مهم:

۱ تبدیل عادکردن به تساوی خیلی‌خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود:

$$a = bq \Leftrightarrow b|a$$

۲ منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عدد صحیح است، بخش‌پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قانون ۹۰ درجه

اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن مثل $۲۱|۶۳$، دچار اشکال شدید، می‌توانید آن را **نود درجه به خلاف عقربه‌های ساعت** بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود:

$$۲۱|۶۳ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۶۳}{۲۱} = ۳$$

حالا اگر مثل این‌جا، حاصل عددی صحیح شد، رابطهٔ عادکردن، یک رابطهٔ درست بوده و در غیر این صورت، درست نیست.

مثال رابطه‌های $۲^۸|۲^۵$ و $۷|-۱$ را در نظر بگیرید.

همان‌طور که گفتیم، برای این‌که بفهمیم این رابطه‌ها درست‌اند یا نه آن‌ها را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$۲^۸|۲^۵ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲^۵}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^۳} \quad ✗$$

رابطه درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۲^۳}$ یا $\frac{۱}{۸}$ عددی صحیح نیست. جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. $۲^۸$ ضربدر هیچ عدد صحیحی، برابر $۲^۵$ نمی‌شود.

$$-۱|۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۷}{-۱} = -۷ \quad ✓$$

رابطه درست است، زیرا -۷ عددی صحیح است؛

تست کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

۱) $۷|-۶۳$ ۲) $۱۳|۹۱$ ۳) $۳^۵|۳^۷$ ۴) $۴^۴|۲^۷$

پاسخ گزینهٔ ۴ اگر $a = bq$ باشد، آن‌گاه $b|a$. در این سؤال داریم:

۱ درست است. $-۶۳ = ۷ \times (-۹) \Rightarrow ۷|-۶۳$

۲ درست است. $۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Rightarrow ۱۳|۹۱$

۳ درست است. $۳^۷ = ۳^۵ \times ۳^۲ \Rightarrow ۳^۵|۳^۷$

اما ۴ درست نیست. توجه کنید که $۲^۸ = (۲^۲)^۴ = ۴^۴$ بنابراین رابطهٔ $۲^۸|۲^۷$ نادرست است و برعکس آن یعنی $۲^۷|۲^۸$ درست است، زیرا:

$$۲^۸ = ۲ \times ۲^۷ \Rightarrow ۲^۷|۲^۸$$

البته با نکته‌ای که گفتیم هم می‌توانید نادرستی ۴ را بررسی کنید. عبارت $۴^۴|۲^۷$ را به یک کسر تبدیل می‌کنیم:

$$۴^۴|۲^۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۲^۷}{۴^۴} = \frac{۲^۷}{۲^۸} = \frac{۱}{۲}$$ عددی صحیح نیست.

پس رابطه برقرار نیست.

تست کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $۴۵۵|n!$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

پاسخ گزینهٔ ۱ عدد ۴۵۵ را تجزیه می‌کنیم: $۴۵۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۳$

قرار است رابطهٔ $۴۵۵|n!$ برقرار باشد، یعنی باید کوچک‌ترین مقدار n را پیدا کنیم به شرط آن‌که کسر $\frac{n!}{۵ \times ۷ \times ۱۳} = \frac{n!}{۴۵۵}$ برابر عددی صحیح شود.

مشخص است که اگر بخواهیم $n!$ هر سه عامل ۵، ۷ و ۱۳ را داشته باشد کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. مجموع ارقام ۱۳ $= ۱ + ۳ = ۴$

سه ویژگی ساده و ابتدایی از بخش‌پذیری

۱ همهٔ عددها یا عبارت‌های جبری بر خودشان بخش‌پذیرند بر قرینه‌شان هم بخش‌پذیرند:

$$a|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{a} = ۱ \quad ✓$$

$$a|-a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{-a}{a} = -۱ \quad ✓$$

۲ همهٔ عددها بر ۱ و ۱− بخش‌پذیرند. به بیان دیگر ۱ و ۱− همهٔ عددها را عاد می‌کنند: $\pm1|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{\pm1}=\pm a$ ✓

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است اما هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست: $a|0 \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{0}{a}=0$ ✓

$0|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{0}$ ✗

طبق قرارداد صفر بر خودش بخش‌پذیر است. به بیان دیگر **تنها عددی** که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است.

صفر خودش را می‌شمارد. $0|0 \Leftrightarrow 0=0\times q$

(یعنی اگه یه‌جا دیدین صفر یه چیزی رو می‌شماره، اون چیز صفره:) $(0|\;\square \Rightarrow \square=0$

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x، رابطهٔ $0\,|\,x^4-4x^2+3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۳ گفتیم که عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد به‌جز خودش؛ بنابراین اگر بخواهیم رابطهٔ بالا برقرار باشد، باید:

$x^4-4x^2+3=0$

$$x^4-4x^2+3=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm1 \\ x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

(p عددی اول است.)

چون x باید عددی صحیح باشد پس $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ غیرقابل‌قبول هستند و در نتیجه ۳ پاسخ سؤال است.

$a|\;\square \Rightarrow ?$

وقتی که a عددی را می‌شمارد چه نتایجی می‌توان گرفت؟

۱ $a|1 \Rightarrow a=\pm1$ *(اگر عددی ۱ یا ۱− رو می‌شمره واضحه فقط می‌تونه ۱ یا ۱− باشه.)*

۲ $a|p \Rightarrow a=\pm1,\pm p$.است اول عددی p *(برای مثال اگر $a|7$، a فقط می‌تونه ۱، ۱−، ۷ و ۷− باشه.)*

۳ $a|k \Rightarrow$ a می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های k باشد.

توان عدد اول p در تجزیهٔ !n

⚠ این بخش در کتاب درسی نیست، اما از آن‌جایی که از آن در کنکور سراسری ۱۴۰۰ سؤال آمده، بهتر است آن را بلد باشید.

توان عدد اول p در تجزیهٔ !n برابر است با: $[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$

برای مثال اگر بخواهیم بدانیم در تجزیهٔ !۴۱ توان عدد ۲ چند است داریم:

$$[\frac{41}{2}]+[\frac{41}{4}]+[\frac{41}{8}]+[\frac{41}{16}]+[\frac{41}{32}]+\underbrace{[\frac{41}{64}]+\cdots}_{\text{از اینجا به بعد صفر می‌شود}}$$

$20+10+5+2+1=38$

تست اگر $\frac{50!}{2^x\times3^y}$ عددی صحیح باشد، بیش‌ترین مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۰ ۳) ۷۱ ۴) ۷۳

پاسخ گزینهٔ ۱ با توجه به رابطهٔ داده‌شده توان عددهای ۲ و ۳ را در تجزیهٔ !۵۰ پیدا می‌کنیم.

$$[\frac{50}{2}]+[\frac{50}{4}]+[\frac{50}{8}]+[\frac{50}{16}]+[\frac{50}{32}]=25+12+6+3+1=47$$

$$[\frac{50}{3}]+[\frac{50}{9}]+[\frac{50}{27}]=16+5+1=22$$

بنابراین اگر بخواهیم $\frac{50}{2^x\times3^y}$ عددی صحیح باشد. x حداکثر برابر ۴۷ و y حداکثر برابر ۲۲ است. بنابراین بیشترین مقدار xy برابر است با:

$47+22=69$

مضرب و مقسوم‌علیه

این دو رابطه را نگاه کنید:

(الف) $6 \mid x$ (ب) $x \mid 12$

(الف) اگر همان‌طور که گفتیم رابطهٔ (الف) را به یک کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{x}{6}$ درمی‌آید. حالا به نظر شما این کسر به ازای چه مقادیری از x تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ مشخص است که به ازای ±۶، ±۱۲، ±۱۸ و ... . خب! حالا این‌ها چه عددهایی هستند؟ بله! مضارب ۶.

(ب) اما اگر رابطهٔ $x \mid 12$ را به یک کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{12}{x}$. خب حالا به ازای چه مقادیری از x این کسر تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ عددهای $\pm 12, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$. همان‌طور که می‌بینید این عددها همان مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.

یادتان باشد:

$a \mid x \Rightarrow$ x مضرب a است.

$x \mid a \Rightarrow$ x مقسوم‌علیه a است.

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $5 \mid x$ و $x \mid 90$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ بهترین روش برای پاسخ‌دادن به این مدل سؤال‌ها این است که رابطهٔ اول را به تساوی تبدیل کنیم و در رابطهٔ دوم قرار دهیم:

$5 \mid x \Rightarrow x = 5q$

$x \mid 90 \Rightarrow 5q \mid 90 \Rightarrow q \mid 18$

حالاباید مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ را پیدا کنیم: مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸: $1, 2, 3, 6, 9, 18$

تست چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد ۴- را می‌شمارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ اگر قرار باشد که عدد a، عدد ۴- را بشمارد؛ یعنی داریم: $a \mid -4 \Leftrightarrow -4 = aq$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، یعنی این‌که کسر $\frac{-4}{a}$ باید عددی صحیح باشد. به بیان دیگر، باید پیدا کنیم که عدد ۴- بر چه عددهای صحیحی بخش‌پذیر است. روشن است که در مخرج کسر، می‌توان هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد ۴- را قرار داد؛ یعنی هر کدام از عددهای زیر را:

$1, -1, 2, -2, 4, -4$

بنابراین ۶ عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد ۴- را می‌شمارد و پاسخ (۴) است.

از رابطهٔ $a \mid b$ چه نتایجی می‌توان گرفت؟

فرض کنید که یک رابطهٔ عادکردن مثل $a \mid b$ داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کارهایی را مجازیم روی آن انجام دهیم. سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم در هر عدد صحیحی، ضرب کنیم. اما سمت چپ آن را نمی‌توانیم؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید. این رابطه، یک رابطهٔ درست است؛ زیرا کسر $\frac{36}{12}$ برابر عددی صحیح است. حالا وقتی می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ اگر آن را در هر عدد صحیح دیگری ضرب کنیم حاصل، باز هم عددی صحیح می‌شود. *(یعنی سمت راست هر رابطهٔ عادکردن رو می‌شه تو هر عدد صحیحی ضرب کرد.)* مثلاً $5 \times \frac{36}{12}$ نیز عددی صحیح است؛ یعنی می‌توان نتیجه گرفت: $12 \mid 36 \Rightarrow 12 \mid 36 \times 5$

در حالت کلی: $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

اما مشخص است که سمت چپ رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان در هر عددی ضرب کرد؛ مثلاً همین رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، اگر سمت چپ رابطه را در ۵ ضرب کنیم، می‌شود $60 \mid 36$ که رابطه‌ای نادرست است.

حالا دوباره همین رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، کسر معادل با آن برابر $\frac{36}{12}$ است. می‌دانیم وقتی عدد ۳۶ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، بدیهی است که بر هر کدام از عددهای ۶، ۴، ۳، ۲ و ۱ یعنی بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های ۱۲ نیز بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، از رابطهٔ $12 \mid 36$ هر یک از رابطه‌های مقابل قابل نتیجه‌گیری است:

$$12 \mid 36 \Rightarrow \begin{cases} \pm 6 \mid 36 \\ \pm 4 \mid 36 \\ \pm 3 \mid 36 \\ \pm 2 \mid 36 \\ \pm 1 \mid 36 \end{cases}$$

۱ به عبارت دیگر، سمت چپ رابطهٔ $a\,|\,b$ را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. در نتیجه می‌توان گفت:

$$ac\,|\,b \Rightarrow a\,|\,b \wedge c\,|\,b$$

۲ به طور خلاصه این نکات یادتان باشد:

	نکته	توضیح	مثال
۱	$a\,|\,b \Rightarrow ma\,|\,mb$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$۵\,|\,۱۵ \xrightarrow{\text{طرفین}\ ×۴} ۲۰\,|\,۶۰$
۲	$a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,mb$	سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$۶\,|\,۱۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\ ×۳} ۶\,|\,۳۶$
۳	$a\,|\,b \Rightarrow$ هر یک از مقسوم‌علیه‌های a $\,|\,b$	سمت چپ یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد سمت چپ تقسیم کرد.	$۶\,|\,۱۸ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ}\ ÷۲} ۳\,|\,۱۸ \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ}\ ÷۳} ۲\,|\,۱۸ \end{cases}$
۴	$ab\,|\,c \Rightarrow \begin{cases} a\,|\,c \\ b\,|\,c \end{cases}$	در واقع همان نکتهٔ قبلی است. وقتی حاصل‌ضرب دو یا چند عدد، عددی را می‌شمارد، هر کدام از آن اعداد را نیز عاد می‌کند.	$۳×۵\,|\,۴۵ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ}\ ÷۳} ۵\,|\,۴۵ \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ}\ ÷۵} ۳\,|\,۴۵ \end{cases}$
۵	$a\,|\,b \Rightarrow a^n\,|\,b^n$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به توان رساند.	$۲\,|\,۴ \xrightarrow{\text{به توان}\ ۴} ۲^۴\,|\,۴^۴\ (۱۶\,|\,۲۵۶)$
۶	$a^n\,|\,b^n \Rightarrow a\,|\,b$	از طرفین یک رابطهٔ عادکردن می‌شود ریشه گرفت به شرط آن‌که بعد از ریشه‌گرفتن هر دو عبارت عددی صحیح باشد.	$۲۷\,|\,۲۱۶ \Rightarrow ۳^۳\,|\,۶^۳ \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{ریشهٔ سوم}} ۳\,|\,۶$ $۸\,|\,۱۶ \Rightarrow ۲^۳\,|\,۲^۴$ $\xrightarrow[\text{عدد سمت چپ صحیح نمی‌شود.}]{\text{نمی‌توان ریشهٔ چهارم گرفت چون}} \sqrt[۲]{۸} \nmid ۲$
۷	$a\,|\,b \Rightarrow \lvert a\rvert \leq \lvert b\rvert\,,\ b\neq ۰$	در یک رابطهٔ عادکردن اگر عدد سمت راست صفر نباشد حتماً قدرمطلق سمت چپ کوچک‌تر و یا مساوی از قدرمطلق عدد سمت راست است.	$۴\,|\,۱۲ \Rightarrow ۴\leq ۱۲$ $۶\,|\,-۱۸ \Rightarrow ۶\leq \lvert -۱۸\rvert$

مثال بررسی کنید کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست و کدام غلط است؟

الف) $a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,۳b$

ب) $a\,|\,b \Rightarrow ۳a\,|\,b$

پ) $a\,|\,b^۲ \Rightarrow a\,|\,۳b^۳$

ت) $a^۲\,|\,b \Rightarrow a\,|\,b$

ث) $۲a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,۳b$

ج) $a^۲\,|\,b^۵ \Rightarrow a^۳\,|\,b^۴$

پاسخ نکتهٔ مهم در پاسخ‌گویی به این سؤالات در این است که بدانیم اگر $a\,|\,b$ سمت راست رابطه را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد و سمت چپ رابطه را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. *(یعنی فرمولیش کنید که راست رو می‌شه گنده کرد و چپ رو می‌شه کوچیک کرد و رابطه درست باقی بمونه.)*

(الف) درست است، چون راست را بزرگ کردیم: $a\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت راست}\ ×۳} a\,|\,۳b$ ✓

(ب) چپ رو الکی نمی‌شود بزرگ کرد. بنابراین این رابطه درست نیست. برای مثال اگر $a=۳$ و $b=۹$ باشد: $۳\,|\,۹ \Rightarrow ۳×۲ \nmid ۹$

(پ) درست است چون سمت راست را بزرگ کردیم: $a\,|\,b^۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\ ×۳b} a\,|\,۳b^۳$

(ت) درست است چون سمت چپ را کوچک کردیم: $a^۲\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر}\ a} a\,|\,b$

(ث) درست است. همزمان دو کار را انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم هم سمت چپ را کوچک:

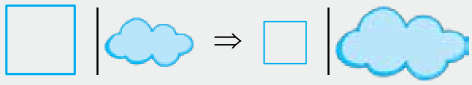
$$۲a\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر}\ ۲} a\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت راست}\ ×۳} a\,|\,۳b$$

(ج) این خیلی غلط است، چون دوتا کار اشتباه انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم و هم سمت چپ را کوچک. برای مثال اگر $a=۴$ و $b=۲$ باشد رابطهٔ $a^۲\,|\,b^۵$ درست است، زیرا: $۴^۲\,|\,۲^۵ \Rightarrow ۱۶\,|\,۳۲$ درست

اما رابطهٔ $a^۳\,|\,b^۴$ نادرست است، زیرا: $۴^۳=۶۴\,,\ ۲^۴=۱۶ \Rightarrow ۱۶ \nmid ۶۴$

حالا که این رابطه‌ها را تعریف کردیم به تست صفحهٔ بعد پاسخ دهید.

در یک رابطهٔ عادکردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد.



تست از رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست **نباشد**؟

۱) $a^2 \mid b^3$ ۲) $2a^2 \mid 5b^3$ ۳) $a^2 \mid b^4$ ۴) $a \mid b$

پاسخ گزینهٔ ۴

(۱) درست است؛ زیرا گفتیم که می‌توان سمت چپ رابطه را بر مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کرد و این‌جا نیز همین اتفاق افتاده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3$$

(۲) درست است؛ زیرا سمت راست رابطه را می‌توان در هر عددی ضرب کرد.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} 2a^2 \mid 5b^3$$

(۳) نیز درست است؛ زیرا هر دو اتفاق با هم رخ داده، یعنی همزمان، سمت چپ رابطه، بر عددی تقسیم شده و سمت راست در عددی ضرب شده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times b} a^2 \mid b^4$$

اما دلیلی ندارد که (۴) حتماً درست باشد؛ به عنوان مثال اگر $b = 2^4$ و $a = 2^5$ باشد، داریم:

$$2a^2 \mid b^3 \Rightarrow 2\times(2^5)^2 \mid (2^4)^3 \Rightarrow 2^{11} \mid 2^{12} \ \checkmark$$

اما $2^5 \nmid 2^4$.

به تست بعد نگاه کنید. برای حل‌کردن این مدل تست‌ها به‌جز روش تشریحی یک تکنیک هم وجود دارد که خوب است آن را بلد باشید:

تست از رابطهٔ $a^5 \mid b^9$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a^{10} \mid b^{17}$ ۲) $a^7 \mid b^{12}$ ۳) $a^8 \mid b^{15}$ ۴) $a^9 \mid b^6$

پاسخ گزینهٔ ۳

یک راه ساده برای جواب دادن به این مدل تست‌ها این است که یک کاری کنیم که دو طرف رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال با هم برابر شوند. یعنی a و b را عددهای توان‌داری فرض کنیم که وقتی به توان ۵ و ۹ می‌رسند طرفین رابطهٔ عادکردن صورت سؤال مساوی هم شود. برای این کار یک پایهٔ فرضی مثل x را در نظر بگیرید و توان b را به پایهٔ a بدهید و توان a را به پایهٔ b. یعنی چی؟ یعنی این‌که مثلاً در این سؤال a و b را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a = x^9 \ , \ b = x^5$$

چون اگر به ازای این a و b صورت سؤال را بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$a^5 \mid b^9 \Rightarrow x^{45} \mid x^{45}$$

و می‌بینید که طرفین رابطه برابر می‌شود.

خوبی این کار این است که حالا اگر گزینه‌ها را به ازای این مقادیر a و b بررسی کنیم، معلوم می‌شود کدام رابطه درست است و کدام نه. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a^{10} \mid b^{17} \Rightarrow (x^9)^{10} \mid (x^5)^{17} \Rightarrow x^{90} \mid x^{85}$ ×

۲) $a^7 \mid b^{12} \Rightarrow (x^9)^7 \mid (x^5)^{12} \Rightarrow x^{63} \mid x^{60}$ ×

۳) $a^8 \mid b^{15} \Rightarrow (x^9)^8 \mid (x^5)^{15} \Rightarrow x^{72} \mid x^{75}$ ✓

۴) $a^9 \mid b^{16} \Rightarrow (x^9)^9 \mid (x^5)^{16} \Rightarrow x^{81} \mid x^{80}$ ×

درستی (۳) را به روش تشریحی به صورت مقابل می‌توان ثابت کرد:

$$a^5 \mid b^9 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم}} a^{25} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{سمت چپ را بر a تقسیم می‌کنیم}} a^{24} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{از طرفین ریشهٔ سوم می‌گیریم}} a^8 \mid b^{15}$$

که خب کار ساده‌ای نیست و تازه ردکردن بقیهٔ گزینه‌ها کار سخت‌تری است!

این نکته را این‌جوری هم می‌توان توضیح داد:

از رابطهٔ $a^m \mid b^n$ زمانی می‌توان رابطهٔ $a^{m'} \mid b^{n'}$ را نتیجه گرفت که: $nm' \le mn'$

(اینو این‌جوری هم می‌شه گفت. درکش آسون‌تره:) $\quad (a^m \mid b^n \Rightarrow a^{m'} \mid b^{n'}$ نزدیک × نزدیک ≥ دور × دور

چند ویژگی مهم دیگر از رابطهٔ عادکردن

این رابطه‌ها را خوب نگاه کنید و یاد بگیرید. چون کمی جلوتر از همهٔ آن‌ها در حل معادله‌های عادکردنی و سایر سؤال‌ها استفاده می‌کنیم.

۱) اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(برای مثال: $4 \mid 8 , 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$)

۲) هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow \begin{cases} a|b+c \\ a|b-c \\ a|bc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{cases} ۳|۶ \\ ۳|۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳|۱۵+۶ \Rightarrow ۳|۲۱ \\ ۳|۱۵-۶ \Rightarrow ۳|۹ \\ ۳|۱۵\times۶ \Rightarrow ۳|۹۰ \end{cases}$)

۳) تعمیم نکتهٔ قبل: اگر عددی دو عدد را بشمارد مجموع یا تفاضل هر مضرب یکی و هر مضربی از دیگری را می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow \begin{cases} a|mb+nc \\ a|mb-nc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{cases} ۵|۱۰ \\ ۵|۱۵ \end{cases} \xrightarrow{m=۴,n=۳} \begin{cases} ۵|۴\times۱۰+۵\times۱۵ \Rightarrow ۵|۱۱۵ \\ ۵|۴\times۱۰-۵\times۱۵ \Rightarrow ۵|-۳۵ \end{cases}$)

۴) اگر دو رابطهٔ عادکردن مختلف داشته باشیم، می‌توانیم سمت چپ و راست دو رابطه را در هم ضرب کرد و به رابطه‌ای جدید رسید:

$$a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$$

(برای مثال: $۷|۳۵, ۲|۴ \Rightarrow ۷\times۲|۳۵\times۴ \Rightarrow ۱۴|۱۴۰$)

۵) حواستان باشد طرفین رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان با عددی جمع کرد یا از عددی کم کرد.

$a|b \Rightarrow a+c|b+c$ ✗

$a|b \Rightarrow a-c|b-c$ ✗

(برای مثال رابطهٔ ۱۰ | ۵ رو در نظر بگیرید؛ اگر طرفین را با یک جمع کنیم به رابطهٔ ۱۱ | ۶ می‌رسیم که نادرست است و اگر از طرفین یکی کم کنیم به رابطهٔ ۹ | ۴ می‌رسیم که باز هم غلط است.)

تست به ازای چند عدد صحیح مانند a، دو عدد $۸m+۳$ و $۱۱m+۴$ همواره بر a بخش‌پذیرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ اگر دو عدد $۸m+۳$ و $۱۱m+۴$ بر a بخش‌پذیر باشند، یعنی: $a|۸m+۳ \ , \ a|۱۱m+۴$

دیدیم که سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. به خاطر این‌که ضریب m یکسان شود، سمت راست رابطهٔ اول را در ۱۱ و سمت راست رابطهٔ دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم، بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a|۸m+۳ \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۱۱}} a|۸۸m+۳۳$$

$$a|۱۱m+۴ \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۸}} a|۸۸m+۳۲$$

حالا از ویژگی $\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|b-c$ استفاده می‌کنیم و سمت راست دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} a|۸۸m+۳۳ \\ a|۸۸m+۳۲ \end{matrix} \xrightarrow{-} a|۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

پس به ازای ۲ عدد صحیح a، رابطه برقرار است.

در این نوع سؤال‌ها برای سرعت در کار می‌توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب نیز استفاده کنیم. به این صورت که ضرایب را به صورت یک ماتریس ۲×۲ می‌نویسیم و عبارت سمت چپ دترمینان این ماتریس را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$$\begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۱۱ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow \text{دترمینان} = ۸\times۴-۱۱\times۳=-۱ \Rightarrow a|-۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

این مدل سؤال‌ها که برای حل‌کردنشان باید سمت راست رابطهٔ عادکردن را در عددی ضرب کنیم، سؤال‌های شایعی است و اصولاً یادتان باشد این یک روشی است که می‌توانیم متغیر را از سمت راست رابطهٔ عادکردن حذف کنیم. حالا به یک مدل دیگر از این سؤال‌ها نگاه کنید:

تست اگر $۵|۴k+۱$ و $۳|۵k-۱$، کدام گزینه درست است؟

۱) $۱۵|۵k^۲+k+۱$ ۲) $۱۵|۵k^۲-k+۱$ ۳) $۱۵|۵k^۲+k-۱$ ۴) $۱۵|۵k^۲-k-۱$

پاسخ گزینهٔ ۳ می‌دانیم که اگر $a|b$ و $c|d$، آن‌گاه $ac|bd$؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} ۵|۴k+۱ \\ ۳|۵k-۱ \end{matrix} \Rightarrow ۱۵|(۴k+۱)(۵k-۱) \Rightarrow ۱۵|۲۰k^۲+k-۱$$

از طرفی می‌دانیم، اگر $a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|b-c$، پس داریم:

$$\begin{matrix} ۱۵|۲۰k^۲+k-۱ \\ ۱۵|۱۵k^۲ \ (\text{بدیهی است}) \end{matrix} \xrightarrow{-} ۱۵|۵k^۲+k-۱$$

بنابراین ۳ درست است.

یک تیپ سؤال خاص

یک مدل سؤال‌هایی در مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی آمده است که الان می‌خواهیم روش پاسخ‌گویی به آن‌ها را با هم مرور کنیم. به سؤال زیر نگاه کنید:

اگر $7 \mid 4k+3$، ثابت کنید: $49 \mid 12k^2+25k+12$ (مشابه این سؤال در کتاب درسی آمده است.)

همان‌طور که در سؤال‌های قبل دیدید، معمولاً سمت چپ رابطه‌های عادکردن یا تغییر نمی‌کند یا کوچک‌تر می‌شود، اما در این مدل سؤال‌ها، سمت چپ رابطه بزرگ‌تر می‌شود. برای جواب‌دادن به این نوع سؤال‌ها بهتر است رابطهٔ داده‌شده را تجزیه کنیم و حواستان باشد که معمولاً یکی از عوامل تجزیه همان عبارت فرضی سؤال است. برای مثال در این سؤال داریم: $12k^2+25k+12=(4k+3)(3k+4)$

حالا باید سعی کنیم با استفاده از فرض، آن یکی جمله را بسازیم (یعنی از $7 \mid 4k+3$ ثابت کنیم $7 \mid 3k+4$) و بعد دو جمله را در هم ضرب کنیم:

$$\begin{array}{l} 7 \mid 4k+3 \\ 7 \mid 7k+7 \end{array} \xrightarrow{\ominus} 7 \mid 3k+4 \qquad\qquad \begin{array}{l} 7 \mid 4k+3 \\ 7 \mid 3k+4 \end{array} \xrightarrow{\otimes} 49 \mid 12k^2+25k+12$$

به یک مثال دیگر نگاه کنید:

مثال ثابت کنید اگر $5 \mid 4k+1$، آن‌گاه: $25 \mid 36k^2+13k+1$

پاسخ همانند سؤال قبل سعی می‌کنیم عبارت $36k^2+13k+1$ را تجزیه کنیم. با این احتمال که یکی از عوامل تجزیه $4k+1$ است. یعنی باید بررسی کنیم با فرض $36k^2+13k+1=(4k+1)(?)$، پرانتز دیگر چیست؟ با کمی دقت می‌توان فهمید $36k^2+13k+1=(4k+1)(9k+1)$.

حالا باید ثابت کنیم $5 \mid 9k+1$ یعنی از $5 \mid 4k+1$ باید ثابت کنیم $5 \mid 9k+1$. این هم کار ساده‌ای است.

$$\begin{array}{l} 5 \mid 4k+1 \\ 5 \mid 5k \end{array} \xrightarrow{\oplus} 5 \mid 9k+1$$

حالا دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\begin{array}{l} 5 \mid 4k+1 \\ 5 \mid 9k+1 \end{array} \xrightarrow{\otimes} 25 \mid 36k^2+13k+1$$

معادله‌های عادکردنی

رابطهٔ $x-2 \mid 5x+1$ را در نظر بگیرید. اسم چنین رابطه‌ای را می‌توانیم بگذاریم یک معادلهٔ عادکردنی چون به جای تساوی در معادله‌های معمول رابطهٔ عادکردن داریم. راه تشریحی حل‌کردن این معادله‌ها این است که متغیر را از عبارت سمت راست حذف کنیم. روش کار هم به صورت زیر است:

می‌دانیم هر عبارتی خودش را عاد می‌کند. بنابراین عبارت سمت چپ هم خودش را عاد می‌کند. در این نوع معادله‌ها همیشه اول این رابطه را می‌نویسیم و بعد سمت راست آن را در عددی مناسب (با توجه به صورت سؤال) ضرب می‌کنیم:

$$x-2 \mid x-2 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 5} x-2 \mid 5x-10$$

(برای این سمت راست را در ۵ ضرب کردیم که در رابطهٔ صورت سؤال ضریب x در عبارت سمت راست رابطهٔ عادکردن ۵ئه.)

$$\begin{array}{l} x-2 \mid 5x-10 \\ x-2 \mid 5x+1 \end{array} \xrightarrow{(-)} x-2 \mid 11 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \\ x-2=11 \Rightarrow x=13 \\ x-2=-11 \Rightarrow x=-9 \end{cases}$$

اما راه تستی برای پاسخگویی سریع‌تر این سؤال‌ها این است که ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم:

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 5x+1=11 \Rightarrow x-2 \mid 11$ و بقیهٔ پاسخ شبیه بالاست.

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار x که در رابطهٔ $x-3 \mid 2x^3+5$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ گزینهٔ ۱ از روش تستی استفاده می‌کنیم. ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow 2x^3+5=59 \Rightarrow x-3 \mid 59$$

چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $x-3$ را برابر ۵۹ فرض می‌کنیم: $x-3=59 \Rightarrow x=62 \Rightarrow$ مجموع ارقام $=6+2=8$

توجه کنید در بعضی از سؤال‌ها عبارت سمت چپ ریشهٔ صحیح ندارد؛ در این مدل سؤال‌ها ریشهٔ کسری را پیدا کرده، در عبارت راست قرار می‌دهیم بعد عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم تا به یک کسر برسیم. عبارت سمت چپ صورت آن کسر را می‌شمارد.

به سؤال زیر نگاه کنید:

تست چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $۳xy = x^۲ + ۲y + ۱$ وجود دارد که هر دو مؤلفهٔ x و y در آن عددهایی صحیح باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ اول این رابطه را تبدیل به یک کسر می‌کنیم:

$$۳xy - ۲y = x^۲ + ۱ \Rightarrow y(۳x - ۲) = x^۲ + ۱ \Rightarrow y = \frac{x^۲ + ۱}{۳x - ۲}$$

اگر قرار باشد y عدد صحیح باشد، باید مخرج کسر صورت را بشمارد.

حالا از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x^۲ + ۱ = \frac{۴}{۹} + ۱ = \frac{۱۳}{۹}$$

گفتیم عبارت سمت چپ صورت این کسر را می‌شمارد. داریم:

$$۳x - ۲ \mid ۱۳ \Rightarrow \begin{cases} ۳x - ۲ = ۱۳ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow y = \frac{۲۵ + ۱}{۱۵ - ۲} = ۲ \\ ۳x - ۲ = -۱۳ \quad \times \\ ۳x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱ + ۱}{۳ - ۲} = ۲ \\ ۳x - ۲ = -۱ \quad \times \end{cases}$$

بنابراین به ازای دو مقدار صحیح رابطه برقرار است.

بعضی از معادله‌های عادکردنی هم با روش‌های معمول حل نمی‌شوند و باید از روش‌های خلاقانهٔ دیگری برای پاسخگویی به آن‌ها استفاده کرد. در برخی از این معادله‌ها رشد عبارت سمت چپ از عبارت سمت راست بیشتر است. به سؤال زیر نگاه کنید:

تست به ازای چند عدد صحیح مانند a، رابطهٔ $۳a + ۱ \mid a^۴ + ۱$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشتر از ۳

پاسخ گزینهٔ ۳ می‌دانیم: $a \mid b \ ,\ b \neq ۰ \Rightarrow |a| \leq |b|$

بنابراین با توجه به این‌که $۳a + ۱ \mid a^۴ + ۱$، باید $|a^۴ + ۱|$ کوچک‌تر یا مساوی $|۳a + ۱|$ باشد. با توجه به این‌که رشد $a^۴ + ۱$، سریع‌تر از رشد $۳a + ۱$ است؛ بنابراین: این اتفاق به ازای aهای کوچک، ممکن است برقرار باشد. حالا جست‌وجو می‌کنیم:

$a = ۰ \Rightarrow ۱ \mid ۱ \quad ✓$

$a = ۱ \Rightarrow ۲ \mid ۴ \quad ✓$

$a = ۲ \Rightarrow ۱۷ \mid ۷ \quad \times$

روشن است که به ازای $a \geq ۲$ هم، عبارت سمت چپ، بزرگ‌تر از عبارت سمت راست است. اعداد منفی را نیز باید بررسی کنیم:

$a = -۱ \Rightarrow ۲ \mid -۲ \quad ✓$

$a = -۲ \Rightarrow ۱۷ \mid -۵ \quad \times$

به ازای $a \leq -۲$ هم، دیگر رابطه برقرار نیست؛ بنابراین فقط به ازای عددهای ۰، ۱ و ۱− رابطه برقرار است.

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد تقسیم به ۸

فرض کنید x یک عدد فرد باشد. در این صورت می‌توان آن را به صورت $x = ۲k + ۱$ نوشت. حالا اگر مربع این عدد را به دست آوریم، داریم:

$$x^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴\underbrace{k(k + ۱)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی}} + ۱ = ۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$$

مربع هر عدد فرد را به صورت $۸q + ۱$ می‌توان نوشت.

مثال اگر a عددی زوج باشد، باقی‌ماندهٔ $(a + ۷)^۲ + (a + ۱)^۲$ بر ۸ چند است؟

پاسخ چون a زوج است، پس $a + ۱$ و $a + ۷$ هر دو عددهایی فرد و در نتیجه $(a + ۱)^۲ + (a + ۷)^۲$ مربع‌های عددهای فردند. بنابراین:

$$(a + ۱)^۲ + (a + ۷)^۲ = ۸q + ۱ + ۸q' + ۱$$

پس باقی‌ماندهٔ عبارت در تقسیم بر ۸ برابر ۲ است.

سه رابطهٔ مهم از بخش‌پذیری

به این سه رابطهٔ نگاه کنید:

$a^n - b^n$ همیشه بر $a - b$ بخش‌پذیر است: $a - b \mid a^n - b^n$

$a^n + b^n$ زمانی بر $a + b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد: $a + b \mid a^n + b^n$ n باید فرد باشد

$a^n - b^n$ زمانی بر $a + b$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد: $a + b \mid a^n - b^n$ n باید زوج باشد

(یعنی خواستون باشه a^n-b^n همیشه بر $a-b$ بخش‌پذیره اما اگر n زوج باشه بر $a+b$ هم بخش‌پذیره)

تعمیم‌یافتهٔ رابطهٔ اول هم به صورت زیر است:

وقتی $\frac{n}{m}$ عددی صحیح باشد: $a^m-b^m \mid a^n-b^n$

این رابطه‌ها را بهتر است در بخش همنهشتی می‌دیدید اما از آن‌جا که در خیلی از آزمون‌ها از این رابطه‌ها قبل از همنهشتی سؤال می‌آید، ما هم تصمیم گرفتیم این‌جا بیاوریم‌شان!

مثال **ثابت کنید $۳^{۳۳}+۲^{۵۵}$ بر ۵۹ بخش‌پذیر است.**

پاسخ ببینید، در تمام رابطه‌هایی که در بالا دیدید توان‌ها یکسان است، بنابراین ما هم باید کاری کنیم که توان‌ها برابر شود. داریم:

$$۲^{۵۵}+۳^{۳۳}=(۲^۵)^{۱۱}+(۳^۳)^{۱۱}=۳۲^{۱۱}+۲۷^{۱۱}$$

خب حالا که توان‌ها یکسان شد و از طرف دیگر توان فرد است. از این نکته که اگر n فرد باشد a^n+b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است، استفاده می‌کنیم.

بنابراین:

$$۳۲+۲۷ \mid ۳۲^{۱۱}+۲۷^{۱۱}$$

پس $۳۲^{۱۱}+۲۷^{۱۱}$ بر ۵۹ بخش‌پذیر است.

تست **عدد $۲^{۶۰}-۵^{۳۰}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟**

۱) ۲۷ ۲) ۳۱ ۳) ۶۱ ۴) ۶۳

پاسخ **گزینهٔ ۲** خب دوباره توان‌ها را برابر می‌کنیم:

$$۵^{۳۰}-۲^{۶۰}=(۵^۳)^{۱۰}-(۲^۶)^{۱۰}=۱۲۵^{۱۰}-۶۴^{۱۰}$$

دیدیم که اگر n زوج باشد a^n-b^n هم بر $a-b$ بخش‌پذیر است هم بر $a+b$.

بنابراین $۱۲۵^{۱۰}-۶۴^{۱۰}$ هم بر $۶۱=۶۴-۱۲۵$ بخش‌پذیر است هم بر $۱۸۹=۶۴+۱۲۵$.

حالا اگر ۱۸۹ را تجزیه کنیم داریم: $۱۸۹=۳^۳\times۷$ که بر ۲۷ و ۶۳ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد $۲^{۶۰}-۵^{۳۰}$ فقط بر ۳۱ بخش‌پذیر نیست.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم $(a,b)=d$)، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) $d\mid a\,,\,d\mid b$ (یعنی d مقسوم‌علیه هر دوتا باشه)

(ب) $\forall m>۰;m\mid a\,,\,m\mid b \Rightarrow m\le d$ (مقسوم‌علیه‌های دیگهٔ a و b مثل m از d کوچک‌تر باشه؛)

دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه: $(a,b)=۱$ یا به بیان دیگر، دو عدد، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند.

تست **اگر d هر دو عدد ۷۲ و ۶۰ را بشمارد، .... مقدار مختلفِ طبیعی، به جای d می‌توان قرار داد که بزرگ‌ترین آن‌ها .... است.**

۱) ۶ ـ ۱۲ ۲) ۶ ـ ۶ ۳) ۴ ـ ۱۲ ۴) ۴ ـ ۶

پاسخ **گزینهٔ ۱** مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی هر دو عدد را می‌نویسیم:

$$\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۲,۱۸,۲۴,۳۶,۷۲\}=\text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۷۲}$$

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۳۰,۶۰\}=\text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۶۰}$$

بنابراین تعداد شمارنده‌های طبیعی مشترک آن‌ها برابر است با: $\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

همان‌طور که می‌بینید، دو عدد ۷۲ و ۶۰ دارای ۶ شمارندهٔ طبیعی مشترک‌اند که بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۱۲ است. پس ۱ درست است.

راه بهتر برای پیداکردن ب.م.م دو یا چند عدد (به جای نوشتن همهٔ مقسوم‌علیه‌های آن)، این است که عددها را تجزیه کرده، فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. به عنوان مثال برای تست بالا داریم:

$$\begin{cases}۷۲=۲^۳\times۳^۲\\ ۶۰=۲^۲\times۳\times۵\end{cases}\Rightarrow (۷۲,۶۰)=۲^۲\times۳=۱۲$$

تست حاصل عبارت $((72,48),(180,120))$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ۱ **روش اول** اول عددها را تجزیه می‌کنیم، بعد با توجه به رابطهٔ ب.م.م عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم:

$$(72,48) = (2^3 \times 3^2, 2^4 \times 3) = 2^3 \times 3 = 24$$

$$(180,120) = (2^2 \times 3^2 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$\Rightarrow (24,60) = (2^3 \times 3, 2^2 \times 3 \times 5) = 2^2 \times 3 = 12$$

روش دوم چون ب.م.م همهٔ عددها خواسته شده، می‌توانستیم از همان اول همهٔ عددها را تجزیه کنیم و بین همهٔ آن‌ها فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 48 = 2^4 \times 3 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{عوامل مشترک با توان کوچک‌تر}} 2^2 \times 3 = 12$$

ب.م.م و تعداد شمارنده‌ها: یک سری سؤال مفهومی از ب.م.م وجود دارد که به درک ما از این مفهوم کمک می‌کند. برای مثال فرض کنید n عددی طبیعی است که به ازای آن رابطهٔ $(n,60) = 6$ برقرار است. می‌خواهیم بررسی کنیم n چه جور عددی است و تعداد عامل‌های ۲، ۳، ۵، ۷ و ... در این عدد به چه صورت است.

اول عددها را تجزیه می‌کنیم، داریم: $(n, 2^2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3$

شمارندهٔ ۲: n دقیقاً یک عامل ۲ دارد. می‌دانیم برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر انتخاب می‌کنیم. چون ۲ در ب.م.م وجود دارد پس n باید حتماً یک عامل ۲ داشته باشد، اما اگر n بیشتر از یک عامل ۲ داشته باشد با توجه به این‌که در تجزیهٔ عدد ۶۰ نیز دو عامل ۲ وجود دارد، بنابراین توان ۲ در ب.م.م، 2^2 خواهد بود و چون در ب.م.م توان ۲ یک است پس n فقط یک عامل ۲ می‌تواند داشته باشد.

شمارندهٔ ۳: n دست‌کم یک عامل ۳ دارد، چون ۳ در ب.م.م آمده است. اما با توجه به این‌که در تجزیهٔ عدد ۶۰ نیز فقط یک عامل ۳ وجود دارد بنابراین n می‌تواند بیشتر از یک عامل ۳ هم داشته باشد *(چون تو ب.م.م عوامل مشترک رو با توان کوچیک‌تر در نظر می‌گیریم.)*

شمارندهٔ ۵: n عامل یا شمارندهٔ ۵ ندارد چون ۵ در ب.م.م نیامده است.

شمارنده‌های ۷ و ۱۱ و ...: چون در تجزیهٔ ۶۰، عوامل ۷ و ۱۱ و ... وجود ندارد، بنابراین در مورد این‌که n چندتا شمارنده از هر کدام از این عددها دارد نیز نمی‌توانیم اظهار نظر کنیم.

مثال اگر $(n,45) = 15$ باشد، حاصل $(n^2, 675)$ چند است؟

پاسخ اول عددها را تجزیه می‌کنیم: $(n, 3^2 \times 5) = 3 \times 5$

n دقیقاً یک عامل ۳ دارد. *(چون اگه بیشتر داشت تو ب.م.م 3^2 می‌اومد)*

هم‌چنین n دست‌کم یک عامل ۵ دارد. *(چون اگه بیشتر هم داشت با توجه به این‌که ۴۵ فقط یک عامل ۳ داره تو ب.م.م‌شون باز هم ۵ می‌اومد)*

بنابراین فرم کلی n به صورت $n = 3 \times 5^\alpha \times \underbrace{\cdots}_{\text{این قسمت عوامل ۳ و ۵ ندارد}}$ است که $\alpha \geq 1$ است.

حالا حاصل $(n^2, 675)$ را پیدا می‌کنیم: $(n^2, 675) = (3^2 \times 5^{2\alpha} \times \cdots 3^3 \times 5^2) = 3^2 \times 5^2 = 225$

حالا سعی کنید به تست زیر جواب دهید.

تست اگر $(n,12) = 6$ باشد، فرم کلی n برحسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$، به کدام صورت است؟

۱) $6k$ ۲) $6k+3$ ۳) $12k$ ۴) $12k+6$

پاسخ گزینهٔ۴ با توجه به این‌که $(n, 2^2 \times 3) = 2 \times 3$، می‌توان فهمید که n دقیقاً یک عامل ۲ و دست‌کم یک عامل ۳ دارد. بنابراین n بر ۶ بخش‌پذیر است. اما اگر بنویسیم $n = 6q$ و q زوج باشد، n بیشتر از یک عامل ۲ خواهد داشت. پس q حتماً باید فرد باشد. بنابراین:

$$q = 2k+1 \Rightarrow n = 6(2k+1) = 12k+6$$

گاهی‌اوقات می‌خواهیم ب.م.م دو عبارت را پیدا کنیم. در این صورت از این ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که d یعنی ب.م.م دو عدد هر دو عدد را می‌شمارد:

$$(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

و سپس سعی می‌کنیم متغیر را حذف کنیم. به سؤال زیر توجه کنید:

تست به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n+3$ و $5n+4$ برابر ۱ نیست؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، $d|b$ و $d|a$.

فرض می‌کنیم $d=(5n+4,n+3)$ است. داریم:

$$\begin{cases} d|n+3 \xrightarrow{\times 5} d|5n+15 \\ d|5n+4 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|11 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 11$$

اگر بخواهیم ب.م.م دو عدد، ۱ نباشد، باید عددها بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند.

$$n+3=11k \Rightarrow n=11k-3$$

n عددی طبیعی و دورقمی است. بنابراین:

$$10\le 11k-3\le 99 \Rightarrow 13\le 11k\le 102 \Rightarrow 2\le k\le 9$$

پس به ازای $9-2+1=8$ عدد دورقمی، ب.م.م دو عدد برابر ۱۱ است.

۱ یک نکتهٔ خارج از کتاب که بد نیست بدانید:

برای پیداکردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را به عوامل اول تجزیه کرده، سپس توان‌ها را با یک جمع کرده، در هم ضرب کنیم.

(برای مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۶۰۰ برابر است با:

$$(600=2^3\times 3\times 5^2 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی} = (3+1)(1+1)(2+1)=24$$

به طور کلی اگر $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$

۲ از همین نکته در کنکور ۱۴۰۰ دو سؤال آمده است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) *(یعنی c مضرب هر دو عدد b و a باشه)* $a|c, b|c$

(ب) *(اگر m، مضرب دیگه‌ای از b و a باشه، c از اون کوچک‌تر باشه)* $\forall m>0; a|m, b|m \Rightarrow c\le m$

برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد هر دو عدد را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۱۲۰ را از این روش به دست می‌آوریم:

$$[36,120]=[2^2\times 3^2, 2^3\times 3\times 5]=2^3\times 3^2\times 5=360$$

تست حاصل عبارت $([72,48],120)$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ ۲ برای به دست آوردن $[72,48]$ عددها را تجزیه می‌کنیم و عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در هم ضرب می‌کنیم:

$$[72,48]=[2^3\times 3^2, 2^4\times 3]=2^4\times 3^2=144$$

حالا ب.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۱۴۴ را به دست می‌آوریم:

$$(144,120)=(2^4\times 3^2, 2^3\times 3\times 5)=2^3\times 3=24$$

(دقت کنید برای به دست آوردن ب.م.م فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم.)

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $[x,6]=12$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ اگر عددها را تجزیه کنیم، داریم:

$$[x,2\times 3]=2^2\times 3$$

خب گفتیم برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد باید چه‌کار کنیم؟ عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم. حالا این رابطه را دوباره نگاه کنید:

$$[x,2\times 3]=2^2\times 3$$

اول بررسی می‌کنیم x چندتا عامل ۲ دارد. اگر x عامل ۲ نداشت یا فقط یک عامل ۲ در داشت، با توجه به این‌که در ک.م.م عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر می‌آید و چون در تجزیهٔ عدد ۶ هم فقط یک عامل ۲ وجود دارد آن وقت تعداد عوامل ۲ در ک.م.م دو عدد هم یکی می‌شد. *(برای مثال فکر کنید $x=2$ باش، اون‌وقت ک.م.م این‌جوری می‌شد: $[2,6]=[2,2\times 3]=2\times 3$)*

بنابراین چون الان در ک.م.م توان ۲ برابر ۲ است، پس x باید حتماً دو عامل ۲ داشته باشد.
در مورد تعداد عوامل ۳ در تجزیهٔ x هم دقت کنید چون در ک.م.م فقط یک عامل ۳ هست. پس x یا عامل ۳ ندارد یا فقط یک عامل ۳ دارد. *(چون اگر بیشتر داشت اون‌وقت توک.م.م هم تعداد ۳ها بیشتر می‌شد!)* همچنین در تجزیهٔ x هیچ عامل دیگری به‌جز ۲ و ۳ وجود ندارد. *(چون اگر داشت توک.م.م شون هم می‌اومد.)* بنابراین x دو حالت دارد: $x=2^2=4$ و $x=2^2\times 3=12$

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

این چند ویژگی را حتماً یادتان باشد:

۱) اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $a\,|\,b$، ب.م.م آن‌ها برابر $|a|$ *(کوچیکه)* و ک.م.م‌شون برابر $|b|$ *(بزرگه)* می‌شود.

$$a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$$

۲) علامت در ب.م.م و ک.م.م تأثیری ندارد. مثلاً $2=(-2,6)=(2,6)$ می‌شود یا $30=[10,15]=[-10,-15]$، پس اگر عددی منفی بود، اصلاً منفی را حذف کنید و بعد ب.م.م و ک.م.م را محاسبه کنید.

۳) از عامل مشترک دو عدد، می‌توانیم فاکتور بگیریم، یعنی $(ka,kb)=|k|(a,b)$؛ مثلاً $(12,18)=6(2,3)=6\times 1=6$ یا $[12,18]=6\times[2,3]=6\times 6=36$.

۴) اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند (یعنی $(a,b)=1$)، ک.م.م برابر ضرب آن‌ها می‌شود، یعنی $[a,b]=|ab|$. مثلاً $[2,3]=6$ یا $[3,7]=21$ یا ... .

۵) اگر p عددی اول باشد و $p\nmid a$ آن‌گاه $(p,a)=1$.

۶) حاصل‌ضرب ب.م.م و ک.م.م دو عدد با قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد برابر است: $(a,b)[a,b]=|ab|$

۷) اگر هر مضربی از یکی از اعداد را به دیگری اضافه یا کم کنیم، ب.م.م تغییری نمی‌کند: $(a,b)=d \Rightarrow (a,b\pm ka)=d$

تست حاصل $([4a^2,8a^3],(2a,24a^2))$ کدام است؟

۱) $8|a^3|$ ۲) $2a$ ۳) $2|a|$ ۴) $4a^2$

پاسخ **گزینهٔ ۳** با توجه به خاصیت بالا داریم:

$4a^2\,|\,8a^3 \Rightarrow [4a^2,8a^3]=|8a^3|=8|a^3|$

$2a\,|\,24a^2 \Rightarrow (2a,24a^2)=|2a|=2|a|$

$2|a|\,\big|\,8|a^3| \Rightarrow (2|a|,8|a^3|)=2|a|$

تست کدام گزینه نادرست است؟

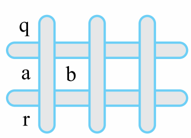
۱) $(n,n+1)=1$ ۲) $[n,n+1]=n^2+n$ ۳) $(2n+1,2n+3)=2$ ۴) $(2n,2n+2)=2$

پاسخ **گزینهٔ ۳** ۱) می‌گوید که دو عدد متوالی نسبت به هم اول‌اند، این همیشه درست است. زیرا اگر $d=(n,n+1)$ بگیریم، نتیجه می‌شود: $d|n$ و $d|n+1$ و حالا اگر سمت راستشان را از هم کم کنیم $d|1$ و $d=1$ نتیجه می‌شود. حالا با توجه به ویژگی ۴ که در بالا گفتیم، ۲) هم درست می‌شود. اما ۳) را $d=(2n+3,2n+1)$ می‌گیریم، پس $d|2n+3$ و $d|2n+1$، پس $d|2$ و در نتیجه $d=2$ یا $d=1$ می‌تواند باشد، اما $2n+1$ و $2n+3$ هر دو عدد فرد هستند، پس $d=2$ نمی‌تواند باشد، یعنی $d=1$ باید باشد. پس فهمیدیم که ب.م.م دو عدد فرد متوالی هم همیشه برابر ۱ می‌شود. اگر همین‌جوری ۴) را هم برویم $d=1$ یا $d=2$ نتیجه می‌شود، ولی چون هر دو عدد زوج هستند، پس هر دو به ۲ بخش‌پذیرند؛ این یعنی ب.م.م دو عدد زوج متوالی همیشه برابر ۲ می‌شود.

روش نردبانی

نکتهٔ شمارهٔ ۷ را دیدید. از این نکته می‌توان برای پیداکردن ب.م.م دو عدد استفاده کرد. ببینید! گاهی وقت‌ها که می‌خواهیم ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم عددها خوب تجزیه نمی‌شوند و پیداکردن ب.م.م از راه تجزیه سخت است. در این‌جور مواقع می‌توانیم از یک روش دیگری استفاده کنیم که به آن می‌گوییم روش نردبانی.

این روش توی کتاب نیست ولی دونستنش خیلی به درد بفور و کمک‌کننده است.)



در این روش یک جدول سه‌سطری می‌کشیم. (مثل یک نردبانی که روی زمین افتاده)
سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر وسط مربوط به عددها و سطر پایین مربوط به باقی‌مانده‌هاست:
عددها را به هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در بالا و باقی‌مانده را در پایین می‌نویسیم. اگر باقی‌مانده صفر شد آخرین عددی که نوشتیم ب.م.م است. اما اگر باقی‌مانده صفر نشد، باقی‌مانده را می‌بریم در ردیف وسط و الگوریتم را آن قدر تکرار می‌کنیم که باقی‌مانده صفر شود.

مثال بزرگ‌ترین عامل مشترک دو عدد ۳۴۱ و ۴۰۳ را به دست آورید.

پاسخ *(این سؤال خیلی شبیه یکی از سؤال‌های کنکور سراسریه!)*

q	۱	۵	۲
۴۰۳	۳۴۱	۶۲	ب.م.م
r	۶۲	۳۱	۰

گام اول دو عدد را به هم تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} 403 & 341 \\ \hline 342 & 1 \\ \hline 62 & \end{array}$$

گام دوم چون باقی‌مانده صفر نشده آن را در جدول اعداد قرار می‌دهیم. (سطر دوم)

گام سوم حالا ۳۴۱ را بر ۶۲ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده و خارج قسمت را پیدا کرده، در جدول قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r|l} 341 & 62 \\ \hline 310 & 5 \\ \hline 31 & \end{array}$$

گام چهارم چون باقی‌مانده صفر نشد ۳۱ را به سطر دوم می‌بریم.

گام پنجم ۶۲ را بر ۳۱ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده صفر می‌شود. پس عدد آخر یعنی ۳۱ ب.م.م دو عدد است.

اعداد اول

عدد p را عددی اول می‌گویند هرگاه بر هیچ عدد طبیعی دیگری به‌جز خودش و ۱ بخش‌پذیر نباشد. برای مثال ۱۳ یک عدد اول است چون در اعداد طبیعی فقط بر خودش و ۱۳ بخش‌پذیر است اما ۹ یک عدد اول نیست چون به‌جز خودش و ۱ بر ۳ نیز بخش‌پذیر است.

هرگاه حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی a و b برابر یک عدد اول مانند p شود، یکی از آن‌ها ۱ و دیگری p است:

$$ab = p \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = p \\ a = p, b = 1 \end{cases}$$

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a^2 = b^2 + 17$ در این صورت $2a + b$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

پاسخ **گزینهٔ ۲** از نکته‌ای که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + 17 \Rightarrow a^2 - b^2 = 17 \Rightarrow \underbrace{(a-b)(a+b)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده است.}} = 17 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 26$$

چند نکته دربارهٔ اعداد اول و اول بودن دو عدد نسبت به هم:

۱) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ آن‌گاه $(p, a) = 1$.

(یعنی مثلاً وقتی $20 \nmid 3$، می‌شه نتیجه گرفت: $(20, 3) = 1$)

۲) هیچ عدد اولی بزرگ‌تر از $n! + 1$ و کوچک‌تر مساوی $n! + n$ وجود ندارد.

(برای مثال هیچ‌کدوم از عددهای بزرگ‌تر از $100! + 1$ و کوچک‌تر مساوی $100! + 100$ اول نیستن مثلاً عدد $100! + 43$ را در نظر بگیرین. این عدد بر ۴۳ بخش‌پذیره، چون که تو تجزیه $100!$ عامل ۴۳ وجود داره:

$$100! + 43 = \underbrace{100 \times 99 \times \cdots \times 43 \times \cdots \times 1 + 43}_{\text{از ۴۳ می‌توان فاکتور گرفت.}})$$

۳) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $6k + 1$ یا $6k + 5$ نوشت.

(چون $6k$ و $6k + 2$ و $6k + 4$ زوجه و نمی‌تونه اول باشه. $6k + 3$ هم مضرب ۳ئه و نمی‌تونه اول باشه. پس فقط $6k + 1$ و $6k + 5$ می‌مونه که ممکنه اول باشه.)

۴) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $p^2 = 24k + 1$ نوشت.

(این نکته خارج از کتابه ولی دونستنش ضرر نداره.)

۵ دوتا عدد پشت سر هم نسبت به هم اول‌اند.

(اثباتش خیلی ساده است:

$$(n,n+۱)=d \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,n \\ d\,|\,n+۱ \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} d\,|\,۱ \Rightarrow d=۲$$

۶ دو عدد فرد پشت سر هم، نسبت به هم اول‌اند.

(اینم اثباتش ساده است:

$$(۲n+۱,۲n+۳)=d \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,۲n+۳ \\ d\,|\,۲n+۱ \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} d\,|\,۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۳$$

اما چون عددها فردن نمی‌تونن بر ۲ بخش‌پذیر باشن.)

۷ اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند: $(p,q)=۱$.

(این هم اثباتش آسونه و چون تمرین کتابه خوبه اثباتش رو ببینید. فرض کنید ب.م.م‌شون d باشه:

$$(p,q)=d \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,p \Rightarrow d=۱ \text{ یا } p \\ d\,|\,q \Rightarrow d=۱ \text{ یا } q \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} d=۱$$

تنها عددی که تو هر دو رابطه صدق می‌کنه عدد ۱ هستش.)

مثال **اگر n عددی طبیعی باشد حاصل هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چند مقدار n ممکن است عددی اول باشد:**

الف) $۳n^۲+۵n+۲$ **ب) $n^۶+۸$**

پاسخ **الف)** یکی از راه‌های پاسخ‌دادن به این نوع سؤال‌ها تفکیک روی فرد و زوج بودن عدد است. برای مثال:

$$\text{اگر } n \text{ زوج‌باشد} \Rightarrow \begin{cases} ۳n^۲ & \text{زوج} \\ ۵n & \text{زوج} \\ ۲ & \text{زوج} \end{cases} \Rightarrow ۳n^۲+۵n+۲=\text{زوج}+\text{زوج}+\text{زوج}=\text{زوج}$$

$$\text{اگر } n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \begin{cases} ۳n^۲ & \text{فرد} \\ ۵n & \text{فرد} \\ ۲ & \text{زوج} \end{cases} \Rightarrow \text{فرد}+\text{فرد}+\text{زوج}=\text{زوج}$$

یعنی حاصل این عبارت هیچوقت اول نمی‌شود.

ب) وقتی یک عبارت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب چند عبارت غیر از یک تجزیه کرد آن عبارت دیگر نمی‌تواند اول باشد:

$$n^۶+۸ \Rightarrow (n^۲)^۳+۲^۳=(n^۲+۲)(n^۴-۲n^۲+۴)$$

(ضرب دو عبارت بزرگ‌تر از یکه پس اول نمی‌شه هیچ‌وقت.)

تست **اگر p عددی اول باشد به ازای چند مقدار p عبارت $p^۲+۸$ عددی اول است؟**

۱) هیچ مقدار ۲) یک مقدار ۳) دو مقدار ۴) بیشتر از دو مقدار

پاسخ **گزینه‌۲** گفتیم که مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $۲۴k+۱$ نوشت.

داریم:

$$p=۲ \Rightarrow p^۲+۸=۱۲ \text{ اول نیست.}$$

$$p=۳ \Rightarrow p^۲+۸=۱۷ \text{ اول است.}$$

$$p>۳ \Rightarrow p^۲+۸=۲۴k+۱+۸=۲۴k+۹=۳(۸k+۳) \text{ مضرب ۳ است پس اول نیست.}$$

متباین‌سازی

⚠ مباحث مربوط به متباین‌سازی در کتاب درسی نیامده است اما از آن‌جا که از این مبحث در کنکور سراسری سال ۹۹ دو سؤال آمده، بنابراین پیشنهاد می‌کنیم آن را یاد بگیرید.

می‌دانیم اگر دو عدد داشته باشیم و آن‌ها را بر ب.م.م‌شان تقسیم کنیم حاصل‌های به دست آمده نسبت به هم اول می‌شوند.

(برای مثال: $(۱۸,۱۲)=۶ \Rightarrow (\frac{۱۸}{۶},\frac{۱۲}{۶})=(۳,۲)=۱$)

حاصل تقسیم عددهای a و b بر ب.م.م‌شان یعنی d را a' و b' می‌نامیم. داریم:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱, \frac{a}{d}=a', \frac{b}{d}=b'$$

این سه رابطه را خوب یادتان بماند:

(۱) $a=a'd$ (۲) $b=b'd$ (۳) $(a',b')=۱$

اما این رابطه‌ها به چه دردی می‌خورند؟ در بعضی سؤال‌ها یک رابطه‌هایی براساس ب.م.م دو عدد، ک.م.م دو عدد، ضرب دو عدد، جمع دو عدد و ... داده می‌شود و اطلاعاتی در مورد عددها خواسته می‌شود. کاری که ما در این سؤال‌ها انجام می‌دهیم این است که همهٔ رابطه‌ها را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم و معمولاً با استفاده از این‌که $(a',b')=۱$ است، سؤال حل می‌شود.

خوب است بدانید:

(۱) $(a,b)=d$

(۲) $a+b=a'd+b'd=d(a'+b')$

(۳) $ab=(a'd)(b'd)=a'b'd^۲$

(۴) $[a,b]=[a'd,b'd]=d[a',b']=a'b'd$

برای درک بهتر این نکات و آشنایی با این سؤال‌ها به دو سؤال زیر دقت کنید!

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۷$ و $[a,b]=۳۱۵$ باشد، $a+b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ همان‌طور که گفتیم دو رابطه را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned}(a,b)=۷ &\Rightarrow d=۷\\ [a,b]=۳۱۵ &\Rightarrow a'b'd=۳۱۵\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a'b'=۴۵$$

حالا حالت‌هایی که ضرب $a'b'$ برابر ۴۵ می‌شود پیدا می‌کنیم. دقت کنید که a' و b' نسبت به هم اول‌اند.

a'	۱	۳	۵
b'	۴۵	۱۵	۹
	✓	غ ق ق	✓

چون $(۳,۱۵)=۳$، پس حالت دوم قابل قبول نیست. بنابراین a' و b' دو حالت دارند، پس دو مقدار برای $a+b$ وجود دارد:

$$\begin{vmatrix}a'=۱\\ b'=۴۵\end{vmatrix}\Rightarrow a+b=d(a'+b')=۷\times۴۶=۳۲۲$$

$$\begin{vmatrix}a'=۵\\ b'=۹\end{vmatrix}\Rightarrow a+b=۷\times۱۴=۹۸$$

پس $a+b$ می‌تواند دو مقدار مختلف داشته باشد.

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۱۳$ و $a+b=۱۳۰$ باشد، حداکثر مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۵۲۱ ۲) ۳۵۴۹ ۳) ۲۷۰۴ ۴) ۴۲۲۵

پاسخ گزینهٔ ۲ دو رابطه را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}(a,b)=۱۳ &\Rightarrow d=۱۳\\ a+b=۱۳۰ &\Rightarrow d(a'+b')=۱۳۰\end{aligned}\xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a'+b'=۱۰$$

حالت‌هایی که مجموع دو عدد برابر ۱۰ می‌شود را می‌نویسیم و فقط حالت‌هایی را قبول می‌کنیم که $(a',b')=۱$ باشد:

$a'+b'=۱۰$

۱	۹	✓	
۲	۸	×	غیر قابل قبول $(a',b')=۲$
۳	۷	✓	
۴	۶	×	غیر قابل قبول $(a',b')=۲$
۵	۵	×	غیر قابل قبول $(a',b')=۵$

حالا می‌خواهیم ab ماکزیمم شود. می‌دانیم:

$$ab=a'b'd^۲=۱۶۹a'b'$$

سپس باید حالتی را در نظر بگیریم که $a'b'$ حداکثر شود:

$$\begin{cases} a'=1 \\ b'=9 \end{cases} \Rightarrow ab = 9\times169 = 1521$$

$$\begin{cases} a'=3 \\ b'=7 \end{cases} \Rightarrow ab = 21\times169 = 3549 \checkmark$$

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

از سال‌های گذشته یادتان هست که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \\ r & \end{array} \quad a = bq + r \quad , \quad 0 \le r < b$$

که در آن به a مقسوم، به b مقسوم‌علیه، به q خارج قسمت و به r باقی‌مانده می‌گویند. یعنی در تقسیم a بر b، اعداد منحصربه‌فرد q و r وجود دارند که $a = bq + r$ می‌شود. به شرط باقی‌مانده (یعنی $0 \le r < b$) هم حتماً توجه کنید، در برخی از تست‌ها به آن نیاز پیدا خواهید کرد.

تست در تقسیم عددی بر ۱۹، باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد. اگر این عدد دورقمی باشد، حداکثر مقدار آن برابر چند است؟

۱) ۹۷ ۲) ۹۸ ۳) ۹۵ ۴) ۹۴

پاسخ گزینهٔ ۴ عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & 19 \\ \hline & q \\ r & \end{array} \Rightarrow a = 19q + r, 0 \le r < 19$$

با توجه به این‌که باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد، $r = 18$ است. یعنی: $a = 19q + 18$

حالا می‌خواهیم a بزرگ‌ترین عدد دورقمی باشد، بنابراین:

$$a = 19q + 18 < 100 \Rightarrow 19q < 82 \Rightarrow q < 4/3$$

$$\Rightarrow q_{max} = 4 \Rightarrow a = 4\times19 + 18 = 94$$

تست اگر باقی‌ماندهٔ دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۷ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ $2a - 3b$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ ۳

$$\begin{array}{r|l} a & 11 \\ \hline & q \\ 7 & \end{array} \Rightarrow a = 11q + 7 \xrightarrow{\times 2} 2a = 22q + 14$$

$$\begin{array}{r|l} b & 11 \\ \hline & q' \\ 3 & \end{array} \Rightarrow b = 11q' + 3 \xrightarrow{\times 3} 3b = 33q' + 9$$

$$\xrightarrow{-} 2a - 3b = 22q - 33q' + 5 = 11(2q - 3q') + 5$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a - 3b$ بر ۱۱ برابر ۵ است.

توجه کنید در خیلی از این مدل سؤال‌ها می‌شود یک‌راست باقی‌مانده را جایگزین کرد و پاسخ را به دست آورد:

برای مثال در سؤال قبل:

$$\begin{cases} a=7 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow 2a - 3b = 14 - 9 = 5$$

(فقط دقت کنید، که این کار رو وقتی مجازید انجام بدید که باقی‌مانده را به همون عدد بخواد. مثل همین سؤال که باقی‌ماندهٔ a و b رو به ۱۱ داده و باقی‌مانده $2a - 3b$ *رو هم بر همون ۱۱ می‌خواد.)*

تست اگر باقی‌ماندهٔ a و b بر ۱۹ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد باقی‌ماندهٔ $a^2 + 3ab + 5$ بر ۱۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۸

پاسخ گزینهٔ ۱ از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 3ab + 5 = 4 + 30 + 5 = 39$$

و باقی‌ماندهٔ ۳۹ بر ۱۹ برابر ۱ است.

برای پیداکردن باقی‌مانده در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b وقتی a منفی باشد، دو کار می‌توان کرد.

۱ اول خارج قسمت را از فرمول $q=[\frac{a}{b}]$ به دست می‌آوریم سپس r را از رابطهٔ $r=a-bq$ پیدا می‌کنیم.

۲ باقی‌ماندهٔ $|a|$ را بر b به دست می‌آوریم و آن را r' می‌نامیم؛ باقی‌ماندهٔ a بر b برابر است با: $r=b-r'$

برای مثال باقی‌ماندهٔ ۲۳- بر ۷ را از دو روش پیدا می‌کنیم:

۱ $q=\left\lfloor -\frac{۲۳}{۷}\right\rfloor=-۴ \Rightarrow r=-۲۳-(۷)(-۴)=۵$

۲ $\begin{array}{r|l} ۲۳ & ۷ \\ \hline ۲۱ & ۳ \\ ۲ & \end{array} \Rightarrow r'=۲ \Rightarrow r=۷-۲=۵$

۳ حواستان باشد که این فرمول $q=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor$ برای پیداکردن خارج قسمت تقسیم a بر b در کل خیلی چیز به درد بخوری است و در خیلی از سؤال‌ها می‌شود از آن استفاده کرد.

مثال اگر $a=۱۲k+۷$ باشد، خارج قسمت $۵a+۱۳$ بر ۱۵ را برحسب k به دست آورید:

پاسخ

$a=۱۲k+۷ \Rightarrow ۵a=۶۰k+۳۵ \Rightarrow ۵a+۱۳=۶۰k+۴۸$

حالا خارج قسمت این عبارت را بر ۱۵ به دست می‌آوریم:

$q=\left\lfloor\frac{۵a+۱۳}{۱۵}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{۶۰k+۴۸}{۱۵}\right\rfloor=\lfloor ۴k+۳/۲\rfloor=۴k+۳$

تست اگر باقی‌مانده و خارج قسمت a بر ۱۴ به ترتیب برابر ۵ و q باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a-۴۹$ بر ۲۱ برابر .... و خارج قسمت آن برحسب q برابر است با ....

۱) ۱۳، $۲q-۱$ ۲) ۸، $۲q-۱$ ۳) ۱۳، $۲q-۲$ ۴) ۸، $۲q-۲$

پاسخ گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ داده‌شده داریم:

$\begin{array}{r|l} a & ۱۴ \\ \hline ۵ & q \end{array} \Rightarrow a=۱۴q+۵ \Rightarrow ۳a=۴۲q+۱۵ \Rightarrow ۳a-۴۹=۴۲q-۳۴$

گفتیم برای پیداکردن خارج قسمت از رابطهٔ $q=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor$ استفاده می‌کنیم:

$q=\left\lfloor\frac{۴۲q-۳۴}{۲۱}\right\rfloor=\lfloor ۲q-۱/۶\rfloor=۲q-۲$

برای پیداکردن باقی‌مانده نیز باید باقی‌ماندهٔ $۴۲q-۳۴$ را بر ۲۱ پیدا کنیم؛ $۴۲q$ که بر ۲۱ بخش‌پذیر است. کافی است باقی‌ماندهٔ ۳۴- را بر ۲۱ تقسیم کنیم، با توجه به چیزی که گفتیم اول باقی‌ماندهٔ ۳۴ را بر ۲۱ به دست می‌آوریم:

$\begin{array}{r|l} ۳۴ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱ \\ ۱۳ & \end{array} \Rightarrow r'=۱۳ \Rightarrow r=۲۱-۱۳=۸$

تست اگر $a=۱۲q+۵$ باشد، خارج قسمت تقسیم $۸a-۷۳$ بر ۱۶ کدام است؟

۱) $۸q-۲$ ۲) $۸q-۳$ ۳) $۶q-۲$ ۴) $۶q-۳$

پاسخ گزینهٔ ۴

$a=۱۲q+۵ \Rightarrow ۸a=۹۶q+۴۰ \Rightarrow ۸a-۷۳=۹۶q-۳۳$

می‌خواهیم خارج قسمت $۹۶q-۳۳$ را بر ۱۶ به دست آوریم. می‌دانیم در تقسیم عدد A بر ۱۶ اگر $A=۱۶q+r$ و $۰\le r<۱۶$ باشد، به q خارج قسمت می‌گوییم. پس باید $۹۶q-۳۳$ را به صورت مجموع یک مضرب ۱۶ و یک عدد بین صفر تا ۱۵ بنویسیم. داریم:

$۸a-۷۳=۹۶q-۳۳=۹۶q-۴۸+۱۵=۱۶(۶q-۳)+۱۵$

بنابراین خارج قسمت این تقسیم برابر است با: $۶q-۳$

البته یک جور دیگر نیز می‌شود به سؤال پاسخ داد. اول به نکتهٔ زیر توجه کنید:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت برابر است با: $q=[\frac{a}{b}]$

بنابراین در تقسیم $۹۶q-۳۳$ بر ۱۶، خارج قسمت برابر است با: $[\frac{۹۶q-۳۳}{۱۶}]=[۶q-۲/۰۶]=[۶q]+[-۲/۰۶]=۶q-۳$

توجه کنید در رابطهٔ تقسیم یعنی $a = bq + r$ شرط باقی‌مانده یعنی $۰ \le r < b$ بسیار شرط مهمی است و سؤال‌های زیادی با استفاده از همین شرط جواب داده می‌شوند.

تست **چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ وجود دارد که در تقسیم به ۳۶ باقی‌ماندهٔ آن دوسوم خارج قسمتش باشد؟**

۱) ۱۵　　۲) ۱۶　　۳) ۱۷　　۴) ۱۸

پاسخ **گزینهٔ ۱** عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۳۶ \\ \hline \frac{۲}{۳}q & q \end{array} \Rightarrow a = ۳۶q + \frac{۲}{۳}q, ۰ \le \frac{۲}{۳}q < ۳۶$$

دقت کنید که q حتماً باید مضرب ۳ باشد وگرنه باقی‌مانده کسری می‌شود که امکان‌پذیر نیست. با توجه به شرط سؤال، حدود q را پیدا می‌کنیم:

$$۰ \le \frac{۲}{۳}q < ۳۶ \Rightarrow ۰ \le q < ۵۴ \quad (\mathrm{I})$$

از طرفی a باید یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، بنابراین:

$$۳۶q + \frac{۲}{۳}q > ۳۰۰ \Rightarrow \frac{۱۱۰q}{۳} > ۳۰۰ \Rightarrow q > ۸/۱ \quad (\mathrm{II})$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم: $۹ \le q < ۵۴$ و چون q مضرب ۳ است، می‌توان نوشت:

$$۹ \le q < ۵۴ \Rightarrow ۹ \le ۳k < ۵۴ \Rightarrow ۳ \le k < ۱۸$$

پس به ازای $k \in \{۳, ۴, \dots, ۱۷\}$ رابطه برقرار است. تعداد اعضای این مجموعه برابر است با:

$$۱۷ - ۳ + ۱ = ۱۵$$

اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر n بخش‌پذیر باشند، باقی‌مانده نیز همواره مضرب n است.

تست **اگر a در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ $a+۱$ در تقسیم بر ۱۵ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۶　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ ۳** a در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد، بنابراین $a = ۶k + ۲$؛ حالا باید باقی‌ماندهٔ $a+۱$ را بر ۱۵ به دست آوریم:

$$a + ۱ = ۶k + ۳ \Rightarrow \begin{array}{l|l} ۶k+۳ & ۱۵ \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow ۶k + ۳ = ۱۵q + r$$

با توجه به این‌که $۶k + ۳$ و ۱۵ هر دو مضرب ۳ هستند پس r نیز باید مضرب ۳ باشد، یعنی $r = ۳r'$. از طرفی چون $۰ \le r < b$ است، پس:

$$۰ \le ۳r' < ۱۵ \Rightarrow ۰ \le r' < ۵ \Rightarrow r' = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

پس باقی‌مانده ۵ حالت می‌تواند داشته باشد.

یک مدل از سؤال‌های الگوریتم تقسیم وجود دارد که نمونه‌اش در تمرین‌های کتاب درسی نیز آمده است و به این صورت است که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد را بر دو عدد مختلف به شما می‌دهند و باقی‌ماندهٔ آن را بر عدد دیگری *(که معمولاً حاصل‌ضرب اون دوتا عدده)* می‌خواهد. به یک نمونه از این سؤال‌ها توجه کنید.

تست **اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به عددهای ۸ و ۹ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۷۲ کدام است؟**

۱) ۵۹　　۲) ۶۱　　۳) ۶۹　　۴) ۷۱

پاسخ **گزینهٔ ۲** با توجه به فرمول قضیهٔ تقسیم، داریم:

$$\begin{cases} a = ۸q + ۵ \xrightarrow{\times ۹} ۹a = ۷۲q + ۴۵ \\ a = ۹q' + ۷ \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۷۲q' + ۵۶ \end{cases}$$

اگر این دوتا را از هم کم کنیم $a = ۷۲q'' - ۱۱$ به دست می‌آید. باقی‌مانده، -۱۱ نمی‌تواند باشد، چون باقی‌مانده منفی نیست، پس باید یک دستهٔ ۷۲تایی باز کنیم تا باقی‌مانده مثبت بشود، پس باقی‌مانده برابر $۶۱ = ۷۲ + ۱۱-$ می‌شود. در واقع انگار این کار را کردیم:

$$a = ۷۲(q'' - ۱) + ۷۲ - ۱۱ = ۷۲(q'' - ۱) + ۶۱$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۱ یا صفر بشود، پس عددها یا فردند و یا زوج؛ از این‌جا مجموعه عددهای صحیح را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم؛ عددهای فرد که آن را به صورت $۲k + ۱$ نشان می‌دهیم و عددهای زوج که آن را با $۲k$ نمایش می‌دهیم.

$\mathbb{Z}$	
$۲k$	$۲k + ۱$

به همین ترتیب در تقسیم به ۳، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به سه دسته افراز می‌شود:

۱) $3k$: عددهای مضرب ۳

۲) $3k+1$: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.

۳) $3k+2$: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

	$\mathbb{Z}$	
$3k$	$3k+1$	$3k+2$

و به همین ترتیب در تقسیم به m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m دسته افراز می‌شود.

$mk+(m-1)$	...	$mk+2$	$mk+1$	mk
عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر $m-1$ دارند.		عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.	عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.	عددهای مضرب m

تست **اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد که در تقسیم به ۶، باقی‌مانده‌اش برابر ۱ نباشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۶ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ ۴** می‌دانیم در تقسیم به ۶، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۶ مجموعه می‌توانیم افراز کنیم. پس:

$6k+1$ — $6k$ ⟵ مضرب ۶ است ⟵ اول نیست

$6k+3$ ⟵ مضرب ۳ است ⟵ اول نیست — $6k+2$ ⟵ زوج است ⟵ اول نیست

$6k+5$ — $6k+4$ ⟵ زوج است ⟵ اول نیست

همان‌طور که دیدید، تنها عددهایی به فرم $6k+1$ و $6k+5$ می‌توانند اول باشند که با توجه به این‌که سؤال گفته‌شده، باقی‌ماندهٔ عدد در تقسیم به ۶، برابر ۱ نیست، بنابراین باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۶، برابر ۵ به دست می‌آید.

تست **اگر عدد صحیحی نه زوج باشد و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۴** می‌دانیم در تقسیم به ۱۲ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعهٔ زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم چندتای آن‌ها نه زوجاند و نه مضرب ۳.

مضرب ۳	$12k+9$	زوج	$12k+6$	مضرب ۳	$12k+3$	زوج	$12k$
زوج	$12k+10$	✓	$12k+7$	زوج	$12k+4$	✓	$12k+1$
✓	$12k+11$	زوج	$12k+8$	✓	$12k+5$	زوج	$12k+2$

پس باقی‌ماندهٔ عدد در تقسیم به ۱۲ فقط می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

در مورد پیداکردن باقی‌ماندهٔ مربع عددهای کامل به عددهای مختلف نیز می‌توان از افراز استفاده کرد. البته جلوتر می‌بینیم که با استفاده از همنهشتی این سؤال‌ها را راحت‌تر می‌توان پاسخ گفت. اما بد نیست این‌جا هم کمی ماجرا را بررسی کنیم:

مثال **ثابت کنید مربع هر عدد صحیح در تقسیم به ۵، یا باقی‌مانده‌ای برابر صفر دارد یا باقی‌مانده‌ای برابر ۱ و یا باقی‌مانده‌ای برابر ۴.**

پاسخ در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ مجموعه افراز می‌شود. در هر پنج حالت مربع عدد را بررسی می‌کنیم:

$5k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

$5k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+10k+1$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$5k+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+20k+4$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

$5k+3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+30k+9$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد. *(چون باقی‌ماندهٔ ۹ به ۵ برابر چهاره)*

$5k+4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+40k+16$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. *(چون باقی‌ماندهٔ ۱۶ به ۵ برابر یکه)*

پس هر عدد مربع کامل در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا ۱ دارد.

البته برای راحتی کار فقط می‌شود خود باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ رساند.

$5k \Rightarrow 0$ $5k+1 \Rightarrow 1^2=1$

$5k+2 \Rightarrow 2^2=4$ $5k+3 \Rightarrow 3^2=9$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

$5k+4 \Rightarrow 4^2=16$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

تست عددی صحیح بر ۷ بخش‌پذیر نیست. باقی‌ماندهٔ مربع آن بر ۷ چند حالت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ مثل مثال قبل عمل می‌کنیم و فقط باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم. چون عدد بر ۷ بخش‌پذیر نیست حالت $7k$ را نمی‌نویسیم.

$7k+1 \Rightarrow 1$

$7k+2 \Rightarrow 4$

$7k+3 \Rightarrow 9$ باقی‌مانده ۹ بر ۷ برابر ۲ است.

$7k+4 \Rightarrow 16$ باقی‌مانده ۱۶ بر ۷ برابر ۲ است.

$7k+5 \Rightarrow 25$ باقی‌مانده ۲۵ بر ۷ برابر ۴ است.

$7k+6 \Rightarrow 36$ باقی‌مانده ۳۶ بر ۷ برابر ۱ است.

پس باقی‌ماندهٔ مربع عدد بر ۷ فقط می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ۴ باشد. یعنی سه حالت دارد.

همان‌طور که در بالا دیدیم در تقسیم به ۳ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به سه مجموعه افراز می‌شود.

$\mathbb{Z}$		
$3k$	$3k+1$	$3k+2$

بنابراین به راحتی می‌شود فهمید از هر سه عدد متوالی حتماً یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، یکی بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد و یکی بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲. *(مثلاً ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ رو در نظر بگیرین: ۲۰ بر ۳ باقی‌مانده‌اش ۲ می‌شه، ۲۱ به ۳ بخش‌پذیره و ۲۲ به ۳ باقی‌مانده‌اش ۱ می‌شه)*

و چون از هر سه عدد متوالی یکی حتماً زوج است، می‌توان نتیجه گرفت:

ضرب ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

این قضیه را می‌توان در حالت کلی نیز تعمیم داد:

ضرب n عدد متوالی همواره بر $n!$ بخش‌پذیر است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ویژگی‌های بخش‌پذیری

سؤال‌های آغازین این بخش اگرچه ممکن است ساده به نظر برسند اما سؤال‌های مفهومی هستند و یادگرفتنشان ضروری است.

۶۹- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، کدام گزینه درست نیست؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ ۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|bc$

۳) $a|bc \Rightarrow a|c \vee a|b$ ۴) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$

۷۰- چندتا از رابطه‌های زیر درست است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

الف) $a|b+c \Rightarrow a|b \vee a|c$ ب) $bc|a \Rightarrow b|a \wedge c|a$ پ) $a|b \Rightarrow a+c|b+c$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۱- اگر $a|c$ و $ab|c$، کدام گزینه درست است؟ *(ق.م)*

۱) $b|c$ ۲) $a+b|c$ ۳) $a-b|c$ ۴) $a^2|c$

۷۲- اگر $a-b|a$، آن‌گاه: *(ق.م)*

۱) $a|a-b$ ۲) $b|a-b$ ۳) $a|b$ ۴) $a-b|b$

۷۳- اگر $a+b|a+c$ و $a+b|2c$، کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a+b|a-c$ ۲) $a+b|2b+c$ ۳) $a+b|2a$ ۴) $a+b|2b$

۷۴- از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $b|a+c$ ۲) $c|a-b$ ۳) $a-b|c^2$ ۴) $b+c|a^2$

۷۵- به ازای چند عدد صحیح، هر دو رابطهٔ $n^2|6n-5$ و $6n-5|n^2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) چنین nای وجود ندارد.

۷۶- به ازای چند مقدار x هر دو رابطهٔ $x^3-3x^2+2x|0$ و $2x+1|2^x+1$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۷۷- عدد $43!$ بر کدام‌یک از عددهای زیر، بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۷۸- عدد $12+20!$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۷۹- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1}\times 3^{a_2}\times 5^{a_3}\times\cdots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n=20$، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها بد نیست به بخش «مضرب و مقسوم‌علیه» در درس‌نامه نگاه کنید.

۸۰- اگر $12 \mid x$ و $y \mid 12$، کدام گزینه درست نیست؟

۱) $x \mid 2y$ ۲) $4 \mid y$ ۳) $x \mid 24$ ۴) $2x \mid y$

۸۱- به ازای چند عدد صحیح مانند x، هر دو رابطهٔ $x \mid 84$ و $4 \mid x$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۸۲- از رابطه‌های $a \mid 2$ و $ab = 60$، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $a=2$ ۲) $a \mid 30$ ۳) $b = 30$ ۴) $b \mid 30$

۸۳- اگر a و b دو عدد طبیعی و دو رابطهٔ $b \mid a$ و $2a \mid b$ هر دو درست باشند، در این صورت:

۱) همواره $a=b$ ۲) $a=b$ یا $a=2b$ ۳) $a=b$ یا $2a=b$ ۴) $a=2b$ یا $b=2a$

۸۴- اگر $x \in \{1,2,\ldots,20\}$ باشد به ازای چند مقدار x رابطهٔ x^2-1 بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{10} \cong 3/16)$ (داخل ۱۴۰۰)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۸۶- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[3]{10} \cong 2/1)$ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

برای پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها به نکتهٔ $\square \mid \square \Rightarrow \square \mid \square$ دقت کنید.

۸۷- اگر $2x^2 \mid 3y$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $2x^2 \mid y$ ۲) $x^2 \mid 3y$ ۳) $x \mid 3y$ ۴) $x^2 \mid 6y^2$

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح a، رابطهٔ $a^2b^2 \mid a^2+b^2$ درست است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۸۹- اگر $a^3 \mid b^2$ کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a^5 \mid b^4$ ۳) $a^6 \mid b^5$ ۴) $a^2 \mid b$

۹۰- اگر از رابطهٔ $x^3 \mid y^m$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x^5 \mid y^{3m-5}$، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

توجه کنید در خیلی از سؤال‌های عادکردن تلاش ما بر آن است که سمت راست را از متغیر تبدیل به یک عدد کنیم! این مدل سؤال‌ها که باید یک متغیر را حذف کنید از سؤال‌های پرتکرار در آزمون‌ها به حساب می‌آیند.

۹۱- اگر $a>1$، $a \mid 7k+4$ و $a \mid 8k+3$ در این صورت: (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a عددی اول است. ۲) a مربع کامل است. ۳) a مضرب ۵ است. ۴) a مضرب ۷ است.

۹۲- اگر هر دو کسر $\frac{5b+2}{a+1}$ و $\frac{6b+5}{a+1}$ عددهایی صحیح باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۳- اگر از دو رابطهٔ $a \mid 7m+x$ و $a \mid 6m+5$ بتوان نتیجه گرفت که $a=\pm1$ است، x کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۴- اگر دو عدد $m+1$ و m^2-2 همواره بر a بخش‌پذیر باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۹۵- اگر $3a+4b \mid 10a+3b$ آن‌گاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر بر $3a+4b$ بخش‌پذیر است؟

۱) $31a$ ۲) $49a$ ۳) $a+2b$ ۴) $b-2a$

۹۶- اگر $a|b+1$ و $a|c+2$، کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره بر a بخش‌پذیر است؟

۱) $bc-1$ ۲) $bc-2$ ۳) $bc+1$ ۴) $bc+2$

۹۷- اگر $7|5k-1$ و $5|4k+3$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $35|20k^2-11k+3$ ۲) $35|20k^2-11k-3$ ۳) $35|15k^2-11k+3$ ۴) $35|15k^2-11k-3$

۹۸- اگر $5|2n+1$، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش‌پذیر است؟ $(n\in\mathbb{Z})$ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۹۹- اگر $3|a+2b$ و $9|a^2+kab-5b^2$ آن‌گاه k کدام عدد می‌تواند باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) -5 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -1

۱۰۰- اگر x^3-3x^2-4x مضرب ۱۱ باشد،آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۰۱- اگر a، عضوی از مجموعهٔ $A=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ باشد، آن‌گاه به ازای چند مقدار a، عدد طبیعی مانند k می‌توان یافت به گونه‌ای که رابطهٔ $a|k^2+2$ برقرار باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۲- اگر $11|a+3b+k$ و $11|5a+4b+3$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰۳- اگر $7|a+3b$ و $7\nmid b$، به ازای چند مقدار k از مجموعهٔ $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -3\le x\le 7\}$، رابطهٔ $7|2a+kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

معادله‌های عادکردنی

۱۰۴- به ازای چند مقدار طبیعی n رابطهٔ $n+2|5n+3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۰۵- بزرگ‌ترین مقدار x که به ازای آن رابطهٔ $3x+2|5x+7$ برقرار است، کدام‌یک از عددهای زیر را می‌شمارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۰۶- چند نقطه روی منحنی $yx+3=2(x+y)$ وجود دارد که هر دو مؤلفهٔ آن، عددهایی طبیعی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۷- به ازای چند مقدار m، عبارت $9m+2$ بر $5m+3$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

۱۰۸- به ازای چند مقدار طبیعی مانند n، رابطهٔ $2n+1|4n^2+5n+4$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۹- به ازای چند عدد صحیح مانند x، حاصل کسر $\frac{x+1}{x^3+1}$ عددی صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشتر از ۳

۱۱۰- چند مقدار صحیح n وجود دارد به گونه‌ای که $n+6$ بر n^2+2 بخش‌پذیر باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۱۱- به ازای چند عدد سه‌رقمی طبیعی، مانند n، رابطهٔ $n^2|2^n$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۲- به ازای چند عدد طبیعی، رابطهٔ $n^2|\binom{n}{2}$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

باقی‌ماندهٔ مربع کامل بر ۸

۱۱۳- باقی‌ماندهٔ a بر ۴، برابر ۳ است باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۸ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱۴- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a=4k+3$ و $b=6k'+1$، باقی‌ماندهٔ a^2+b^2+5 بر ۸ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۱۵- کدام‌یک از عددهای زیر، مربع کامل است؟

۱) ۵۳۳۵۹ ۲) ۵۳۳۶۱ ۳) ۵۳۳۶۳ ۴) ۵۳۳۶۵

۱۱۶- دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۸ کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) بستگی به اعداد ممکن است هر سه گزینه درست باشد.

۱۱۷- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc=3^{97}$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^2+2b^2+3c^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۱۸- اگر a عددی صحیح و زوج باشد و $a+3 \mid b$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a^3+b^2-3 بر ۸ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۱۹- اگر x زوج باشد، باقی‌ماندهٔ x^2 بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۰- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که a^4-b^4 همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۶

۱۲۱- اگر $a+3 \mid b+4$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌ماندهٔ a^2+2a+b^2+3 بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

بخش‌پذیری به کمك اتحادها

۱۲۲- عدد $4\times 2^{10}-9\times 3^4$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟ (هنر ۱۴۰۰)

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۳۷

۱۲۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر به ازای هر عدد صحیح مانند n برقرار است؟

۱) $n^2+2 \mid n^4+4$ ۲) $n^2+2 \mid n^4+8$ ۳) $n^2+2 \mid n^2+1$ ۴) $n^2+2 \mid n^6+8$

۱۲۴- عدد $3^{39}+7^{26}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۱۲۵- عدد $2^{42}-3^{18}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۳۱ ۳) ۶۱ ۴) ۱۰۱

۱۲۶- به ازای کدام مقدار n رابطهٔ $25 \mid 7^n+1$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲۷- به ازای کدام مقدار n عبارت 5^n-2^n بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۱۲۸- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ مانند n رابطهٔ $28 \mid 3^n+1$ برقرار است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

ب.م.م

۱۲۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۱۸۰ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۳۰- اگر $a \mid b$ و عددهای a و b هر دو عددهای منفی باشند، حاصل (a,b) و $(a,0)$ به ترتیب کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $-a,-a$ ۲) $a,-a$ ۳) $-a,-b$ ۴) $a,-b$

۱۳۱- اگر $(663,187)=d$ باشد، $2d+1$ بر کدام بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۱۳۲- اگر $(3m,6m^2)=12$ باشد:

۱) $m=4$ ۲) m هر کدام از مضارب ۴ می‌تواند باشد.

۳) $m=6$ ۴) m هرعددی به فرم $4k+2$ می‌تواند باشد.

۱۳۳- اگر $(a^2,b^2)-(5a,5b)=14$ باشد، بزرگ‌ترین شمارندهٔ دو عدد a و b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۳۴- کدام گزینه درست نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(m,m+1)=1$ ۲) $(4m+1,4m+3)=1$ ۳) $(5m+1,5m+3)=1$ ۴) $(6m+3,6m+5)=1$

۱۳۵- اگر $(a,b)=36$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۳۶- اگر a زوج و b فرد باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $(a,b)=1$ ۲) $(a,b+1)=2$ ۳) $(a,7)=1$ ۴) $(a-b,2)=1$

۱۳۷- اگر $(a,12)=1$ و a عددی طبیعی یک‌رقمی باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۸- اگر $d=(4n+1,18)$ باشد؛ d چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۹- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، اعداد $n-3$ و ۱۳ نسبت به هم اول نیستند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹۲ ۴) ۹۳

۱۴۰- در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(3n^2-2n+6\,,\,3n+5)$ و $d\neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟ (۹۹)

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۴۱- حاصل $(18!-19!\,,\,20!)$ کدام است؟

۱) $18!$ ۲) $2\times 18!$ ۳) $19!$ ۴) $2\times 19!$

۱۴۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطهٔ $(n,24)=12$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۳- اگر $(6a,10b)=44$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $(a,b)=11$ ۲) a مضرب ۵ نیست. ۳) b بر ۶۶ بخش‌پذیر است. ۴) $a+b$ مضرب ۴۴ است.

۱۴۴- a و b نسبت به هم اول‌اند. اگر $c\,|\,a-b$ آن‌گاه (c,a) کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $|c|$

۱۴۵- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، دو عدد به صورت $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟ (۸۹)

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۱۴۶- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹ (۸۸)

۱۴۷- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ (۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۱۴۸- برای چند عدد n از مجموعهٔ $\{41,42,\ldots,100\}$ حاصل $(n+2,7n+1)$ برابر ۱ نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۹- به ازای مقادیر مختلف $a>3$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $15a+3$ و $15a-12$ کدام است؟ (۹۰)

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۵۰- اگر به ازای عدد صحیح k، $d=(2k-3\,,\,k^2+6k-1)$ و $d\neq 1$ باشد، آن‌گاه مقدار d کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۳۳ ۲) ۴۱ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۵۱- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۳۰ مانند n رابطهٔ $(n,10)=2$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۵۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=2^m\times 5^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{40}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x، کدام است؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۸۰ (داخل ۱۴۰۰)

۱۵۳- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x=6^m\times 10^n$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $15x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲۹۶ ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۸۷۰۴

۱۵۴- دو عدد $A=2^3\times 3^4\times 5^3\times 7^2$ و $B=2^5\times 3^2\times 5^p\times 11$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟ (۹۰)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۵۵- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $8a+5b$ و $5a+3b$ کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۱ یا ۷

ک.م.م

۱۵۶- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N} : 6\,|\,x\,,\,8\,|\,x\}$ چه مجموع ارقامی دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۷- اگر $a=[a,b]$ باشد، حاصل (a,b) کدام است؟ (a و b دو عدد طبیعی‌اند.) *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) a ۲) b ۳) ۱ ۴) ab

۱۵۸- حاصل $[(۳۴۱,۴۰۳)+۱,۱۱۲]$ چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۹- با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[(۶۲۷,۴۲۹),۱۵۴]$ کدام است؟ (۹۸)

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

۱۶۰- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به هر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶۱- به ازای چند عدد صحیح n، ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۸ و ۱ $-n^۲$ برابر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۶۲- حاصل $([a^۳,a^۷],a^۴)$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{N})$

۱) $a^۳$ ۲) $a^۴$ ۳) $a^۵$ ۴) $a^۷$

۱۶۳- حاصل $((۴a,۸a),[۳a,۱۲a^۲])$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) a ۲) $|a|$ ۳) $۳|a|$ ۴) $۴|a|$

۱۶۴- اگر داشته باشیم $۳x\,|\,y$ حاصل $([x,y],(۳,y))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $|x|$ ۳) $|y|$ ۴) $۳|y|$

۱۶۵- a و b دو عدد طبیعی هستند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $((a,b),[a,b])=(a,b)$ ۲) $[a,(a,b)]=(a,b)$ ۳) $(b,(a,b))=(a,b)$ ۴) $(a,[a,b])=a$

۱۶۶- اگر $a\,|\,b^۲$ و $a^۲\,|\,c$، آن‌گاه حاصل $[a^۲b,ab^۲c]$ کدام است؟ $(a,b,c\in\mathbb{N})$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

۱) $b^۲c$ ۲) abc ۳) $a^۲b$ ۴) $ab^۲c$

۱۶۷- اگر $(m,۶)=۳$ حاصل $[۵m^۲,۹۰]$ کدام است؟

۱) $۵m^۲$ ۲) $۱۰m^۲$ ۳) $۳۰m^۲$ ۴) $۹۰m^۲$

۱۶۸- به ازای چند عدد طبیعی m رابطهٔ $[m,۱۲۰]=۶۰۰$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۹- اگر a عددی فرد و طبیعی باشد، حاصل $[((a+۱)^۴,۸),(a-۱)(a+۱)]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $a^۲-۱$ ۳) $(a+۱)^۴$ ۴) $۴a+۴$

متباین‌سازی

۱۷۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۵$ و $ab=۵۰۰$ باشد، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۵

۱۷۱- اگر $(a,b)=۷$ باشد، حاصل $(\frac{a^۲}{۷},[a,b])$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $۷|a|$

۱۷۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۷ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها برابر ۴۲۰ است. مجموع دوعدد کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ (۹۰)

۱) ۱۳۳ ۲) ۲۲۴ ۳) ۱۶۱ ۴) ۱۱۹

۱۷۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۸$ و $a+b=۱۰۴$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای $[a,b]$ کدام است؟ (ق.م)

۱) ۳۵۲ ۲) ۳۴۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۲۰

۱۷۴- اگر $[a,b]=(a,b)+۱$ حاصل $a^۲+b^۲$ کدام است؟ (۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۷۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)\neq۱$ و $۵[a,b]=۹(a,b)+۱۱$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟ (۸۴)

۱) ۵۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۳۳ ۴) ۶۶

۱۷۶- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

۱۷۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $2a+b=245$ و $[a,b]=1001$ مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

اعداد اول

۱۷۸- چندتا از عددهای $!10+7$، $!20+13$ و $!30+93$ اول‌اند؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۹- مجموع سه عدد اول برابر ۲۰۰ است حاصل‌ضرب این ۳ عدد:

۱) اول است. ۲) زوج است. ۳) بر ۳ بخش‌پذیر است. ۴) مربع کامل است.

۱۸۰- در یک تقسیم، مقسوم، مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج قسمت، همگی اعداد اول متمایزند. در این صورت:

۱) باقی‌مانده حتماً برابر ۲ است. ۲) مقسوم‌علیه حتماً برابر ۲ است.

۳) باقی‌مانده یا خارج قسمت برابر ۲ است. ۴) مقسوم‌علیه یا خارج قسمت برابر ۲ است.

۱۸۱- اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، P^2 را به کدام صورت نمی‌توان نوشت؟

۱) $8k+1$ ۲) $12k+1$ ۳) $16k+1$ ۴) $24k+1$

۱۸۲- اگر p و q دو عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشند باقی‌ماندهٔ p^2+q بر ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۳- اگر P عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام‌یک از عددهای زیر می‌توانند عددی اول باشند؟

۱) P^2+1 ۲) P^2+2 ۳) P^2+4 ۴) P^2+5

۱۸۴- اگر p یک عدد اول فرد باشد به طوری که p^2+32 مربع کامل باشد، p^2+2 بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۸۵- به ازای چند عدد اول p عدد $5p-1$ مکعب کامل می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۶- اگر p عددی اول و $p|12a$ و $(a,p)=1$ باشد، آن‌گاه p چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۷- a عددی طبیعی و P عددی اول است که $\frac{P+a}{P-a}=18$. عبارت aP برابر با کدام است؟

۱) ۳۲۳ ۲) ۳۸۰ ۳) ۲۵۵ ۴) ۳۴۲

۱۸۸- اگر p عددی اول باشد به طوری که $(a,p^4)=p^3$ و $(b^2,p^3)=p^2$ باشد حاصل (ab,p^6) کدام است؟

۱) p^2 ۲) p^3 ۳) p^4 ۴) p^6

۱۸۹- چندتا از عددهای $2^{17}+1$، $6^{17}-1$ و $2^{22}-1$ اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۰- اگر p یک عدد اول باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقداری از p عدد اول نمی‌شود و همواره مرکب است؟

۱) $3p+1$ ۲) 4^p+1 ۳) p^2+2 ۴) $2^{2p}-1$

۱۹۱- به حاصل‌ضرب همهٔ عددهای اول دورقمی یک واحد اضافه می‌کنیم عدد جدید اول .... و .... شمارندهٔ دورقمی اول دارد.

۱) است ـ صفر ۲) نیست ـ صفر ۳) است ـ دست‌کم یک ۴) نیست ـ دست‌کم یک

۱۹۲- به ازای چند مقدار $n \in \mathbb{N}$ هر سه عدد n، $n+4$ و $n+8$ اول‌اند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۳- سمت راست عدد $30! \times 125^6$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۱۹۴- اگر P بزرگ‌ترین عدد اولی باشد که در رابطهٔ $P|25!$ صدق کند، کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $P^2|n!$ برقرار باشد، چند است؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۰ ۳) ۳۶۱ ۴) ۵۲۹

۱۹۵- اگر r,q,p سه عدد اول متمایز باشند به طوری که $p<q<r$ و $p^2+q^2+r^2=150$ باشد، $r+q-p$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

الگوریتم تقسیم

۱۹۶- در تقسیم چند عدد سه‌رقمی بر ۲۱، باقی‌مانده برابر ۱۵ می‌شود؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

۱۹۷- باقی‌ماندهٔ عدد ۱۰۷- در تقسیم به ۱۳ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۱۰

۱۹۸- فرض کنید مجموع خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۵، عدد ۵ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۴ بخش‌پذیر است؟ *(هنر ۱۴۰۰)*

۱) $a-5$ ۲) $a-3$ ۳) $a+3$ ۴) $a+5$

۱۹۹- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۵ و ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-2b$ بر ۱۱ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۰۰- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۱۴ برابر ۱ و b بر ۲۱ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a+3b$ بر ۷ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۱- اگر عدد x در تقسیم به ۲۰، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ $7x+1$ بر ۱۴ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰۲- اگر باقی‌ماندهٔ m بر ۲۴ برابر ۷ و باقی‌ماندهٔ n بر ۲۰ برابر ۱۷ باشد، باقی‌ماندهٔ $5m-3n$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۰۳- اگر n در تقسیم بر ۶، باقی‌مانده‌ای برابر ۴ و در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۶ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ آن بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۰۴- چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۲۰۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶ برابر ۲ و بر ۸ برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $5a+3$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۲۰۶- اگر باقی‌ماندهٔ a بر دو عدد ۱۳ و ۷ به ترتیب برابر ۷ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۹۱ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

تا این‌جا سؤال‌های مربوط به باقی‌مانده را دیدید، از این‌جا به بعد خارج قسمت هم وارد می‌شود.

۲۰۷- خارج قسمت تقسیم عدد ۱!-۱۳ بر ۱۳ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)*

۱) !۱۲ ۲) ۱-!۱۲ ۳) ۱+!۱۲ ۴) ۱۱-!۱۳

۲۰۸- مقسوم و خارج قسمت یک تقسیم برابر ۲۴۶ و ۱۸ است. مقسوم‌علیه چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۲۰۹- در یک تقسیم اگر ۵۳ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۵ واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و از باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۱۰- در تقسیم عددی بر ۱۷ باقی‌مانده برابر ۱۳ شده است. اگر ۶۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم خارج‌قسمت .... واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر .... می‌شود.

۱) ۳ ـ ۶ ۲) ۳ ـ ۱۶ ۳) ۴ ـ ۶ ۴) ۴ ـ ۱۶

۲۱۱- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟ *(۸۵)*

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

توجه کنید که در خیلی از سؤال‌های الگوریتم تقسیم، چیزی که در نهایت باعث حل سؤال می‌شود رابطهٔ b "r" ۰ است.

۲۱۲- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a>9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{13}{22}$ ۲) $\frac{6}{11}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{11}$ *(داخل ۱۴۰۰)*

۲۱۳- مجموع باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-8$ بر ۳۶، برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{6}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{4}{13}$ ۴) $\frac{3}{13}$ *(خارج ۱۴۰۰)*

۲۱۴- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌مانده توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟ *(۸۵)*

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۱۵- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ *(۸۴)*

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۱۶- در تقسیم عدد ۹۱ بر عدد b، باقی‌مانده، مربع خارج قسمت است. مقسوم‌علیه چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۲۱۷- اگر a و b اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج قسمت باشد، آن‌گاه $2a+b$ کدام می‌تواند باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۶۲ ۲) ۲۵ ۳) ۱۴۹ ۴) ۸۷

۲۱۸- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و $b \mid a-1$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر b کدام است؟ $(b>1)$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) به a بستگی دارد.

۲۱۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۱۵، از باقی‌ماندهٔ تقسیم $(-a)$ بر ۱۵، یک واحد بیشتر است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی a کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲۲۰- دو عدد طبیعی ۱۰۷ و ۸۳ را بر عدد طبیعی b تقسیم نموده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۳ و ۵ شده است. عدد b، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)*

۲۲۱- عدد طبیعی a، فرد است. اگر در تقسیم a بر ۲۰۰، باقی‌مانده یک عدد مربع کامل باشد، آن‌گاه رقم دهگان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۴ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۲۲۲- در تقسیم عددی بر ۲۳، اگر x واحد به مقسوم اضافه کنیم، به خارج قسمت، ۳ واحد اضافه شده، باقی‌مانده $\frac{1}{3}$ می‌شود. کم‌ترین مقدار x کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۵۷

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

۲۲۳- باقی‌ماندهٔ عدد فرد a در تقسیم به ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۲۴- اگر a فرد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، فرم کلی آن به کدام صورت است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $3k$ ۲) $9k+3$ ۳) $9k+6$ ۴) $6k+3$

۲۲۵- اگر سه مجموعهٔ $A=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=2k\}$ ، $B=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k+1\}$ و C، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز کنند، فرم کلی اعضای مجموعهٔ C به کدام صورت است؟

۱) $4k+3$ ۲) $3k+1$ ۳) $2k$ ۴) $6k+1$ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۲۶- اگر رابطهٔ $a \mid n^3-n$ برقرار باشد، a برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۵۱

۲۲۷- یک عدد صحیح فرد را در عدد قبلی و بعدی‌اش ضرب می‌کنیم؛ عدد به دست آمده بر بزرگ‌ترین عددی که همواره بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۲۸- دو عدد فرد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، باقی‌ماندهٔ عدد حاصل بر ۸ و ۱۲ به ترتیب برابر .... و .... است.

۱) ۱ ـ ۲ ۲) ۱ ـ ۴ ۳) ۲ ـ ۲ ۴) ۲ ـ ۴ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۲۹- باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۳۰- اگر k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، باقی‌ماندهٔ $4k+1$ در تقسیم به ۱۶ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۱- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم k^2+1 بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳۲- اگر باقی‌ماندهٔ عدد a در تقسیم به ۷ فرد باشد، باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۷ برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳- اگر باقی‌ماندهٔ عددی در تقسیم بر ۴، برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ کدام است؟

۱) همواره ۳ ۲) ۳ یا ۵ ۳) ۳ یا ۷ ۴) ۵ یا ۷

۲۳۴- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۲۴ برابر ۱۵ باشد، باقی‌ماندهٔ $\frac{a}{3}$ بر ۱۶ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۳ یا ۱۱ ۴) ۵ یا ۱۳

۲۳۵- به ازای کدام مقدار m می‌توان ثابت کرد که همواره یکی از عددهای a یا $a+4$ یا $a+m$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۳۶- اگر $21 \mid a+5$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-2$ بر ۱۴، چند عضو از مجموعهٔ $\{0,1,2,\ldots,13\}$ می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳۷- اگر a در تقسیم بر ۲۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+3$ بر ۱۵ برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

آزمـــون

۲۳۸- از رابطهٔ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a\,|\,bc$ ۲) $b\,|\,ad$ ۳) $c\,|\,ab$ ۴) $d\,|\,abc$

۲۳۹- اگر $a\,|\,۱۸$ و $۱۸\,|\,b$، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a,b\in\mathbb{N})$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) $۶\,|\,b$ ۲) $a\,|\,۳b$ ۳) $a\,|\,۵۴$ ۴) $۳a\,|\,b$

۲۴۰- اگر $a\neq ۱$ عددی طبیعی باشد که هر دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند، کم‌ترین مقدار طبیعی k، برای برقراری این رابطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۴۱- به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n+۱\,|\,n^۵+۳n^۲-n+۶$ درست است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۲۴۲- اگر $a^۲\,|\,a+b$، آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر، لزوماً صحیح نیست؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) $a^۲\,|\,b^۲$ ۲) $a\,|\,۳b-۲a$ ۳) $a^۲\,|\,a-b$ ۴) $a^۲\,|\,a^۲+b^۲$

۲۴۳- اگر $a\,|\,b+۳$ و $a\,|\,c-۲$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $bc+۱$ بر a، همواره برابر کدام است؟ $(a\geq ۵)$ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $a-۵$ ۴) صفر

۲۴۴- اگر $a^۳\,|\,۴۸$ و $b^۲\,|\,۳۷۵$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)*

۱) ۲۱ ۲) ۲۷ ۳) ۸۱ ۴) ۸۷

۲۴۵- به ازای کدام مقادیر m و n، هر دو رابطهٔ $۳^n\,|\,۳^m$ و $۵^{۲m}\,|\,۵^{n+۳}$ درست است؟

۱) $m=۴,n=۶$ ۲) $m=۵,n=۷$ ۳) $m=۴,n=۸$ ۴) $m=۵,n=۸$

۲۴۶- اگر $a>۱$، $a\,|\,۹k+۴$ و $a\,|\,۵k+m$، به ازای کدام مقدار m، ثابت می‌شود که a عددی اول است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۴۷- به ازای چند مقدار طبیعی n، رابطهٔ $n^۳\,|\,(n+۱)!$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۲۴۸- اگر عدد a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و $a\nmid ۲۲۵$، در این صورت $(a,۱۵)$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۳ یا ۵

۲۴۹- اگر $(a,b)=d>۱$, $d\,|\,a^۲-b+۷$، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

۲۵۰- اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم a بر ۱۹ به ترتیب برابر ۷ و q باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $a+۴۹$ بر ۱۹ به ترتیب برابر .... و .... است.

۱) صفر ـ $q+۱$ ۲) ۱۸ ـ $q+۱$ ۳) صفر ـ $q+۲$ ۴) ۱۸ ـ $q+۲$

۲۵۱- اگر n عددی طبیعی و ب.م.م دو عدد $n+۲$ و $۹n-۱$، عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵۲- در تقسیم a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده، ۳۴ و خارج قسمت، عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم‌تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۳- در تقسیم عدد a بر ۸، باقی‌مانده برابر جذر خارج قسمت است. رقم یکان بزرگ‌ترین مقدار مقسوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۵۴- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a+۱۰۰$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر با ۱۰ و ۱۱ باشند، کم‌ترین مقدار b کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) ۶۶ ۴) ۹۹

۲۵۵- در تقسیمی، مقسوم، ۲۰ برابر باقی‌مانده و باقی‌مانده ماکزیمم است، مقسوم‌علیه حداکثر کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)*

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۵۶- عدد a زوج است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست، باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ کدام است؟

۱) همواره ۲ ۲) صفر یا ۲ ۳) ۲ یا ۴ ۴) صفر یا ۳

۲۵۷- اگر یکی از عددهای a، $a+۵$، $a+۱۰$ و b همواره بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ $b-a$ بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۹- گزینهٔ ۳ (۳) واضح است؛ مثلاً $۶ \mid ۳\times۲$ ولی $۶ \nmid ۲$ و $۶ \nmid ۳$.
بقیه را هم نگاهی بیندازیم.
(۱) که از ویژگی‌های اصلی عادکردن است.

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \quad (I)$$
$$b \mid c \Rightarrow c = bq' \quad (II)$$
$$\xrightarrow{\text{با جای‌گذاری (I) در (II)}} c = a\underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow c = q''a \Rightarrow a \mid c$$

(۲) هم درست است. وقتی $\frac{b}{a}$ صحیح است، $\frac{bc}{a}$ هم صحیح می‌شود.
(۴) هم درست است. اگر a دو عدد را عاد کند، جمع آن‌ها را هم عاد می‌کند؛ چون:

$$\begin{matrix} a \mid b \Rightarrow aq = b \\ a \mid c \Rightarrow aq' = c \end{matrix} \xrightarrow{+} a\underbrace{(q+q')}_{k} = b + c \Rightarrow a \mid b + c$$

روش دوم برای رد کردن گزینهٔ (۳) به راحتی می‌توانیم یک مثال نقض پیدا کنیم:
$۶ \mid ۹\times۴ \Rightarrow ۶ \nmid ۴ \vee ۶ \nmid ۹$

۷۰- گزینهٔ ۲ (الف) نادرست است؛ مثلاً $۵ \mid ۳+۲$ ولی $۵ \nmid ۲$ و $۵ \nmid ۳$.
(ب) درست است؛

$$bc \mid a \Rightarrow a = bcq \Rightarrow \begin{cases} a = (bq)c = kc \Rightarrow c \mid a \\ a = (cq)b = kb \Rightarrow b \mid a \end{cases}$$

(پ) هم نادرست است؛ مثلاً $۲ \mid ۴$ ولی $۲ \nmid ۴+۱$؛ پس فقط یکی درست شد.

۷۱- گزینهٔ ۱ سؤال ساده‌ای است و در حقیقت یکی از ویژگی‌های عادکردن است. می‌دانیم اگر $ab \mid c$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid c$ و $b \mid c$ پس (۱) درست است. (در سؤال‌های قبل ثابت کردیم.)
اما اگر $c = ۶$، $b = ۳$ و $a = ۲$ (۲) و (۴) رد می‌شوند. برای رد (۳) کافی است a را برابر ۲، b را برابر ۳− و c را برابر ۶ فرض کنید.

۷۲- گزینهٔ ۴ این هم سؤال بسیار ساده‌ای است. داریم:

$$\begin{matrix} a-b \mid a-b \\ a-b \mid a \end{matrix} \xrightarrow{(-)} a-b \mid b$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. برای مثال فرض کنید $a - b = ۳$ و $a = ۱۵$ باشد در این‌صورت رابطهٔ $a-b \mid a$ به ازای $a = ۱۵$ و $b = ۱۲$ برقرار است. اما به ازای این عددها فقط گزینهٔ (۴) برقرار است.

۷۳- گزینهٔ ۲ (۱) درست است، چون:

$$\begin{array}{l} a+b \mid a+c \\ a+b \mid 2c \end{array} \xrightarrow{(-)} a+b \mid a-c$$

(۳) هم درست است، چون:

$$\begin{array}{l} a+b \mid 2a+2c \\ a+b \mid 2c \end{array} \xrightarrow{(-)} a+b \mid 2a$$

(۴) هم درست است، چون:

$$a+b \mid a+c-(a+b)=c-b \xrightarrow{\times 2}$$

$$\begin{array}{l} a+b \mid 2c-2b \\ a+b \mid 2c \end{array} \xrightarrow{(-)} a+b \mid 2b$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $a=1$، $b=1$ و $c=-1$ باشد در این قسمت هر دو رابطهٔ $a-b \mid a+c$ و $a+b \mid 2c$ درست است، اما $a+b \mid 2b+c$ می‌شود $2 \mid 1$ که نادرست است.

۷۴- گزینهٔ ۳ برای تبدیل یک تساوی به رابطهٔ عادکردن، معمولاً جمع به کارمان نمی‌آید. بنابراین در این نوع سؤال‌ها سعی کنید ضرب بسازید.

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-b^2=c^2 \Rightarrow (a-b)\overbrace{(a+b)}^{q}=c^2$$

پس $a-b \mid c^2$.

روش دوم فرض کنید $c=5$ و $b=12$ و $a=13$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $12 \mid 5+3$ نادرست است.

(۲) $5 \mid 13-12$ نادرست است.

(۳) $1 \mid 25$ درست است. ✓

(۴) $17 \mid 169$ نادرست است.

۷۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آن‌گاه $a=\pm b$ است، بنابراین دو حالت رخ می‌دهد:

$$n^2=6n-5 \Rightarrow (n-1)(n-5)=0 \Rightarrow n=1, n=5$$

$n^2=5-6n \Rightarrow$ معادله ریشهٔ صحیح ندارد.

پس فقط به ازای دو مقدار $n=1$ و $n=5$ رابطه برقرار است.

۷۶- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر ☁ $\mid 0$ آن‌گاه ☁ $=0$

(*چون تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیره خود صفره*) بنابراین:

$$x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x-1)(x-2)=0$$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=1$ یا $x=2$

حالا بررسی می‌کنیم رابطهٔ $2^x+1 \mid 2x+1$ به ازای چندتا از این عددها برقرار است.

$x=0 \Rightarrow 1+1 \mid 1$ ✗

$x=1 \Rightarrow 2+1 \mid 2+1$ ✓

$x=2 \Rightarrow 2^2+1 \mid 2\times 2+1$ ✓

۷۷- گزینهٔ ۲ ۴۷ عددی اول است، پس هر چه‌قدر اعداد کوچک‌تر از آن را ضرب کنیم، ۴۷ به وجود نمی‌آید، یعنی $47 \nmid 43!$. ولی $46 \mid 43!$ چون $46=2\times 23$ است و ... .

۷۸- گزینهٔ ۲ $20!$ بر $1,2,3,4,\cdots,9$ بخش‌پذیر است. ۱۲ هم بر $1,2,3,4,6$ از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است، پس $20!+12$ بر اعداد $1,2,3,4,6$ بخش‌پذیر می‌شود. اما این عدد بر $5,7,8,9$ نمی‌خورد. چرا؟ مثلاً $20!+\overbrace{12}^{10+2}=5k+2$، یعنی در تقسیم بر ۵، باقی‌ماندهٔ دو می‌آورد. شبیه همین برای ۷، ۸ و ۹ هم اتفاق می‌افتد. خلاصه این‌که بر ۴ عدد طبیعی بخش‌پذیر نیست.

۷۹- گزینهٔ ۳ روش اول عبارت $20!$ را تجزیه می‌کنیم:

$$20!=(2^2\times 5)\times 19\times(2\times 3^2)\times 17\times(2^4)\times(3\times 5)$$
$$\times(2\times 7)\times 13\times(2^2\times 3)\times 11\times(2\times 5)\times(3)^2\times(2^3)\times 7$$
$$\times(2\times 3)\times 5\times(2^2)\times 3\times 2=2^{18}\times 3^8\times 5^4\times 7^2\times 11\times 13$$
$$\times 17\times 19$$

بنابراین مجموع توان‌ها یا $\sum_{i=1} a_i$ برابر است با:

$$18+8+4+2+1+1+1+1=36$$

روش دوم برای پیداکردن توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر می‌توان استفاده کرد:

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$$

با این روش می‌توان توان عدد ۲ و ۳ را در تجزیهٔ $20!$ سریع‌تر به دست آورد.

$$[\frac{20}{2}]+[\frac{20}{4}]+[\frac{20}{8}]+[\frac{20}{16}]=10+5+2+1=18$$

$$[\frac{20}{3}]+[\frac{20}{9}]=6+2=8$$

پیداکردن توان بقیهٔ عددهای اول هم که ساده است.

۸۰- گزینهٔ ۴ $x \mid 12, 12 \mid y \Rightarrow x \mid y \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 2} x \mid 2y$

پس (۱) درست است.

(۲) درست است. $12 \mid y \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 3} 4 \mid y$

(۳) درست است. $x \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 2} x \mid 24$

(۴) درست نیست برای مثال اگر $x=y=12$ باشد (۴) رد می‌شود.

کافی است x و y را برابر ۱۲ فرض کنیم در این‌صورت (۴) رد می‌شود.

۸۱- گزینهٔ ۲ دو رابطه را به یک رابطه تبدیل می‌کنیم. $4 \mid x$، پس $4q=x$ می‌شود. با جای‌گذاری، $4q \mid 84$ به دست می‌آید. حالا دو طرف به ۴ ساده شده، پس $q \mid 21$. حالا q چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $q=\pm 1$، $q=\pm 3$، $q=\pm 7$ و $q=\pm 21$ می‌تواند باشد. به ازای هر q، یک جواب برای x به دست می‌آید، پس x، هشت عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد.

۸۲- گزینهٔ ۴ $2 \mid a$ پس $a=2q$ می‌شود. با جای‌گذاری $2qb=60$ پس $bq=30$ و این یعنی $b \mid 30$ (*نه این‌که حتماً* $b=30$ *بشود.*)

روش دوم فرض کنید $a=4$ و $b=15$ باشد در این‌صورت هر دو رابطهٔ $2 \mid 4$ و $ab=60$ درست است اما سه گزینهٔ اول رد می‌شوند.

۸۳- گزینهٔ ۳ از $a \mid b$ نتیجه می‌شود $aq=b$. از $b \mid 2a$ هم داریم $bq'=2a$. با جای‌گذاری b می‌شود: $aqq'=2a \xrightarrow{\div a} qq'=2$

حالا داریم:

$$\begin{cases} q=1, q'=2 \Rightarrow a=b \\ \text{یا} \\ q=2, q'=1 \Rightarrow 2a=b \end{cases}$$

روش دوم فرض کنید $a=1$ و $b=2$ در این‌صورت هر دو رابطهٔ $a \mid b$ و $b \mid 2a$ درست می‌شود اما گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند.

حالا فرض کنید $a=1$ و $b=1$ در این‌صورت گزینهٔ (۴) نیز رد می‌شود.

۸۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $x^2-1=(x-1)(x+1)$ بنابراین اگر بخواهیم x^2-1 بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد یعنی یا $x-1$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و یا $x+1$. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

$$x-1=13k \Rightarrow x=13k+1 \Rightarrow x=1,14$$
$$x+1=13k \Rightarrow x=13k-1 \Rightarrow x=12$$

پس رابطه به ازای سه عدد برقرار است.

۸۵- گزینهٔ ۲ عدد را x^2 می‌نامیم. داریم:

$$18|x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2\times 3^2}\in\mathbb{Z}$$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، x حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین: $x=6q \Rightarrow x^2=36q^2$

از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$10000\le 36q^2<100000$$
$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 100\le 6q<100\sqrt{10}$$
$$100\le 6q<316 \Rightarrow 16/6<q<52/6$$

بنابراین $q\in\{17,18,\dots,52\}$ و در نتیجه به ازای $52-17+1=36$ عدد رابطه برقرار است.

۸۶- گزینهٔ ۲ فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت x^3 است. اگر x^3 بر ۹ بخش‌پذیر باشد، x باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$$x=3q \Rightarrow x^3=27q^3$$

حالا مقادیر سه و چهار رقمی x^3 را پیدا می‌کنیم:

$$100\le x^3<10000 \Rightarrow 100\le 27q^3<10000$$
$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{100}\le 3q<\sqrt[3]{10000}$$
$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}}\le 3q\le 10\sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1}\le 3q\le 10\times 2/1$$
$$\Rightarrow 4/76\le 3q\le 21 \Rightarrow 1/5\le q\le 7$$
$$\Rightarrow q=2,3,4,5,6,7$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

۸۷- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در هر رابطهٔ عادکردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد. داریم:

(۲) $2x^2|3y \xrightarrow{\div 2\ \text{سمت چپ}} x^2|3y$ ✓

(۳) $2x^2|3y \xrightarrow{\div 2x\ \text{سمت چپ}} x|3y$

(۴) $2x^2|3y \xrightarrow{\div 2\ \text{سمت چپ}} x^2|3y \xrightarrow{\times 2y\ \text{سمت راست}} x^2|6y^2$

اما گزینه (۱) درست نیست.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. فرض کنید $x=3$ و $y=6$ باشد، در این‌صورت رابطهٔ $2x^2|3y$ درست است $(18|18)$. اما گزینهٔ (۱) نادرست است $(6\nmid 18)$.

۸۸- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{array}{r} a^2b^2|a^2+b^2 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } b^2]{\text{سمت چپ}} a^2|a^2+b^2 \\ \text{از طرفی: } a^2|a^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a^2|b^2 \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2b^2|a^2+b^2 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } a^2]{\text{سمت چپ}} b^2|a^2+b^2 \\ \text{از طرفی: } b^2|b^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} b^2|a^2 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت $a^2=b^2$.

با جای‌گذاری در رابطهٔ صورت سؤال داریم: $a^4|2a^2$.

اگر a صفر باشد، رابطهٔ $0|0$ به دست می‌آید که درست است. اگر $a\neq 0$ باشد، دو طرف را بر a^2 ساده می‌کنیم: $a^2|2 \Rightarrow a^2=1$ یا $a^2=2$

بنابراین رابطه‌ای که داده، فقط به ازای سه مقدار $a=\pm1,0$ برقرار می‌شود.

۸۹- گزینهٔ ۴ در بخش آموزش تقسیم در صورتی ترکیب شرطی $a^m|b^n \Rightarrow a^r|b^s$ درست است که $nr\le ms$ باشد، مثلاً

$a^3|b^2 \Rightarrow a|b$ درست است؛ چون $2\times1\le3\times1$.

$a^3|b^2 \Rightarrow a^5|b^4$ درست است؛ چون $2\times5\le3\times4$.

$a^3|b^2 \Rightarrow a^6|b^5$ هم درست است؛ چون $2\times6\le3\times5$.

$a^3|b^2 \Rightarrow a^2|b$ نادرست است؛ چون $2\times2\not\le3\times1$.

برای این‌که درک بهتری داشته باشید، یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنیم؛ مثلاً از $a^3|b^2$ نتیجه می‌گیریم $a^5|b^4$. $\{a^2|a^3,\underbrace{a^3|b^2}_{2} \Rightarrow \underbrace{a^2|b^2}_{1}\}$

حالا دو طرف (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم. یادتان هست که اگر $a|b$ و $c|d$ آن‌گاه $ac|bd$؛ پس $a^3\times a^2|b^2\times b^2$ یعنی $a^5|b^4$.

۹۰- گزینهٔ ۱ دیدیم که رابطهٔ $x^a|y^b \Rightarrow x^{a'}|y^{b'}$ درست است که:

$$\underbrace{ba'}_{\text{دور}\times\text{دور}} \le \underbrace{ab'}_{\text{نزدیک}\times\text{نزدیک}}$$

بنابراین چون $x^3|y^m \Rightarrow x^5|y^{3m-5}$ درست است، پس:

$$5m\le 3(3m-5) \Rightarrow 5m\le 9m-15$$
$$\Rightarrow 4m\ge 15 \Rightarrow m\ge 3/75$$

پس m دست‌کم باید برابر ۴ باشد.

۹۱- گزینهٔ ۱

$$a|7k+4 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 8} a|56k+32$$
$$a|8k+3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 7} a|56k+21$$
$$\xrightarrow{(-)} a|11 \Rightarrow a=\pm1,\pm11$$

اما با توجه به این‌که گفته‌شده $a>1$ است، پس فقط مقدار $a=11$ قابل قبول است، در نتیجه a عددی اول است.

۹۲- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم هر دو کسر صحیح باشند، پس صورت‌ها بر مخرج بخش‌پذیرند، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} a+1|5b+2 \xrightarrow{\times 6} a+1|30b+12 \\ a+1|6b+5 \xrightarrow{\times 5} a+1|30b+25 \end{array}\right. \Rightarrow a+1|13$$

حالا داریم:

$$\begin{cases} a+1=\pm1 \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases} \\ a+1=\pm13 \begin{cases} a=12 \\ a=-14 \end{cases} \end{cases}$$

پس a چهار مقدار صحیح می‌تواند باشد.

۹۳- گزینهٔ ۱

$$\left.\begin{array}{l} a|7m+x \xrightarrow{\times 6} a|42m+6x \\ a|6m+5 \xrightarrow{\times 7} a|42m+35 \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} a|6x-35$$

تنها مقسوم‌علیه‌های $6x-35$ باید ±1 باشند، این یعنی باید $6x-35=1$ (یعنی $x=6$) یا $6x-35=-1$ باشد (یعنی $x=\frac{34}{6}$ که *نمی‌شه*).

۹۴- گزینهٔ ۳ باید کاری کنیم که m از سمت راست رابطه‌ها حذف شود، چون داریم $a|m^2-2$ پس سمت راست رابطهٔ $a|m+1$ را در

پاسخنامهٔ تشریحی

۱− m ضرب می‌کنیم تا عبارت به دست آمده فقط جملهٔ m^2 داشته باشد.

$$a \mid m+1 \xrightarrow{(m-1)\times\text{سمت راست}} a \mid m^2-1$$

از طرفی: $a \mid m^2-2$

$$\xrightarrow{(-)} a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۹۵- گزینهٔ ۱ با توجه به گزینه‌های ۱ و ۲ سعی کنیم b را از بین ببریم. می‌دانیم اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آن‌گاه $a \mid bm \pm cn$، یعنی a هر ترکیب خطی b و c را عاد می‌کند. حالا:

$$3a+4b \mid 3a+4b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b \mid 9a+12b$$

$$3a+4b \mid 10a+3b \xrightarrow{\times 4} 3a+4b \mid 40a+12b$$

$$\xrightarrow{(-)} 3a+4b \mid 31a$$

۹۶- گزینهٔ ۲

$$\begin{cases} a \mid b+1 \xrightarrow{2\times\text{سمت راست}} a \mid 2b+2 \\ a \mid c+2 \xrightarrow{b\times\text{سمت راست}} a \mid bc+2b \end{cases} \xrightarrow{(-)} a \mid bc-2$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اگر $a=5$، $b=4$ و $c=3$ باشد هر دو رابطهٔ $a \mid b+1$ و $a \mid c+2$ درست می‌شود. حالا به ازای این مقادیر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

۱ $bc-1=12-1=11$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۲ $bc-2=12-2=10$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۳ $bc+1=12+1=13$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۴ $bc+2=12+2=14$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

بنابراین ۲ پاسخ سؤال است.

۹۷- گزینهٔ ۳ دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{matrix} 5 \mid 4k+3 \\ 7 \mid 5k-1 \end{matrix} \xrightarrow{\times} 35 \mid 20k^2+15k-4k-3$$

$$\Rightarrow 35 \mid 20k^2+11k-3$$

همان‌طور که می‌بینید چنین چیزی در گزینه‌ها وجود ندارد. اما با توجه به این‌که $35 \mid 35k^2$ است اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{matrix} 35 \mid 20k^2+11k-3 \\ 35 \mid 35k^2 \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} 35 \mid 15k^2-11k+3$$

روش دوم اگر $k=3$ باشد هر دو رابطه برقرار است اما در میان گزینه‌ها فقط ۳ به ازای $k=3$ درست می‌شود:

$$35 \mid 15\times 9-11\times 3+3 \Rightarrow 35 \mid 105$$

۹۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $14n^2+19n+6=(7n+6)(2n+1)$

از طرفی:

$$\begin{matrix} 5 \mid 2n+1 \\ 5 \mid 5n+5 \end{matrix} \xrightarrow{(+)} 5 \mid 7n+6$$

هر دو عدد $2n+1$ و $7n+6$ بر ۵ بخش‌پذیرند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. n را طوری انتخاب می‌کنیم که: $5 \mid 2n+1$ برای مثال فرض می‌کنیم $n=2$ باشد. حالا به ازای $n=2$ مقدار $4n^2+19n+6$ را پیدا می‌کنیم:

$$n=2 \Rightarrow 14\times 4+19\times 2+6=100$$

که در میان گزینه‌ها فقط بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۹۹- گزینهٔ ۱ اگر طرفین را به توان دو برسانیم داریم:

$$3 \mid a+2b \xrightarrow{\text{به توان } 2} 9 \mid a^2+4b^2+4ab$$

اما ما می‌خواهیم عبارت سمت راست $-5b^2$ داشته باشد، بنابراین با توجه به این‌که $9 \mid 9b^2$، دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} 9 \mid a^2+4b^2+4ab \\ 9 \mid 9b^2 \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} 9 \mid a^2+4ab-5b^2$$

در میان گزینه‌ها عدد ۴ وجود ندارد. با توجه به این‌که $9 \mid 9ab$ این رابطه را از رابطهٔ به دست آمده کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} 9 \mid a^2+4ab-5b^2 \\ 9 \mid 9ab \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} 9 \mid a^2-5ab-5b^2$$

پس k می‌تواند برابر ۵− باشد.

روش دوم اگر $a=b=1$ باشد، رابطه به صورت: $9 \mid 1+k-5$ درمی‌آید که در میان گزینه‌ها فقط به ازای $k=-5$ برقرار می‌شود.

۱۰۰- گزینهٔ ۴ رابطه را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-3x^2-4x=x(x^2-3x-4)=x(x-4)(x+1)$$

این عبارت باید مضرب ۱۱ باشد؛ یعنی هر یک از سه جملهٔ x، $(x-4)$ و $(x+1)$ می‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند. هر سه حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x=11k \xrightarrow{k=9} x_{max}=99$$

$$x-4=11k' \Rightarrow x=11k'+4 \xrightarrow{k'=8} x_{max}=92$$

$$x+1=11k'' \Rightarrow x=11k''-1 \xrightarrow{k=9} x_{max}=98$$

در میان این عددها، ۹۹ از همه بزرگ‌تر است: $9+9=18$

۱۰۱- گزینهٔ ۲ اعضای مجموعهٔ A به صورت زیر است:

$$A=\{2,4,8,16,\dots\}$$

می‌دانیم $a \in A$ است. اگر $a=2$ باشد، داریم: $2 \mid k^2+2$

روشن است اگر k زوج باشد، این رابطه برقرار است، پس برای $a=2$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد که رابطه برقرار باشد.

اگر $a=4$ باشد، رابطه به صورت $4 \mid k^2+2$ خواهد بود. مشخص است که اگر k فرد باشد، k^2+2 نیز فرد است و رابطه برقرار نیست. اما اگر k زوج باشد، داریم: $k=2q \Rightarrow k^2=4q^2 \Rightarrow k^2+2=4q^2+2$

که این عبارت بر ۴ بخش‌پذیر نیست، چون در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که به ازای $a=8$، $a=16$ و ... نیز هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

پس فقط به ازای $a=2$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد.

۱۰۲- گزینهٔ ۱

$$11 \mid 5a+4b+3 \quad (I)$$

$$11 \mid a+3b+k \xrightarrow{\times 5} 11 \mid 5a+15b+5k \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} 11 \mid 5a+4b+3 \\ 11 \mid 5a+15b+5k \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{matrix} 11 \mid 11b+5k-3 \\ 11 \mid 11b \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(-)} 11 \mid 5k-3$$

در میان گزینه‌ها کوچک‌ترین عدد، ۵ است که به ازای همان $k=5$ عبارت $5k-3$ برابر ۲۲ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

(در فصل بعد خواهید دید که این مدل سؤال‌ها را با معادلهٔ هم‌نهشتی به صورت ساده‌تری می‌توان پاسخ داد.)

۱۰۳- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{matrix} 7 \mid a+3b \xrightarrow{\times 2} 7 \mid 2a+6b \\ \text{از طرفی: } 7 \mid 7b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \mid 2a-b$$

می‌خواهیم $7|2a+kb$، بنابراین: $\begin{matrix}7|2a-b\\7|2a+kb\end{matrix}\xrightarrow{(-)}7|(k+1)b$

b بر ۷ بخش‌پذیر نیست، پس $k+1$ باید مضرب ۷ باشد.

$$k+1=7q\Rightarrow k=7q-1$$

می‌دانیم $-3\le k\le 7$ است. در نتیجه:

$$-3\le 7q-1\le 7\Rightarrow -2\le 7q\le 8$$

این رابطه به ازای $-2\le 7q\le 8$ و $q=0$ برقرار است یعنی ۲ مقدار $k=-1$ و $k=6$.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ **روش اول** می‌دانیم هر عددی مثل $n+2$ خودش را می‌شمارد. سمت راست آن را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$n+2|n+2\xrightarrow{5\times\text{سمت راست}}n+2|5n+10\quad(I)$$

بر طبق صورت سؤال می‌دانیم: $n+2|5n+3\quad(II)$

از طرفی می‌دانیم: $\begin{cases}a|b\\a|c\end{cases}\Rightarrow a|b-c$

با توجه به این نکته دو رابطهٔ (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix}n+2|5n+10\\n+2|5n+3\end{matrix}\xrightarrow{(-)}n+2|-7\Rightarrow\begin{cases}n+2=7\Rightarrow n=5\\n+2=1\Rightarrow n=-1\\n+2=-1\Rightarrow n=-3\\n+2=-7\Rightarrow n=-9\end{cases}$$

که در میان آن‌ها فقط $n=5$ طبیعی است.

روش دوم ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n+2=0\Rightarrow n=-2\Rightarrow 5\times(-2)+3=-7$$

$n+2$ عدد -7 را می‌شمارد. بنابراین:

$$n+2|-7\Rightarrow\begin{cases}n+2=1\\n+2=-1\\n+2=-7\\n+2=7\end{cases}$$

و از این‌جا به بعد مثل روش اول عمل می‌کنیم.

۱۰۵- گزینهٔ ۳ سمت راست رابطه را تبدیل به یک عدد می‌کنیم:

$$\begin{matrix}3x+2|5x+7\xrightarrow{\times3}3x+2|15x+21\\3x+2|3x+2\xrightarrow{\times5}3x+2|15x+10\end{matrix}\xrightarrow{\text{کم}}3x+2|11$$

پس $3x+2=\pm1$ یا $3x+2=\pm11$ و چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $3x+2$ را برابر ۱۱ فرض می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار x برابر ۳ می‌شود که عدد ۲۴ را می‌شمارد.

۱۰۶- گزینهٔ ۳ y را تنها می‌کنیم.

$$yx+3=2x+2y\Rightarrow\overbrace{yx-2y}^{y(x-2)}=2x-3\Rightarrow y=\frac{2x-3}{x-2}$$

خُب حالا چه موقع y عددی طبیعی می‌شود؟ بله درست است، وقتی صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد؛ یعنی $x-2|2x-3$. حالا:

ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow x-2|1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2=-1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1\\x-2=1\Rightarrow x=3\Rightarrow y=3\end{cases}$$

پس دو نقطه وجود دارد.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ **روش اول** m را از سمت راست عبارت حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix}5m+3|5m+3\xrightarrow{\times9}5m+3|45m+27\\5m+3|9m+2\xrightarrow{\times5}5m+3|45m+10\end{matrix}\xrightarrow{(-)}5m+3|17$$

پس $5m+3=\pm1$ یا $5m+3=\pm17$ می‌تواند باشد.

$$\begin{cases}5m+3=\pm1\Rightarrow\text{m صحیح نداریم}\\5m+3=\pm17\begin{cases}m=-4\\m=\frac{14}{5}\ \times\end{cases}\end{cases}$$

$m=-4$ صدق هم می‌کند $(-17|-34)$، پس قابل‌قبول است.

روش دوم ریشهٔ سمت چپ یعنی $-\frac{3}{5}$ را می‌اندازیم در طرف راست. کسر را ساده کرده و صورت را در نظر می‌گیریم.

$$5m+3|9(-\frac{3}{5})+2=\frac{-17}{5}\Rightarrow 5m+3|-17$$

ادامهٔ راه‌حل، شبیه قبلی می‌شود.

۱۰۸- گزینهٔ ۲ **روش اول** داریم:

$$2n+1|2n+1\xrightarrow{(2n+1)\times\text{سمت راست}}2n+1|4n^2+4n+1$$

از طرفی: $2n+1|4n^2+5n+4$

$$\xrightarrow{(-)}2n+1|n+3\xrightarrow{\times2}\begin{matrix}2n+1|2n+6\\2n+1|2n+1\end{matrix}\xrightarrow{(-)}2n+1|5$$

پس $2n+1=\pm1$ یا $2n+1=\pm5$ می‌توانند باشند. با حل معادله‌ها $n=0$، $n=-1$، $n=2$ و $n=-3$ به دست می‌آید. فقط یکی از این‌ها طبیعی است و آن هم $n=2$ بوده که در رابطهٔ مسئله صدق هم می‌کند، پس یک جواب برای n به دست می‌آید.

روش دوم به جای این همه ضرب، تفریق و ...، ریشهٔ سمت چپ (یعنی $-\frac{1}{2}$)را در طرف راست قرار دهیم. کسر به دست آمده را ساده کرده و صورت آن را در نظر می‌گیریم.

$$2n+1|4(-\frac{1}{2})^2+5(-\frac{1}{2})+4=1-\frac{5}{2}+4=\frac{5}{2}\Rightarrow 2n+1|5$$

ادامهٔ راه‌حل، شبیه روش اول است. فقط حواستان باشد، nهایی که با این روش به دست می‌آید حتماً باید در رابطهٔ اولیه صدق کنند؛ یعنی بعد از این‌که nها را به دست آوردید، باید در رابطهٔ اولیه جای‌گذاری کنید و درستی آن را به دست آورید.

۱۰۹- گزینهٔ ۲ گفتیم که در سؤالاتی شبیه این سؤال که رشد سمت چپ رابطه عادکردن سریع‌تر از عبارت سمت راست باشد، کافی است رابطه را فقط به ازای عددهای کوچک بررسی کنیم:

$$x^3+1|x+1\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow 1|1\ ✓\\x=1\Rightarrow 2|2\ ✓\\x=2\Rightarrow 9|3\ \times\end{cases}$$

از این‌جا به بعد قطعاً رابطه برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را هم بررسی کنیم:

$$\begin{cases}x=-1\Rightarrow 0|0\ ✓\\x=-2\Rightarrow -7|-1\ \times\end{cases}$$

به ازای عددهای منفی کوچک‌تر نیز رابطه برقرار نیست و بنابراین معادله فقط دو جواب دارد.

۱۱۰- گزینهٔ ۱ کسر $\frac{n+6}{n^2+2}$ باید عددی صحیح شود.

می‌دانیم رشد مخرج از صورت، بیشتر است. یعنی اگر n عددی بزرگ باشد، مخرج از صورت بیشتر می‌شود و رابطه برقرار نیست. در میان عددهای کوچک، رابطه را بررسی می‌کنیم:

$n=0\Rightarrow\frac{6}{2}=3\ ✓$ $\qquad n=1\Rightarrow\frac{7}{3}\ \times$

$n=-1\Rightarrow\frac{5}{3}\ \times$ $\qquad n=2\Rightarrow\frac{8}{6}\ \times$

$n=-2\Rightarrow\frac{4}{6}\ \times$

به ازای $n \geq ۳$ و $n \leq -۳$ صورت کسر از مخرج، کوچک‌تر می‌شود که اگر $n+۶$ و $n^{۲}+۲$ عددهایی غیرصفر باشند، $n+۶$ نمی‌تواند بر $n^{۲}+۲$ بخش‌پذیر باشد.

اما اگر $n=-۶$ باشد، صورت کسر صفر می‌شود و حاصل کسر برابر صفر می‌شود، پس به ازای دو عدد $n=۰$ و $n=-۶$ کسر عدد صحیحی می‌شود.

۱۱۱- **گزینهٔ ۴** عدد ۲^{n} را ببینید. فقط عامل دو دارد؛ یعنی فقط بر اعداد ۲^{m} که $۰ \leq m \leq n$ است، بخش‌پذیر می‌باشد؛ یعنی n باید توانی از ۲ باشد. توان‌های ۲ که سه‌رقمی هستند را امتحان کنیم.

$$n=۱۲۸=۲^{۷} \Rightarrow (۱۲۸)^{۲} \mid ۲^{۱۲۸} \Rightarrow ۲^{۱۴} \mid ۲^{۱۲۸}$$

$$n=۲۵۶ \Rightarrow (۲۵۶)^{۲} \mid ۲^{۲۵۶} \Rightarrow ۲^{۱۶} \mid ۲^{۲۵۶}$$

شبیه همین به ازای $n=۵۱۲$ هم رابطه درست می‌شود، توان ۲ بعدی ۱۰۲۴ می‌شود که دیگر سه‌رقمی نیست. پس شد ۳تا.

۱۱۲- **گزینهٔ ۲** $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌شود، پس داریم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} \mid n^{۲} \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}q=n^{۲}$$

$$\xrightarrow[\times ۲]{\div n} (n-۱)q=۲n \Rightarrow n-۱ \mid ۲n$$

می‌توان ریشهٔ سمت چپ، یعنی $n=۱$ را در راست جای‌گذاری کنیم، می‌شود: $n-۱ \mid ۲$

پس:
$$\begin{cases} n-۱=۱ \Rightarrow n=۲ \\ n-۱=۲ \Rightarrow n=۳ \end{cases}$$

هر دو مقدار در رابطهٔ مسئله هم صدق می‌کنند، پس شد دو مقدار طبیعی!

۱۱۳- **گزینهٔ ۲** **روش اول** باقی‌ماندهٔ a بر ۴ برابر ۳ است؛ یعنی $a=۴k+۳$. داریم:

$$a^{۲}=۱۶k^{۲}+۲۴k+۹=\underbrace{۱۶k^{۲}+۲۴k+۸}_{\text{از ۸ فاکتور می‌گیریم}}+۱$$

$$=۸(۲k^{۲}+۳k+۱)+۱=۸q+۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $a^{۲}$ بر ۸ برابر ۱ است.

روش دوم از این‌که $a=۴k+۳$ است می‌فهمیم که a فرد است و با توجه به این که مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس باقی‌ماندهٔ $a^{۲}$ بر ۸ برابر ۱ است.

۱۱۴- **گزینهٔ ۴** با توجه به این‌که $a=۴k+۳$ و $b=۶k'+۱$ دو عدد فردند. مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است.

حالا: $a^{۲}+b^{۲}+۵=(۸q+۱)+(۸q'+۱)+۵=۸k''+۷$

یعنی باقی‌مانده برابر ۷ می‌شود.

۱۱۵- **گزینهٔ ۲** همهٔ گزینه‌ها فرد هستند. این خبر خوبی برای شما است. چرا؟ چون مربع عدد فرد، فرد است. از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است، پس اگر باقی‌ماندهٔ تقسیمِ عددِ فردی بر ۸ برابر ۱ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست. باقی‌ماندهٔ تقسیم گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) بر ۸ برابر ۱ نمی‌شود، پس هیچ‌کدام مربع کامل نیستند.

البته توجه داشته باشید که رقم یکان هیچ مربع کاملی نمی‌تواند ارقام ۲، ۳، ۷ یا ۸ باشد. با این نکته می‌توانیم (۳) را زودتر رد کنیم.

۱۱۶- **گزینهٔ ۱** از دو عدد متوالی، یکی زوج و دیگری فرد است. توان سوم آن‌ها هم، یکی زوج و دیگری فرد می‌شود. اگر آن‌ها را کم کنیم، فرد می‌شود *(فرد منهای زوج، فرد می‌شه)*. حالا مربع هر عدد فرد، به صورت $۸q+۱$ است، پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۸، برابر یک می‌شود.

۱۱۷- **گزینهٔ ۴** $۳^{۹۷}$ عددی فرد است، پس a، b و c هر سه‌تا فرد هستند. *(اگه یکی زوج باشه، ضربشون زوج می‌شه.)* می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است؛ یعنی در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد. حالا a، b و c همگی فرد هستند، پس هر سه‌تا به صورت $۸q+۱$ هستند.

$$a^{۲}+۲b^{۲}+۳c^{۲}=۸q+۱+۲(۸q'+۱)+۳(۸q''+۱)$$

$$=۸(q+۲q'+۳q'')+\underbrace{۱+۲+۳}_{۶}=۸k+۶$$

پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ برابر ۶ می‌شود.

۱۱۸- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم اگر a عددی زوج باشد، $a+۳$ عددی فرد است. حالا دقت کنید که $b \mid a+۳$ یعنی $a+۳$ که عددی فرد است بر b بخش‌پذیر است، بنابراین b هم حتماً باید فرد باشد *(چون عدد فرد که نمی‌تونه به عدد زوج بخش‌پذیر باشه.)*

از طرفی می‌دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ زوج‌است.} \Rightarrow a=۲k \Rightarrow a^{۳}=۸k^{۳} \\ b \text{ فرداست.} \Rightarrow b^{۲}=۸k'+۱ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^{۳}+b^{۲}-۳=۸k^{۳}+۸k'+۱-۳$$

$$=۸k^{۳}+۸k'-۲=\underbrace{۸k^{۳}+۸k'-۸}_{\text{بر ۸ بخش‌پذیر است}}+۶$$

با توجه به این‌که $۸k^{۳}+۸k'-۸$ بر ۸ بخش‌پذیر است باقی‌ماندهٔ کل عبارت بر ۸ برابر است با ۶.

۱۱۹- **گزینهٔ ۲** عددها در تقسیم به ۴ به یکی از حالت‌های زیرند:

$۴k$

$۴k+۱ \Rightarrow$ فرد است.

$۴k+۲$

$۴k+۳ \Rightarrow$ فرد است.

بنابراین عددهای زوج به صورت $۴k$ یا $۴k+۲$ است. حالا:

$$(۴k)^{۲}=۱۶k^{۲}=۸(۲k^{۲})=۸q$$

$$(۴k+۲)^{۲}=۱۶k^{۲}+۱۶k+۴=۸(\underbrace{۲k^{۲}+۲k}_{q})+۴=۸q+۴$$

پس باقی‌مانده صفر است یا ۴، یعنی دو حالت دارد.

۱۲۰- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸q+۱$ نمایش داد. داریم:

$$a^{۴}-b^{۴}=(a^{۲}-b^{۲})(a^{۲}+b^{۲}) \Rightarrow a^{۴}-b^{۴}$$

$$=(۸q+۱-۸q'-۱)(۸q+۱+۸q'+۱)=(۸q-۸q')(۸q+۸q'+۲)$$

$$=[۸(q-q')]۲(۴q+۴q'+۱)=۱۶(q-q')(۴q+۴q'+۱)$$

پس عبارت، همواره بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

۱۲۱- **گزینهٔ ۴** اگر b فرد باشد، پس $b+۴$ هم فرد است. پس مقسوم‌علیه آن، یعنی $a+۳$ هم فرد است. یعنی a زوج می‌شود. اگر ۱ اضافه و کم کنیم، داریم:

$$a^{۲}+۲a+b^{۲}+۳=a^{۲}+۲a+۱+b^{۲}+۳-۱$$

$$=(\underbrace{a+۱}_{\text{فرد}})^{۲}+b^{۲}+۲=(۸q+۱)+(۸q'+۱)+۲=۸k+۴$$

دقت کنید که اگر a زوج باشد، $a+۱$ فرد می‌شود، پس $(a+۱)^{۲}$ دوباره $۸q+۱$ می‌شود.

۱۲۲- **گزینهٔ ۲**

$$۴\times ۲^{۱۰}-۹\times ۳^{۴}=۲^{۲}\times ۲^{۱۰}-۳^{۲}\times ۳^{۴}=۲^{۱۲}-۳^{۶}$$

می‌دانیم a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است. داریم:

$$۲^{۱۲}-۳^{۶}=(۲^{۶})^{۲}-(۳^{۳})^{۲}=۶۴^{۲}-۲۷^{۲}=(۶۴-۲۷)(۶۴+۲۷)$$
$$=۳۷\times ۹۱=۳۷\times ۷\times ۱۳$$

پس عدد داده‌شده بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۲۳- **گزینهٔ ۴** **روش اول** اگر $n=۱$ باشد، ① و ③ رد می‌شوند. | اگر $n=۳$ باشد، ② رد می‌شود. اما چرا ④ درست است؟ از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(n^{۲}+۲)\,(\underbrace{n^{۴}-۲n^{۲}+۴}_{q})=n^{۶}+۸ \;\Rightarrow\; n^{۲}+۲\,|\,n^{۶}+۸$$

روش دوم سه‌تا نکته داریم که از اتحادهایی که در حسابان ۲ خواندید به دست آمده است. n و k دو عدد طبیعی هستند.

① $a^{k}-b^{k}\,|\,a^{n}-b^{n}$ وقتی برقرار است که n بر k بخش‌پذیر باشد؛ مثلاً $a^{۲}-b^{۲}\,|\,a^{۶}-b^{۶}$.

② $a^{k}+b^{k}\,|\,a^{n}+b^{n}$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ فرد باشد؛ یعنی n مضرب فرد k باشد). در ④، $n^{۲}+۲\,|\,(n^{۲})^{۳}+۲^{۳}$ برقرار است چون $\frac{۳}{۱}=۳$ می‌شود که فرد است.

③ $a^{k}+b^{k}\,|\,a^{n}-b^{n}$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد.

۱۲۴- **گزینهٔ ۳** ابتدا توان‌ها را یکی می‌کنیم:

$$۳^{۳۹}+۷^{۲۶}=(۳^{۳})^{۱۳}+(۷^{۲})^{۱۳}=۲۷^{۱۳}+۴۹^{۱۳}$$

می‌دانیم اگر n فرد باشد $a^{n}+b^{n}$ بر $a+b$ بخش‌پذیر است، بنابراین $۲۷^{۱۳}+۴۹^{۱۳}$ بر $۲۷+۴۹=۷۶$ بخش‌پذیر است و با توجه به این‌که $۷۶=۴\times ۱۹$، این عدد بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

۱۲۵- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم اگر n زوج باشد $a^{n}-b^{n}$ هم بر $a-b$ بخش‌پذیر است و هم بر $a+b$. در این نوع سؤال‌ها اول باید توان‌ها را یکسان کنیم:

$$۲^{۴۲}-۳^{۱۸}=(۲^{۷})^{۶}-(۳^{۳})^{۶}=۱۲۸^{۶}-۲۷^{۶}$$

این عدد بر $۱۲۸-۲۷=۱۰۱$ و $۱۲۸+۲۷=۱۵۵=۵\times ۳۱$ بخش‌پذیر است.
بنابراین در میان عددهای داده‌شده $۲^{۴۲}-۳^{۱۸}$ فقط بر ۶۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۲۶- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم $۷^{۲}+۱=۵۰$ است که بر ۲۵ بخش‌پذیر است.
از طرفی اگر n فرد باشد $a+b\,|\,a^{n}+b^{n}$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۷^{۲}+۱\,|\,(۷^{۲})^{۲k+۱}+۱ \Rightarrow ۵۰\,|\,۷^{۴k+۲}+۱$$

یعنی عددهای به فرم $۷^{۴k+۲}+۱$ بر ۵۰ و در نتیجه بر ۲۵ بخش‌پذیرند. پس $۷^{۶}+۱$ بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

روش دوم

$$۷^{۶}+۱=(۷^{۲})^{۳}+۱=\underbrace{(۷^{۲}+۱)}_{۵۰}(۷^{۴}+۱-۷^{۲})$$

۱۲۷- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم $a^{n}-b^{n}$ همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است و اگر n زوج باشد $a^{n}-b^{n}$ بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است. با توجه به همین نکته، $۵^{n}-۲^{n}$ همواره بر $۵-۲$ یعنی ۳ بخش‌پذیر است. اما ما می‌خواهیم این عبارت مضرب ۱۳ باشد.

سعی می‌کنیم برای n حالت‌های مختلفی در نظر بگیریم تا ببینیم می‌توانیم کاری کنیم $a^{n}-b^{n}$ مضرب ۱۳ شود.

(الف) اگر n زوج باشد، داریم: $۵^{۲k}-۲^{۲k}=۲۵^{k}-۴^{k}$

که مضرب $۲۱=۲۵-۴$ است. (که به درد ما نمی‌خورد!)

(ب) اگر n مضرب ۳ باشد، داریم:

$$۵^{۳k}-۲^{۳k}=۱۲۵^{k}-۸^{k}$$

که بر $۱۱۷=۱۲۵-۸$ بخش‌پذیر است. حالا با توجه به این‌که $۱۱۷=۳^{۲}\times ۱۳$، پس اگر n مضرب ۳ باشد $۵^{n}-۲^{n}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در میان گزینه‌ها فقط ۸۴ مضرب ۳ است.

۱۲۸- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم اگر n فرد باشد: $a+b\,|\,a^{n}+b^{n}$ به عبارت دیگر رابطهٔ $a+b\,|\,a^{۲k+۱}+b^{۲k+۱}$ همواره برقرار است. با توجه به این‌که $۲۸=۳^{۳}+۱$ است، می‌توان نوشت:

$$۳^{۳}+۱\,|\,(۳^{۳})^{۲k+۱}+۱^{۲k+۱} \Rightarrow ۲۸\,|\,۳^{۶k+۳}+۱$$

پس اگر n به صورت $۶k+۳$ باشد رابطه برقرار است. با توجه به این‌که n عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۶۰ است داریم:

$$۱\le ۶k+۳<۶۰ \Rightarrow -۲\le ۶k<۵۷$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le k\le \frac{۵۷}{۶}=۹/۵ \Rightarrow k=۰,۱,۲,\dots,۹$$

پس به ازای ۱۰ عدد رابطه برقرار است.

> این سؤال‌ها با همنهشتی راحت‌تر حل می‌شوند در درس بعد روش حل این سؤال‌ها با همنهشتی را نیز می‌بینید.

۱۲۹- **گزینهٔ ۳** برای به دست آوردن ب.م.م هر عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم:

$$(۱۸۰,۱۴۴)=(۲^{۲}\times ۳^{۲}\times ۵,۲^{۴}\times ۳^{۲})=۲^{۲}\times ۳^{۲}=۳۶$$

۱۳۰- **گزینهٔ ۱** می‌دانیم اگر عدد a عدد b را بشمارد $|a|$ ب.م.م‌شان می‌شود، بنابراین:

$$\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow (a,b)=|a| \xrightarrow{\text{چون } a<۰} (a,b)=-a \\ a\,|\,۰ \Rightarrow (a,۰)=|a|=-a \end{cases}$$

۱۳۱- **گزینهٔ ۱** برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد باید عددها را تجزیه کرد و عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کرد.
اما گاهی همان‌طور که می‌بینید تجزیهٔ عددها کار سختی است. در این‌جور موارد همان‌طور که در درس‌نامه هم گفتیم می‌توانیم از روش نردبانی استفاده کنیم:

q	۳	۱	۱	
۶۶۳	۱۸۷	۱۰۲	۸۵	۱۷
r	۱۰۲	۸۵	۱۷	

$$\begin{array}{l|l} ۶۶۳ & ۱۸۷ \\ \hline ۵۶۱ & ۳ \\ \hline ۱۰۲ & \end{array}$$

۶۶۳ را بر ۱۸۷ تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول قرار می‌دهیم چون باقی‌مانده صفر نشده، باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل کرده دوباره عددها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۱۸۷ & ۱۰۲ \\ \hline ۱۰۲ & ۱ \\ \hline ۸۵ & \end{array}$$

دوباره باقی‌مانده را به ردیف وسط می‌بریم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۲ & ۸۵ \\ \underline{۸۵} & ۱ \\ ۱۷ & \end{array}$$

و بالاخره چون ۸۵ بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس ب.م.م دو عدد ۱۷ است.

مضرب ۷ است. $d=۱۷ \Rightarrow ۲d+۱=۳۵$

۱۳۲- گزینهٔ ۱ می‌توانیم عوامل مشترک را از ب.م.م فاکتور بگیریم.

بنابراین: $(۳m,۹m^{۲})=۳m(۱,۳m)=۱۲$

می‌دانیم همواره $(۱,a)=۱$ است پس: $۳m=۱۲ \Rightarrow m=۴$

۱۳۳- گزینهٔ ۱

اگر $(a,b)=d$ باشد $(a^{۲},b^{۲})=d^{۲}$ و $(۵a,۵b)=۵d$ است. بنابراین:

$$d^{۲}-۵d=۱۴ \Rightarrow d^{۲}-۵d-۱۴=۰$$

$$\Rightarrow (d-۷)(d+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۷ \\ d=-۲ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۱۳۴- گزینهٔ ۳ قبل از این‌که تست را حل کنیم، چند نکتهٔ مهم کتاب درسی را مرور می‌کنیم:

۱ دو عدد متوالی، نسبت به هم اول‌اند (پس ۱ درسته)

۲ دو عدد فرد متوالی، نسبت به هم اول‌اند.

۳ ب.م.م دو عدد زوج متوالی، برابر ۲ می‌شود.

خب حالا $۴m+۱$ و $۴m+۳$ دو عدد فرد متوالی هستند، پس نسبت به هم اول‌اند. (۲ درسته) شبیه همین، ۴ هم درست است، اما چرا ۳ غلط است؟ خیلی ساده $m=۱$ بگیرید. می‌بینیم $(۶,۸)=۲$ می‌شود نه.

اما برای درک بهتر یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنیم که چرا ب.م.م‌شان برابر ۱ می‌شود. گزینهٔ ۲ را نگاه کنید. فرض کنید: $(۴m+۱,۴m+۳)=d$

در این صورت: $\begin{cases} d\,|\,۴m+۱ \\ d\,|\,۴m+۳ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲$

اما d نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا هر دو عدد $۴m+۱$ و $۴m+۳$ فردند و عددهای فرد نمی‌توانند بر ۲ بخش‌پذیر باشند.

۱۳۵- گزینهٔ ۳ یک نکتهٔ خیلی مهمی که باید بدانیم این است که اگر $(a,b)=d$ باشد، d نه تنها ب.م.م دو عدد a و b است بلکه بر بقیهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b نیز بخش‌پذیر است.

به بیان دیگر اگر $(a,b)=d$ و x نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد یعنی $x\,|\,a$ و $x\,|\,b$ می‌توان نتیجه گرفت $x\,|\,d$.

اگر $(a,b)=d$ باشد:

$$x\,|\,a, x\,|\,b \Rightarrow x\,|\,d$$

بنابراین در این سؤال وقتی ب.م.م دو عدد ۳۶ است، هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۳۶ نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است.

$$\text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۳۶} = \{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$$

یعنی به ازای ۹ عدد، رابطه برقرار است.

۱۳۶- گزینهٔ ۴

۱ نادرست است، چون برای مثال ممکن است هر دو مضرب ۳ باشند:

$$\begin{matrix} a=۶ \\ b=۳ \end{matrix} \Rightarrow (۶,۳)=۳$$

۲ نادرست است، چون ممکن است ب.م.م دو عدد عددی بزرگ‌تر از ۲ شود:

$$\begin{matrix} a=۱۲ \\ b=۵ \end{matrix} \Rightarrow (a,b+۱)=(۱۲,۶)=۶$$

۳ نادرست است، چون ممکن است a زوج و مضرب ۷ باشد:

$$a=۱۴ \Rightarrow (۱۴,۷)=۷$$

۴ درست است، چون اختلاف دو عدد فرد و زوج همواره فرد است و ب.م.م هر عدد فرد با ۲ برابر ۱ است.

۱۳۷- گزینهٔ ۴ $۳\times۲^{۲}=۱۲$ است، پس a نه زوج است و نه مضرب ۳.

از بین اعداد یک‌رقمی، $a=۱,۵,۷$ می‌تواند باشد، پس a سه مقدار دارد.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم:

$$(۴n+۱,۱۸)=d \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,۱۸ \\ d\,|\,۴n+۱ \end{matrix}$$

$۴n+۱$ فرد است پس d نمی‌تواند زوج باشد اما هر یک از مضارب فرد ۱۸ می‌تواند باشد. $d=۱,۳,۹$

۱۳۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم ۱۳ عدد اول است، بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک یک عدد دیگر با ۱۳ یا برابر ۱۳ است و یا برابر ۱. *(برای مثال $(۲۰,۱۳)=۱$ می‌شه ولی چون ۳۹ مضربه ۱۳ائه: $(۳۹,۱۳)=۱۳$ می‌شه.)* حالا در این سؤال می‌دانیم $(n-۳,۱۳)$ بزرگ‌تر از ۱ است. بنابراین این مقدار برابر ۱۳ است و در نتیجه $n-۳$ حتماً باید مضرب ۱۳ باشد.

$$n-۳=۱۳k \Rightarrow n=۱۳k+۳$$

می‌خواهیم n دورقمی باشد پس $۱۰ \le n \le ۹۹$ داریم:

$$۱۰\le ۱۳k+۳\le ۹۹ \Rightarrow ۷\le ۱۳k\le ۹۶ \Rightarrow ۰/۶\le k\le ۷/۳$$

$$\Rightarrow k=۱,۲,\dots,۷$$

یعنی به ازای ۷ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

۱۴۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم که d هر دو عدد را می‌شمارد. داریم:

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d\,|\,۳n^{۲}+۵n \\ d\,|\,۳n^{۲}-۲n+۶ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۷n-۶$$

$$\begin{matrix} d\,|\,۷n-۶ \xrightarrow{\times ۳} d\,|\,۲۱n-۱۸ \\ d\,|\,۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d\,|\,۲۱n+۳۵ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۵۳$$

$$\Rightarrow d=۵۳ \ (\text{چون گفته } d\ne ۱)$$

برای مثال به ازای $n=۱۶$ داریم: $(۵۳,۷۴۲)=۵۳$

روش تستی کافی است ریشهٔ $۳n+۵$ را در $۳n^{۲}-۲n+۶$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$۳n+۵=۰ \Rightarrow n=-\frac{۵}{۳} \Rightarrow ۳n^{۲}-۲n+۶$$

$$=۳\times(-\frac{۵}{۳})^{۲}-۲(-\frac{۵}{۳})+۶=\frac{۵۳}{۳} \Rightarrow d\,|\,۵۳ \Rightarrow d=۵۳$$

۱۴۱- گزینهٔ ۲

$$(۲۰!,۱۹!-۱۸!)=(۲۰\times۱۹\times۱۸!,۱۸!(۱۹-۱))$$

$$=(۲۰\times۱۹\times۱۸!,۱۸\times۱۸!)=۱۸!\underbrace{(۲۰\times۱۹,۱۸)}_{۲}=۲\times۱۸!$$

۱۴۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد آن‌گاه $d\,|\,a$ و $d\,|\,b$،

بنابراین: $(n,۲۴)=۱۲ \Rightarrow ۱۲\,|\,n \Rightarrow n=۱۲q$

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد، n مضرب ۲۴ می‌شود و در

نتیجه $(n,۲۴)$ برابر ۲۴ می‌شود. پس q فرد است.

$$q=۲k+۱ \Rightarrow n=۱۲(۲k+۱)=۲۴k+۱۲$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$۱۰\le ۲۴k+۱۲\le ۹۹ \Rightarrow -۲\le ۲۴k\le ۸۷$$

$$\Rightarrow \frac{-۲}{۲۴}\le k\le \frac{۸۷}{۲۴} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳$$

پس به ازای چهار عدد، رابطه برقرار است.

۱۴۳- گزینهٔ ۲

$$(۶a,۱۰b)=۴۴ \Rightarrow ۲(۳a,۵b)=۴۴ \Rightarrow (۳a,۵b)=۲۲$$

بنابراین ۳a و ۵b هر دو بر ۲۲ بخش‌پذیر است و چون ۳ و ۵ نسبت به ۲۲ اول‌اند پس a و b هر دو بر ۲۲ بخش‌پذیرند و در نتیجه $(a,b)=۲۲$ پس ۱ نادرست است.

۲ درست است، چون اگر a مضرب ۵ باشد، با توجه به این‌که ۵b نیز بر ۵ بخش‌پذیر است پس ۵ در ب.م.م دو عدد نیز می‌آید:

$$(۳a,۵b)=۲۲\times ۵=۱۱۰$$

۳ نادرست است، b مضرب ۳ نیست چون اگر b مضرب ۳ بود حاصل $(۳a,۵b)=۶۶$ می‌شود. *(چون ۳a هم مضرب ۳ است و ۳ می‌شه عامل مشترک و تو ب.م.م می‌آد.)*

۴ دلیلی ندارد $a+b$ بر ۴۴ بخش‌پذیر باشد. برای مثال اگر $a=۲۲$ و $b=۴۴$ باشد $a+b=۶۶$ بر ۴۴ بخش‌پذیر نیست.

۱۴۴- گزینهٔ ۱ **روش اول** ب.م.م دو عدد (a,c) را برابر d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(a,c),d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|c \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته شده $c|a-b$، بنابراین:

$$d|c, c|a-b \Rightarrow \begin{matrix} d|a-b \\ d|b \end{matrix} \xrightarrow{(+)} d|b$$

پس d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است اما با توجه به این‌که a و b نسبت به هم اول‌اند (خود سؤال گفته) بنابراین تنها مقسوم‌علیه مشترکشان عدد ۱ است و در نتیجه $d=۱$.

روش دوم این مدل سؤال‌ها را با عددگذاری هم می‌شود حل کرد. برای مثال در این سؤال $a=۵$، $b=۳$ و $c=۲$ باشد، در این صورت $c|a-b$ و:

$$(c,a)=(۲,۵)=۱$$

۱۴۵- گزینهٔ ۴ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(۲۵n+۹,۱۱n+۴)=d$$

$$\begin{matrix} d|۱۱n+۴ \xrightarrow{\times ۲۵} d|۲۷۵n+۱۰۰ \\ d|۲۵n+۹ \xrightarrow{\times ۱۱} d|۲۷۵n+۹۹ \end{matrix} \Rightarrow d|۱ \Rightarrow d=۱$$

یعنی به ازای همهٔ مقادیر n دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند. خب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، ۹۰تا!

۱۴۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $d=(a,b)$ باشد، $d|a$ و $d|b$. داریم:

$$(۵n-۲,۱۲n+۷)=d$$

$$\begin{cases} d|۵n-۲ \xrightarrow{\times ۱۲} d|۶۰n-۲۴ \\ d|۱۲n+۷ \xrightarrow{\times ۵} d|۶۰n+۳۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|۵۹ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۵۹$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.مشان ۵۹ است.

۱۴۷- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم، داریم:

$$(۷n+۵,۱۱n+۲)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|۱۱n+۲ \xrightarrow{\times ۷} d|۷۷n+۱۴ \\ d|۷n+۵ \xrightarrow{\times ۱۱} d|۷۷n+۵۵ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|۴۱ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۴۱$$

پس ب.م.م دو عدد یا ۱ است و یا ۴۱ و بنابراین هیچ‌وقت نمی‌تواند ۳ باشد.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(n+۲,۷n+۱)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|n+۲ \xrightarrow{\times ۷} d|۷n+۱۴ \xrightarrow{\ominus} d|۱۳ \\ d|۷n+۱ \qquad\quad d|۷n+۱ \longrightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۳ \end{matrix}$$

چون گفته $d\neq ۱$ پس $d=۱۳$ است پس هر دو عدد $n+۲$ و $۷n+۱$ باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند.

$$n+۲=۱۳k \Rightarrow n=۱۳k-۲ \Rightarrow ۴۱\le ۱۳k-۲\le ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۴۳\le ۱۳k\le ۱۰۲ \Rightarrow \frac{۴۳}{۱۳}\le k\le \frac{۱۰۲}{k}$$

$$\Rightarrow k=۴,۵,۶,۷$$

پس به ازای ۴ عدد رابطه برقرار است.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $۱۵a+۳$ و $۱۵a-۱۲$ هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند. پس عدد ۳ یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است. یعنی d یک عامل ۳ دارد.

$$(۱۵a-۱۲\,,\,۱۵a+۳)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|۱۵a-۱۲ \\ d|۱۵a+۳ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|۱۵$$

چون d از یک طرف مضرب ۳ است و از طرف دیگر ۱۵ را می‌شمارد، پس ۱۵ یا $d=۳$ اما $d=۱۵$ نیز نمی‌تواند باشد، چون برای مثال عدد $۱۵a+۳$ در تقسیم به ۱۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد و نمی‌تواند بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد. بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر ۳ است.

با یک مثال هم می‌شد فهمید!

$$a=۱ \Rightarrow (۱۵a+۳,۱۵a-۱۲)=(۱۸,۳)=۳$$

۱۵۰- گزینهٔ ۲

$$(۲k-۳,k^۲+۶k-۱)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|۲k-۳ \xrightarrow{\times k} d|۲k^۲-۳k \\ d|k^۲+۶k-۱ \xrightarrow{\times ۲} d|۲k^۲+۱۲k-۲ \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\ominus} d|۱۵k-۲ \quad (I)$$

حالا این رابطه (I) را با رابطهٔ اول می‌گیریم:

$$d|۲k-۳ \xrightarrow{\times ۱۵} d|۳۰k-۴۵$$

$$d|۱۵k-۲ \xrightarrow{\times ۲} d|۳۰k-۴$$

$$\xrightarrow{\ominus} d|۴۱ \Rightarrow d=۴۱$$

روش دوم ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم و صورت کسر را در نظر می‌گیریم:

$$۲k-۳=۰ \Rightarrow k=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۹}{۴}+۹-۱=\frac{۴۱}{۴}$$

$$\Rightarrow d|۴۱ \Rightarrow d=۴۱ \text{ یا } ۱$$

چون $d \uparrow ۱$ پس $d=۴۱$ است.

۱۵۱- گزینهٔ ۲ چون $(n,۱۰)=۲$ است پس n زوج است ولی مضرب ۵ نیست

می‌دانیم تعداد عددهای طبیعی زوج کوچک‌تر مساوی ۳۰ برابر ۳۰ است با:

$$\left[\frac{۳۰}{۲}\right]=۱۵$$

اما از این ۱۵ عدد زوج، عددهای ۱۰، ۲۰ و ۳۰ مضرب ۵اند که قابل قبول نیستند و در نتیجه $15-3=12$ عدد به جای n می‌توان قرار داد.

۱۵۲- گزینهٔ ۴ این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است اما متأسفانه در کنکور سراسری آمده است.

همان‌طور که در درسنامه گفتیم خوب است بدانید اگر عدد n به صورت $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $x=2^m\times5^n$ برابر است با:

$(m+1)(n+1)$

حالا با توجه به این‌که: $\frac{x}{40}=\frac{2^m\times5^n}{2^3\times5}=2^{m-3}\times5^{n-1}$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $\frac{x}{40}$ برابر است با: $(m-2)\times n$

اختلاف تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۲تاست، بنابراین:

$$(m+1)(n+1)-n(m-2)=12$$
$$\Rightarrow mn+m+n+1-nm+2n=12$$
$$\Rightarrow m+3n=11$$

دقت کنید که $m\ge3$ و $n\ge1$ است وگرنه $\frac{x}{40}$ عددی طبیعی نمی‌شود.

دو حالت برای n و m وجود دارد:

الف) $m=8\,,\,n=1\Rightarrow x=2^8\times5=1280$

ب) $m=5\,,\,n=2\Rightarrow x=2^5\times5^2=800$

و چون حداقل مقدار x خواسته‌شده همین ۸۰۰ را در نظر می‌گیریم.

۱۵۳- گزینهٔ ۴ اگر عدد n به صورت $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد برابر است با:

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های عبارت زیر:

$$x=6^m\times10^n=2^m\times3^m\times2^n\times5^n=2^{m+n}\times3^m\times5^n$$

برابر است با: $(m+n+1)(m+1)(n+1)$

از طرفی:

$$15x=3\times5\times2^{m+n}\times3^m\times5^n=2^{m+n}\times3^{m+1}\times5^{n+1}$$

$\Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $15x$

$=(m+n+1)(m+2)(n+2)$

اختلاف دو عدد برابر ۳۵ است، در نتیجه:

$$(m+n+1)(m+2)(n+2)-(m+n+1)(m+1)(n+1)=35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(\underbrace{(m+2)(n+2)}_{mn+2m+2n+4}-\underbrace{(m+1)(n+1)}_{mn+m+n+1})=35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n+3)=35$$

ضرب دو عدد برابر ۳۵ شده است پس یکی ۵ و دیگری ۷ است.

$$m+n+1=5\Rightarrow m+n=4$$

اگر بخواهیم عدد، کوچک‌ترین مقدار را داشته باشد، توان بزرگ‌تر را به ۶ و اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، توان ۱۰ را ماکزیمم می‌کنیم:

کوچک‌ترین عدد: $\begin{cases}m=4\\n=0\end{cases}\Rightarrow x_{min}=6^4=1296$

بزرگ‌ترین عدد: $\begin{cases}m=0\\n=4\end{cases}\Rightarrow x_{max}=10^4=10000$

$\Rightarrow$ اختلاف دو عدد $=10000-1296=8704$

این سؤال از مباحث کتاب درسی نیست ولی در کنکور آمده است.

۱۵۴- گزینهٔ ۴ خوب است یک بار دیگر یادآوری کنیم: برای پیداکردن ب.م.م دو عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم. اما برای پیداکردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. یک نکتهٔ دیگر را هم در این سؤال یاد بگیریم: (اثباتش را بی‌خیال شوید، هر چند واقعاً سخت نیست.)

برای پیداکردن مقدار مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را تجزیه کرده توان‌ها را با یک جمع کرده در هم ضرب کنیم:

$$n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n $=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

دیدیم که $\left.\begin{array}{l}x|a\\x|b\end{array}\right\}\Rightarrow x|(a,b)$ ، بنابراین:

$$\begin{cases}x|2^3\times3^4\times5^3\times7^2\\x|2^5\times3^2\times5^p\times11\end{cases}\Rightarrow x|2^3\times3^2\times5^{\min\{3,p\}}$$

می‌دانیم $\min\{3,p\}$ یا ۳ است و یا p. اگر ۳ باشد، داریم:

$x|2^3\times3^2\times5^3\Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های x $=4\times3\times4=48$

که امکان‌پذیر نیست. پس $\min\{3,p\}=p$ است. یعنی $x|2^3\times3^2\times5^p$. تعداد مقسوم‌علیه‌های x برابر است با:

$$(3+1)(2+1)(p+1)=12(p+1)$$

اما می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۲۴تاست (۲۳تا به‌جز یک که با عدد ۱ می‌شود ۲۴تا). پس: $12(p+1)=24\Rightarrow p+1=2\Rightarrow p=1$

حالا ک.م.م دو عدد را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}A=2^3\times3^4\times5^3\times7^2\\B=2^5\times3^2\times5\times11\end{array}\Rightarrow [A,B]=2^5\times3^4\times5^3\times7^2\times11$$

که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1)=720$$

۱۵۵- گزینهٔ ۱ $(5a+3b,8a+5b)=d$ می‌گیریم، پس:

$$\left.\begin{array}{l}d|5a+3b\xrightarrow{\times8}d|40a+24b\\d|8a+5b\xrightarrow{\times5}d|40a+25b\end{array}\right\}\Rightarrow d|b$$

دقیقاً شبیه همین (*بالایی رو تو ۵ و پایینی رو تو ۳ ضرب کن*) ثابت می‌شود $d|a$.

گفته شده a و b نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی ب.م.م آن‌ها برابر ۱ است. حالا d مقسوم‌علیه مثبتی از a و b است. یک حالت بیشتر ندارد و آن هم این‌که $d=1$ بشود.

خوب است این نکته را هم بلد باشید. اگر $(a,b)=d$ باشد آن‌گاه $(ma+nb,m'a+n'b)=d$ است. اگر داشته باشیم: $mn'-nm'=\pm1$

در این سؤال $(a,b)=1$ است و با توجه به این‌که $5\times5-8\times3=1$ می‌توانیم نتیجه بگیریم: $(5a+3b,8a+5b)=1$.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ خب x عددی است که هم ۶ آن را عاد می‌کند و هم ۸ (*۸- با ۸ فرقی نداره*). حالا کوچک‌ترین عدد مثبت x را می‌خواهیم.

بنابراین ک.م.م دو عدد را به دست می‌آوریم. $[6,8]=24$ می‌شود که مجموع ارقام آن برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $a|b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$ *(هواستون باشه تو این حالت ب.م.م می‌شه قدر مطلق کوچیک‌تره و ک.م.م قدر مطلق بزرگ‌تره).* در این سؤال $[a,b]=a$ شده است، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم: $b|a$ و بنا به همان نکته وقتی $b|a$ آن‌گاه $(b,a)=|b|$.

۱۵۸- گزینهٔ ۳ ب.م.م دو عدد ۳۴۱ و ۴۰۳ را پیدا می‌کنیم چون تجزیهٔ دو عدد کمی سخت به نظر می‌رسد، از روش نردبانی استفاده می‌کنیم:

q	۱	۵	۲
۴۰۳	۳۴۱	۶۲	۳۱
r	۶۲	۳۱	۰

$\Rightarrow$ ب.م.م $=۳۱$

$$[(۳۴۱,۴۰۳)+۱,۱۱۲]=[۳۲,۱۱۲]=[۲^۵,۲^۴\times۷]=۲^۵\times۷=۲۲۴$$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $=۲+۲+۴=۸$

۱۵۹- گزینهٔ ۱ اول $(۶۲۷,۴۲۹)$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار دو عدد را تجزیه می‌کنیم: $(۶۲۷,۴۲۹)=(۳\times۱۱\times۱۹,۳\times۱۱\times۱۳)=۳۳$

حالا کوچک‌ترین مضرب‌مشترک دو عدد ۳۳ و ۱۵۴ را پیدا می‌کنیم:

$$[۳۳,۱۵۴]=[۳\times۱۱,۱۱\times۱۴]=۳\times۱۱\times۱۴=۴۶۲$$

۱۶۰- گزینهٔ ۳ وقتی عددی بر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش‌پذیر است یعنی بر ک.م.م آن‌ها نیز بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}۱۵|x\\ ۲۱|x\\ ۳۵|x\end{matrix}\right\}\Rightarrow [۱۵,۲۱,۳۵]|x \Rightarrow [۳\times۵,۳\times۷,۷\times۵]|x \Rightarrow ۱۰۵|x \Rightarrow x=۱۰۵q$$

حالا مقادیر سه‌رقمی x را پیدا می‌کنیم:

$$۱۰۰\le ۱۰۵q<۱۰۰۰ \Rightarrow ۰/۹\le q<۹/۵۲ \Rightarrow q=۱,۲,۳,...,۹$$

پس به ازای ۹ عدد رابطه برقرار است.

۱۶۱- گزینهٔ ۲ خیلی ساده می‌توانید ثابت کنید که اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b مساوی باشند، (یعنی $(a,b)=[a,b]$) نتیجه می‌گیریم $|a|=|b|$.

پس: $|n^۲-۱|=۸\begin{cases}n^۲-۱=۸ \Rightarrow n=\pm۳\\ n^۲-۱=-۸ \Rightarrow n^۲=-۷ \ \text{جواب ندارد.}\end{cases}$

پس به ازای دو مقدار.

۱۶۲- گزینهٔ ۲

$$a^۳|a^۷ \Rightarrow [a^۳,a^۷]=a^۷$$
$$a^۴|a^۷ \Rightarrow (a^۷,a^۴)=a^۴$$

به بیان دیگر: $(\underbrace{[a^۳,a^۷]}_{a^۷},a^۴)=a^۴$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ طبق آن‌چه گفتیم:

$۴a|۸a$ پس ب.م.م می‌شود، $(۴a,۸a)=|۴a|$ *(کوچیک‌تره)*، از طرفی $۳a|۱۲a^۲$، پس ک.م.م می‌شود، $[۳a,۱۲a^۲]=|۱۲a^۲|=۱۲a^۲$. حالا $|۴a|\,|\,۱۲a^۲$، پس ب.م.م دوباره $|۴a|=۴|a|$ می‌شود.

۱۶۴- گزینهٔ ۱ از $۳x|y$ می‌توان نتیجه گرفت که $x|y$ و $۳|y$. بنابراین:

$$\begin{matrix}x|y \Rightarrow [x,y]=|y|\\ ۳|y \Rightarrow (۳,y)=۳\end{matrix} \Rightarrow \underbrace{(|y|,۳)=۳}_{۳||y \ \text{چون}}$$

به بیان دیگر: $(\underbrace{[x,y]}_{|y|},\underbrace{(۳,y)}_{۳})=۳$

۱۶۵- گزینهٔ ۲ یک بار دیگر این نکته را با هم مرور کنیم:

$$a|b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$$

یک نکتهٔ مهم دیگر هم خوب است همیشه بدانید: عددها بر ب.م.م بخش‌پذیرند و ک.م.م بر عددها بخش‌پذیر است. بگذارید یک مثال بزنیم. فرض کنید عددهای ما ۱۲ و ۱۸ باشند. در این صورت: $(۱۲,۱۸)=۶$

می‌بینید که عددها، یعنی ۱۲ و ۱۸ هر دو بر ۶ بخش‌پذیرند.

$[۱۲,۱۸]=۳۶$

می‌بینید ک.م.م یعنی ۳۶ بر هر دو عدد ۱۲ و ۱۸ بخش‌پذیر است.

حالا برویم سراغ حل سؤال:

(۱) طبق چیزی که گفتیم ب.م.م عددها را می‌شمارد و عددها ک.م.م را. یعنی:

$$(a,b)|a,a|[a,b] \Rightarrow (a,b)|[a,b] \Rightarrow ((a,b),[a,b])=(a,b)$$

با عددگذاری: $((۱۲,۱۸),[۱۲,۱۸])=(۶,۳۶)=۶$

(۲) ب.م.م دو عدد را می‌شمارد پس: $(a,b)|a \Rightarrow [(a,b),a]=a$

با عددگذاری: $[(۱۲,۱۸),۱۲]=[۶,۱۲]=۱۲$

پس همین گزینه پاسخ سؤال است.

(۳) طبق چیزی که گفتیم: $(a,b)|b \Rightarrow ((a,b),b)=(a,b)$

با عددگذاری: $((۱۲,۱۸),۱۸)=(۶,۱۸)=۶$

(۴) $a|[a,b] \Rightarrow (a,[a,b])=a$

با عددگذاری: $(۱۲,[۱۲,۱۸])=(۱۲,۳۶)=۱۲$

۱۶۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $a|b$ آن‌گاه: $[a,b]=b$ در این‌جا:

$$[a^۲b,ab^۲c]=ab[a,bc]$$

از طرفی:

$$a^۲|c \xrightarrow{\text{سمت‌چپ}\div a} a|c \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times b} a|bc$$

بنابراین $[a,bc]=bc$ و در نتیجه:

$$[a^۲b,ab^۲c]=ab[a,bc]=ab\times bc=ab^۲c$$

۱۶۷- گزینهٔ ۲ **روش اول** از $(m,۶)=۳$ می‌توان نتیجه گرفت که m بر ۳ بخش‌پذیر است (دست‌کم یک عامل ۳ دارد.) ولی زوج نیست.

$$[۵m^۲,۹۰]=۵[m^۲,۱۸]=۵[m^۲,۲\times۳^۲]$$

وقتی m دست‌کم یک عامل ۳ دارد پس $m^۲$ دست‌کم ۲ عامل ۳ دارد و عامل ۲ نیز ندارد. حالا چون ۲ عامل مشترک نیست در ک.م.م نیز می‌آید.

بنابراین: $۵[m^۲,۲\times۳^۲]=۱۰m^۲$

روش دوم با عددگذاری به سؤال، جواب می‌دهیم. اگر $m=۳$ باشد، $(۳,۶)=۳$ است. حالا $[۵m^۲,۹۰]$ برابر است با: $[۴۵,۹۰]=۹۰$

۱۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیر مشترک ضرب می‌کنیم. عددها را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$[m,۱۲۰]=۶۰۰ \Rightarrow [m,۲^۳\times۳\times۵]=۲^۳\times۳\times۵^۲$$

m فقط می‌تواند عوامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد و عامل‌های دیگری ندارد. *(چون اگه برای مثال m عامل ۷ هم داشت باید توی ک.م.م هم ۷ می‌اومد)*

پس فرم کلی m به صورت $m=۲^\alpha\times۳^\beta\times۵^\gamma$ است.

γ صددرصد برابر ۲ است چون در تجزیهٔ ۱۲۰ توان عدد برابر ۱ است ولی در ک.م.م توان عدد ۵ برابر ۲ است، پس $\gamma=۲$ است.

β می‌تواند صفر یا ۱ باشد چون هم در تجزیهٔ ۱۲۰ و هم در تجزیهٔ ۶۰۰ توان عدد ۳ برابر ۱ است.

و بالاخره با همین استدلال α نیز می‌تواند برابر صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.

$$\begin{array}{lll} \alpha & \beta & \gamma \\ 4\times & 2\times & 1=8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \\ 3 & & \end{array}$$

پس به ازای ۸ مقدار m رابطه برقرار می‌شود. برای درک بهتر، این ۸ حالت را می‌نویسیم:

$$m=5^2, 5^2\times 3, 5^2\times 2, 5^2\times 2\times 3$$
$$, 5^2\times 2^2, 5^2\times 2^2\times 3, 5^2\times 2^3, 5^2\times 2^3\times 3$$

۱۶۹- گزینهٔ ۲ **روش اول** برای پاسخ‌دادن به این سؤال باید دو نکته را بدانیم:

(۱) مربع هر عدد فرد را به صورت $8k+1$ می‌توان نوشت.

(۲) اگر $a\,|\,b$، آن‌گاه $(a,b)=|a|$ و $[a,b]=|b|$.

a فرد است بنابراین $a+1$ زوج است یعنی:

$$a+1=2q \Rightarrow (a+1)^4=16q^4 \Rightarrow (8,16q^4)=8$$

چون که $8\,|\,16q^4$:

$$(a-1)(a+1)=a^2-1=8k+1-1=8k$$
$$\Rightarrow [8,8k]=8k$$

چون $8\,|\,8k$: بنابراین حاصل عبارت برابر $8k$ یا همان a^2-1 است.

روش دوم رابطه را به ازای یک عدد فرد بررسی می‌کنیم. برای مثال اگر $a=5$ باشد داریم: $[(6^4,8),4\times 6]=[8,24]=24$ که همان a^2-1 است.

۱۷۰- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $a'=\frac{a}{d}$ و $b'=\frac{b}{d}$ و a' و b' نسبت به هم اول‌اند. رابطه‌ها را برحسب a'، b' و d می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)=5 \Rightarrow d=5 \\ ab=500 \Rightarrow a'b'd^2=500\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b'=20$$

حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

a'	b'		
1	20	(I)	
2	10	×	غیر قابل قبول زیرا $(2,10)=2$
4	5	(II)	

حالا می‌خواهیم $a+b$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد:

$$a+b=d(a'+b')=5(a'+b')$$

یعنی باید حالتی را در نظر بگیریم که $a'+b'$ کم‌تر است، بنابراین حالت (II) را انتخاب می‌کنیم: $a+b=5(4+5)=45$

۱۷۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $(a,b)=7$ باشد، آن‌گاه $a=7a'$ و $b=7b'$ و $(a',b')=1$ بنابراین:

$$(\frac{a^2}{7},[a,b])=(\frac{49a'^2}{7},[7a',7b'])$$
$$=(7a'^2,7[a',b'])=(7a'^2,7a'b')$$

چون a' و b' نسبت به هم اول‌اند، ک.م.م‌شان با ضربشان برابر است.

$$\Rightarrow (7a'^2,7a'b')=7|a'|(a',b')=7|a'|=|a|$$

۱۷۲- گزینهٔ ۲ دو رابطه را برحسب a' و b' می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l}(a,b)=7 \Rightarrow d=7 \\ [a,b]=420 \Rightarrow a'b'd=420\end{array} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b'=60$$

(1)	1	60	✓
۰	2	30	×
(2)	3	20	✓
(3)	4	15	✓
(4)	5	12	✓
۰	6	10	×

دو حالت $b'=30$ و $a'=2$ و $a'=6$ و $b'=10$ را رد می‌کنیم چون a' و b' باید نسبت به هم اول باشند. در بقیهٔ حالت‌ها $a+b$ را پیدا می‌کنیم.

$$(1)\ a+b=7\times(60+1)=427$$
$$(2)\ a+b=7\times(20+3)=161$$
$$(3)\ a+b=7\times(4+15)=133$$
$$(4)\ a+b=7\times(5+12)=119$$

بنابراین $a+b$ نمی‌تواند برابر ۲۲۴ باشد.

۱۷۳- گزینهٔ ۳ دو رابطه را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم:

$$(a,b)=8 \Rightarrow d=8$$
$$a+b=104 \Rightarrow a'd+b'd=104$$
$$\xrightarrow{\text{با جای‌گذاری } d} 8(a'+b')=104 \Rightarrow a'+b'=13$$

می‌خواهیم $[a,b]$ ماکزیمم شود. می‌دانیم $[a,b]=a'b'd$.

بنابراین از میان حالت‌هایی که $a'+b'=13$ می‌شود حالتی را در نظر بگیریم که ضربشان ماکزیمم است.

a'	b'	$a'b'$	
1	12	12	
2	11	22	
3	10	30	
4	9	36	
5	8	40	
6	7	42	✓

$$\Rightarrow \max[a,b]=42\times 8=336$$

۱۷۴- گزینهٔ ۲ رابطه را برحسب d و b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

$$[a,b]=(a,b)+1 \Rightarrow a'b'd=d+1$$
$$\Rightarrow a'b'd-d=1 \Rightarrow d(a'b'-1)=1$$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱ شده پس هر دو برابر ۱ هستند.

$$a'b'-1=1 \Rightarrow \begin{array}{l}d=1 \\ a'b'=2\end{array} \Rightarrow a'=1, b'=2$$
$$\Rightarrow a=1, b=2 \Rightarrow a^2+b^2=5$$

۱۷۵- گزینهٔ ۳ رابطه را برحسب a' و b' و d بازنویسی می‌کنیم:

$$5[a,b]=9(a,b)+11 \Rightarrow 5a'b'd=9d+11$$
$$\Rightarrow 5a'b'd-9d=11 \Rightarrow d(5a'b'-9)=11$$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۱ شده است، بنابراین یکی از آن‌ها ۱ و دیگری برابر ۱۱ است اما از آن‌جا که در صورت سؤال گفته شده $d\neq 1$ است، بنابراین:
$d=11$

$$5a'b'-9=1 \Rightarrow 5a'b'=10 \Rightarrow a'b'=2$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l}a'=1 \\ b'=2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}a=11 \\ b=22\end{array} \Rightarrow a+b=33$$

۱۷۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، آن‌گاه:

$$d|a \Rightarrow a=a'd$$
$$d|b \Rightarrow b=b'd$$
$$[a,b]=[a'd,b'd]=a'b'd$$

و $(a',b')=۱$ چرا که در غیر این صورت d ب.م.م نمی‌شود.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$[a,b]=۶۰(a,b) \Rightarrow a'b'd=۶۰d \Rightarrow a'b'=۶۰$$

$a'+b'=۶۱ \leftarrow$	۱	۶۰
	۲	۳۰ ✗
$a'+b'=۱۳ \leftarrow$	۳	۱۰
$a'+b'=۱۹ \leftarrow$	۴	۱۵
$a'+b'=۱۷ \leftarrow$	۵	۱۲
	۶	۱۰ ✗

این دو حالت غیرقابل قبول‌اند. (چون نسبت به هم اول نیستند.)

از طرفی مجموع دو عدد برابر ۱۳۶ است. یعنی:

$$a+b=۱۳۶ \Rightarrow a'd+b'd=۱۳۶ \Rightarrow d(a'+b')=۱۳۶$$

حالا با توجه به این‌که $۱۳۶=۲^۳\times۱۷$ است، تنها حالت قابل قبول برای $a'+b'$ حالت $a'+b'=۱۷$ است بنابراین:

$$۱۷d=۱۳۶ \Rightarrow d=۸ \Rightarrow \begin{cases} a=۸\times۱۲=۹۶\\ b=۸\times۵=۴۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=۵۶$$

۱۷۷- **گزینهٔ ۲** دو رابطه را برحسب d و b' و a' می‌نویسیم:

$$[a,b]=۱۰۰۱ \Rightarrow a'b'd=۱۰۰۱ \quad (I)$$

$$۲a+b=۲۴۵ \Rightarrow ۲a'd+b'd=۲۴۵ \quad (II)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a'b'd}{d(۲a'+b')}=\frac{۱۰۰۱}{۲۴۵}$$

در کسر سمت چپ d را ساده می‌کنیم و کسر سمت راست نیز به ۷ ساده می‌شود. (*این‌جا به زبون بی‌زبونی سؤال داره بهمون می‌گه $d=۷$ ئه*):

$$\frac{a'b'}{۲a'+b'}=\frac{۱۴۳}{۳۵} \Rightarrow \begin{cases}a'b'=۱۴۳\\ ۲a'+b'=۳۵\end{cases}$$

از رابطهٔ $a'b'=۱۴۳$ می‌شود فهمید که $a'=۱۱$ و $b'=۱۳$ است و می‌بینیم که به ازای این دو مقدار $۲a'+b'=۳۵$ می‌شود.

حالا با قرار دادن در رابطهٔ (I) d را پیدا می‌کنیم:

$$a'b'd=۱۰۰۱ \Rightarrow ۱۴۳d=۱۰۰۱ \Rightarrow d=۷$$

بنابراین عدد بزرگ‌تر برابر است با:

$$b=b'd=۱۳\times۷=۹۱ \Rightarrow ۹+۱=۱۰$$

۱۷۸- **گزینهٔ ۱** در $۱۰!$ عامل ۷ وجود دارد بنابراین می‌توان از ۷ فاکتور گرفت و در نتیجه $۱۰!+۷$ اول نیست:

$$۱۰!+۷=۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱+۷$$

$$=۷(۱۰\times۹\times۸\times۶\times\cdots\times۱+۱)$$

با همین استدلال در $۲۰!$ عامل ۱۳ وجود دارد و در نتیجه $۲۰!+۱۳$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و اول نیست:

$$۲۰!+۱۳=۱۳(۲۰\times۱۹\times\cdots\times۱۴\times۱۲\times\cdots\times۱+۱)$$

می‌دانیم $۹۳=۳۱\times۳$ بنابراین با توجه به این‌که در $۳۰!$ نیز عامل ۳ وجود دارد از عدد ۳ می‌توان فاکتور گرفت پس $۳۰!+۹۳$ نیز اول نیست.

$$۳۰!+۹۳=۳k$$

۱۷۹- **گزینهٔ ۲** همهٔ عددهای اول به‌جز ۲ فردند. اما اگر سه عدد فرد را با هم جمع کنیم حاصل فرد می‌شود. این‌جا مجموع سه عدد برابر ۲۰۰ شده پس قطعاً یکی از آن‌ها برابر ۲ است و حاصل‌ضرب این سه عدد زوج است.

۱۸۰- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم:

$$\begin{array}{l|l} a & b\\ \hline -r & q\end{array} \Rightarrow a=bq+r, ۰\le r<b$$

همهٔ عددهای اول به‌جز ۲ فردند. اما اگر b و q و r هر سه فرد باشند $a=bq+r$ زوج می‌شود که امکان‌پذیر نیست پس یکی از r و b و یا q حتماً باید برابر ۲ باشد.

(دقت کنید b نمی‌تواند برابر ۲ باشد چون در آن‌صورت رابطهٔ $r<b$ برقرار نمی‌شود.)

۱۸۱- **گزینهٔ ۳** یک راه ساده، خب مثلاً $۵^۲=۲۵$ را بگیریم. ۲۵ هم به صورت $۸k+۱$ است و هم $۱۲k+۱$ است، هم $۲۴k+۱$، پس جواب ۳ می‌شود. در کتاب درسی آمده است که هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ است. (*تو درس‌نامه دلیلش رو دیدی!*) $۶k+۵$ را هم می‌توانیم به صورت $۶k'-۱$ بنویسیم، پس، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $۶k\pm۱$ درمی‌آید.

$$P^۲=(۶k\pm۱)^۲=۳۶k^۲\pm۱۲k+۱=۱۲\underline{k(۳k\pm۱)}+۱$$

$k(۳k\pm۱)$ حتماً زوج است. (*k رو یه بار زوج و یه بار فرد بگیر و ببین!*)

پس $k(۳k\pm۱)=۲k'$ می‌شود؛ یعنی مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $۲۴k'+۱$ می‌شود.

۱۸۲- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد و مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ همواره باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

بنابراین: $p^۲=۶k'+۱, q=۶k+۱$ یا $۶k+۵$

$$\Rightarrow p^۲+q \begin{cases}\xrightarrow{q=۶k+۱} ۶k'+۱+۶k+۱=۶(k'+k)+۲\\ \xrightarrow{q=۶k+۵} ۶k'+۱+۶k+۵=۶(k'+k+۱)\end{cases}$$

پس باقی‌ماندهٔ $p^۲+q$ بر ۶ برابر صفر یا ۲ است و ۲ حالت دارد.

۱۸۳- **گزینهٔ ۳** **روش اول** در بخش درس‌نامه دیدیم که باقی‌ماندهٔ هر عدد اول مانند P در تقسیم به ۶ برابر ۱ یا ۵ است یعنی:

$$P=۶k+۱ \Rightarrow P^۲=\underbrace{۳۶k^۲+۱۲k}_{\text{مضرب ۶}}+۱$$

$$P=۶k+۵ \Rightarrow P^۲=\underbrace{۳۶k^۲+۶۰k+۲۴}_{\text{مضرب ۶}}+۱$$

همان‌طور که می‌بینید در هر دو حالت $P^۲$ در تقسیم به ۶ باقی‌ماندهٔ برابر ۱ دارد؛ (*تو حالت اول که مشخصه تو حالت دوم هم باقی‌ماندهٔ ۲۵ به ۶ برابر یکه.*) یعنی:

$$P^۲=۶q+۱$$

حالا برویم سراغ گزینه‌ها:

(۱) $P^۲+۱$ عددی زوج است، پس هیچ وقت نمی‌تواند اول باشد.

(۲) $P^۲+۲=۶q+۱+۲=۶q+۳$

مضرب ۳ است پس اول نیست.

(۴) $P^۲+۵=۶q+۱+۵=۶q+۶$

مضرب ۶ است پس اول نیست.

بنابراین فقط $P^۲+۴$ می‌تواند دوباره عددی اول باشد.

در حالت کلی اگر P عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، $P^۲$ را می‌توان به صورت $۲۴k+۱$ نوشت.

روش دوم یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را در نظر بگیرید. برای مثال ۵ و گزینه‌ها را بررسی کنید:

$P=۵ \Rightarrow P^۲+۱=۲۶$ اول نیست.

$P^۲+۲=۲۷$ اول نیست.

$P^۲+۴=۲۹$ اول است.

$P^۲+۵=۳۰$ اول نیست.

۱۸۴- گزینهٔ۳ مربع کامل را با $a^۲$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$p^۲+۳۲=a^۲ \Rightarrow a^۲-p^۲=۳۲ \Rightarrow (a-p)(a+p)=۳۲$$

ضرب دو پرانتز برابر ۳۲ شده است. حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

$\begin{cases} a-p=۱ \\ a+p=۳۲ \end{cases}$ دستگاه جواب طبیعی ندارد.

$\begin{cases} a-p=۲ \\ a+p=۱۶ \end{cases} \Rightarrow a=۹, p=۷$

$\begin{cases} a-p=۴ \\ a+p=۸ \end{cases} \Rightarrow a=۶, p=۲$ فرد نیست.

پس $p=۷$ است و در نتیجه $p^۲+۲=۵۱$ مضرب ۱۷ است.

۱۸۵- گزینهٔ۲ مکعب کامل را با $a^۳$ نشان می‌دهیم:

$$۵p-۱=a^۳ \Rightarrow a^۳+۱=۵p \Rightarrow (a+۱)(a^۲-a+۱)=۵p$$

حاصل‌ضرب دو پرانتز برابر $۵p$ شده پس یکی از آن‌ها برابر p و دیگری ۵ است. داریم:

$\begin{cases} a+۱=۵ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow p=۱۳ \\ a^۲-a+۱=p \end{cases}$ یا

$\begin{cases} a+۱=p \\ a^۲-a+۱=۵ \Rightarrow a^۲-a-۴=۰ \end{cases}$

معادله ریشهٔ طبیعی ندارد.

پس فقط به ازای یک مقدار p، عدد $۵p-۱$ مربع کامل می‌شود.

۱۸۶- گزینهٔ۳ وقتی $p|۱۲a$ یعنی کسر $\frac{۱۲a}{p}$ عددی صحیح است.

برای این‌که این کسر عددی صحیح شود باید p در مخرج کسر ساده شود. خب $(p,a)=۱$ است یعنی p با a ساده نمی‌شود. پس p باید با ۱۲ ساده شود. با توجه به این‌که $۱۲=۲^۲\times۳$ و p عددی اول است پس p فقط می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۸۷- گزینهٔ۱ خب یک طرفین‌وسطین انجام بدهیم ببینیم چه می‌شود؟

$$P+a=۱۸P-۱۸a \Rightarrow ۱۹a=۱۷P \Rightarrow ۱۹|۱۷P$$

P عددی اول است، از طرفی هم $\frac{۱۷P}{۱۹}$ صحیح است، پس $P=۱۹$ می‌شود.

با جای‌گذاری، $a=۱۷$ به دست می‌آید؛ بنابراین $aP=۱۷\times۱۹=۳۲۳$.

۱۸۸- گزینهٔ۳ از $(a,p^۴)=p^۳$ می‌توان نتیجه گرفت a دقیقاً ۳ عامل p دارد. از $(b^۲,p^۳)=p^۲$ می‌توان نتیجه گرفت b دقیقاً یک عامل p دارد.

(چون اگر b دو عامل p داشت $b^۲$ چهارتا عامل p داشت و $(b^۲,p^۳)=p^۳$ می‌شد.)

بنابراین ab دقیقاً ۴ عامل p دارد. در نتیجه:

$(ab,p^۶)=p^۴$

۱۸۹- گزینهٔ۱ (الف) می‌دانیم اگر n فرد باشد a^n+b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است پس $۲^{۱۷}+۱$ بر $۳=۱+۲$ بخش‌پذیر است و اول نیست.

(ب) می‌دانیم a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است، پس $۶^{۱۷}-۱$ بر $۵=۶-۱$ بخش‌پذیر است و اول نیست.

(پ) $۲^{۲۲}-۱=۴^{۱۱}-۱$

که بر $۳=۴-۱$ بخش‌پذیر است و این هم اول نیست.

۱۹۰- گزینهٔ۴

(۱) اگر $p=۲$ باشد $۳p+۱=۷$ اول می‌شود.

(۲) اگر $p=۲$ باشد $۴^۲+۱=۱۷$ اول می‌شود.

(۳) اگر $p=۳$ باشد $۳^۲+۲=۱۱$ اول می‌شود.

(۴) می‌دانیم a^n-b^n بر $a-b$ بخش‌پذیر است. داریم:

$۲^{۲p}-۱=۴^p-۱$

بر $۳=۴-۱$ بخش‌پذیر است و در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌تواند اول باشد و همواره مرکب است.

۱۹۱- گزینهٔ۲

عدد به صورت $۱۱\times۱۳\times۱۷\times\cdots\times۸۹\times۹۷+۱$ است. این عدد زوج است چون $۱۱\times۱۳\times\cdots\times۹۷$ ضرب تعدادی عدد فرد و در نتیجه فرد است و وقتی با ۱ جمع می‌شود، زوج می‌شود.

اما این عدد هیچ شمارندهٔ دورقمی اولی ندارد چون بر همهٔ آن‌ها باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۱۹۲- گزینهٔ۲ n اول است پس بر ۳ بخش‌پذیر نیست مگر آن‌که برابر ۳ باشد. اما اگر $n=۳$ آن‌گاه $n+۴=۷$ و $n+۸=۱۱$ که هر سه عدد اول می‌شوند. پس تا این‌جای کار یک حالت پیدا کردیم.

در سایر حالت‌ها اگر n مضرب ۳ باشد اول نیست، پس n نمی‌تواند مضرب ۳ باشد پس یا به صورت $n=۳k+۱$ است یا به صورت $n=۳k+۲$ است. اگر $n=۳k+۱$ باشد، $n+۸=۳k+۹$ که مضرب ۳ می‌شود و اول نیست. اگر $n=۳k+۲$ باشد، $n+۴=۳k+۶$ مضرب ۳ است و اول نیست. پس فقط به ازای یک مقدار n (یعنی $n=۳$) هر سه عدد اول‌اند.

۱۹۳- گزینهٔ۲ دو نکتهٔ مهم برای پاسخ‌گویی به این سؤال باید بدانید.

(این‌ها خارج از کتابن اما دونستنش ضرری نداره.)

(۱) برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست یک عدد، توان عددهای ۲ و ۵ عدد را در تجزیه پیدا می‌کنیم هر کدام کم‌تر بود تعداد صفرهای سمت راست عدد است. به بیان دیگر اگر $n=۲^\alpha\times۵^\beta\times\cdots$ آن‌گاه تعداد صفرهای سمت راست n برابر است با $\min\{\alpha,\beta\}$ (برای مثال تعداد صفرهای سمت راست عدد $۲^{۱۱}\times۳^۸\times۵^۷$ برابر است با ۷)

(۲) توان عدد اول p را در تجزیهٔ $n!$ می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^۲}\right]+\left[\frac{n}{p^۳}\right]+\cdots$$

برای مثال اگر بخواهیم پیدا کنیم در تجزیهٔ $۳۰!$ توان عددهای ۲ و ۵ چند است، داریم:

توان عدد ۵: $\left[\frac{۳۰}{۵}\right]+\left[\frac{۳۰}{۲۵}\right]+\left[\frac{۳۰}{۱۲۵}\right]+\cdots=۶+۱+۰=۷$

توان عدد ۲: $\left[\frac{۳۰}{۲}\right]+\left[\frac{۳۰}{۴}\right]+\left[\frac{۳۰}{۸}\right]+\left[\frac{۳۰}{۱۶}\right]+\left[\frac{۳۰}{۳۲}\right]+\cdots$

$=۱۵+۷+۳+۱=۲۶$

حالا تعداد صفرهای سمت راست $30!\times125^{6}$ را پیدا می‌کنیم:

$$30!\times125^{6}=(2^{26}\times5^{7}\times\cdots)\times(5^{3})^{6}$$
$$=(2^{26}\times5^{7}\times\cdots)\times5^{18}=2^{26}\times5^{25}\times\cdots$$

پس سمت راست این عدد به ۲۵ صفر ختم می‌شود.

۱۹۴- گزینهٔ ۱ رابطه را به صورت یک کسر می‌نویسیم:

$$\frac{25!}{P}=\frac{25\times24\times23\times\cdots\times3\times2\times1}{P}$$

واضح است که اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد P را حداکثر برابر ۲۳ می‌توان قرار داد پس $P=23$ حالا می‌خواهیم $23^{2}\mid n!$. اگر دوباره رابطه را به صورت کسر بنویسیم، داریم:

$$\frac{n!}{23^{2}}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1}{23\times23}$$

یعنی باید دوتا ۲۳ مخرج با عبارت صورت ساده شوند. یعنی دست‌کم دوتا از عددهای صورت باید بر ۲۳ بخش‌پذیر باشند. اولین مضرب ۲۳ که خود عدد ۲۳ است اما دومین مضرب ۲۳ عدد ۴۶ است. بنابراین !۴۶ بر 23^{2} بخش‌پذیر است چون یکی از ۲۳های مخرج را می‌توان با ۲۳ ساده کرد و یکی دیگر را با ۴۶. نگاه کنید:

$$\frac{46!}{23^{2}}=\frac{\overset{2}{\cancel{46}}\times45\times\cdots\times\cancel{23}\times\cdots\times3\times2\times1}{\cancel{23}\times\cancel{23}}$$

۱۹۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم همهٔ عددهای اول به‌جز ۲ فردند. اگر p و q و r هر سه فرد باشند p^{2} و q^{2} و r^{2} نیز فرد خواهند شد و مجموعشان نیز عددی فرد می‌شود. اما با توجه به این‌که $p^{2}+q^{2}+r^{2}=150$ و زوج است یعنی هر سه عدد نمی‌توانند فرد باشند و یکی از آن‌ها زوج است و چون تنها عدد اول زوج عدد ۲ است پس $p=2$ است. (دقت کنید که $p<q<r$ است یعنی p از همه کوچک‌تر است)

$$p=2\Rightarrow 4+q^{2}+r^{2}=150\Rightarrow q^{2}+r^{2}=146$$

حالا مجموع مربعات دو عدد اول برابر ۱۴۶ شده است. واضح است که هیچ‌کدام از q و r نمی‌توانند ۱۳ یا بزرگ‌تر از ۱۳ باشند *(چون‌که $13^{2}=169$ می‌شه که از ۱۴۶ بزرگ‌تره)* بنابراین q و r باید دو تا از عددهای اول بین ۲ تا ۱۳ باشند یعنی ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ مربع‌های این عددها را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم مجموع کدام یک از آن‌ها برابر ۱۴۶ می‌شود:

$$3^{2}=9$$
$$5^{2}=25$$
$$7^{2}=49$$
$$11^{2}=121$$

با یک نگاه ساده می‌شود فهمید که ۱۲۱+۲۵ برابر ۱۴۶ می‌شود یعنی r و q یکی برابر ۵ و دیگری برابر ۱۱ است. در نتیجه:

$$r+q-p=11+5-2=14$$

۱۹۶- گزینهٔ ۴ شکل این اعداد چه‌جوری است؟ خب عدد سه‌رقمی a بر ۲۱ تقسیم شده و باقی‌مانده برابر ۱۵ به دست آمده است. پس $a=21q+15$ باید باشد. حالا گفته این a سه‌رقمی باشد. پس:

$$100\le21q+15<1000\Rightarrow\frac{85}{21}\le q<\frac{985}{21}$$
$$\Rightarrow 4/\ldots\le q<46/\ldots\Rightarrow 5\le q\le46$$

به ازای هر q، دقیقاً یک عدد برای a به دست می‌آید. حالا مجموعهٔ $\{5,6,\ldots,46\}$ چند عضو دارد؟ $46-5+1=42$ تا.

۱۹۷- گزینهٔ ۴ **روش اول** اگر ۱۰۷ را بر ۱۳ تقسیم کنیم، داریم:

$$\begin{array}{r|l}107 & 13\\ \underline{104} & 8\\ 3 & \end{array}$$

و می‌دانیم: $107=13\times8+3$ حال اگر ۱۰۷- را بر ۱۳ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت را $q=-8$ بگیریم، داریم: $-107=13\times(-8)-3$

اما ۴- را به عنوان باقی‌مانده نمی‌توان در نظر گرفت زیرا طبق قضیهٔ تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد. $(0\le r<b)$

در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم‌علیه شرایط قضیهٔ تقسیم را برقرار می‌کنیم:

$$-107=13\times(-8)-3\underbrace{+13-13}_{\text{۱۳تا اضافه و کم می‌کنیم}}=(13\times(-8)-13)+(13-3)$$
$$=13(\underbrace{-8-1}_{q})+10=13\times-9+10\Rightarrow r=10$$

روش دوم طبق نکته‌ای که در قسمت آموزش توضیح دادیم، اول ۱۰۷ را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم، پس چون باقی‌ماندهٔ ۱۰۷- را بر ۱۳ می‌خواهیم از رابطهٔ $r=b-r'$ باقی‌ماندهٔ ۱۰۷- را بر ۱۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l}107 & 13\\ \underline{104} & 8\\ 3 & \end{array}\Rightarrow r'=3\Rightarrow r=b-r'=13-3=10$$

۱۹۸- گزینهٔ ۱

$$\begin{array}{r|l}a & 15\\ & q\\ \overline{r} & \end{array}\Rightarrow a=15q+r$$

از طرفی $r+q=5$ بنابراین:

$$r=5-q\Rightarrow a=15q+5-q=14q+5$$

واضح است که $a-5$ بر ۱۴ بخش‌پذیر است.

۱۹۹- گزینهٔ ۴ رابطه‌های تقسیم را می‌نویسیم و بعد $a-2b$ را می‌سازیم:

$$\begin{cases}a=11q+5\\ b=11q'+9\end{cases}\Rightarrow a-2b=11q+5-2(11q'+9)$$
$$=11(q-2q')-13=11k-13$$

حالا کافی است باقی‌ماندهٔ ۱۳- را بر ۱۱ پیدا کنیم چون باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد.

اگر مثبت تقسیم کنیم داریم:

$$\begin{array}{r|l}13 & 11\\ \underline{11} & 1\\ 2 & \end{array}\Rightarrow r=11-2=9$$

روش دوم با عددگذاری به سؤال پاسخ می‌دهیم. دیدیم که $a=11q+5$ و $b=11q'+9$. برای مثال اگر $q=2$ و $q'=0$ باشد، داریم:

$$\begin{matrix}a=27\\ b=9\end{matrix}\Rightarrow a-2b=27-18=9$$

(q و q' رو یه‌جوری گرفتیم که $a-2b$ مثبت بشه و کارمون راحت‌تر بشه.)

روش سوم اگر به جای عددها خود باقی‌مانده‌ها را هم قرار می‌دهیم می‌توانیم به سؤال پاسخ دهیم. *(یعنی جای a بذار ۵ و جای b بذار ۹)*

$$\begin{matrix}a=5\\ b=9\end{matrix}\Rightarrow a-2b=5-18=-13$$

و بقیهٔ پاسخ مثل روش اول است. باقی‌ماندهٔ ۱۳- را بر ۱۱ به دست می‌آوریم که برابر ۹ است.

۲۰۰- گزینهٔ ۳ $a=۱۴q+۱$ می‌شود و $b=۲۱q'+۲$. باقی‌مانده بر ۷ را خواسته است، پس مقسوم‌علیه را به ۷ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a=۱۴q+۱=۷(۲q)+۱=۷k+۱ \\ b=۲۱q'+۲=۷(۳q')+۲=۷k'+۲ \end{cases}$$

حالا $۲a+۳b$ را می‌سازیم:

$$۲a+۳b=۲(۷k+۱)+۳(۷k'+۲)=۷(۲k+۳k')+\overset{۷+۱}{۸}$$
$$=۷(۲k+۳k'+۱)+۱=۷k''+۱$$

پس باقی‌مانده برابر ۱ می‌شود.

روش دوم a را برابر ۱ و b را برابر ۲ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$۲a+۳b=۲+۶=۸$

و باقی‌ماندهٔ ۸ بر ۷ برابر ۱ است.

۲۰۱- گزینهٔ ۴ $x=۲۰q+۷$ می‌شود، پس $۷x+۱=۱۴۰q+۵۰$.

حالا از یک ۱۴ فاکتور می‌گیریم. $۱۴۰q+\overset{۴۲+۸}{۵۰}=۱۴(\overbrace{۱۰q+۳}^{k})+۸=۱۴k+۸$

یعنی باقی‌مانده برابر ۸ می‌شود.

۲۰۲- گزینهٔ ۳

$m=۲۴q+۷$ و $n=۲۰q'+۱۷$ می‌شود. حالا $۵m-۳n$ را می‌سازیم:

$$۵m-۳n=۵(۲۴q+۷)-۳(۲۰q'+۱۷)=۱۲۰q-۶۰q'-۱۶$$

حالا باید از ۱۵ فاکتور بگیریم:

$$۱۲۰q-۶۰q'-۱۵-۱=۱۵(\underbrace{۸q-۴q'-۱}_{k})-۱$$
$$=۱۵k-۱=۱۵(k-۱)+۱۴$$

دقت کنید باقی‌مانده نمی‌تواند برابر ۱- باشد.

روش دوم m را برابر ۷ و n را برابر ۱۷ فرض می‌کنیم در این صورت:

$۵m-۳n=۳۵-۵۱=-۱۶$

حالا باقی‌ماندهٔ ۱۶- را بر ۱۵ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} ۱۶ & ۱۵ \\ \hline ۱۵ & ۱ \\ \hline ۱ & \end{array} \Rightarrow r=۱۵-۱=۱۴$$

۲۰۳- گزینهٔ ۲ خب دو رابطهٔ تقسیم به صورت $n=۶q+۴$ و $n=۷q'+۶$ می‌شود. ما سعی می‌کنیم که مقسوم‌علیه برابر ۴۲ بشود. اولی را در ۷ و دومی را در ۶ ضرب می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases} ۷n=۴۲q+۲۸ \\ ۶n=۴۲q'+۳۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} n=۴۲(\underbrace{q-q'}_{k})-۸$$

باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد، پس عدد ۴۲ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$n=۴۲(k-۱)+۴۲-۸=۴۲(k-۱)+۳۴$$

> توجه کنید در این سؤال‌ها هر وقت عدد ثابت منفی شد ما می‌توانیم آن‌قدر مضارب مقسوم‌علیه را به آن اضافه کنیم تا مثبت شود.

۲۰۴- گزینهٔ ۴ عدد را a و خارج قسمت‌ها بر ۷ و ۸ را به ترتیب q و q' فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۷ \\ \hline & q \\ ۵ & \end{array} \Rightarrow a=۷q+۵$$

$$\begin{array}{l|l} a & ۸ \\ \hline & q' \\ ۷ & \end{array} \Rightarrow a=۸q'+۷$$

باید این دو رابطه را تبدیل به یک رابطه کنیم. برای این کار بالایی را در ۸ و پایینی را در ۷ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a=۷q+۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶q+۴۰$$
$$a=۸q'+۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶q'+۴۹$$
$$\xrightarrow{\ominus} a=۵۶(\underbrace{q-q'}_{k})-۹$$

پس عدد ما به صورت $a=۵۶q-۹$ است. این عدد باید سه‌رقمی باشد، بنابراین:

$$۱۰۰\le a\le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰\le ۵۶q-۹\le ۹۹۹$$
$$\Rightarrow ۱۰۹\le ۵۶q\le ۱۰۰۸ \Rightarrow ۱/۹۴\le q\le ۱۸$$

پس $q\in\{۲,۳,\ldots,۱۸\}$ که این مجموعه دارای $۱۸-۲+۱=۱۷$ عضو است.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ $a=۶q+۲$ و $a=۸q'+۴$ می‌شود. باید کاری کنیم که مقسوم‌علیه برابر ۱۲ شود. از طرفی: $۳\times ۴=۱۲$

$$\begin{cases} a=۶q+۲=۳(\overbrace{۲q}^{k})+۲=۳k+۲ \xrightarrow{\times ۴} ۴a=۱۲k+۸ \\ a=۸q'+۴=۴(۲q'+۱)=۴k' \xrightarrow{\times ۳} ۳a=۱۲k' \end{cases}$$

دو طرف را از هم کم کنیم، می‌شود: $a=۱۲(k-k')+۸=۱۲k''+۸$

حالا $۵a+۳$ را می‌سازیم: $۵a+۳=۱۲(۵k'')+\underbrace{۴۳}_{۳۶+۷}$

$$=۱۲(۵k''+۳)+۷$$

پس باقی‌مانده برابر ۷ می‌شود.

(اون آخرش می‌تونستید به جای این کار، خیلی راحت باقی‌ماندهٔ ۴۳ رو بر ۱۲ به دست بیارید.)

۲۰۶- گزینهٔ ۱ خارج قسمت‌ها را q و q' فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۱۳ \\ \hline & q \\ ۷ & \end{array} \Rightarrow a=۱۳q+۷$$

$$\begin{array}{l|l} a & ۷ \\ \hline & q' \\ ۶ & \end{array} \Rightarrow a=۷q'+۶$$

ببینید ما باید دو رابطه را در عددهایی ضرب کنیم که دوتا اتفاق بیفتد.

اول این‌که مضرب ۹۱ ایجاد شود و دوم این‌که وقتی دو رابطه را از هم کم می‌کنیم اختلاف یک شود. به همین خاطر رابطهٔ بالایی را در ۱۴ و رابطهٔ پایینی را در ۱۳ ضرب می‌کنیم.

(حواستون باشه که این مدل سؤال‌ها رو با همنهشت آسون‌تر می‌شه حل کرد اما چون دیده شده در بعضی از آزمون‌های آزمایشی از این ایده در این درس سؤال می‌دهند، ما هم بد ندیدیم شما از این روش هم بتوانید به این‌جور سؤال‌ها جواب دهید. تو بخش همنهشتی هم از این سؤال‌ها داریم که اون‌جا راه همنهشتی رو هم می‌بینید!)

$$a=۱۳q+۷ \xrightarrow{\times ۱۴} ۱۴a=۱۸۲q+۹۸ \quad (I)$$
$$a=۷q'+۶ \xrightarrow{\times ۱۳} ۱۳a=۹۱q'+۷۸ \quad (II)$$

حالا دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$(I)-(II): 14a-13a=182q+98-91q'-78$$
$$\Rightarrow a=91(2q-q')+20$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ a بر ۹۱ برابر ۲۰ است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تقسیم عدد a بر b، خارج قسمت برابر است با:

$$q=[\frac{a}{b}]$$
$$q=[\frac{13!-1}{13}]=[\frac{13!}{13}+\frac{-1}{13}]=[12!]+[-\frac{1}{13}]=12!-1$$

۲۰۸- گزینهٔ ۱ $246=b(18)+r$ می‌شود. دیگر چه داریم؟ شرط باقی‌مانده می‌گوید که $0\le r<b$. r را حساب کرده و در این رابطه جای‌گذاری می‌کنیم. یعنی:

$$0\le 246-18b<b \Rightarrow \begin{cases} 0\le 246-18b \Rightarrow b\le \frac{246}{18}=13/... \\ 246-18b<b \Rightarrow 12/...<b \end{cases}$$

پس $b=13$ فقط می‌تواند باشد؛ یعنی یک مقدار دارد.

روش دوم خارج قسمت برابر است با $\left[\frac{246}{b}\right]$ که برابر ۱۸ شده است. بنابراین:

$$\left[\frac{246}{b}\right]=18 \Rightarrow 18\le\frac{246}{b}<19$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{246}{b}<19 \Rightarrow 19b>246 \Rightarrow b>12/9 \\ \frac{246}{b}\ge 18 \Rightarrow 18b\le 246 \Rightarrow b\le 13/6 \end{cases}$$

پس b فقط می‌تواند برابر ۱۳ باشد.

۲۰۹- گزینهٔ ۲ باقی‌مانده و خارج قسمت را r و q می‌نامیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{r} & \end{array} \Rightarrow a=bq+r \quad (I)$$

به مقسوم ۵۳ واحد اضافه شده؛ یعنی a تبدیل شده به $a+53$. به خارج قسمت ۵ واحد اضافه شده. یعنی q شده $q+5$ و از باقی‌مانده ۲ واحد کم شده؛ یعنی r شده $r-2$. داریم: $a+53=b(q+5)+r-2 \quad (II)$

حال دو رابطهٔ (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$(II)-(I): 53=b(q+5)+r-2-bq-r \Rightarrow 55=5b \Rightarrow b=11$$

۲۱۰- گزینهٔ ۳

$$\begin{array}{l|l} a & 17 \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{13} & \end{array} \Rightarrow a=17q+13 \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{۶۱ واحد به مقسوم}} a+61=17q+74$$

می‌دانیم در تقسیم به ۱۷ باقی‌مانده باید کم‌تر از ۱۷ باشد. با توجه به این‌که:

$$74=4\times17+6$$

داریم: $a+61=17q+4\times17+6 \Rightarrow a+61=17(q+4)+6$

پس به خارج قسمت ۴ واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر ۶ شده است.

۲۱۱- گزینهٔ ۱ $a=63q+17 \Rightarrow a+60=63q+77$

می‌دانیم در تقسیم یک عدد بر ۶۳ باقی‌مانده باید کم‌تر از ۶۳ باشد. بنابراین:

$$a+60=63q+63+14=63(q+1)+14$$

باقی‌ماندهٔ جدید ۱۴ است که نسبت به باقی‌ماندهٔ قبلی ۳ واحد کم شده و خارج قسمت جدید $q+1$ است که نسبت به خارج قسمت قبلی یکی زیاد شده است.

۲۱۲- گزینهٔ ۲ خارج قسمت عدد سه واحد بیشتر از باقی‌مانده است، بنابراین:

$$\begin{array}{l|l} a & 11 \\ \cline{2-2} & r+3 \\ \overline{r} & \end{array}$$

$$a=11(r+3)+r\,,\,0\le r<11$$
$$\Rightarrow a=11r+33+r=12r+33 \Rightarrow a-9=12r+24$$

واضح است که اگر r زوج باشد $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر و اگر r فرد باشد، $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست.

مقادیر زوج r عبارت‌اند از: $10,8,6,4,2,0$

و تعداد کل مقادیر r نیز ۱۱تاست، بنابراین احتمال آن‌که r زوج باشد، برابر است با:

$$\frac{6}{11}$$

۲۱۳- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $q+r=17$ است. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 13 \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{r} & \end{array} \Rightarrow a=13q+r \Rightarrow a=12q+q+r$$
$$=12q+17 \Rightarrow a-8=12q+17-8=12q+9$$

اگر فرض کنیم باقی‌ماندهٔ $a-8$ بر ۳۶ برابر ۲۱ است، داریم:

$$12q+9\overset{36}{\equiv}21 \Rightarrow 12q\overset{36}{\equiv}12 \xrightarrow{\div 12} q\overset{3}{\equiv}1$$

حالا دقت کنید که: $0\le r<13 \quad (I)$

یعنی r سیزده حالت مختلف دارد. با توجه به این‌که $q+r=17$ است، داریم:

$$q=17-r \Rightarrow 17-r\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow r\overset{3}{\equiv}16\overset{3}{\equiv}1$$
$$\Rightarrow r=3k+1 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) مقادیر قابل قبول برای r عبارت‌اند از:

$$r=1,4,7,10$$

پس احتمال این‌که r این چهار مقدار را داشته باشد، برابر است با:

$$\frac{4}{13}$$

۲۱۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b داریم: $a=bq+r\,,\,0\le r<b$

در این‌جا:

$$\begin{array}{l|l} a & 47 \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{q^2} & \end{array} \Rightarrow a=47q+q^2\,,\,0\le q^2<47 \Rightarrow q=0,1,2,\dots,6$$

چون بزرگ‌ترین عدد را می‌خواهیم q را برابر ۶ فرض می‌کنیم:

$$a=47\times6+36=318$$

مجموع ارقام $=3+1+8=12$

۲۱۵- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b: $a=bq+r\,,\,0\le r<b$

داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 37 \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{q^2-2} & \end{array} \Rightarrow a=37q+q^2-2\,,\,0\le q^2-2<37$$
$$\Rightarrow 2\le q^2<39 \Rightarrow q=2,3,4,5,6$$

بیشترین مقدار q عدد ۶ است، بنابراین: $a=37\times6+36-2=256$ که مضرب ۱۶ است.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ رابطهٔ تقسیم، $۹۱=bq+q^۲$ می‌شود که $۰\le q^۲<b$ است. دو طرف را به صورت ضرب درمی‌آوریم: $۱\times۷\times۱۳=q(b+q)$

$$\Rightarrow\begin{cases} q=۱ \Rightarrow b=۹۰ \\ q=۷ \Rightarrow b+۷=۱۳ \Rightarrow b=۶ \\ q=۱۳ \Rightarrow b+۱۳=۷ \Rightarrow b=-۶ \\ q=۹۱ \Rightarrow b+۹۱=۱ \Rightarrow b=-۹۰ \end{cases}$$

آن‌هایی که علامت × دارند، شرط باقی‌مانده را ندارند، پس مورد قبول نیستند.

۲۱۷- گزینهٔ ۳ a و b عددهایی متمایز و مثبت‌اند.

$$\begin{array}{l|l} a & ۲۳ \\ \hline ۲q^۳ & q \end{array} \Rightarrow a=۲۳q+۲q^۳,۰\le ۲q^۳<۲۳ \Rightarrow q=۱,۲$$

$$\begin{array}{l|l} b & ۲۳ \\ \hline ۲q'^۳ & q' \end{array} \Rightarrow b=۲۳q'+۲q'^۳,۰\le ۲q'^۳<۲۳ \Rightarrow q'=۱,۲$$

چون قرار است a و b متمایز باشند، پس یا $q=۱$ است و $q'=۲$ و یا $q=۲$ و $q'=۱$. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} q=۱ \Rightarrow a=۲۵ \\ q'=۲ \Rightarrow b=۶۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a+b=۵۰+۶۲=۱۱۲$$

$$\begin{cases} q=۲ \Rightarrow a=۶۲ \\ q'=۱ \Rightarrow b=۲۵ \end{cases} \Rightarrow ۲a+b=۱۴۹$$

۲۱۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، داریم: $۰\le r<b,a=bq+r$

چون باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد، پس $r=b-۱$؛ بنابراین:

$$a=bq+b-۱ \Rightarrow a+۱=b(q+۱) \Rightarrow b\mid a+۱$$

از طرفی $b\mid a-۱$، بنابراین: $\begin{matrix} b\mid a+۱ \\ b\mid a-۱\end{matrix} \xrightarrow{(-)} b\mid ۲ \Rightarrow b=۱$ یا ۲

$b>۱$ است، پس $b=۲$ قابل قبول است.

$a+۱$ و $a-۱$ بر ۲ بخش‌پذیرند، پس هر دو زوج‌اند و a فرد است، در نتیجه $a^۲$ نیز فرد است و باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۲ برابر ۱ است.

۲۱۹- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ a را بر ۱۵ برابر r فرض می‌کنیم و داریم:

$$a=۱۵q+r,۰\le r<۱۵$$
$$-a=۱۵q'+r-۱,۰\le r-۱<۱۵$$

اگر دو رابطه را با هم جمع کنیم داریم:

$$۰=۱۵(q+q')+۲r-۱ \Rightarrow ۲r-۱=۱۵(-q'-q)$$

یعنی $۲r-۱$ بر ۱۵ بخش‌پذیر است. حالا با توجه به این‌که:

$$۰\le r<۱۵ \Rightarrow ۰\le ۲r<۳۰ \Rightarrow -۱\le ۲r-۱<۲۹$$

یعنی $۲r-۱$ عددی است که بر ۱۵ بخش‌پذیر است و در فاصلهٔ ۱- تا ۲۹ قرار دارد پس $۲r-۱$ یا صفر است و یا ۱۵:

$$۲r-۱=۰ \Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\ \text{غ‌ق‌ق}$$
$$۲r-۱=۱۵ \Rightarrow r=۸$$

بنابراین $a=۱۵q+۸$ است. می‌خواهیم بزرگ‌ترین عدد دورقمی با این شرایط را پیدا کنیم:

$$۱۵q+۸\le ۹۹ \Rightarrow ۱۵q\le ۹۱ \Rightarrow q\le ۶/۰۶$$
$$\Rightarrow q_{max}=۶ \Rightarrow q_{max}=۱۵\times۶+۸=۹۸$$
$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۹+۸=۱۷$$

۲۲۰- گزینهٔ ۲

$$\begin{array}{l|l} ۱۰۷ & b \\ \hline ۳ & q \end{array} \Rightarrow ۱۰۷=bq+۳,۳<b \Rightarrow ۱۰۴=bq$$

$$\Rightarrow b\mid ۱۰۴ \Rightarrow b\mid ۲^۳\times۱۳ \quad (I)$$

$$\begin{array}{l|l} ۸۳ & b \\ \hline ۵ & q' \end{array} \Rightarrow ۸۳=bq'+۵,۵<b \Rightarrow ۷۸=bq'$$

$$\Rightarrow b\mid ۷۸ \Rightarrow b\mid ۲\times۳\times۱۳ \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$\begin{matrix} b\mid ۲^۳\times۱۳ \\ b\mid ۲\times۳\times۱۳ \end{matrix} \Rightarrow b\mid ۲۶ \Rightarrow b=۱,۲,۱۳,۲۶$$

و با توجه به شرط رابطهٔ تقسیم، یعنی $b>۵$ فقط دو مقدار ۱۳ و ۲۶ برای b، قابل‌قبول است.

۲۲۱- گزینهٔ ۱ a فرد است، آن را به صورت $۲k+۱$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین باقی‌مانده مربع کامل است، پس آن را با $r^۲$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۲k+۱ & ۲۰۰ \\ \hline r^۲ & q \end{array} \Rightarrow ۲k+۱=۲۰۰q+r^۲,۰\le r^۲<۲۰۰ \Rightarrow ۰\le r\le ۱۴$$

اما اگر r زوج باشد، سمت راست تساوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد خواهد شد که امکان‌پذیر نیست. بنابراین r عددی فرد بین صفر تا ۱۴ است.

اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، کافی است q را برابر ۴ (اگر $q=۵$ باشد، عدد، چهاررقمی می‌شود) و r را برابر ۱۳ فرض کنیم، در این صورت: $a=۲۰۰\times۴+۱۳^۲=۹۶۹$

که رقم دهگان آن ۶ است.

۲۲۲- گزینهٔ ۲ عدد را a می‌نامیم. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۲۳ \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow a=۲۳q+r \quad (I),۰\le r<۲۳$$

$$\begin{array}{l|l} a+x & ۲۳ \\ \hline \frac{r}{۳} & q+۳ \end{array} \Rightarrow a+x=۲۳(q+۳)+\frac{r}{۳} \quad (II)$$

اگر دو رابطهٔ (I) و (II) را از هم کم کنیم، داریم:

$$(II)-(I):x=۲۳\times۳-\frac{۲r}{۳} \quad (III)$$

از طرفی با توجه به این‌که $r<۲۳$ و r مضرب ۳ است. (چون در تقسیم دوم، باقی‌مانده $\frac{r}{۳}$ شده و اگر r مضرب ۳ نباشد، باقی‌مانده کسری می‌شود که نادرست است.)

اگر $r=۳k$ باشد، با توجه به شرط رابطهٔ اول؛ یعنی $۰\le r<۲۳$ داریم:

$$۰\le ۳k<۲۳ \Rightarrow ۰\le k\le ۷ \quad (IV)$$

حالا در رابطهٔ (III) به جای $\frac{r}{۳}$ معادل آن، یعنی k را قرار می‌دهیم:

$$x=۶۹-۲k \Rightarrow k=\frac{۶۹-x}{۲}$$

با توجه به رابطهٔ (IV) داریم: $\frac{۶۹-x}{۲}\le ۷ \Rightarrow ۶۹-x\le ۱۴ \Rightarrow x\ge ۵۵$

۲۲۳- گزینهٔ ۳ a را بر ۶ تقسیم می‌کنیم در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت:

$(2): a = 6k+1$	$(1): a = 6k$
$(4): a = 6k+3$	$(3): a = 6k+2$
$(6): a = 6k+5$	$(5): a = 6k+4$

در حالت‌های (۱)، (۳) و (۵) عدد a زوج است. با توجه به حالت‌های (۲)، (۴) و (۶) باقی‌ماندهٔ a بر ۶ برابر ۱ یا ۳ یا ۵ است. یعنی سه حالت مختلف دارد.

۲۲۴- گزینهٔ ۴ a مضرب ۳ است. پس به صورت $3q$ است. حالا چون فرد است، آن q هم باید فرد باشد؛ یعنی $q = 2k+1$ باشد. پس a به صورت $3(2k+1) = 6k+3$ درمی‌آید. یک راه دیگر هم داشتیم. چندتا عدد فرد مضرب ۳ مثال بزنیم. بعد ببینیم با کدام گزینه جور درمی‌آید. خب اجازه بدهید، مثل ۳، ۹، ۱۵ و ... (۴) دقیقاً همین‌ها است!

۲۲۵- گزینهٔ ۱ هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $4k$، $4k+1$، $4k+2$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود. (*$\mathbb{Z}$ به این چهارتا افراز می‌شه!*)

$\mathbb{Z}$		
$2k$	$4k+1$	C

اگر $4k$ و $4k+2$ را بریزیم روی هم همان $2k$ می‌شود. (*چندتا عدد مثال بزن معلومه!*)

پس زیرمجموعهٔ دیگر که می‌ماند، $4k+3$ است. باز هم می‌شد با یک عددگذاری، جواب را پیدا کرد. بگویید ببینم ۳ در A است یا در B؟ خب در هیچ‌کدام نیست، پس باید در C باشد. حالا کدام گزینه عدد ۳ را تولید می‌کند؟

۲۲۶- گزینهٔ ۱ این سؤال هم نکتهٔ مهمی دارد که در تمرین کتاب درسی‌تان به آن اشاره شده است. $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$. از طرفی $n-1$، n و $n+1$ سه عدد متوالی هستند، پس ضرب آن‌ها بر $3!$ یا ۶ بخش‌پذیر است. بنابراین a باید مضرب ۶ باشد. در بین گزینه‌ها فقط ۴۸ است که مضرب ۶ است.

۲۲۷- گزینهٔ ۳ عدد صحیح فرد را $2k+1$ در نظر می‌گیریم. عدد قبلی آن $2k$ و بعدی‌اش $2k+2$ می‌شود.

پس: $A = 2k(2k+1)(\underbrace{2k+2}_{2(k+1)}) = 4k(k+1)(2k+1)$

از طرفی k و $k+1$ دو عدد متوالی هستند، (*یعنی یکی زوجه و دیگری فرد*)، پس ضرب آن‌ها حتماً زوج می‌شود؛ یعنی: $4\underbrace{k(k+1)}_{2q}(2k+1) = 8q(2k+1)$

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس عدد A هم به ۳ می‌خورد و هم به ۸، یعنی به ۲۴ می‌خورد.

۲۲۸- گزینهٔ ۳ فرد اولی را $2k+1$ می‌گیریم، پس دومی $2k+3$ می‌شود. حالا از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(\underbrace{2k+3}_{a})^3 - (\underbrace{2k+1}_{b})^3 = (\underbrace{2k+3}_{a} - (\underbrace{2k+1}_{b}))$$

$$(\underbrace{(2k+3)^2}_{a^2} + \underbrace{(2k+3)(2k+1)}_{ab} + \underbrace{(2k+1)^2}_{b^2})$$

$$= 2(4k^2+12k+9+4k^2+8k+3+4k^2+4k+1)$$

$$= 2(12k^2+24k+13) = \underbrace{24k^2+48k+24}_{8q \text{ یا } 12q'}+2$$

پس حاصل به صورت $8q+2$ یا $12q'+2$ بوده، یعنی باقی‌ماندهٔ عدد حاصل بر ۸ و ۱۲، هر دو برابر ۲ می‌شود.

(*البته نیاز به این همه دَنگ‌وفنگ هم نبود.*) گزینه‌ها چهارتا عدد هستند، پس با امتحان‌کردن یک عدد می‌توانیم به جواب برسیم؛ مثلاً دو عدد فرد متوالی را ۱ و ۳ می‌گیریم. پس $26 = 3^3 - 1^3$ می‌شود که باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ و ۱۲، هر دو برابر ۲ می‌شود.

۲۲۹- گزینهٔ ۱ یک راه این است که عددگذاری کنیم. مثلاً $1 = 1^2 + 0^2$ که در تقسیم بر ۴، باقی‌ماندهٔ ۱ دارد. $2 = 1^2 + 1^2$ که باقی‌ماندهٔ آن بر ۴ برابر ۲ است. $4 = 2^2 + 0^2$ که بر ۴ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات، صفر، ۱ و ۲ می‌تواند باشد، پس لابد ۳ نمی‌تواند باشد.

هر عدد صحیح در تقسیم بر ۴ را به یکی از صورت‌های $4k$، $4k+1$، $4k+2$ و $4k+3$ می‌توان نوشت. چون گفته مربع عدد صحیح در هر یک از حالت‌های زیر باقی‌ماندهٔ مربع عدد را بر ۴ به دست می‌آوریم:

$x = 4k \Rightarrow x^2 = 16k^2 \Rightarrow$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

$x = 4k+1 \Rightarrow x^2 = \underbrace{16k^2+8k}_{\text{مضرب } 4}+1 \Rightarrow$ بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$x = 4k+2 \Rightarrow x^2 = \underbrace{16k^2+16k+4}_{\text{مضرب } 4} \Rightarrow$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

$x = 4k+3 \Rightarrow x^2 = \underbrace{16k^2+24k}_{\text{مضرب } 4} + \underbrace{9}_{8+1} \Rightarrow$ بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

پس مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۴، یا باقی‌مانده‌اش صفر است و یا باقی‌مانده‌اش ۱ است. حالا سه حالت پیش می‌آید.

(۱) اگر هر مربع دو عدد صحیح باقی‌مانده‌شان بر ۴ برابر صفر باشد، باقی‌ماندهٔ مجموعشان بر ۴ نیز برابر صفر است.

(۲) اگر مربع یکی از عددهای صحیح در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ و مربع عدد صحیح دیگر در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر داشته باشد، باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات دو عدد در تقسیم بر ۴ برابر ۱ می‌شود.

(۳) اگر مربع هر دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر ۱ شود، باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات دو عدد در تقسیم به ۴ برابر ۲ می‌شود.

بنابراین باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات دو عدد در تقسیم بر ۴ هیچ‌وقت نمی‌تواند برابر ۳ شود.

۲۳۰- گزینهٔ ۲ دو عدد متوالی را n و $n+1$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم از دو عدد متوالی یکی فرد و دیگری زوج است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها حتماً زوج است.

$4k+1 = 4\underbrace{n(n+1)}_{\text{زوج}}+1 = 4(2q)+1 = 8q+1$

اگر q زوج باشد: $8q+1 = 8(2k)+1 = 16k+1$

در تقسیم به ۱۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

و اگر q فرد باشد: $8q+1 = 8(2k+1)+1 = 16k+9$

در تقسیم به ۱۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۹ دارد.

پس باقی‌ماندهٔ $4k+1$ در تقسیم به ۱۶ دو حالت دارد.

۲۳۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در تقسیم عدد k بر عدد ۵، پنج نوع باقی‌ماندهٔ مختلف وجود دارد. در هر ۵ حالت، باقی‌ماندهٔ k^2+1 را بر ۵ به دست می‌آوریم:

$k = 5q \Rightarrow k^2+1 = 25q^2+1 \Rightarrow$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$k = 5q+1 \Rightarrow k^2+1 = 25q^2+10q+2 \Rightarrow$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

مضرب ۵ است. $k=5q+2 \Rightarrow k^2+1=25q^2+20q+5 \Rightarrow$

مضرب ۵ است. $k=5q+3 \Rightarrow k^2+1=25q^2+30q+10 \Rightarrow$

$k=5q+4 \Rightarrow k^2+1=25q^2+40q+17 \Rightarrow$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

بنابراین باقی‌ماندهٔ k^2+1 در تقسیم به ۵ هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر ۳ و ۴ باشد.

۲۳۲- گزینهٔ ۳ می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح در تقسیم به ۷، هفت حالت مختلف دارد. (از صفر تا ۶)

اما چون گفته باقی‌مانده به ۷ فرد است پس یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد: $a=7k+1, a=7k+3, a=7k+5$

در هر سه حالت مربع عدد را پیدا کرده، باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ به دست می‌آوریم.

$a^2=(7k+1)^2=\underbrace{49k^2+14k}_{\text{مضرب ۷}}+1$

در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$a^2=(7k+3)^2=49k^2+42k+\underbrace{9}_{7+2}$

در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

$a^2=(7k+5)^2=49k^2+70k+\underbrace{25}_{21+4}$

در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

پس باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۷ نمی‌تواند برابر ۳ باشد.

۲۳۳- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ آن عدد بر ۴، برابر ۳ است، پس آن عدد به فُرم $4k+3$ است. k دو حالت دارد: یا زوج است یا فرد. پس:

$$\begin{cases} k=2q \Rightarrow 4(2q)+3=8q+3 \\ k=2q+1 \Rightarrow 4(2q+1)+3=8q+7 \end{cases}$$

پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ برابر ۳ یا ۷ می‌شود.

۲۳۴- گزینهٔ ۴ خارج قسمت را برابر q فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 24 \\ \hline & q \\ 15 & \end{array} \Rightarrow a=24q+15 \Rightarrow \frac{a}{3}=8q+5$$

حالا باقی‌مانده را بر ۱۶ می‌خواهیم، بنابراین باید برای q دو حالت مختلف در نظر بگیریم:

$q=2k \Rightarrow \frac{a}{3}=8(2k)+5=16k+5$

باقی‌مانده برابر ۵ است.

$q=2k'+1 \Rightarrow \frac{a}{3}=8(2k'+1)+5=16k'+13$

باقی‌مانده برابر ۱۳ است.

بنابراین باقی‌مانده $\frac{a}{3}$ بر ۱۶ برابر ۵ یا ۱۳ است.

(دقت کنید اگر مثلاً تو این سؤال باقی‌مانده $\frac{a}{3}$ را بر ۲۴ می‌خواستیم باید q را سه حالت می‌کردیم، $3k$، $3k+1$ و $3k+2$)

۲۳۵- گزینهٔ ۳ هر عدد صحیح a به یکی از صورت‌های $3k$، $3k+1$ یا $3k+2$ است. اگر $a=3k$ باشد که خب همین عدد، مضرب ۳ است. اگر $a=3k+2$ باشد، $a+4=3k+6$، مضرب ۳ می‌شود، اما اگر $a=3k+1$ باشد، نه a و نه $a+4$ هیچ‌کدام مضرب ۳ نمی‌شوند. پس $a+m=3k+(m+1)$ باید مضرب ۳ بشود. از این نتیجه می‌گیریم که $m+1$ باید مضرب ۳ باشد. در بین گزینه‌ها فقط به ازای $m=8$ این اتفاق می‌افتد. ایدهٔ این سؤال از یک تمرین کتاب درسی گرفته شده است. «برای هر عدد صحیح a، از بین a، $a+2$ و $a+4$، دقیقاً یکی بر ۳ بخش‌پذیر است.» ببینید، اعداد صفر، ۲ و ۴ دارند با a جمع می‌شوند. باقی‌ماندهٔ این‌ها بر ۳ باید صفر، ۱ و ۲ را تولید کند. در آن صورت این نکته درست می‌شود. صفر، ۴ و ۸ را اگر بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌های صفر، ۱ و ۲ می‌دهد؛ یعنی این نکته درست می‌شود که از بین a، $a+4$ و $a+8$، حتماً یکی مضرب ۳ است، یا مثلاً از بین a، $a+2$ و $a+4$، یکی مضرب ۳ است. چون باقی‌مانده‌های صفر، ۲ و ۴ بر ۳، دقیقاً صفر، ۲ و ۱ می‌شود.

۲۳۶- گزینهٔ ۳

$21 \mid a+5 \Rightarrow a+5=21k \Rightarrow a=21k-5$

$\Rightarrow a-2=21k-7 \Rightarrow a-2=7(3k-1)$

$a-2$ بر ۷ بخش‌پذیر است اما می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر ۱۴ به دست آوریم.

اگر k فرد باشد $3k-1$ زوج می‌شود و بنابراین $7(3k-1)$ بر ۱۴ بخش‌پذیر می‌شود.

اما اگر k زوج باشد داریم:

$k=2q \Rightarrow a-2=7(3(2q)-1)=42q-7$

$42q$ بر ۱۴ بخش‌پذیر است پس فقط کافی است باقی‌ماندهٔ -7 را بر ۱۴ به دست آوریم. خود ۷ را بر ۱۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 7 & 14 \\ \hline & 0 \\ 7 & \end{array} \Rightarrow 7=14-7=7$$

بنابراین در این حالت نیز باقی‌مانده برابر ۷ است، بنابراین باقی‌مانده فقط می‌تواند برابر صفر یا ۷ باشد.

۲۳۷- گزینهٔ ۲ $a=25q+7 \Rightarrow a+3=25q+10$

می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ $a+3$ را بر ۱۵ به دست آوریم. حال q را برحسب باقی‌مانده‌اش به ۳ حالت‌بندی می‌کنیم:

$q=3k \Rightarrow a+3=\underbrace{25(3k)}_{\text{مضرب ۱۵}}+10 \Rightarrow$ باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۱۵، برابر ۱۰ است.

$q=3k'+1 \Rightarrow a+3=25(3k'+1)+10=\underbrace{75k'}_{\text{مضرب ۱۵}}+35$

باقی‌ماندهٔ ۳۵ بر ۱۵ برابر ۵ است، پس باقی‌ماندهٔ کل عبارت بر ۱۵، برابر ۵ است.

$q=3k''+2 \Rightarrow a+3=25(3k''+2)+10=\underbrace{75k''}_{\text{مضرب ۱۵}}+60$

بنابراین باقی‌ماندهٔ عبارت بر ۱۵ در این حالت برابر صفر است.

۲۳۸- گزینهٔ ۳ خب یک طرفین‌وسطین کنیم، می‌شود $ad=bc$، پس $a \mid bc$ و $b \mid ad$ درست هستند. $d \mid bc$ پس $d \mid abc$، یعنی ۴ هم درست است. برای ردکردن ۳ کافی است $a=4$، $b=2$، $c=6$ و $d=3$ باشد، در این صورت: $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}$ ولی $c \nmid ab$، زیرا: $6 \nmid 2\times 4$

۲۳۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد دلخواهی ضرب و سمت چپ رابطهٔ عادکردن را می‌توان بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های آن تقسیم کرد. بنابراین:

۱) $18 \mid b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} 6 \mid b$

۲) $a \mid 18, 18 \mid b \Rightarrow a \mid b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} a \mid 3b$

۳) $a \mid 18 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} a \mid 54$

اما گزینهٔ $3a|b$ ممکن است درست نباشد، مثلاً اگر a و b هر دو ۱۸ باشند، رابطهٔ $3a|b$ برقرار نیست.

۲۴۰- گزینهٔ ۱ $a|9k+7$ و $a|7k+6$. اول این k را حذف کنیم.

$$\begin{array}{l} a|9k+7 \xrightarrow{\times 7} a|63k+49 \\ a|7k+6 \xrightarrow{\times 9} a|63k+54 \end{array} \xrightarrow{\text{کم}} a|5$$

$a \neq 1$ و عددی طبیعی است، پس $a=5$ می‌شود. حالا باید ببینیم، اولین عدد k که به ازای آن، $5|9k+7$ و $5|7k+6$، هر دو برقرار می‌شوند، کدام است. با امتحان گزینه‌ها به ازای $k=2$ هر دو رابطه برقرار می‌شود، خودش است. (۱) می‌شود جواب!

۲۴۱- گزینهٔ ۲ گفتیم در این نوع سؤال‌ها می‌توان ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد.

$$n+1|n^5+3n^2-n+6$$

$$\xrightarrow{n=-1} n+1|(-1)^5+3(-1)^2-(-1)+6 \Rightarrow n+1|9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=-2 \end{cases} \\ n+1=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \checkmark \\ n=-4 \end{cases} \\ n+1=\pm 9 \Rightarrow \begin{cases} n=8 \checkmark \\ n=-10 \end{cases} \end{cases}$$

که دو مقدار آن طبیعی است.

۲۴۲- گزینهٔ ۳

$$\left.\begin{array}{l} a^2|a+b \xrightarrow{\times a} a^2|a^2+ab \\ \qquad\qquad a^2|a^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a^2|ab \xrightarrow{\div a} a|b$$

(۱) درست است. $a|b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2|b^2$

(۲) درست است. $\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|3b \\ a|a \Rightarrow a|2a \end{array} \xrightarrow{(-)} a|3b-2a$

(۴) $\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a^2|b^2 \\ a|a \Rightarrow a^2|a^2 \end{array} \Rightarrow a^2|a^2+b^2$

(۳) ممکن است درست نباشد.

برای مثال اگر $a=3$ و $b=6$ باشد، $a^2|a+b$ زیرا $9|6+3$ اما:

$9 \nmid 3-6$

۲۴۳- گزینهٔ ۳

$$a|b+3 \Rightarrow b+3=aq \Rightarrow b=aq-3$$

$$a|c-2 \Rightarrow c-2=aq' \Rightarrow c=aq'+2$$

دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$bc=\underbrace{a^2qq'+2aq-3aq'}_{\text{بر a بخش‌پذیر است}}-6$$

سه جملهٔ اول، بر a بخش‌پذیر است. از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند عددی منفی باشد، بنابراین:

$$bc+1=a\overbrace{(aqq'+2q-3q')}^{k}-5=ak-5=ak-a+a-5$$

$$=a(k-1)+\underbrace{a-5}_{r}$$

بنابراین باقی‌مانده برابر $a-5$ است.

۲۴۴- گزینهٔ ۴ $48|a^3 \Rightarrow 2^4\times 3|a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{2^4\times 3}\in\mathbb{Z}$

کسر $\frac{a^3}{2^4\times 3}$ باید عددی صحیح باشد. چهار عامل ۲ در مخرج داریم، بنابراین a باید دست‌کم دو عامل ۲ داشته باشد. (دقت کنید که اگر a فقط یک عامل ۲ داشته باشد، یعنی عددی مثل ۶ باشد، وقتی به توان ۳ می‌رسد دارای سه عامل ۲ است و مخرج ۴ عامل ۲ دارد، پس کسر ساده نمی‌شود.)بنابراین a باید دست‌کم دو عامل ۲ و یک عامل ۳ داشته باشد.

پس: $a_{min}=2^2\times 3=12$

از طرفی: $375|b^2 \Rightarrow 3\times 5^3|b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{3\times 5^3}\in\mathbb{Z}$

کسر $\frac{b^2}{3\times 5^3}$ باید عددی صحیح باشد. با استدلال مشابه، b باید دست‌کم ۲ عامل ۵ و یک عامل ۳ داشته باشد. بنابراین: $b_{min}=25\times 3=75$

در نتیجه کم‌ترین مقدار $a+b$ برابر است با: $75+12=87$

۲۴۵- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم رابطهٔ $3^m|3^n$ برقرار باشد باید کسر $\frac{3^n}{3^m}$ عددی صحیح باشد. پس $m\le n$. از طرف دیگر اگر بخواهیم رابطهٔ $5^{n+3}|5^{2m}$ برقرار باشد، باید کسر $\frac{5^{2m}}{5^{n+3}}$ عددی صحیح باشد و در نتیجه $n+3\le 2m$ باشد.

در میان گزینه‌ها، فقط $n=7$ و $m=5$ است که در هر دو رابطه صدق می‌کنند.

۲۴۶- گزینهٔ ۳ قدم اول این است که بفهمیم سؤال اصلاً چه می‌گوید! m چه عددی باشد تا a، عددی اول به دست آید. ابتدا باید با ضرب و تفریق، k را حذف کنیم.

$$\begin{array}{l} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|45k+20 \\ a|5k+m \xrightarrow{\times 9} a|45k+9m \end{array} \xrightarrow{(-)} a|20-9m$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$m=5 \Rightarrow a|-25 \Rightarrow$ $a=5$ یا $a=25$، پس a لزوماً اول نیست.

$m=6 \Rightarrow a|-34 \Rightarrow$

$a=2$ یا $a=17$ یا $a=34$، پس a الزاماً اول نیست.

$m=7 \Rightarrow a|-43 \xrightarrow{a>1} a=43 \checkmark$

$m=8 \Rightarrow a|-52 \Rightarrow$

برای مثال $a=52$ می‌تواند باشد،پس a لزوماً اول نیست.

۲۴۷- گزینهٔ ۱ رشد عبارت سمت چپ سریع‌تر است بنابراین عددهای کوچک را امتحان می‌کنیم.

$n=1 \Rightarrow 2|1$ ✗ $\qquad n=2 \Rightarrow 6|8$ ✗

$n=3 \Rightarrow 24|27$ ✗ $\qquad n=4 \Rightarrow 120|64$ ✗

از این‌جا به بعد نیاز به امتحان نداریم، چون هر چه جلو برویم، $(n+1)!$ بزرگ‌تر از n^3 می‌شود، پس دیگر رابطهٔ عادکردن درست درنمی‌آید، پس این شد که هیچ n طبیعی پیدا نمی‌شود.

۲۴۸- گزینهٔ ۱ a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد، یعنی a عددی اول است. از طرفی $a\neq 3,5$، چون اگر a برابر ۳ یا ۵ باشد، ۲۲۵ را عاد می‌کند. بقیهٔ اعداد اول به‌جز ۳ و ۵، عامل مشترک مثبتی با ۱۵ به‌جز یک ندارند، پس همواره $(a,15)=1$.

۲۴۹- گزینهٔ ۱

$$(a,b)=d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|a \xrightarrow{\times a} d|a^2 \\ d|b \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} d|a^2-b$$

از طرفی می‌دانیم $d \mid a^2 - b + 7$. اگر سمت راست این دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

$$\begin{array}{l} d \mid a^2 - b \xrightarrow{(-)} d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 7 \\ d \mid a^2 - b + 7 \end{array}$$

اما چون گفته $d > 1$ است، پس $d = 7$ است.

حالا دقت کنید که:

$$\left.\begin{array}{l} 7 \mid a \Rightarrow a = 7k \\ 7 \mid b \Rightarrow b = 7k' \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 7(k + k')$$

یعنی $a + b$ باید مضرب ۷ باشد که در گزینه‌ها فقط ۸۴ چنین ویژگی‌ای دارد.

۲۵۰- گزینهٔ ۴ داریم:

$$\begin{array}{c|c} a & 19 \\ \hline 7 & q \end{array} \Rightarrow a = 19q + 7 \Rightarrow a + 49 = 19q + 56$$

حالا کافی است باقی‌مانده و خارج قسمت $a + 49$ را بر ۱۹ به دست آوریم:

$$a + 49 = 19q + 56 = 19q + 38 + 18 = 19\underbrace{(q+2)}_{\text{خارج قسمت جدید}} + \underbrace{18}_{\text{باقی‌مانده}}$$

همان‌طور که می‌بینید خارج قسمت ۲ واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر ۱۸ می‌شود.

۲۵۱- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. در این صورت:

$$(9n - 1, n + 2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n + 2 \xrightarrow{\times 9} d \mid 9n + 18 \\ d \mid 9n - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19$$

از آن‌جایی که ب.م.م عددی بزرگ‌تر از ۱ است، پس $d = 19$ و دو عدد، بر ۱۹ بخش‌پذیرند: $n + 2 = 19k \Rightarrow n = 19k - 2 > 100 \Rightarrow 19k > 102$

$$\Rightarrow k > 5/3 \xrightarrow{k=6} n = 112 \Rightarrow 1 + 1 + 2 = 4$$

۲۵۲- گزینهٔ ۱ داریم:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 34 & q \end{array} \Rightarrow a = bq + 34, 34 < b$$

کم‌ترین مقدار b، عدد ۳۵ است.

$$a = 35q + 34$$

با توجه به این‌که q عددی طبیعی است، اگر $q = 1$ باشد، $a = 69$ است و اگر $q > 1$ باشد، a عددی بزرگ‌تر از ۷۰ خواهد شد، پس فقط به ازای یک مقدار a، رابطه برقرار است.

۲۵۳- گزینهٔ ۴ رابطهٔ تقسیم، $a = 8q + r$ می‌شود، که $r = \sqrt{q}$ است. از طرفی شرط باقی‌مانده می‌گوید که $0 \le \sqrt{q} < 8$ باشد. اگر بیشترین مقدار q را به دست آوریم، بیشترین مقدار a هم به دست می‌آید. $\sqrt{q}$ باید عددی صحیح باشد. پس بیشترین مقدار q برابر ۴۹ می‌شود.

حالا داریم: $a = 8(49) + 7 = 399$

۲۵۴- گزینهٔ ۲

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 10 & q \end{array} \Rightarrow a = bq + 10, 10 < b$$

$$\begin{array}{c|c} a + 100 & b \\ \hline 11 & q' \end{array} \Rightarrow a + 100 = bq' + 11, 11 < b$$

$$\xrightarrow{(-)} 100 = b(q' - q) + 1 \Rightarrow 99 = b(q' - q)$$

با توجه به این‌که $b > 11$ است، پس تنها حالت قابل قبول برای b عددهای ۳۳ و ۹۹ است که کم‌ترین مقدار b عدد ۳۳ است.

۲۵۵- گزینهٔ ۱ مقسوم، ۲۰ برابر باقی‌مانده است؛ یعنی $a = 20r$ و چون باقی‌مانده ماکزیمم است و می‌دانیم $0 \le r < b$، بیشترین مقدار r برابر است با: $r = b - 1$

داریم:

$$\begin{array}{c|c} 20(b-1) & b \\ \hline b - 1 & q \end{array} \Rightarrow 20(b-1) = bq + b - 1$$

$$\Rightarrow 19(b-1) = bq \Rightarrow \frac{b}{b-1} = \frac{19}{q}$$

b و $b - 1$ نسبت به هم اول‌اند (یعنی کسر، ساده نمی‌شود)، بنابراین b برابر ۱۹ است.

۲۵۶- گزینهٔ ۳ هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $6k$، $6k+1$، $6k+2$، $6k+3$، $6k+4$ یا $6k+5$ می‌تواند باشد. چون گفته زوج ولی مضرب ۳ نباشد، صورت‌های $6k$، $6k+1$، $6k+3$ و $6k+5$ کنار می‌رود، یعنی هر عدد صحیح زوج که مضرب ۳ نباشد، به صورت $6k+2$ یا $6k+4$ می‌تواند باشد. پس باقی‌مانده بر ۶ برابر ۲ یا ۴ می‌شود.

۲۵۷- گزینهٔ ۴ **روش اول** می‌دانیم در تقسیم به ۴ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۴ کلاس افراز می‌شود:

$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$

حالا اگر بخواهیم از میان عددهای $a+x$، $a+y$، $a+z$ و $a+t$ دست‌کم یکی بر ۴ بخش‌پذیر باشد x، y، z و t هر کدام باید عضو یکی از کلاس‌های بالا باشند. یعنی یکیشان بر ۴ بخش‌پذیر باشد، یکی بر ۴ باقی‌مانده‌اش یک باشد و ... .

بنابراین اگر بخواهیم همواره یکی از عددهای a، $a+5$، $a+10$ و b بر ۴ بخش‌پذیر باشد با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ ۵ بر ۴ برابر ۱ و ۱۰ بر ۴ برابر ۲ است، اگر $b = a + m$ باشد، باقی‌ماندهٔ m بر ۴ باید برابر ۳ باشد، یعنی $b - a$ باید به صورت $4k+3$ باشد.

روش دوم با عددگذاری سؤال را حل می‌کنیم. اگر $a = 1$ باشد هیچ‌کدام از عددهای a، $a+5$ و $a+10$ بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود، پس b باید مضرب ۴ باشد. (مثلاً ۸ باشد.) در این صورت باقی‌ماندهٔ $b - a$ بر ۴ برابر است با باقی‌ماندهٔ $8 - 1 = 7$ بر ۴ که برابر ۳ می‌شود.