

۱ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

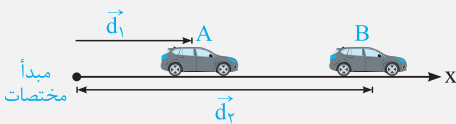
خلاصه نکات

مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده

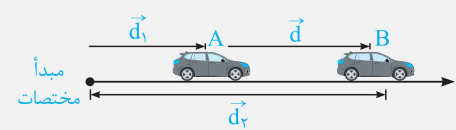
(تست‌های ۱ تا ۶)

تو اولین مرحله ورودتون به دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب قبلی فوش بگذره.

۱- بردار مکان و جابه‌جایی



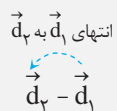
بردار مکان: در شکل مقابل اتومبیلی بر روی محور X در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.



بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه زمانی t_1 تا t_2 از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.

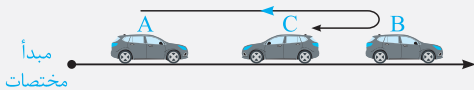
تذکر همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

$$\vec{d} = \vec{d}_B - \vec{d}_A = \vec{d}_r - \vec{d}_1$$



فوب یادتون باشه که بردار $\vec{d}_r - \vec{d}_1$ از انتهای \vec{d}_1 به انتهای \vec{d}_r وصل میشه.

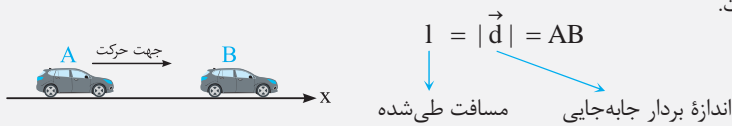
۲- مسافت طی‌شده



فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطه A به B رفته و سپس از نقطه B به نقطه C بازگردد. به طول مسیر طی شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.

تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی‌شده ABC از طول پاره‌خط AC (جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «مسافت طی‌شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی متحرک است.»

تذکر در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور X مستقیماً از A به B منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره‌خط AB است.



نکات مهم و کاربردی

فرض کنید متحرکی مطابق شکل مقابل از نقطه A تا نقطه B حرکت کند. بدین ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{d}_1 = x_1 \vec{i}, \quad \vec{d}_2 = x_2 \vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i} = (x_2 - x_1) \vec{i} = \Delta x \vec{i}$$

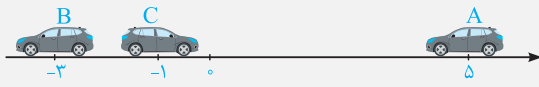
اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور X قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست‌خیز این خلاصه نکات محسوب می‌شود.

اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور X و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور X است.

مسافت طی‌شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

هالا بریم با به تمرین زُرسْتُ حسابی، مطالب این فُلاسه نکات رو جمع بندری کنیم ...



تمرین ۱ در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده بر روی محور x از نقطه A شروع به حرکت کرده و به نقطه B می‌رود و سپس از نقطه B به سمت نقطه C باز می‌گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟

- (۱) بردار مکان متحرک در نقطه C ، برابر $-\vec{i}$ در SI می‌باشد.
 (۲) این متحرک از A تا C ، مسافت 10 m را طی کرده است.
 (۳) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به صورت زیر به دست می‌آید:
 (۴) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C ، برابر $6\vec{i}$ در SI می‌باشد.

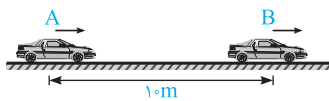
پاسخ

$$\vec{d}_A = 5\vec{i} \quad \vec{d}_B = -3\vec{i} \quad \vec{d}_C = -1\vec{i}$$

(۱) بردار مکان متحرک در نقاط A ، B و C به صورت زیر است.
 (۲) این متحرک از نقطه A تا نقطه B ، 8 m در خلاف جهت محور x و از نقطه B تا نقطه C ، 2 m در جهت محور x حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازه 10 m را طی کرده است.

$$\vec{d} = \vec{d}_C - \vec{d}_A = -1\vec{i} - 5\vec{i} = -6\vec{i}$$

(۳) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به صورت زیر به دست می‌آید:
 بنابراین تنها عبارت مطرح شده در گزینه (۴) نادرست است.



در صورتی که متحرکی بر روی یک خط راست جابه‌جا شود و در طول حرکت تغییر جهت ندهد، آن‌گاه مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک با یکدیگر برابر است. به طور مثال در شکل مقابل، اگر اتومبیل 10 m متر در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، می‌توان نوشت:

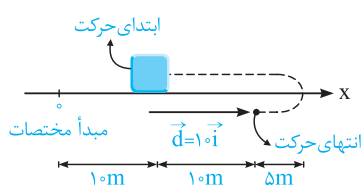
$$\Rightarrow 1 = \frac{\Delta x}{\text{جابه‌جایی طی شده}} = 10\text{ m}$$

عبارت صحیح: «مسافت طی شده توسط متحرک همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی آن است.»
 دقت شود که با توجه به خلاصه نکات فوق، سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشد.

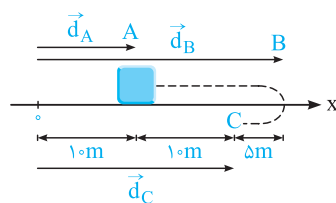
۲ ۲ همان‌طور که می‌دانیم، جابه‌جایی در هر بازه زمانی تنها به مکان ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه بستگی داشته (یعنی مستقل از مسیر حرکت است) و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} t_1 \rightarrow x_1 = -3\text{ m} \\ t_2 \rightarrow x_2 = +3\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = +3 - (-3) = +6\text{ m}$$

$$\begin{cases} t_1 \rightarrow x_1 = -3\text{ m} \\ t_3 \rightarrow x_3 = +9\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_3 - x_1 = +9 - (-3) = +12\text{ m}$$



۲ ۳ ابتدا باید دقت شود که بردار مکان، از مبدأ به محل جسم متصل می‌شود. با توجه به این‌که در این سؤال، جسم همواره در سمت راست مبدأ قرار دارد ($x > 0$)، بردار مکان آن ($\vec{d}_1 = x\vec{i}$)، همواره در جهت محور x قرار دارد (فریب برگشتن متحرک در B را نخورید).
 از سوی دیگر برای یافتن بردار جابه‌جایی در طول حرکت، کافیت مطابق شکل، برداری را که مستقیماً از نقطه ابتدای حرکت به نقطه انتهایی حرکت متصل می‌شود را رسم کنیم:



۳ ۴ **روش اول:** مطابق شکل مقابل بردارهای مکان متحرک را در نقاط A ، B و C رسم کرده و اندازه آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\vec{d}_A = 10\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_A| = 10\text{ m}$$

$$\vec{d}_B = 30\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_B| = 30\text{ m}$$

$$\vec{d}_C = 20\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_C| = 20\text{ m}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اندازه بردار مکان این متحرک، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
روش دوم: همواره با دور شدن متحرک از مبدأ، اندازه بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ، اندازه بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از A تا B ، اندازه بردار مکان در حال افزایش و از B تا C ، اندازه بردار مکان در حال کاهش است.



۲۵ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

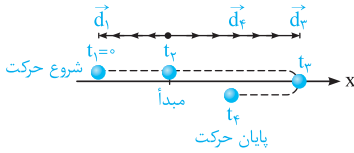
۱) در بازه زمانی t_1 تا t_2 متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

۲) در بازه زمانی t_2 تا t_3 متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور X می‌باشد.

۳) در لحظه t_3 ، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:

هشدار

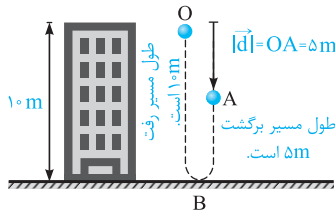
در این سؤال، در لحظه t_3 ، سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع توسط بسیاری از دانش‌آموزان اشتباه درک می‌شود.



۳۶ با توجه به شکل نشان داده‌شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطه B، تغییر جهت داده و

۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطه A برسد. بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله برابر $10 + 5 = 15$ متر است.

از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطه انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازه پاره خط OA به طول ۵m، معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



$$|\vec{d}| = |\vec{OA}| = 5m$$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازه جابه‌جایی}} = \frac{\text{برگشت} + \text{رفت}}{OA} = \frac{10 + 5}{5} = 3$$

دقت: مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینه (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

۲۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

(تست‌های ۷ تا ۱۵)

بررسی ویژگی‌های معادله مکان - زمان

خاصه نکات

درک مفهوم ساره معادله به پارامتر (مثل مکان) بر حسب زمان، تو این فصل فیلی برامون مهمه. بریم ببینیم چه بوری میشه با این مفهوم به ارتباط فیزی برقرار کرد.

۱- شناخت معادله مکان - زمان

معادله مکان - زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنید متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است و معادله مکان - زمان آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x = t^3 + 2t + 5$$

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^3 + 2t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0^3 + 2 \times 0 + 5 = 5m & (\text{در } t_0 = 0 \text{ شروع حرکت، } x_0 = 5m \text{ است.}) \\ t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 1^3 + 2 \times 1 + 5 = 8m & (\text{در } t_1 = 1s, x_1 = 8m \text{ است.}) \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^3 + 2 \times 2 + 5 = 17m & (\text{در } t_2 = 2s, x_2 = 17m \text{ است.}) \end{cases}$$

تذکر اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازه زمانی مانند $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2s$ از روی معادله مکان - زمان به دست آوریم، کافی است مقادیر t_1 و t_2 را در معادله مکان قرار داده و حاصل x_2 و x_1 را به دست آوریم. $x_2 - x_1$ معادل با جابه‌جایی متحرک است.

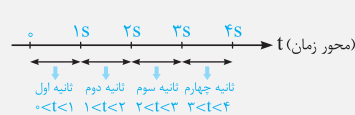
$$\begin{cases} t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 17m \\ t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 8m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 17 - 8 = 9m$$

نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیه متحرک، یعنی مکان آن در لحظه $t = 0$. بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیه یک متحرک، کافی است در معادله مکان - زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

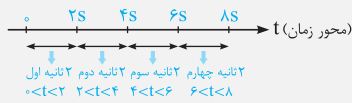
۲) متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = 0$ شود. به عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x = 0$ قرار داده شود.

مثال: $x = 4t - 8$ پیدا کردن لحظه عبور از مبدأ $x = 4t - 8 = 0 \rightarrow t = 2s$



۳) ثانیه اول حرکت، یک بازه زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = 0$ شروع می‌شود. یعنی $0 < t < 1s$ ، ثانیه دوم حرکت یعنی $1s < t < 2s$ و به همین صورت می‌توان گفت:

$$\Rightarrow \text{ثانیه } n\text{ام: } n - 1 < t < n$$



۴ دو ثانیه اول حرکت یک بازه زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t=0$ شروع می‌شود، یعنی $0 < t < 2s$. دو ثانیه دوم یعنی $2s < t < 4s$ و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.

در ادامه با حل سه تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۱ دو ثانیه هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ دو ثانیه هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازه زمانی $8 \times 2 = 16s$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۲s است یعنی: $16s < t < 18s$ ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین ۲ نه ثانیه پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ نه ثانیه پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازه زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازه زمانی $5 \times 9 = 45s$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۹s است یعنی $45s < t < 54s$ ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین ۳ معادله حرکت متحرکی بر روی محور x ، در SI از رابطه $x = t^2 - 4t$ به دست می‌آید. در این صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت و در ۲ ثانیه سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟ (تألیفی)

$$10, -4 \text{ (۴)}$$

$$8, -4 \text{ (۳)}$$

$$10, -6 \text{ (۲)}$$

$$12, -4 \text{ (۱)}$$

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبه جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت ($0 < t < 2s$):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -4m$$

گام دوم: محاسبه جابه‌جایی در ۲ ثانیه سوم حرکت ($4s < t < 6s$):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 4^2 - 4 \times 4 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow x_2 = 6^2 - 4 \times 6 = 12m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 0 = 12m$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲- شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A = 4t + 2$ و $x_B = -5t + 20$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 4t + 2 = -5t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

سؤال دو متحرک فوق، در چه مکانی به هم می‌رسند؟

پاسخ

$$t = 2s \xrightarrow{\text{در یکی از } x \text{ ها قرار می‌دهیم}} x_A = 4t + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10m$$

در مکان $x = +10m$ دو متحرک به هم می‌رسند.

با توجه به خلاصه نکات فوق، مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیه متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$A \text{ معادله مکان متحرک } x_A = 3t^3 - 7t + 5 \xrightarrow{t=0} x_{A0} = 5m$$

$$B \text{ معادله مکان متحرک } x_B = 2 \cos \pi t + 1 \xrightarrow{t=0} x_{B0} = 2 \cos(0) + 1 = 2 + 1 = 3m$$

مشدار

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطه $x_B = 2 \cos \pi t + 1$ ، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان x_{B0} اعلام کنند، در صورتی که با قرار دادن $t = 0$ در عبارت $2 \cos \pi t + 1$ ، به عدد ۳ می‌رسیم!

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیه اول معادل با $0 \leq t < 2s$ ، ۲ ثانیه دوم معادل با $2s \leq t < 4s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

۱۸

برای محاسبه بردار مکان متحرک در لحظه $t = 1s$ ، کافیسیت ابتدا در معادله مکان - زمان، لحظه $t = 1s$ را جایگذاری کنیم:

$$\vec{d}_1 = x\vec{i} \rightarrow \vec{d}_1 = 2\vec{i} \quad \text{مکان متحرک در } t=1s: x = t^3 - t + 2 \rightarrow x = (1)^3 - 1 + 2 = 2m$$

دقت: معادله حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

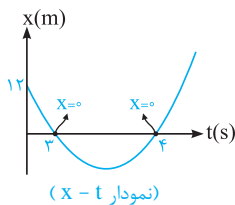
هشدار

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $2\vec{i}$ می‌رسید و به اشتباه گزینه ۲ را در پاسخنامه وارد کرده و به سادگی نمره منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۱۹

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد ($x=0$)، متحرک از مبدأ عبور می‌کند. بنابراین برای یافتن لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به دست آوریم. دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.



$$x = t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \\ t_2 = 4s \end{cases}$$

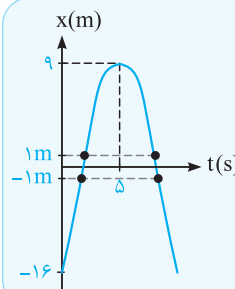
این متحرک، دو بار از مبدأ مختصات عبور کرده و در نتیجه فاصله زمانی بین دو عبور متحرک از مبدأ برابر $\Delta t = 4 - 3 = 1s$ می‌باشد.

۴ ۱۰

وقتی متحرک در فاصله یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = 1m$ یا $x = -1m$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = 1m$ یا $x = -1m$ عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 1m \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = 1 \Rightarrow t^2 - 10t + 17 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 17}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -1m \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = -1 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0 \Rightarrow t_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 15}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصله یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.



با رسم نمودار مکان - زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان $x = 1m$ و دو بار از مکان $x = -1m$ عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16$$

$$t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-1)} = 5s$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x_{\text{رأس}} = -5^2 + 10 \times 5 - 16 = 9m$$

۳ ۱۱

تذکر

در حرکت بر روی محور x ، در زمان‌هایی که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد، مکان آن صفر شده ($x=0$) و به عبارت دیگر اندازه بردار مکان آن حداقل می‌شود.

با داشتن معادله مکان - زمان، زمان‌هایی که مکان متحرک صفر می‌شود ($x=0$)، به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \text{زمانی که برای اولین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.} \\ t_1 = 2s \end{cases} \Rightarrow x = t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{زمانی که برای دومین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.} \\ t_2 = 4s \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۲)، گزینه (۱) صحیح است.

۱ ۱۲

۴ ۱۳

ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیه سوم یعنی $1/5 < t < 1$ s و جابه‌جایی در این بازه زمانی برابر است با:

$$x = 4t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 4 - 4 = 0 \\ t_2 = 1/5s \rightarrow x_2 = 4(1/5)^2 - 4(1/5) = 3m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 3m$$

تذکر

۰/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} 0 < t < 0/5s \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه اول} \\ 0/5s < t < 1s \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه دوم} \\ 1s < t < 1/5s \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه سوم} \end{cases}$$

۲ ۱۴

نقاط ابتدا و انتهای بازه زمانی هفت ثانیه شروع حرکت، به ترتیب $t_1 = 0$ و $t_2 = 7s$ می‌باشد. بنابراین جابه‌جایی در این بازه زمانی برابر است با:

$$x = 1/5 + \cos 7\pi t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 1/5 + \cos(0) = 2/5m \Rightarrow \vec{d}_1 = 2/5 \vec{i} \\ t_2 = 7s \rightarrow x_2 = 1/5 + \cos(49\pi) = 1/5 + \cos \pi = 0/5m \Rightarrow \vec{d}_2 = 0/5 \vec{i} \end{cases}$$

$$\text{بردار جابه‌جایی متحرک: } \vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = -2 \vec{i}$$

یادآوری

$$\cos 2k\pi = +1 \quad \text{و} \quad \cos (2k-1)\pi = -1$$

مضرب زوج π مضرب فرد π

۱ ۱۵

به عنوان یک نکته اساسی و بسیار مهم، هنگامی که دو متحرک $t = 0$ یا $t = 1s$ به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یکدیگر برابر می‌شود. بدین ترتیب داریم:

$$\vec{d}_A = \vec{d}_B \Rightarrow 3t + 1 = 2t^2 + t + 1 \Rightarrow 2t = 2t^2 \Rightarrow 2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1s \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = 1s$ قابل قبول است.

۱ ۱۶

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

(تست‌های ۱۶ تا ۳۶)

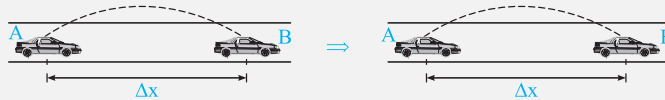
آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط

خلاصه نکات

درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از فواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. فوب روی این موضوع تمرکز کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطه B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطه A تا نقطه B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد.

می‌خواهیم با سرعت ثابت v_{av} در همان زمان Δt از A تا B برود. با سرعت متغیر در مدت Δt از A تا B می‌رود.



این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطه A تا نقطه B محسوب می‌شود. اگر متحرک

روی محور X در حال حرکت باشد، برای محاسبه \vec{v}_{av} ، کافی است جابه‌جایی \vec{d} را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i}$$

تندی متوسط: به نسبت مسافت طی شده (l) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای

محاسبه s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

نکات مهم و کاربردی

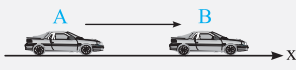
۱) سرعت متوسط مانند جابه‌جایی کمیته برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲) اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا $10m$ در جهت محور X حرکت کرده و سپس $10m$ متر در خلاف جهت محور X حرکت کرده و به محل اولیه خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.

$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = 0 \\ x_{\text{پایان}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = 0$$

۳ اگر یک متحرک در جهت محور x جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴ تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.



۵ فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور x از نقطه A تا نقطه B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی شده برابر اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$

۶ حالا بریم تو دو تا تمرین بعد، ببینیم چه پوری از نکاتی که یاد گرفتیم همیشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۱ معادله حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 0.25 + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازه سرعت متوسط آن در ۵ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

(منتخب سراسری قبل از ۸۰)

- صفر (۱) ۰/۰۵ (۲) ۰/۲۵ (۳) ۰/۱۵ (۴)

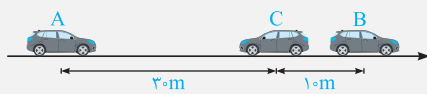
پاسخ برای محاسبه سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول حرکت، کافایت مکان متحرک در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 5$ s را به دست آوریم:

$$x = 0.25 + \sin \pi t \quad , \quad (0 < t < 5s) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0.25 + \sin(0) = 0.25 \text{ m} \\ t_2 = 5s \rightarrow x_2 = 0.25 + \sin 5\pi = 0.25 \text{ m} \end{cases} \rightarrow \text{سرعت متوسط: } \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \vec{i} = \frac{0.25 - 0.25}{5 - 0} \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 0$$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

تمرین ۲ مطابق شکل، اتومبیلی روی محور x از نقطه A شروع به حرکت کرده و در مدت 6 s به نقطه B رفته و سپس در مدت 4 s از نقطه B به نقطه C می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟



(۱) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، 5 m از مسیر را پیموده است.

(۲) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، 3 m از نقطه A به مقصد نزدیک شده است.

(۳) تندی متوسط این اتومبیل 5 m/s است.

(۴) اندازه سرعت متوسط این اتومبیل 15 m/s است.

پاسخ این اتومبیل از نقطه A تا B ، مسافت 30 m را طی کرده و سپس از نقطه B تا C ، به اندازه مسافت 10 m برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی شده توسط اتومبیل 40 m می‌شود و تندی متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ m/s}$$

بنابراین تندی متوسط 4 m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به‌طور متوسط 4 m از مسیر را طی کرده است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{30}{10} \vec{i} = 3 \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 3 \text{ m/s}$$

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

بنابراین اندازه سرعت متوسط 3 m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به‌طور متوسط 3 m از نقطه A به سمت مقصد، یعنی نقطه C نزدیک شده است، پس گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

تذکر برای تبدیل km/h به m/s ، کافی است عدد مورد نظر را بر $3/6$ تقسیم کنیم:

$$1 \text{ km/h} = 1 \frac{(1000 \text{ m})}{(3600 \text{ s})} \Rightarrow 1 \text{ km/h} = \frac{1}{3.6} \text{ m/s}$$

و برای تبدیل m/s به km/h ، عدد مورد نظر را در $3/6$ ضرب می‌کنیم:

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

سرعت متوسط یک متحرک، معادل با نسبت جابه‌جایی به مدت زمان انجام آن جابه‌جایی بوده و با توجه به رابطه زیر به دست می‌آید و عبارت مطرح شده در

گزینه (۱) نادرست است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

* به‌عنوان تمرین، درستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۱۷ همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) مشاهده کردید، اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازه سرعت متوسط و

تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



۳۱۸ عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (ه) به صورت زیر است:

(ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.
 (ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط شود.

(د) چون مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است.
 (ه) چون مسافت طی شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۱۹ متحرک ابتدا به اندازه ۱۵ m از A به B رفته و سپس ۵ m از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی شده توسط متحرک برابر $I = ۲۰ \text{ m}$ می‌شود. از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی متحرک از نقطه A تا C، برابر فاصله AC بوده و برابر $\Delta x = ۱۰ \text{ m}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{I}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{I}{\Delta x} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

۳۲۰ به موارد زیر توجه کنید:

(۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظه شروع حرکت تا نقطه B، گلوله به اندازه ۲۰ m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطه B تا C گلوله ۴۰ m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازه ۶۰ m را طی می‌کند.

(۲) اندازه جابه‌جایی آن از نقطه A تا C برابر ۲۰ m می‌شود و داریم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{I}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{I}{\Delta y} = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$$

۳۲۱ در رابطه با حرکت این متحرک، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

(۱) متحرک ابتدا ۲۰ m در جهت محور X حرکت کرده (از A تا B) و سپس ۱۰ m در خلاف جهت محور X حرکت کرده (از B تا C) و مجموعاً ۳۰ m مسافت پیموده شده است، از طرفی جابه‌جایی این متحرک، برابر $\vec{d} = +۱۰\vec{i}$ است.

(۲) متحرک همیشه در مکان‌های مثبت قرار داشته و این یعنی بردار مکان آن همیشه در جهت محور X می‌باشد. (فریب برگشت متحرک در B را نفورید).

(۳) اندازه سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{۱۰}{\sqrt{۷/۵} + ۲/۵}} = ۱ \text{ m/s}$$

کل زمان لازم برای رسیدن از نقطه A تا C

$$s_{av} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{۳۰}{\sqrt{۷/۵} + ۲/۵}} = ۳ \text{ m/s}$$

۴- اندازه تندی متوسط متحرک برابر است با:

دقت شود که زمان طی کردن مسیر AB برابر $\sqrt{۷/۵}$ و زمان طی کردن مسیر BC برابر $۲/۵$ است و کل زمان لازم برای طی کردن مسیر A تا C برابر ۱۰ s می‌باشد. با توجه به توضیحات داده شده، گزینه (۳) نادرست است.

۳۲۲ این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازه زمانی مشخص، تندی متوسط آن، ۴ برابر اندازه سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، ۴ برابر اندازه جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور X حرکت کرده و سپس بازگشته است:

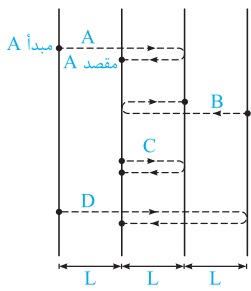
$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = (d+6) + d = 2d+6 \\ \text{اندازه جابه‌جایی} = d - (-4) = d+4 \end{cases} \Rightarrow (2d+6) = 4 \times (d+4) \Rightarrow d = 9 \text{ m}$$

\Rightarrow فاصله محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان $= d+2 = 11 \text{ m}$

حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور X حرکت کرده و سپس بازگشته است:

$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = d' + (d'+6) = 2d'+6 \\ \text{اندازه جابه‌جایی} = d' - (-4) = d'+4 \end{cases} \Rightarrow (2d'+6) = 4 \times (d'+4) \Rightarrow d' = 9 \text{ m}$$

\Rightarrow فاصله محل تغییر جهت دادن متحرک تا مبدأ مکان $= d'+4 = 9+4 = 13 \text{ m}$



گام اول: ابتدا اندازه جابه‌جایی هر متحرک را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسه اندازه سرعت متوسط آن‌ها، کافی است اندازه جابه‌جایی آن‌ها (فاصله مبدأ از مقصد) را با یکدیگر مقایسه کنیم:

$$|\vec{d}_A| = L, |\vec{d}_B| = L, |\vec{d}_C| = 0, |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} v_{avA} = v_{avB} = v_{avD} > v_{avC}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت‌های طی شده (که معادل با طول خط‌چین برای هر متحرک است) توسط هر چهار متحرک را به دست می‌آوریم و به کمک آن‌ها تندی متوسط را مقایسه می‌کنیم:

$$l_A = 3L, l_B = 2L, l_C = 2L, l_D = 5L$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} s_{avD} > s_{avA} = s_{avB} > s_{avC}$$

مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور X) حرکت می‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \vec{i}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 8m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = -16m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-16 - 8}{10 - 2} \vec{i} = -3 \vec{i} \text{ (در SI)}$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و همچنین جابه‌جایی (\vec{d})) در این بازه زمانی در خلاف جهت محور X است.

۳ ۲۵ طبق صورت سؤال، متحرک در لحظه $t = 0$ ، در مکان $x_0 = -40m$ و در لحظه $t_2 = 10s$ ، در مکان $x_2 = 20m$ قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی 10 ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -40m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = +20m \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20 - (-40)}{10 - 0} = 6m/s$$

۲ ۲۶ با توجه به جدول داده‌شده، می‌توان نوشت:

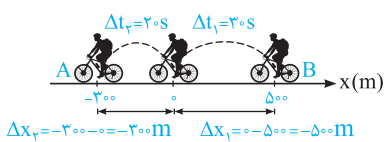
سرعت متوسط	جابه‌جایی	مکان پایانی	مکان آغازین	متحرک
$(\vec{v}_{av})_A$	$(-5m) \vec{i}$	$(-2m) \vec{i}$	\vec{d}_{eA}	A متحرک
$(\vec{v}_{av})_B$	\vec{d}_B	$(8m) \vec{i}$	$(2m) \vec{i}$	B متحرک

$$\begin{cases} \text{A جابه‌جایی: } \vec{d}_A = -5 \vec{i} = -2 \vec{i} - \vec{d}_{eA} \Rightarrow \vec{d}_{eA} = 3 \vec{i} \\ \text{B جابه‌جایی: } \vec{d}_B = 8 \vec{i} - 2 \vec{i} = 6 \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{d}_{eA}} = \frac{6 \vec{i}}{3 \vec{i}} = 2$$

از طرفی با توجه به این‌که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه‌جایی آن‌ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-5 \vec{i}}{6 \vec{i}} = -\frac{5}{6}$$

۱ ۲۷ در صورتی‌که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:

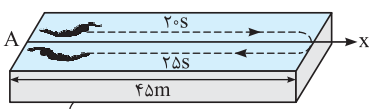


$$\vec{v}_{av \text{ کل}} = \frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان انجام جابه‌جایی}}$$

$$\vec{v}_{av \text{ کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \vec{i} = \frac{(-500) + (-300)}{30 + 20} \vec{i} = -16 \vec{i}$$

برای این مسئله داریم:

دقت: توجه شود که \vec{d} (جابه‌جایی) فاصله بین محل شروع حرکت (B) و محل پایان حرکت (A) است که برابر $\Delta x_1 + \Delta x_2$ می‌باشد.



استخر آب

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{90}{20 + 25} = 2m/s$$

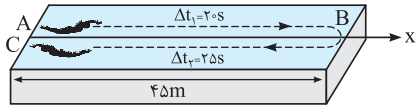
۴ ۲۸ شناگر پس از 45 ثانیه شنا کردن، به مکان اولیه خود برمی‌گردد، بنابراین جابه‌جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

$$x_{شروع} = x_{پایان} \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $2 \times 45m = 90m$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

۱ ۲۹

در صورتی که جهت مثبت محور X را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



$$\Delta x_1 = x_B - x_A = 45 - 0 = +45 \text{ m}$$

سرعت متوسط در مسیر رفت (AB) : $\Delta x_1 = x_B - x_A = 45 - 0 = +45 \text{ m}$

$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{45}{30} = 1.5 \text{ m/s}$$

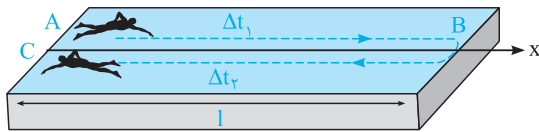
$$\Delta x_2 = x_C - x_B = 0 - 45 = -45 \text{ m} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-45}{25} = -1.8 \text{ m/s}$$

سرعت متوسط در مسیر برگشت (BC) : $\Delta x_2 = x_C - x_B = 0 - 45 = -45 \text{ m} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-45}{25} = -1.8 \text{ m/s}$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور X حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳ ۳۰ برای حل این سؤال، به شکل مقابل که مسیر رفت و برگشت شناگر

را نشان می‌دهد، توجه کنید:



$$(s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s} \quad (1)$$

تندی متوسط در هنگام رفت : $(s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s} \quad (1)$

$$(s_{av})_2 = 2s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{2s} \quad (2)$$

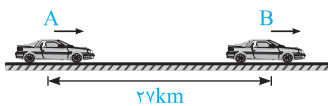
تندی متوسط در هنگام برگشت : $(s_{av})_2 = 2s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{2s} \quad (2)$

$$s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}} = \frac{2l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{\left(\frac{l}{s}\right) + \left(\frac{l}{2s}\right)} = \frac{2l}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{l}{s}\right)} = \frac{4}{3}s$$

تندی متوسط در رفت و برگشت : $s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}} = \frac{2l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{\left(\frac{l}{s}\right) + \left(\frac{l}{2s}\right)} = \frac{2l}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{l}{s}\right)} = \frac{4}{3}s$

۳ ۳۱

روش اول: متحرک در طول نیم‌ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می‌باشد.



$$\begin{cases} \Delta x = 27 \text{ km} = 27000 \text{ m} \\ \Delta t = 0.5 \text{ h} = 0.5 \times 3600 = 1800 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27000}{1800} = 15 \text{ m/s} = 1500 \text{ cm/s}$$

روش دوم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27}{0.5} = 54 \text{ km/h} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{54}{3.6} = 15 \text{ m/s} = 1500 \text{ cm/s}$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازه جابه‌جایی و مسافت یکسان است، پس اندازه سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکر

برای تبدیل km/h به m/s، کافی است عدد مورد نظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$1 \text{ km/h} = 1 \frac{(1000 \text{ m})}{(3600 \text{ s})} \Rightarrow 1 \text{ km/h} = \frac{1}{3.6} \text{ m/s}$$

و برای تبدیل m/s به km/h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

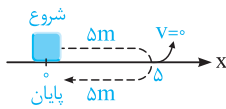
$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

۴ ۳۲

برای به دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه‌جایی آن مهم است، نه مسافت طی شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم

که هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

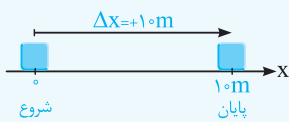
به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی شده برابر ۱۰ متر بوده ولی جابه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت‌ها را به خودتان می‌سپاریم).



$$\Delta x = 0 \rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰ متر جابه‌جا شود.



$$\Delta x = 10 \text{ m} \rightarrow |\vec{v}_{av}|_{\text{max}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s} \rightarrow -5 \hat{i} \leq \vec{v}_{av} \leq 5 \hat{i}$$

۲ ۳۳

برای محاسبه اندازه سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه اول حرکت ($0 < t < 2 \text{ s}$)، ابتدا باید مکان متحرک در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 2 \text{ s}$ را

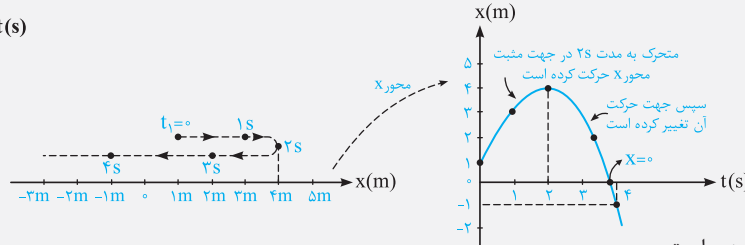
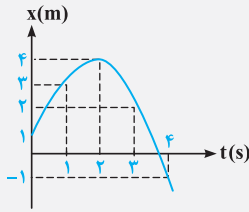
به دست آوریم:

$$x = t^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = -4 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 = 0 \text{ m} \end{cases} \quad |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{سرعت متوسط} : |\vec{v}_{av}| = \frac{12 - (-4)}{2 - 0} = 8 \text{ m/s}$$

تمرین ۱ نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه جایی و مسافت طی شده توسط این

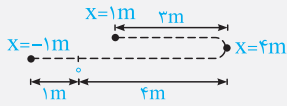
متحرک تا پایان ثانیه چهارم، برابر چند متر است؟

پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می توان نوشت:



جابه جایی این متحرک به صورت زیر است:

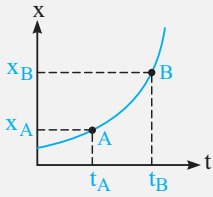
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1\text{m} \\ t_2 = 4\text{s} \Rightarrow x_2 = -1\text{m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (1) = -2\text{m}$$



حال به محاسبه مسافت طی شده می پردازیم. متحرک ابتدا از $x = 1\text{m}$ شروع به حرکت کرده و تا $x = 4\text{m}$ رفته است (3m مسافت طی کرده است). در ادامه از $x = 4\text{m}$ شروع به حرکت کرده و به $x = 0$ رفته است (4m مسافت طی کرده است)، در پایان نیز از $x = 0$ به $x = -1\text{m}$ رفته است (1m مسافت طی کرده است) و مجموع مسافت طی شده توسط متحرک برابر $1 + 4 + 3 = 8\text{m}$ است.

۲) محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان

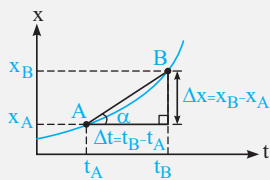
فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این گونه مسائل برای محاسبه سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می کنیم:



روش اول (نمودارخوانی): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به دست می آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می کنیم:

$$B \text{ و } A \text{ بین سرعت متوسط: } |\vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت است.



$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}| = \text{شیب خط } AB$$

این روش در مسائلی که می خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

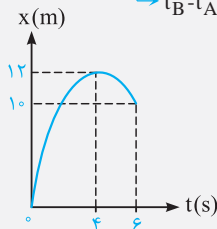
۳) محاسبه تندی متوسط از روی نمودار مکان - زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبه تندی متوسط، گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول: ابتدا مسافت طی شده بین دو لحظه t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه شده محاسبه می کنیم:

گام دوم: به کمک رابطه مقابل، تندی متوسط را محاسبه می کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_B - t_A}$$



۴) بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد

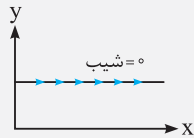
برای به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی شده توسط متحرک را به دست آوریم. به طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، به صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور x حرکت کرده در نقطه $x = 12\text{m}$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به نقطه $x = 10\text{m}$ می رسد.

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1^{\circ} - 0^{\circ}}{6} = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

برای به دست آوردن اندازه سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت داریم:

اما برای به دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی شده را به دست آوریم. این متحرک ۱۲ m در جهت محور X و ۲ m در خلاف محور X حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت ۱۴ m را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$



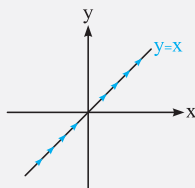
(با افزایش X، y ثابت است.)

۵) سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

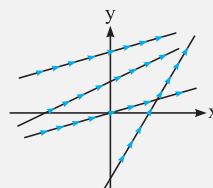
الان می‌خواهیم به هند تا نکته ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) هستند، شیب مثبت دارند.



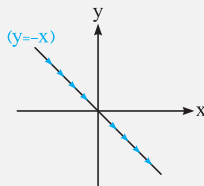
(با افزایش X، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)



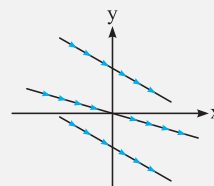
(خطوط دارای شیب مثبت)

ساره بگیریم فطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشون، شیبشون مثبت و بالعکس ...

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.



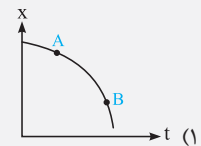
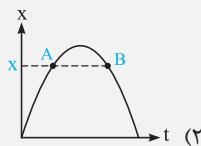
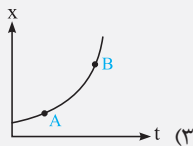
(با افزایش X، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)



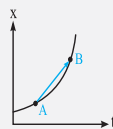
(خطوط دارای شیب منفی)

حالا بریم با هل هند تا تمرین، این فاصله نکات رو بترکونیم ...

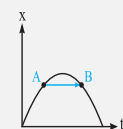
تمرین ۲ در هر یک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.



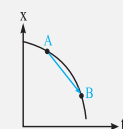
پاسخ با توجه به این که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB مثبت است ($v_{av} > 0$)



شیب AB صفر است ($v_{av} = 0$)

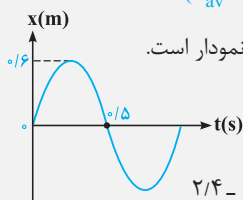


شیب AB منفی است ($v_{av} < 0$)

دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۳ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط

آن در ۰/۵ ثانیه اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟



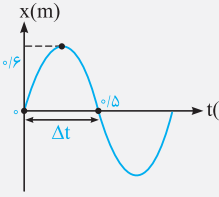
(۴) صفر - ۲/۴

(۳) ۲/۴ - صفر

(۲) صفر - ۱/۲

(۱) ۱/۲ - صفر

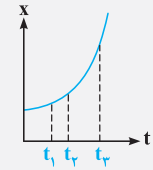
پاسخ نمودار داده شده نمودار مکان - زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در $t_1 = 0$ و $t_2 = 0.5$ s از روی نمودار، سرعت متوسط در 0.5 ثانیه اول حرکت را به دست آوریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0.5 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{اندازه سرعت متوسط} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{0.5 - 0} = 0$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک 0.6 m در جهت محور X حرکت کرده و سپس 0.6 m در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. بنابراین در مدت 0.5 s مسافت 1.2 m را طی کرده است و تندى متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{1.2}{0.5} = 2.4 \text{ m/s} \text{ (۴ صحیح است.)}$$



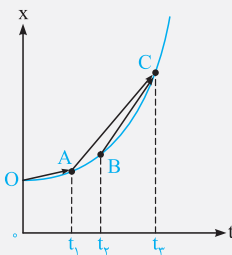
تمرین ۴ نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی و مطابق شکل روبرو است. اندازه سرعت متوسط متحرک در کدام بازه زمانی بیشتر است؟ (ریاضی دافل ۸۵)

(۲) t_1 تا t_2

(۱) t_1 تا 0

(۴) بستگی به اندازه فاصله‌های زمانی دارد.

(۳) t_2 تا t_3

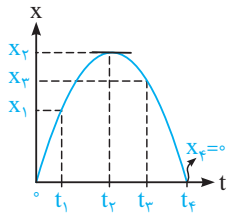


پاسخ سرعت متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

همان‌طور که در شکل روبرو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خطها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_3 بزرگ‌تر است.

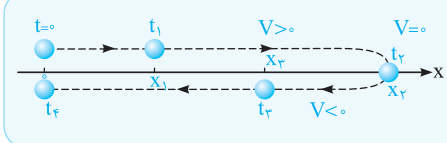
$$\tan \alpha_{BC} > \tan \alpha_{AC} > \tan \alpha_{OA} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



توصیف حرکت متحرک با توجه به نمودار مکان - زمان: متحرک در لحظه $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت کرده، در لحظه t_1 از نقطه x_1 گذشته و در لحظه t_2 به x_2 می‌رسد. بنابراین مشاهده می‌کنیم که در بازه زمانی 0 تا t_2 مکان متحرک در حال افزایش بوده و در نتیجه متحرک در جهت محور X در حال حرکت می‌باشد. در لحظه t_2 متحرک در x_2 بوده و در لحظه t_3 به x_3 رسیده و سپس در لحظه t_4 به مبدأ ($x_4 = 0$) برمی‌گردد. بنابراین در بازه زمانی t_2 تا t_4 ، متحرک در خلاف جهت محور X در حال حرکت می‌باشد. بنابراین متحرک در لحظه t_2 ، در بیشترین فاصله از مبدأ قرار دارد.

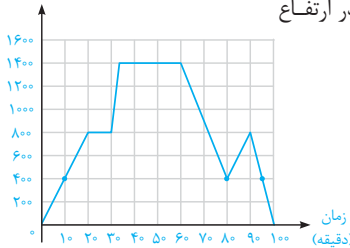
درک بهتر



متحرک از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند و در لحظه t_2 تغییر جهت داده و در لحظه t_4 مجدداً به مکان اولیه خود بازمی‌گردد، در نتیجه در لحظه t_2 ، متحرک بیشترین فاصله را از مبدأ دارد.

۴ ۳۸ در نمودار مکان - زمان ارائه شده، مکان متحرک همواره صفر یا مثبت بوده و بردار مکان یعنی \vec{x} ، هیچ‌گاه در خلاف جهت محور X قرار نمی‌گیرد. بنابراین گزینه (۴) با توضیحات ارائه شده در مورد این نمودار مطابقت دارد.

ارتفاع (متر)



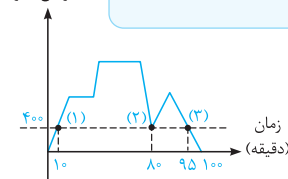
۲ ۳۹ با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل، هواپیما در سه لحظه $t = 10$ s، $t = 80$ s و $t = 95$ s (چرا؟) در ارتفاع

400 متری از سطح زمین قرار دارد و این تنها ارتفاعی است که به ازاء آن سه زمان وجود دارد.

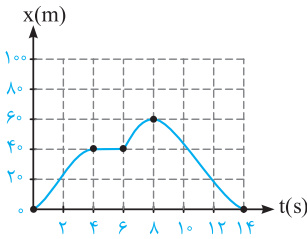
دقت

هواپیما در بین دقایق 20 تا 30 ، به مدت 10 دقیقه در ارتفاع 800 متر قرار دارد و این ارتفاع نمی‌تواند گزینه درست باشد.

ارتفاع (متر)



نگاه دیگر: اگر از هریک از نقاط روی محور قائم (ارتفاع)، خطوطی به موازات محور افقی رسم کنیم، تعداد نقاط برخورد با نمودار تعداد دفعاتی که متحرک در آن ارتفاع قرار می‌گیرد را نشان می‌دهد.



۴۴۰ با توجه به شکل مقابل، حرکت این متحرک را در هر مرحله به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

$0 \leq t < 4s$: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در این بازه زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $x = 0$ به $x = 40m$ رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.

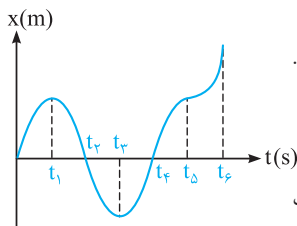
$4s \leq t < 6s$: در این بازه، متحرک در مکان $x = 40m$ ایستاده و حرکت نمی‌کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و x ثابت است).

$6s \leq t < 8s$: در این بازه همانند بازه اول، متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد و از مکان $x = 40m$ به مکان $x = 60m$ رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = 8s$ به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$8s \leq t < 14s$: در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان $x = 60m$ به سمت مبدأ ($x = 0$) در حال حرکت بوده و در لحظه $t = 14s$ به مبدأ ($x = 0$) می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دقت: متحرک در چهار ثانیه دوم حرکت ($4s \leq t < 8s$) از مکان $x = 40m$ به مکان $x = 60m$ رفته است و $20m$ جابه‌جا شده و گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

۴۱۳ چون دوچرخه‌سوار از مکان $x = 0$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $x = 0$ بازگشته است، اندازه جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیه اول حرکت از $x = 0$ به $x = 60m$ رفته و در بازه زمانی ۸s تا ۱۴s از $x = 60m$ به $x = 0$ بازگشته است و در مجموع مسافت $120m$ را طی کرده است.



۱۴۲ برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در حال دور شدن از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح‌شده در گزینه (۱) نادرست است.

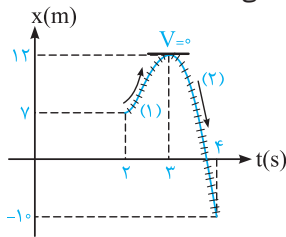
(۲) در بازه زمانی t_4 تا t_6 ، متحرک در جهت محور x از مبدأ دور می‌شود.

(۳) در بازه زمانی t_1 تا t_4 ، متحرک در قسمت منفی محور x قرار دارد و در لحظه t_3 بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور x از مبدأ دارد.

(۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور x است، بردار مکان در جهت محور x و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور x است، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار دارد.

به‌طور کلی هنگامی که متحرک از $x = 0$ عبور کرده و علامت x تغییر کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. متحرک موردنظر در دو لحظه t_1 و t_4 از مبدأ مکان عبور کرده است و دو بار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینه (۱) عبارت نادرستی است.

۱۴۳ با بررسی جهت حرکت و اندازه جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت ($2s \leq t < 4s$)، مسافت طی‌شده به دست می‌آید.



مرحله اول: از لحظه $t = 2s$ تا $t = 3s$ ، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و مسافت $I_1 = 12 - 7 = 5m$ را پیموده است.

مرحله دوم: از لحظه $t = 3s$ تا $t = 4s$ ، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و مسافت $I_2 = |-10 - 12| = 22m$ را پیموده است.

بنابراین مسافت طی‌شده در دو ثانیه دوم برابر $I = I_1 + I_2 = 27m$ است.

سوال اندازه جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

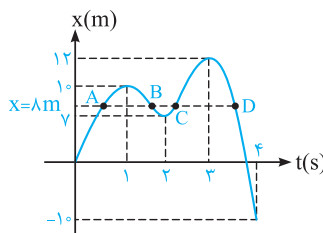
پاسخ

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 7m \\ t_2 = 4s \rightarrow x_2 = -10m \end{cases} \rightarrow |\vec{d}| = |x_2 - x_1| = 17m$$

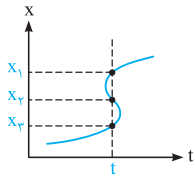
سوال در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد؟

پاسخ

در ثانیه چهارم ($3s \leq t < 4s$)، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت x تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد.



۴۴۴ با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک ۴ بار در مکان $x = +8m$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x = 8m$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطه A, B, C, D قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک برحسب متر برابر $\vec{d} = +8\hat{i}$ می‌شود.

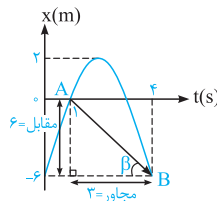
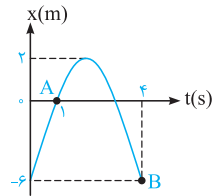


۴ ۴۵ نمودار رسم شده در گزینه (۴)، نمودار یک تابع x بر حسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور x رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهنده این است که متحرک در یک لحظه، در چند مکان مختلف قرار دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.

۲ ۴۶ **روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظه $t_1 = 1s$ در مبدأ قرار داشته ($x_A = 0$) و در لحظه $t_2 = 4s$ در مکان $x_2 = -6m$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 \text{ m/s}$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل بین نقاط ابتدای بازه زمانی و انتهای بازه زمانی در نمودار مکان - زمان است.



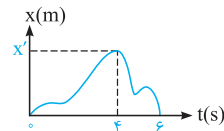
$$|\vec{v}_{av}| = |\tan \beta| = \left| \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \right| = \left| \frac{6}{3} \right| = 2 \text{ m/s}$$

(شیب خط AB منفی است.) $v_{av} = -2 \text{ m/s}$

دقت

با توجه به فلش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان - زمان فوق مشخص می‌شود:

$\longrightarrow \Rightarrow v_{av} = 0$	$\nearrow \Rightarrow v_{av} > 0$	$\searrow \Rightarrow v_{av} < 0$
--	-----------------------------------	-----------------------------------



۲ ۴۷ محاسبه سرعت متوسط از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$:

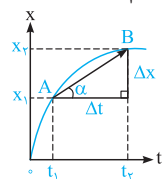
$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4 - 0} = \frac{x'}{4}$$

محاسبه سرعت متوسط از $t_2 = 4s$ تا $t_3 = 6s$:

$$\begin{cases} t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6s \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{0 - x'}{6 - 4} = -\frac{x'}{2}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازه زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$



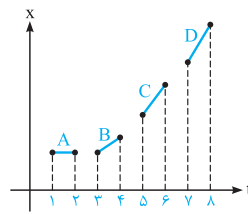
۳ ۴۸ نمودار داده‌شده یک نمودار مکان - زمان است. بنابراین شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصله زمانی بین آن دو لحظه (t_1 تا t_2) می‌باشد.

$$\text{شیب } AB = \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$

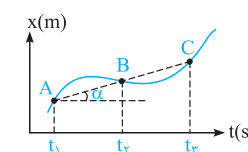
۳ ۴۹ با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۴)، گزینه (۳) صحیح است.

تمرین در شکل مقابل، اندازه سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

پاسخ



$$|\vec{v}_{av}|_A = 0 < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$$

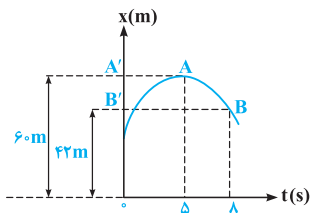


۳ ۵۰ شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه است. در شکل روبه‌رو، شیب خط واصل بین نقاط A و B با شیب خط واصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هر دو بازه زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر 2 m/s است.

$$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan \alpha = 2 \text{ m/s}$$

تذکر

دقت کنید پاره‌خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.



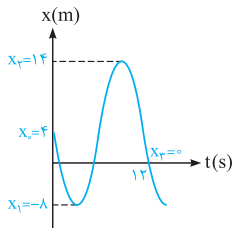
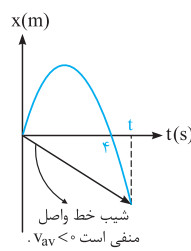
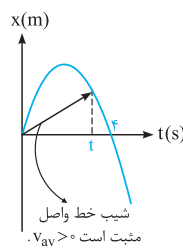
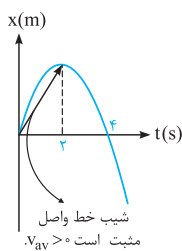
۱۵۱ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که متحرک بر روی محور x در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور x است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظه $t_1 = 5s$ در مکان $A'(x_1 = 6m)$ و در لحظه $t_2 = 8s$ در مکان $B'(x_2 = 4m)$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 - 6}{8 - 5} = -\frac{2}{3} \text{ m/s}$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظه $t = 5s$ تا $t = 8s$ متحرک بر روی محور x از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور x) است.

۳۵۲ با توجه به شیب خط واصل از لحظه صفر تا t ، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظه $t = 4s$ ، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.



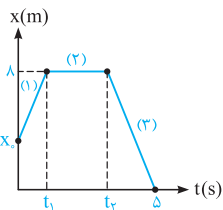
۴۵۳ متحرک ابتدا $12m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مکان $x_0 = 4m$ به مکان $x_1 = -8m$ می‌رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت $22m$ به مکان $x_2 = 14m$ می‌رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت $14m$ در لحظه $t = 12s$ به مبدأ ($x_3 = 0$) می‌رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $48m = 14 + 22 + 12$ را طی می‌کند و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{48}{12} = 4 \text{ m/s}$$

۴۵۴ این متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه t_1 مسافت $(8 - x_0)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظه t_1 تا t_2 ساکن بوده و از لحظه t_2 تا لحظه $t = 5s$ از مکان $x = 8m$ به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازه زمانی مسافت $8m$ را طی کرده است.

$$8s = (8 - x_0) + 0 + 8 = 16 - x_0$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow 2 = \frac{16 - x_0}{5} \Rightarrow x_0 = 6m$$

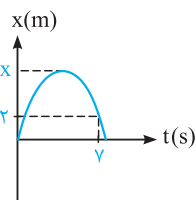


۲۵۵ مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصله ذره تا مبدأ مکان برابر x باشد، به این ترتیب داریم:

$$l = (x) + (x - 2) = 2x - 2$$

$$| \Delta x | = 2m = \text{اندازه جابه‌جایی در ۷ ثانیه اول}$$

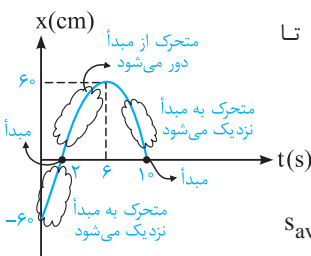
$$s_{av} = \Delta |v_{av}| \Rightarrow \frac{l}{\Delta t} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow (2x - 2) = 5 \times (2) \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6m$$

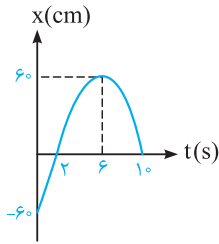


۲۵۶ گام اول: در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ متحرک از قسمت منفی محور x به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازه زمانی $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 6s$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازه زمانی $t_3 = 6s$ تا $t_4 = 10s$ به مبدأ نزدیک می‌شود.

گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 6s$ که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{6}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ cm/s} = 0.15 \text{ m/s}$$





۳۵۷ با توجه به نمودار داده شده، متحرک در دو لحظه $t_1 = 0$ s و $t_2 = 6$ s به ترتیب در نقاط $x_1 = -60$ cm و $x_2 = +60$ cm قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصله متحرک تا مبدأ برابر ۶۰ cm می شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیه اول حرکت به دست آوریم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{120}{6} = 20 \text{ cm/s} = 0.2 \text{ m/s}$$

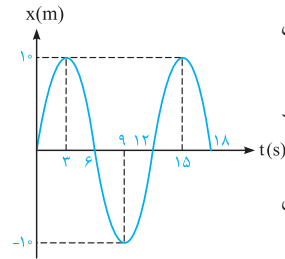
۳۵۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

(۱) همان طور که می دانید، طبق رابطه $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد.

(۲) بعد از لحظه $t = 0$ ، متحرک در جهت محور X شروع به حرکت می کند و در ادامه مسیر، مسافت های متفاوتی را طی می کند، بنابراین مسافت طی شده توسط آن در هیچ یک از بازه های زمانی صفر نمی باشد.

(۳) دقت کنید حتی زمانی که متحرک به مکان اولیه خود باز می گردد، باز هم مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی شود و در این حالت جابه جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می شود.

(۴) بنابراین در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6$ s که متحرک به محل اولیه اش باز می گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه های زمانی صفر نمی شود.

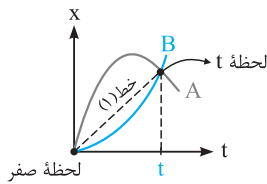


۳۵۹ در بازه t_1 تا t_2 ، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

دقت

در بازه زمانی صفر تا t_2 ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه جایی در این بازه زمانی صفر شده ولی مسافت طی شده مخالف صفر است).

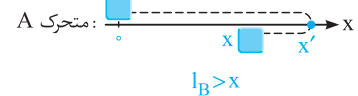
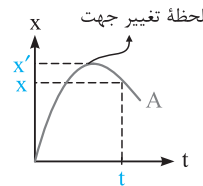
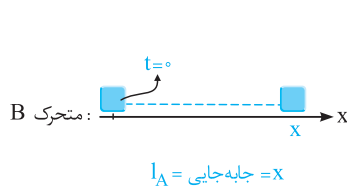
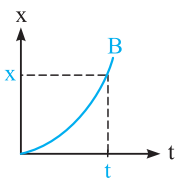
۳۶۰ این سؤال را در دو گام حل می کنیم:



گام اول: خط واصل از لحظه صفر تا لحظه t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظه صفر تا لحظه t یکسان است.

$$(v_{av})_A = (v_{av})_B = (1) \text{ شیب خط}$$

گام دوم: برای مقایسه تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظه صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:



همان طور که مشاهده می کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

$$(s_{av}) = \frac{1}{\Delta t} \frac{I_A > I_B}{\Delta t} \rightarrow (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

۳۶۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات تندی لحظه ای و سرعت لحظه ای (محاسبه آن از روی نمودار مکان-زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن) (تست های ۶۱ تا ۷۸)

هالا بریم ببینیم تندی لحظه ای چه و چه اطلاعات مفیدی ارزش استخراج همیشه ...

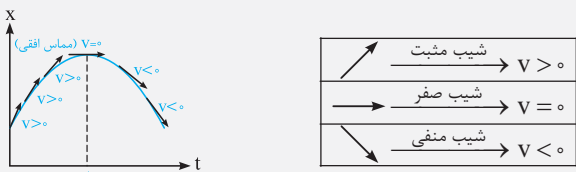
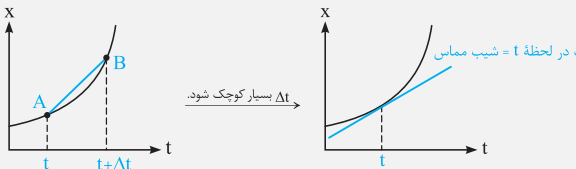
۱ مفهوم تندی لحظه ای و سرعت لحظه ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، تندی لحظه ای می نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه ای آن را بیان کرده ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه ای از مسیر، عقربه تندی سنج خودروی شما روی 100 km/h باشد، در این صورت تندی لحظه ای خودرو برابر 100 km/h و سرعت لحظه ای آن 100 km/h به طرف شمال است.

تذکره برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به‌کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به ترتیب به صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم‌چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد \vec{v} و تندی را که برابر اندازه سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

۲) محاسبه سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان - زمان

همان‌طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطه A و B ، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظه t ، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



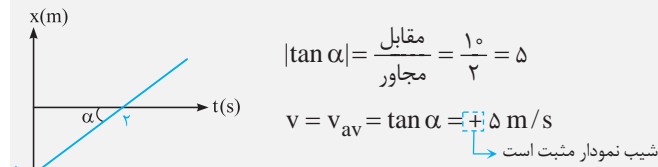
نکات مهم و کاربردی

با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قله نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند ($v > 0$)، سپس توقف کرده ($v = 0$) و سپس در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند ($v < 0$).

(قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.)

عقربه تندی سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژه سرعت‌سنج برای این وسیله نادرست است، هر چند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.

اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مقابل، سرعت متوسط در هر بازه زمانی، دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



$$|\tan \alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$v = v_{av} = \tan \alpha = 5 \text{ m/s}$$

شیب نمودار مثبت است

این یعنی آگه یه طراح، سرکارتون بزاره و پپرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ پنده، پواب همون 5 m/s هستش.

یا حتی آگه پپرسه سرعت متوسط در 0.15 ثانیه سوم پنده، باور کنید بازه پواب همون 5 m/s هست، احتمالاً باورش سفت بود پراتون 😊 ...

تمرین

نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ برابر اندازه سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_1 = 5 \text{ s}$ و $t_2 = 12 \text{ s}$ باشد، متحرک در لحظه $t = 12 \text{ s}$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟ (M.K.A)

- ۲۴ (۲)
- ۲۸ (۱)
- ۲۰ (۴)
- ۳۶ (۳)

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

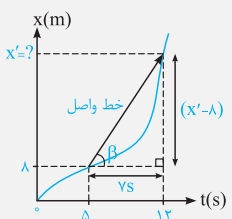
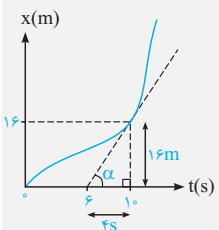
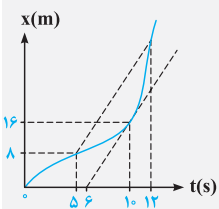
(۱) طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ ، برابر اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه $t_1 = 5 \text{ s}$ تا $t_2 = 12 \text{ s}$ است و داریم:

$$v = \text{شیب مماس} = \tan \alpha = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s}$$

(۲) در صورتی‌که متحرک در لحظه $t = 12 \text{ s}$ در مکان x' باشد، با محاسبه اندازه سرعت متوسط از لحظه 5 s تا 12 s داریم:

$$v_{av} = \tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - 8}{7} = 4 \Rightarrow x' = 36 \text{ m}$$

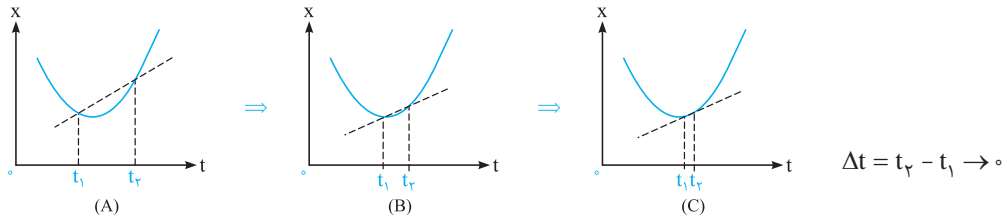
(گزینه ۳)



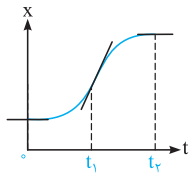
با توجه به مطالب مطرح‌شده در خلاصه نکات فوق، گزینه (۳) صحیح است.

۲۶۲

همان‌گونه که در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شیب خط واصل، به سمت مماس رسم‌شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم‌شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازه سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.

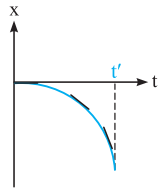


۲۶۳ اندازه سرعت متحرک (تندی) در لحظه‌ای بزرگ‌تر است که شیب مماس رسم‌شده بر نمودار مکان - زمان در آن نقطه بیشتر باشد (یعنی خط



مماس با محور افقی زاویه بزرگ‌تری می‌سازد).
با توجه به مماس‌های رسم‌شده، همان‌طور که مشاهده می‌کنید در لحظه t_1 ، شیب مماس رسم‌شده بیشتر از سایر نقاط است و تندی در این لحظه از دو لحظه دیگر بزرگ‌تر است.

$$\Rightarrow \text{لحظات } t_1 \text{ و } t_2 \text{ و } \tan \alpha = 0 \Rightarrow v = 0$$



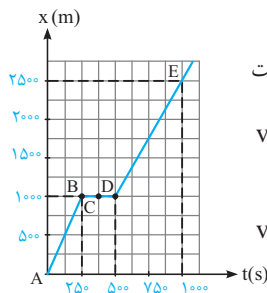
۳۶۴ همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازه سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. با توجه به این‌که در نمودار رسم‌شده در گزینه (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظه صفر تا t' ، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.

۱۶۵

نکته

اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است.

با توجه به نکته ارائه‌شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازه زمانی قرار گرفته در این بازه (D تا E) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازه زمانی $900s < t < 600s$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 550s$ (یا هر لحظه دیگر که در بازه زمانی $500s$ تا $1000s$ قرار گرفته باشد) می‌باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



بررسی دیگر گزینه‌ها:

(۲) متحرک در بازه A تا B در مدت $250 - 0 = 250s$ به اندازه $1000 - 0 = 1000m$ جابه‌جا شده است، بنابراین اندازه سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{1000 - 0}{250 - 0} = 4 \text{ m/s}$$

از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازه D تا E برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{2500 - 1000}{1000 - 500} = \frac{1500}{500} = 3 \text{ m/s}$$

بنابراین متحرک در AB ، تندتر از DE حرکت می‌کند.

(۳) برای محاسبه اندازه سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازه زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_{av \text{ کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{2500 - 0}{1000 - 0} = 2.5 \text{ m/s}$$

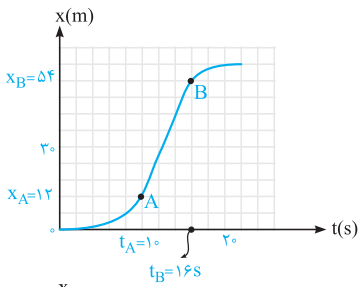
(۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = 250s$ تا $t = 500s$ در مکان $x = 1000m$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین متحرک در این بازه زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطه C نیز صفر می‌باشد).

۲۶۶

با توجه به نکته مطرح‌شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظه $t = 6s$

(که متحرک از مبدأ عبور می‌کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $2s$ تا $6s$ است. بنابراین داریم:

$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{0 - 10}{6 - 2} \vec{i} = -\frac{10}{4} \vec{i} = -2.5 \vec{i}$$

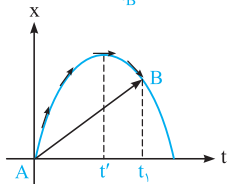


۳۶۷ در حرکت این متحرک، از لحظه $t = 0$ تا t_A ، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کفایت شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل 6 m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل 2 s است):

$$v_{AB} = v_{avAB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{54 - 12}{16 - 1} \Rightarrow v_{AB} = 7\text{ m/s}$$

۳۶۸ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۵)، گزینه (۳) صحیح است.

۲۶۹ به موارد زیر توجه کنید:



(۱) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم‌شده بین دو لحظه $t = 0$ و t_1 (خط AB) بیان‌گر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور X است.

(۲) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیان‌گر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظه t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظه t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد. بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

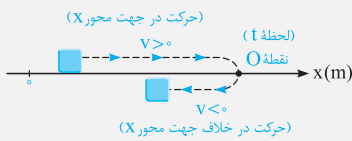
۳۷۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

(تست‌های ۷۰ تا ۷۷)

بررسی لحظه تغییر جهت متحرک

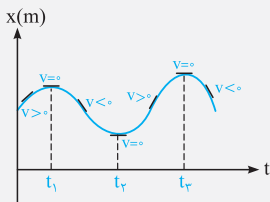
خلاصه نکات

تو این قسمت، می‌فوییم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم... این موضوع تو فیلی از سوالا به کارمون میار.



در شکل مقابل متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور X در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظه t ، متحرک به نقطه O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامه حرکت سرعت آن منفی می‌شود)، لحظه t را در اصطلاح **لحظه تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.

شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطه O: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.



نکته در قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.

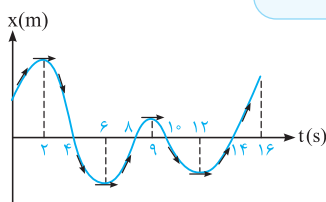
در لحظات t_1 ، t_2 و t_3 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است. \Rightarrow

مطابق خلاصه نکات فوق و با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، سرعت متحرک در دو لحظه t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس).

بنابراین در بازه t_1 تا t_2 ، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تذکر

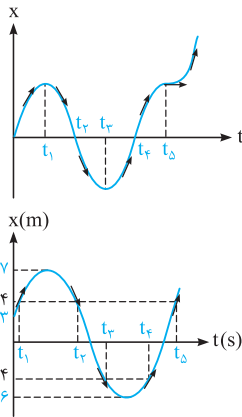
نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.



۲۷۱ تندی متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2\text{ s}$ ، $t_2 = 6\text{ s}$ ، $t_3 = 9\text{ s}$ و $t_4 = 12\text{ s}$ صفر شده و علامت سرعت

بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیه اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد.

از طرف دیگر در بازه‌های زمانی $(0$ تا $2\text{ s})$ ، $(6\text{ s}$ تا $9\text{ s})$ و $(12\text{ s}$ تا $16\text{ s})$ ، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند.



همان طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متحرک است و در بازه‌های زمانی که شیب خط مماس منفی می‌شود، سرعت در خلاف محور X بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. همان طور که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازه زمانی t_1 تا t_4 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.

به موارد زیر توجه کنید: **۱ ۷۳**

(۱) هنگامی که متحرک در نقاط $x = 4m$ یا $x = -4m$ قرار می‌گیرد، فاصله متحرک تا مبدأ مکان برابر $4m$ می‌شود.

همان طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 و t_6 فاصله متحرک تا مبدأ برابر $4m$ می‌شود.

(۲) در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_3 قابل قبول هستند و گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

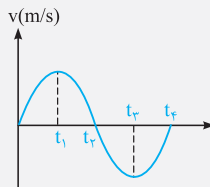
برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید: **۴ ۷۴**

(تست‌های ۷۴ تا ۷۸)

تطبیق سرعت

خلاصه نکات

علا بریم پلوتر و یار بگیریم که از روی نمودار سرعت - زمان پی همیشه فوهمید ...



فرض کنید نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند به صورت مقابل باشد:

در مورد این نمودار می‌توان به نکات مهم و کاربردی زیر اشاره کرد:

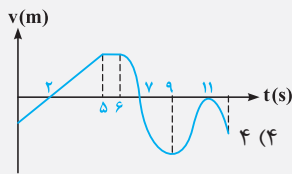
(۱) در بازه زمانی که نمودار بالای محور (t) است، (۰ تا t_2) سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور X در حال حرکت می‌باشد.

(۲) در بازه زمانی که نمودار زیر محور (t) است، (t_2 تا t_4) سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور X در حال حرکت است.

(۳) در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لحظه علامت سرعت عوض می‌شود (مانند t_2)، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

تمرین بعد، فیلی خوب و مفهومیه. با دقت همه عبارات‌هاش رو بفونید ...

تمرین ۱ با توجه به نمودار سرعت - زمان زیر که مربوط به متحرکی است که روی محور X حرکت می‌کند، چند مورد از عبارات زیر درست است؟



(الف) متحرک ۵ ثانیه در جهت محور X حرکت کرده است. (ب) تندی حرکت، سه بار صفر می‌شود.

(ج) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

(د) در شش ثانیه اول حرکت، متحرک ۲s در خلاف جهت محور X حرکت کرده است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ به بررسی تک تک عبارتها می‌پردازیم:

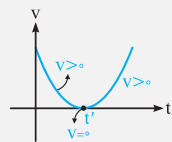
(الف) سرعت متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ مثبت بوده و متحرک در این ۵ ثانیه در جهت محور X حرکت می‌کند و عبارت (الف) درست است.

(ب) تندی حرکت در سه لحظه $t_1 = 2s, t_2 = 7s$ و $t_3 = 11s$ صفر می‌شود و عبارت (ب) درست است.

(ج) در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 7s$ سرعت متحرک صفر شده و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در لحظه $t = 11s$ با این که سرعت متحرک صفر می‌شود، اما تغییر علامت نمی‌دهد (در قبل و بعد از آن سرعت منفی است) و در نتیجه متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و عبارت (ج) هم درست است.

توی لطفه $t = 11s$ ، متحرک یه لطفه وایساره و بعد باز به حرکتش تو خلاف جهت محور X ادامه داره، یعنی اصطلاحاً متحرک توقف کرده، ولی تغییر جهت ندراره ...

(د) در شش ثانیه اول در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 2s$ سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند و در نتیجه عبارت (د) هم درست است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



تذکر هر توقفی، لزوماً لحظه تغییر جهت نیست. به طور مثال در شکل زیر در لحظه t_1 ، سرعت صفر شده (لحظه توقف) ولی تغییر علامت نمی‌دهد و این یعنی در این لحظه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

تمرین ۲ کدام یک از دو مورد زیر در رابطه با حرکت یک جسم بر روی مسیر مستقیم نادرست است؟

(۱) اگر متحرک تغییر جهت دهد، حتماً توقف کرده است. (۲) اگر متحرک توقف کرده باشد، لزوماً تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ با توجه به توضیحات مطرح شده در تذکر فوق، عبارت (۱) صحیح است.

با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، در لحظه $t = 6s$ نه سرعت متحرک صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح شده در خلاصه نکات (۷) بررسی کنید.

شتاب متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه (t_1, t_2) ، به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود که در آن \vec{v}_1 ، سرعت متحرک در لحظه t_1 و \vec{v}_2 ، سرعت متحرک در لحظه t_2 است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

تذکره ۱ همان‌طور که دیده می‌شود شتاب متوسط (\vec{a}_{av}) ، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta \vec{v})$ است. یکای SI شتاب متوسط، متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است.

تذکره ۲ در حالت یک‌بعدی (مثلاً هنگامی که متحرک بر روی محور X حرکت می‌کند)، برای محاسبه Δv ، کفایت v_1 و v_2 را با در نظر گرفتن علامت محاسبه کرده و $v_2 - v_1$ را به صورت جبری به دست آوریم.

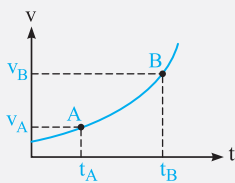
تمرین ۱ معادله سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، در SI از رابطه $v = 3t^2 - 4$ به دست می‌آید. شتاب متوسط متحرک در ثانیه دوم حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

پاسخ منظور از ثانیه دوم حرکت، یعنی $1s < t < 2s$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = 3t^2 - 4 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 3 \times 1^2 - 4 = -1 m/s \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = 3 \times 2^2 - 4 = 8 m/s \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8 - (-1)}{2 - 1} = 9 m/s^2$$

۲ محاسبه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان

نکات این قسمت، قبلی شبیه محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان ...

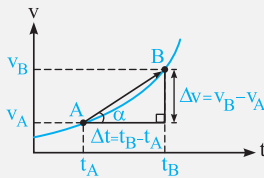


فرض کنید نمودار سرعت - زمان حرکت یک متحرک داده‌شده و شتاب متوسط بین دو لحظه t_A و t_B از آن خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبه شتاب متوسط، از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول (نمودارخوانی): ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص می‌کنیم. سپس سرعت متحرک در نقاط A و B را به دست آورده و به صورت زیر عمل می‌کنیم: شتاب متوسط بین A و B

$$a_{avA,B} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$$

روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه A و B از حرکت است.



$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهد شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کند، روش بسیار مناسبی است.

تو ادامه کار با به تمرین توپ، این موضوع رو بهتر می‌فهمیم ...

تمرین ۲ نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازه زمانی ۱ تا ۳ ثانیه در SI برابر است با:

(ریاضی دافل ۱۴)

۱) صفر	۲) -۱۰	۳) ۵	۴) ۱۰
--------	--------	------	-------

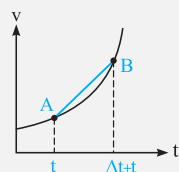
پاسخ نمودار داده‌شده یک نمودار سرعت - زمان است و برای محاسبه a_{av} در آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

با توجه به نمودار، سرعت لحظه‌ای در $t = 1s$ و $t = 3s$ به ترتیب برابر $10 m/s$ و $-10 m/s$ است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

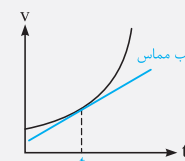
$$\begin{cases} t_A = 1s \Rightarrow v_A = 10 m/s \\ t_B = 3s \Rightarrow v_B = -10 m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{-10 - 10}{3 - 1} = -10 m/s^2$$

۳ تحلیل کیفی شتاب از روی نمودار سرعت - زمان

هالا بریم به کم روی شتاب لحظه‌ای هم کار کنیم ...



Δt به سمت صفر میل کند.



شتاب در لحظه $t =$ شیب مماس

می‌دانیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود، نقاط A و B عملاً تبدیل به یک نقطه شده و شیب خط واصل بین دو نقطه A و B با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه B برابر است. شیب مماس ترسیمی بر نمودار، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظه t است.

نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به مماس‌های رسم‌شده در شکل مقابل، شتاب متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قله نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد.

(قرار دادن فلش‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است.)

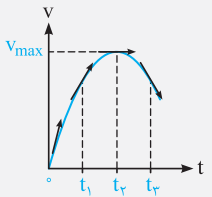
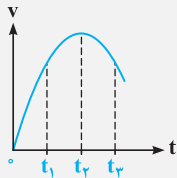
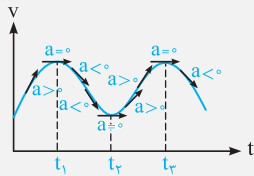
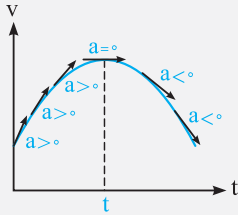
۲ در نمودار داده‌شده، قله نمودار سرعت - زمان، لحظه تغییر جهت بردار شتاب است زیرا شتاب در قله صفر بوده، قبل از آن مثبت و بعد از آن منفی است.

۳ به طور کلی در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

(دقت شود که قرار دادن جهت برای مماس‌ها، به منظور درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.) (در t_1 ، t_2 و t_3 شتاب تغییر جهت می‌دهد.)

👉 **تو ادامه با دو تا تمرین توپ، این موضوع رو کامل یاد می‌گیریم ...**

تمرین ۳ شکل مقابل نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در کدام لحظه، شتاب متحرک مثبت و بیشینه است؟

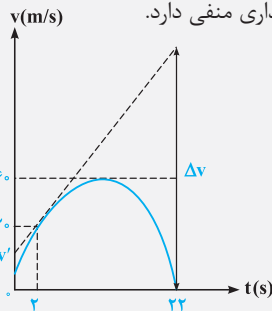


- | | |
|---------------|-----------|
| t_2 (۲) | t_3 (۱) |
| مبدأ زمان (۴) | t_1 (۳) |

پاسخ می‌دانیم شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به این موضوع ابتدا باید در تمام لحظات مطرح‌شده در گزینه‌ها، مماس رسم شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از $t = 0$ تا t_1 ، زاویه مماس با محور افق دائماً در حال کاهش بوده و شتاب متحرک دائماً کاهش می‌یابد تا در t_2 صفر می‌شود. پس از t_2 ، شیب نمودار (شتاب) منفی شده و اندازه آن تا t_3 در حال افزایش است. بنابراین در لحظه $t = 0$ ، شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان مقدار ماکزیمم و مثبت را داشته و در نتیجه در این لحظه شتاب متحرک مثبت و بیشینه است و گزینه (۴) صحیح است.

دقت: در این سؤال در لحظه t_2 ، سرعت متحرک ماکزیمم و شتاب آن صفر است و در لحظه t_3 شتاب متحرک مقداری منفی دارد.

تمرین ۴ نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل می‌باشد. اگر در لحظه $t = 2s$ ، بردار شتاب متحرک در SI برابر $+5 \vec{1}$ باشد، مقادیر v' و Δv به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟



- | | |
|---------------|---------------|
| $120, 5$ (۲) | $100, 5$ (۱) |
| $120, 10$ (۴) | $100, 10$ (۳) |

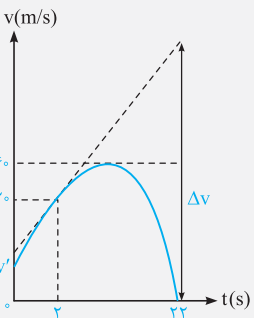
پاسخ همان‌طور که می‌دانیم، شیب مماس ترسیمی بر نمودار در سرعت- زمان، معادل با شتاب حرکت متحرک است. در این شیب مماس ترسیم شده بر نمودار سرعت - زمان لحظه $t = 2s$ برابر ۵ واحد است. بنابراین در ادامه با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{20 - v'}{2 - 0} = 5 \Rightarrow v' = 10 \text{ m/s}$$

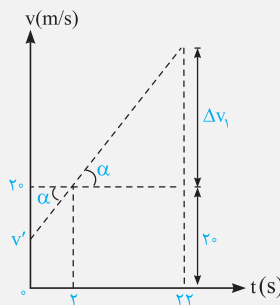
$$\tan \alpha = \frac{\Delta v_1}{22 - 2} = 5 \Rightarrow \Delta v_1 = 100 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \Delta v_1 + 20 \text{ m/s} = 120 \text{ m/s}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



⇒



شتاب متوسط با بردار $\Delta \vec{v}$ هم‌جهت است نه بردار \vec{v} و گزینه (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به خلاصه نکات فوق، صحیح می‌باشند.

۴ ۸۰ با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۸)، در گزینه (۴) اندازه سرعت ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ بوده و شتاب متوسط از لحظه t_1 تا t_2 برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{v}_2 = \vec{v}_1} \vec{a}_{av} = 0$$

۲ ۸۱ با توجه به رابطه شتاب متوسط $(\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t})$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 3s \rightarrow \vec{v}_1 = 6\vec{i} \\ t_2 = 6s \rightarrow \vec{v}_2 = -6\vec{i} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{(-6) - (6)}{6 - 3} \vec{i} = -\frac{12}{3} \vec{i} = -4\vec{i}$$

۱ ۸۲ ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm/s داده شده‌اند را برحسب m/s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$ ، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 1cm/s = 0.01m/s, v_2 = 99cm/s = 0.99m/s \\ \Delta t = 0.5s \end{array} \right. \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{0.99 - 0.01}{0.5} = \frac{0.98}{0.5} = \frac{1}{2} = 0.5m/s^2$$

یادآوری

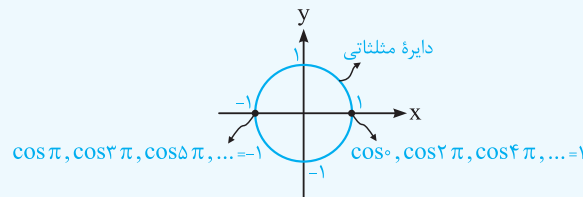
$$1cm/s = 0.01m/s \quad یا \quad 1m/s = 100cm/s$$

۳ ۸۳ سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازه زمانی داده شده را به دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 0.3\pi \cos(10\pi) = 0.3\pi \\ t_2 = 5s \rightarrow v_2 = 0.3\pi \cos(25\pi) = 0.3\pi \cos(\pi) = -0.3\pi \end{array} \right.$$

$$|a_{av}| = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{|-0.3\pi - (0.3\pi)|}{5 - 2} = 0.2\pi m/s^2$$

یادآوری



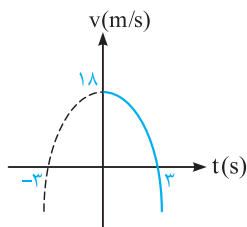
۳ ۸۴ گام اول: با توجه به بردار سرعت داده شده در پایان ثانیه دوم ($t = 2s$)، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$v = 2t^2 + bt + 6 \xrightarrow[t=2s]{v=20m/s} 2 \times (2)^2 + b \times 2 + 6 = 20 \Rightarrow b = 3$$

گام دوم: حال برای محاسبه شتاب متوسط در ثانیه دوم ($1s \leq t \leq 2s$)، به راحتی می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 1s \rightarrow v_1 = 2 \times (1)^2 + 3 \times 1 + 6 = 11m/s \\ t_2 = 2s \rightarrow v_2 = 20m/s \end{array} \right. \Rightarrow |a_{av}| = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{20 - 11}{2 - 1} = 9m/s^2$$

۳ ۸۵ ابتدا ریشه‌های معادله موردنظر را به دست می‌آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می‌کنیم:

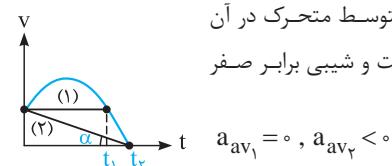


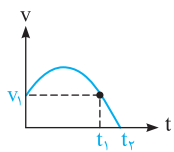
$$v = -2t^2 + 18 \Rightarrow \begin{cases} -2t^2 + 18 = 0 \Rightarrow t = 3s \quad یا \quad t = -3 \\ t = 0 \Rightarrow v = 18m/s \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3s$ ، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. اندازه شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$|a_{av}| = \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{|0 - 18|}{3} = 6m/s^2$$

۲ ۸۶ همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می‌باشد. در شکل رویه‌رو شیب خط (۱) برابر a_{av1} و شیب خط (۲) برابر a_{av2} است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:





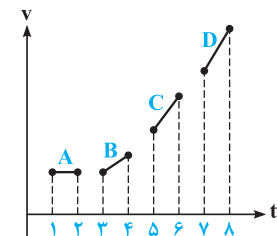
روش دیگر: با توجه به شکل مقابل، متحرک در لحظه صفر دارای سرعت v_1 و در لحظه t_1 نیز دارای همان سرعت می‌باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

$$a_{av_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=0} a_{av_1} = 0$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظه t_2 برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازه صفر تا t_2 برابر است با:

$$a_{av_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{t_2 - 0} < 0$$

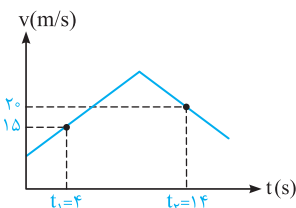
تمرین در شکل مقابل شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟



$$a_{av_A} = 0 < a_{av_B} < a_{av_C} < a_{av_D}$$

پاسخ

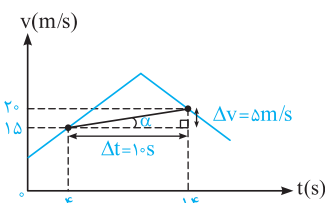
۱ ۸۷ روش اول (نمودارخوانی): با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow v_1 = 15 \text{ m/s} \\ t_2 = 14s \rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 15}{14 - 4}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

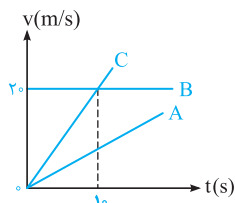
روش دوم (استفاده از شیب نمودار): شتاب متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



$$|\vec{a}_{av}| = \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

دقت: با توجه به شیب پاره‌خط AB، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

۲ ۸۸ برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



(۱) هر سه نمودار سرعت - زمان، به صورت خطی می‌باشند و شیب آن‌ها ثابت است، بنابراین شتاب هر سه متحرک در طول حرکتشان ثابت است.

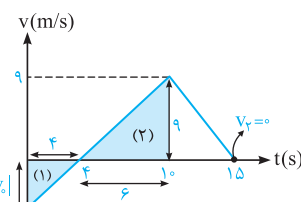
$$C \text{ شیب} > A \text{ شیب} > B \text{ شیب} = 0 \Rightarrow a_C > a_A > a_B$$

(۲) با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطه فوق در هر بازه زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در $10^{\text{ ثانیه}}$ اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C > (a_{av})_A > (a_{av})_B = 0$$

۱ ۸۹ برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطه $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

استفاده می‌کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظه $t = 0$ را به دست آوریم:



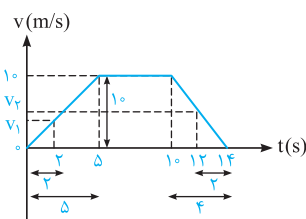
$$(۲) \text{ و } (۱) \text{ تشابه مثلث‌های } \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{|v_0|}{9} \Rightarrow |v_0| = 6 \text{ m/s}$$

همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -6 \text{ m/s} \\ t_2 = 15s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = 0.4 \text{ m/s}^2$$

۲ ۹۰ برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 12s$ ، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای

این بازه زمانی به کمک تشابه به دست می‌آوریم:

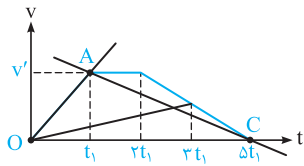


$$t_1 = 2s \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت چپ شکل})$$

$$t_2 = 12s \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14 - 10}{14 - 12} \Rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت راست شکل})$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$

۱۹۱ می‌دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی را می‌دهد. بنابراین شتاب



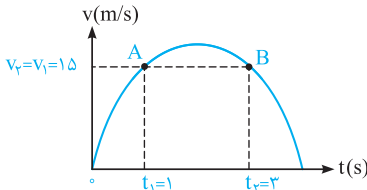
متوسط در بازه‌ای بیشتر است که شیب خط واصل بین نقطه ابتدا و انتهای آن بازه بیشتر باشد.

با توجه به شکل روبه‌رو در بازه زمانی صفر تا t_1 ، اندازه شتاب متوسط بزرگ‌تر از سایر بازه‌هاست، زیرا شیب خط OA بزرگ‌تر از شیب در سایر بازه‌ها است.

$$\begin{cases} \text{OA شیب خط} = a_{avOA} = \frac{v'}{t_1} \\ \text{AC شیب خط} = a_{avAC} = -\frac{v'}{\Delta t_1} \end{cases} \Rightarrow |a_{avOA}| > |a_{avAC}|$$

۱۹۲ با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، سرعت متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 یکسان بوده و با توجه

به تعریف شتاب متوسط $(|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t})$ ، شتاب متوسط در این بازه زمانی صفر است.

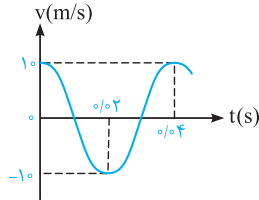


$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow{v_2=v_1=1.5 \text{ m/s}} |\vec{a}_{av}| = \frac{1.5 - 1.5}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$

دقت: می‌دانیم شیب خط AB نیز برابر شتاب متوسط متحرک از t_1 تا t_2 است، با توجه به صفر بودن شیب این خط، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه زمانی صفر است.

۴۹۳ خواسته اول: محاسبه شتاب متوسط:

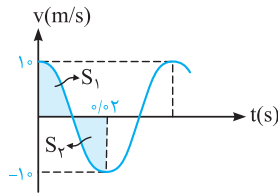
با توجه به نمودار مقابل، شتاب متوسط در بازه (۰ تا ۰/۰۲s) برابر است با:



$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow v_0 = 1 \text{ m/s} \\ t_1 = 0.02 \text{ s} \rightarrow v_1 = -1 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{-1 - 1}{0.02 - 0} = -100 \text{ m/s}^2$$

خواسته دوم: محاسبه سرعت متوسط:

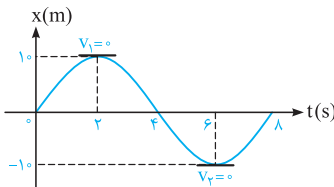
برای محاسبه سرعت متوسط در بازه زمانی داده‌شده، ابتدا جابه‌جایی متحرک را به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان به دست می‌آوریم. در نمودار کسینوسی داده‌شده، مساحت S_1 با مساحت S_2 با هم برابر است. بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی ۰ تا ۰/۰۲s برابر صفر است.



$$|S_1| = |S_2| \rightarrow \Delta x = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

۲۹۴ طبق تعریف شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1})$ ، کافی است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست بیاوریم.

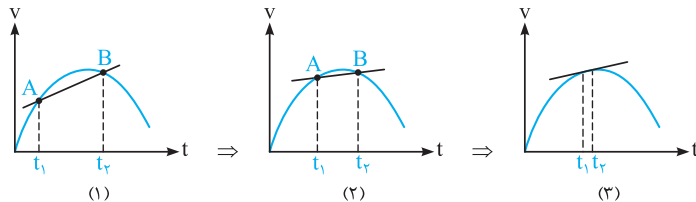


در شکل مشاهده می‌کنید که شیب مماس‌های رسم‌شده در لحظات فوق برابر صفر است، بنابراین سرعت لحظه‌ای در این نقاط صفر است و در نتیجه شتاب متوسط نیز در این بازه صفر است.

$$a_{av} = \frac{0 - 0}{6 - 2} = 0$$

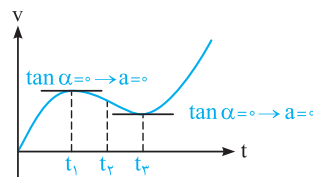
۴۹۵ با توجه به مطالب ذکر شده در خلاصه نکات (۸)، شیب خط موردنظر شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

به شکل‌های زیر توجه کنید:



همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شیب پاره‌خط AB به سمت مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است.

۲۹۶ در زمان‌هایی که شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان صفر باشد (از جمله نقاط ماکزیمم و



مینیمم نسبی نمودار)، شتاب لحظه‌ای متحرک برابر صفر است. بنابراین در لحظات t_1 و t_2 ، شتاب متحرک برابر صفر است.

۴۹۷ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۸)، گزینه (۴) درست است.

۲۹۸ همان طور که می‌دانیم، در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. با توجه به این موضوع در نمودار داده‌شده، شتاب متحرک در لحظات t_1 ، t_2 و t_3 تغییر جهت می‌دهد.

هم‌چنین می‌دانیم در نقاطی که سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (نمودار سرعت - زمان محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت می‌دهد) متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین متحرک در لحظات $10s$ و $5s$ تغییر جهت داده است.

۳۹۹ ابتدا باید دقت شود که نمودار سرعت - زمان متحرک داده‌شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

(۱) از لحظه صفر تا t_2 شیب نمودار سرعت - زمان منفی بوده و در نتیجه شتاب متحرک در این بازه زمانی مقداری منفی است.

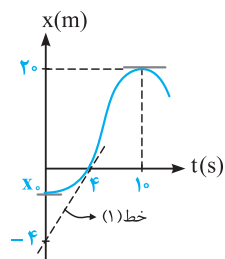
(۲) از لحظه t_1 تا t_3 نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان (t) است و سرعت متحرک در این بازه زمانی منفی است.

دقت: دقت شود از لحظه $t = 0$ تا لحظه t_2 ، شیب پاره‌خط AB همواره منفی است، یعنی برخورد این پاره‌خط با محور زمان، تغییری در منفی بودن علامت شتاب ایجاد نمی‌کند (چرا؟).

۴۱۰۰ با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۸)، گزینه (۴) صحیح است.

۴۱۰۱ با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی بر نمودار، سرعت در لحظات $t_1 = 0$ ، $t_2 = 4s$ و $t_3 = 10s$ عبارت است از:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = (1) \text{ شیب خط} = \frac{4}{4} = 1 \text{ m/s} \\ v_3 = 0 \end{cases}$$



شتاب متوسط در چهار ثانیه اول: $a_{av1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{1 - 0}{4 - 0} = 0.25 \text{ m/s}^2 = 25 \text{ cm/s}^2$

شتاب متوسط در ده ثانیه اول: $a_{av2} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \frac{0 - 0}{10 - 0} = 0$

با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول حرکت، 25 cm/s^2 بیشتر از ۱۰ ثانیه اول حرکت است.

۱۱۰۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ جابه‌جایی، مسافت طی‌شده، \vec{v}_{av} ، s_{av} در حرکت یک متحرک در صفحه (تست‌های ۱۰۲ تا ۱۱۳)

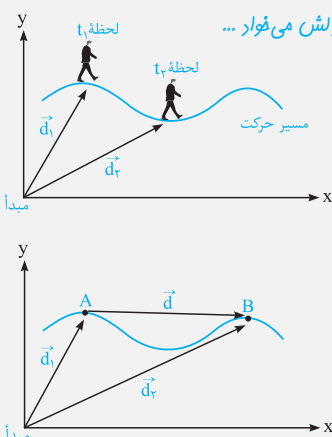
تو آفر این قسمت از فصل، می‌فوییم به کمی هم روی فضای دو بعری و سه بعری کار کنیم. البته در هری که کتاب دلش می‌فوار ...

۱- بردار مکان

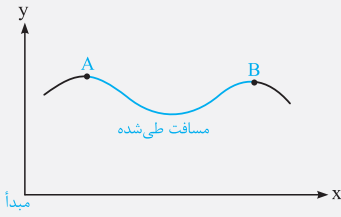
در شکل مقابل متحرکی (مثلاً یک کوه نورد) بر روی مسیر نشان داده‌شده (مثلاً یک کوه) در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل شود. به‌طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.

۲- بردار تغییر مکان (جابه‌جایی)

متحرک نشان داده‌شده در شکل مقابل، در بازه زمانی t_1 تا t_2 از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.



۳- مسافت طی شده



متحرک فوق، از نقطه A تا نقطه B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ آبی نشان داده شده است). این طول مسافت طی شده نام دارد.

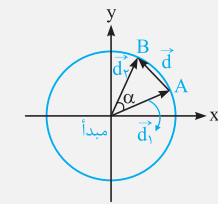
توی درس ریاضی، با فرمول‌های تفاضل دو تا بردار آشنا میشوید. ما هم بدمون نیومد این‌ها به سری به این موضوع بزنیم و با بردار مکان قاطیش کنیم. البته کتاب درسی قصه نزاره وارد این بحث بشه. به قاطر همین هم، ما این بحث رو به صورت میزا، اونم فقط برای بچه درسونو آوردیمش ...

نکات مهم و کاربردی

۱) برای به دست آوردن اندازه بردار جابه‌جایی $|\vec{d}|$ ، می‌توان از رابطه زیر نیز کمک گرفت:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 - 2d_x d_y \cos \alpha}$$

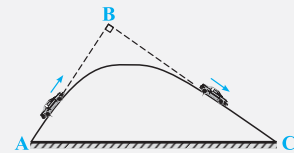
۲) حالت خاص: اگر متحرک بر روی دایره در حال حرکت باشد، اندازه بردار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازه بردار جابه‌جایی آن برابر است با:



$$|\vec{d}| = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

تقریباً در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می‌آید. در مسیر نشان داده شده، جابه‌جایی متحرک از A تا C چه قدر است؟ ($AB = 300 \text{ m}$, $BC = 400 \text{ m}$)

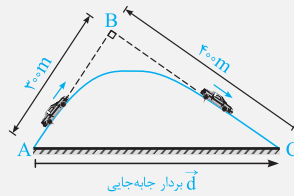
- (۱) ۵۰۰ متر
(۲) ۷۰۰ متر (تألیفی)
(۳) کم‌تر از ۵۰۰ متر
(۴) بیشتر از ۵۰۰ متر



پاسخ همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، متحرک در طول حرکت خود از نقطه A (ابتدای مسیر) به نقطه C (انتهای مسیر) رفته و جابه‌جایی آن برابر بردار AC است:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 100\sqrt{3^2 + 4^2} = 500 \text{ m}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

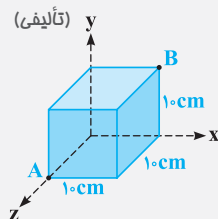


دقت: توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی شده (طول خط آبی‌رنگ) از یک طرف بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کم‌تر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

تذکره در صورتی که طول، عرض و ارتفاع یک متحرک در فضای سه‌بعدی تغییر کرده و متحرک از نقطه A به نقطه B منتقل شود، اندازه بردار جابه‌جایی آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A : \begin{matrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{matrix} \rightarrow B : \begin{matrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{matrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تقریباً در شکل زیر، متحرکی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی‌متر، خود را از نقطه A به نقطه B می‌رساند. اندازه جابه‌جایی متحرک در این تغییر مکان چند سانتی‌متر است؟



(۱) $10\sqrt{3}$

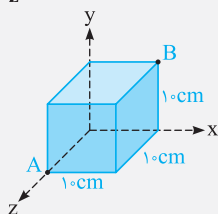
(۲) $10(1 + \sqrt{2})$

(۳) $10\sqrt{2}$

(۴) $5\sqrt{3}$

پاسخ برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می‌کنیم:

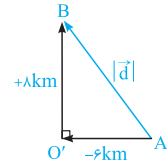
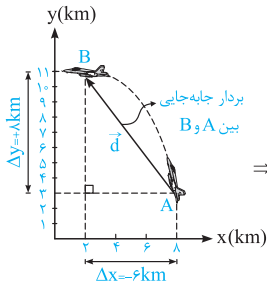
روش اول: با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه شده در قبل از سؤال داریم:



$$A : \begin{matrix} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 10 \text{ cm} \end{matrix} \rightarrow B : \begin{matrix} x_B = 10 \text{ cm} \\ y_B = 10 \text{ cm} \\ z_B = 0 \end{matrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(10 - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (0 - 10)^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

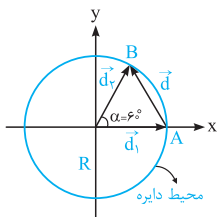
روش دوم: همان‌طور که در شکل فوق می‌بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه‌جایی برابر اندازه AB است، پس کافی است اندازه قطر مکعب را بیابیم. از طرفی اندازه یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با $d = a\sqrt{3}$ است و داریم:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است. $|\vec{d}| = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$: اندازه جابه‌جایی $a = 10 \text{ cm}$



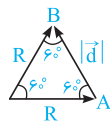
می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطه ابتدای حرکت (A) به نقطه انتهای حرکت (B) متصل می‌شود. در این سؤال برای محاسبه اندازه جابه‌جایی با کمک قضیه فیثاغورث داریم:

$$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \text{ km}$$



۱۱۰۳ فرض کنید که متحرک بر روی محیط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از A به B منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی

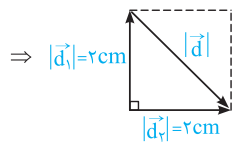
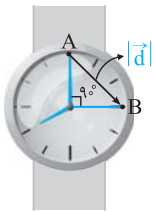
متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است.



بردار جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای آن وصل می‌کند. مثلث روبه‌رو یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازه جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟). $|\vec{d}| = R$

از سوی دیگر، متحرک ۶۰ درجه بر روی محیط دایره چرخیده و $\frac{1}{6}$ آن را پیموده است (۶۰ درجه، $\frac{1}{6}$ برابر ۳۶۰ درجه است). با توجه به این موضوع، مسافت طی شده توسط آن برابر است با:

$$\text{مسافت طی شده} = \frac{1}{6} \times \pi R = \frac{\pi R}{6} \Rightarrow \frac{\text{اندازه جابه‌جایی}}{\text{مسافت طی شده}} = \frac{R}{\frac{\pi R}{6}} = \frac{6}{\pi}$$



۱۱۰۴ عقربه دقیقه‌شمار، در هر ۶۰ دقیقه یک دور می‌چرخد. بنابراین در طول ۱۵ دقیقه به

اندازه ۹۰ درجه ($\frac{1}{4}$ دور) چرخیده و از نقطه‌ای مانند A به B می‌رود. بنابراین با توجه به رابطه فیثاغورث، مقدار جابه‌جایی برابر است با:

$$|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

۲۱۰۵ متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به‌طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطه شروع حرکت می‌رسد،

بنابراین اندازه جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی شده، ۱۰ برابر محیط دایره است.

$$l = 10 \times (2\pi R) \approx 10 \times 2 \times 3 \times 5 = 300 \text{ m}$$

۳۱۰۶ متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی که مسافت طی شده توسط متحرک ۳a باشد، ثابت می‌شود:

(۱) بیشترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسافتی برابر ۳a را بپیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطه شروع را به نقطه پایان متصل می‌کند.

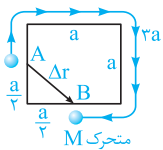
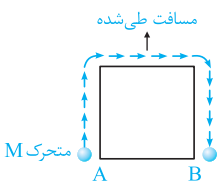
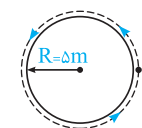
(۲) کم‌ترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کند. در

این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است.

$$\begin{cases} |\vec{d}|_{\min} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ |\vec{d}|_{\min} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

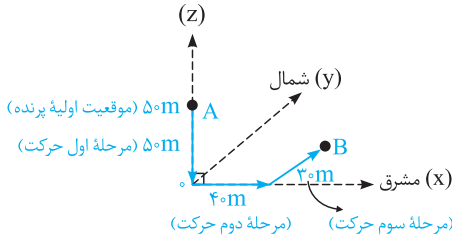
دقت: در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر

طراح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.



۱۱۰۷ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۹)، گزینه (۱) درست است.

۲۱۰۸ برای پاسخ به این تست مفهومی، شکل زیر را در نظر بگیرید. با توجه به حرکت‌های اشاره شده برای پرنده در صورت سؤال، موقعیت آن از A به B رسیده است:



A موقعیت اولیه در $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = +5)$

B موقعیت ثانویه در $(x_2 = +4, y_2 = +3, z_2 = 0)$

بردار جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AB است و داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2} \text{ m}$$

۲۱۰۹ همان‌طور که می‌دانید، چون زمان هر دو حرکت یکسان است، اندازه سرعت متوسط به اندازه جابه‌جایی جسم بستگی دارد. چون هر دو مسیر نقطه شروع و پایان یکسانی دارند، اندازه جابه‌جایی و اندازه سرعت متوسط آن‌ها یکسان است.

$$(v_{av})_1 = (v_{av})_2$$

از طرف دیگر در یک بازه زمانی برابر، تندی متوسط به مسافت طی شده بستگی دارد. چون در یک مدت زمان یکسان، مسافت طی شده در مسیر (۲) بیشتر از مسافت طی شده در مسیر (۱) است، پس تندی متوسط در مسیر (۲) بیشتر است.

$$(s_{av})_2 > (s_{av})_1$$

۲۱۱۰ می‌دانیم برای محاسبه اندازه جابه‌جایی، نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای حرکت متصل کرده و طول آن پاره‌خط را اندازه می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل، اندازه جابه‌جایی برابر AC بوده و مقدار آن با کمک قضیه فیثاغورث برابر است با:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 3^2 + 4^2 \xrightarrow{3, 4 \rightarrow 5} AC = 5 \text{ m}$$

اعداد فیثاغورثی هستند.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان جابه‌جایی}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m/s}$$

در ادامه برای به دست آوردن تندی متوسط متحرک، باید مسافت طی شده توسط متحرک را به دست آورده و بر زمان حرکت تقسیم کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$l = AB + BC = 3 + 4 = 7 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ m/s}$$

$$\vec{d} = AB = 2R \text{ قطر دایره}$$

$$l = \frac{\text{محیط دایره}}{2} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}} = \frac{l}{|\vec{d}|} = \frac{\pi R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

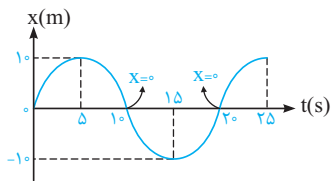
۱۱۱۲ در سؤال (۱۰۳)، نسبت اندازه جابه‌جایی به مسافت طی شده توسط این متحرک را به دست آوردیم که برابر $\frac{3}{\pi}$ بود. طبق روابط $|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \text{ و } \frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{l} = \frac{3}{\pi}$$

۳۱۱۳ همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرکی بر روی یک خط راست، بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی و مسافت آن یکسان بوده و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان می‌شود.

در این سؤال اگر به مسیرهای رسم شده دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در نمودار گزینه (۳)، متحرک بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و ممکن است در آن تندی متوسط با سرعت متوسط برابر شود.

۳۱۱۴ معادله مکان داده شده به صورت سینوسی است. برای مشخص کردن جهت بردار مکان در این سؤال، مناسبترین روش رسم نمودار مکان - زمان است. برای این سؤال، ابتدا محل‌های برخورد نمودار با محور t را به دست می‌آوریم:



$$x = 1.0 \sin \frac{\pi}{1.0} t \xrightarrow{x=0} \begin{cases} \frac{\pi}{1.0} t = \pi \Rightarrow t = 1.0 \text{ s} \\ \frac{\pi}{1.0} t = 2\pi \Rightarrow t = 2.0 \text{ s} \\ \vdots \end{cases}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در بازه زمانی $1.0 \text{ s} < t < 2.0 \text{ s}$ (یعنی ۵ ثانیه سوم و ۵ ثانیه چهارم حرکت)، متحرک در مکان‌های منفی قرار داشته و بردار مکان جسم در خلاف جهت محور x بوده و گزینه (۳) صحیح است.

۴۱۱۵ برای یافتن لحظاتی که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد، کافی است معادله مکان - زمان مربوط به متحرک را تعیین علامت کنیم:

ریشه مضاعف $X = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$ معادله مکان

t	0	1	∞
X	1	0	1

ملاحظه می‌کنید مکان متحرک در لحظه $t = 1 \text{ s}$ صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک همواره در سمت مثبت محور x قرار دارد. بنابراین بردار مکان این متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

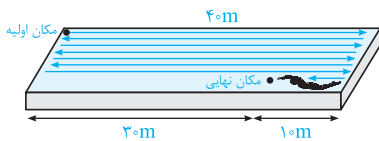
تذکر

بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از یک سمت مبدأ مختصات روی محور x ، خود را به سمت دیگر آن برساند.

۲۱۱۶ ابتدا عدد ۲۹۰ را به صورت زیر می‌نویسیم تا مشخص شود شناگر چند بار طول استخر را طی کرده است:

$$290 = 280 + 10 = 7(40) + 10$$

بنابراین شناگر هفت بار طول استخر را طی کرده و 10 m دیگر نیز شنا می‌کند. به شکل زیر دقت کنید:



همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، در این حالت فاصله مکان نهایی شناگر تا مکان اولیه آن برابر 30 m می‌شود. بنابراین جابه‌جایی متحرک برابر $30 \text{ m} = 0.03 \text{ km}$ بوده و اندازه سرعت متوسط شناگر در مدت زمان 0.5 ساعت برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{0.03 \text{ km}}{0.5 \text{ h}} = \frac{3}{50} \text{ km/h} = 0.06 \text{ km/h}$$

۳۱۱۷ بهترین روش برای حل این‌گونه مسائل، رسم نمودار مکان - زمان حرکت است:

همان‌طور که در نمودار رسم شده مشاهده می‌کنید، در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 1 \text{ s}$ اندازه جابه‌جایی متحرک برابر صفر و اندازه مسافت طی شده توسط آن برابر 12 m می‌باشد (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = 0 \quad \text{و} \quad s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{12}{1} = 12 \text{ m/s}$$

۱۱۱۸ ابتدا به جدول ارائه شده در صورت سؤال توجه کنید:

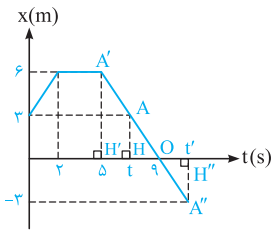
تندی متوسط ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	مکان پایانی (m)	مکان آغازین (m)	
۱/۵	$-8 \vec{i}$	$-2 \vec{i}$	متحرک A
۲	$+4 \vec{i}$	$-2 \vec{i}$	متحرک B

با توجه به این جدول داریم:

$$(\vec{v}_{av})_A = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-8 \vec{i} - (-2 \vec{i})}{4} = -1.5 \vec{i} \quad \text{طبق صورت سؤال} \quad |(\vec{v}_{av})_A| = (s_{av})_A = 1.5 \text{ m/s}$$

$$(\vec{v}_{av})_B = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{+4 \vec{i} - (-2 \vec{i})}{4} = 1.5 \vec{i} \quad \text{طبق صورت سؤال} \quad |(\vec{v}_{av})_B| < (s_{av})_A = 2 \text{ m/s}$$

از طرفی می‌دانیم برابر بودن تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط، نشان‌دهنده آن است که متحرک در طول حرکت، تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع یعنی متحرک A در طول حرکتش، تغییر جهت نمی‌دهد و متحرک B در طول حرکتش، تغییر جهت می‌دهد.

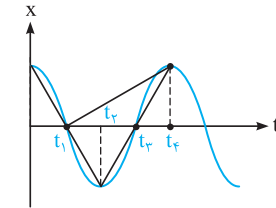


۳۱۱۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا باید زمانی را که متحرک برای دومین بار به مکان $x = 3 \text{ m}$ می‌رسد،

به صورت زیر به دست آوریم:

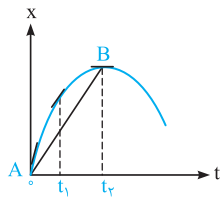
$$\Delta OAH \sim \Delta OA'H' \Rightarrow \frac{AH}{9-t} = \frac{A'H'}{4} \Rightarrow \frac{3}{9-t} = \frac{6}{4} \Rightarrow t = 7 \text{ s}$$

در ادامه با توجه به این‌که دو مثلث OAH و $OA'H'$ یکسان هستند، مقدار t' برابر 11 s به دست می‌آید (چرا؟). در پایان می‌توانیم بگوییم در بازه‌های زمانی (0 تا 2 s) و (7 s تا 11 s) متحرک در حال دور شدن از مکان اولیه خود می‌باشد. بنابراین در مجموع متحرک به مدت 6 ثانیه در حال دور شدن از مکان اولیه‌اش می‌باشد.



۴۱۲۰ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، معرف سرعت متوسط در بازه زمانی موردنظر است. ابتدا مطابق شکل مقابل در بازه‌های زمانی موردنظر خط واصل را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، اندازه شیب خط مماس در سه بازه (0 تا t_1), (صفر تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان است. اما در بازه (t_1 تا t_2) شیب خط مماس و در نتیجه اندازه سرعت متوسط متفاوت است. برای اطمینان بیشتر می‌توانید اندازه سرعت متوسط را در هر بازه محاسبه کنید.



۳۱۲۱ مطابق شکل مقابل، بین لحظه $t = 0$ تا لحظه تغییر جهت متحرک (یعنی t_2), پاره‌خطی رسم می‌کنیم.

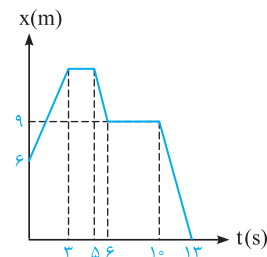
شیب این پاره‌خط بیانگر اندازه سرعت متوسط متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه تغییر جهت است. علاوه بر این در لحظات صفر، t_1 و t_2 نیز مماس‌هایی بر نمودار رسم می‌کنیم. شیب این مماس‌ها معرف تندی متحرک در لحظات مختلف است. همان‌طور که می‌بینید، در شروع حرکت شیب خط مماس بیشتر از شیب پاره‌خط AB است و با گذشت زمان شیب خط مماس برابر شیب خط AB شده و در نزدیکی t_2 ، شیب خط مماس کم‌تر از شیب خط AB می‌شود. بنابراین تندی حرکت در ابتدا بیشتر از v_{av} بوده، سپس برابر v_{av} شده و در نهایت کم‌تر از v_{av} می‌شود.

۲۱۲۲ به موارد زیر توجه کنید:

(۱) طبق رابطه $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد. در هر بازه زمانی که متحرک توقف کرده باشد، مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت نیز صفر است.

(۲) در نمودار رسم شده در دو بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ و $t_3 = 6 \text{ s}$ تا $t_4 = 10 \text{ s}$ متحرک ایستاده است.

(۳) چون در صورت سؤال طول بزرگ‌ترین بازه زمانی موردنظر است، بنابراین بازه موردنظر $t_3 = 6 \text{ s}$ تا $t_4 = 10 \text{ s}$ می‌باشد که به مدت 4 s متحرک توقف داشته است.

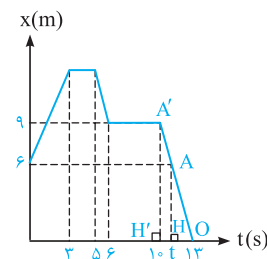


۳۱۲۳ برای صفر شدن سرعت متوسط، باید جابه‌جایی متحرک صفر شود. با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده،

بزرگ‌ترین بازه زمانی که سرعت متوسط صفر می‌شود، مربوط به لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای است که متحرک دوباره به نقطه $x = 6 \text{ m}$ می‌رسد. برای به دست آوردن لحظه موردنظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

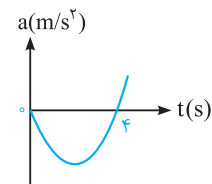
$$\Delta OAH \sim \Delta OA'H' \Rightarrow \frac{AH}{13-t} = \frac{OH}{9} \Rightarrow \frac{6}{13-t} = \frac{3}{9} \Rightarrow t = 11 \text{ s}$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه زمانی که اندازه سرعت متوسط صفر می‌شود، برابر 11 ثانیه است و با توجه به پاسخ سؤال قبل، بزرگ‌ترین بازه زمانی که تندی متوسط حرکت صفر می‌شود برابر 4 ثانیه است و نسبت آن‌ها $\frac{11}{4}$ می‌شود.



۱۱۲۴ عبارت (ج) هرگز نمی‌تواند رخ دهد. طبق رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ، اگر سرعت جسمی ثابت باشد، تغییرات آن صفر بوده و شتاب حرکت صفر می‌شود.

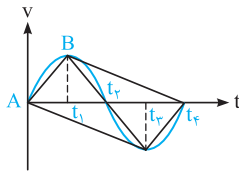
از سوی دیگر سایر عبارات مطرح شده می‌توانند رخ دهند. برای درک بهتر سعی کنید برای هر یک مثالی را پیدا کنید.



۲۱۲۵ ابتدا ریشه‌های سهمی موردنظر را به دست می‌آوریم و سپس نمودار شتاب - زمان را رسم می‌کنیم:

$$a = t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \text{ s} \end{cases}$$

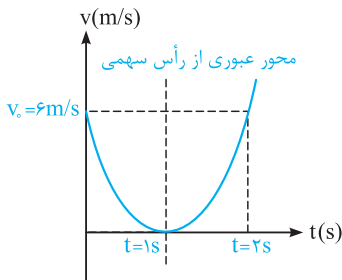
دقت کنید که سهمی موردنظر از مبدأ شروع می‌شود و با توجه به این‌که ضریب t^2 مثبت است، سهمی رو به بالا می‌باشد. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید در لحظه $t = 4 \text{ s}$ ، اندازه شتاب حرکت صفر شده و علامت شتاب تغییر می‌کند، بنابراین در این لحظه شتاب تغییر جهت می‌دهد. از طرفی با توجه به رابطه $F = ma$ ، می‌دانیم که نیروی وارد بر متحرک همواره هم جهت با شتاب بوده و در نتیجه نیروی وارد بر متحرک نیز در پایان ثانیه چهارم تغییر جهت می‌دهد.



همان طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب متوسط در بازه زمانی موردنظر است. ابتدا در هریک از بازه‌های زمانی موردنظر، خط واصل را رسم می‌کنیم (همه خطوط را در یک شکل ترسیم کرده‌ایم).

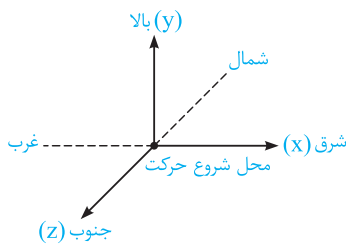
در صورت سؤال ذکر شده است که در بازه زمانی t_1 تا t_2 شتاب متحرک برابر \vec{a} است و ما به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که شتاب متحرک $-\vec{a}$ باشد. بنابراین باید اندازه شیب خط موردنظر برابر اندازه شیب خط AB ولی با علامت منفی باشد. اگر به نمودار دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در بازه t_1 تا t_2 این اتفاق رخ می‌دهد.

همان طور که می‌دانید، سهمی نسبت به محور عبوری از رأس آن، دارای تقارن است. در دو ثانیه اول حرکت که یک بازه متقارن نسبت به محور عبوری از رأس سهمی است، سرعت در ابتدا و انتهای بازه زمانی برابر بوده و در نتیجه شتاب متوسط در این بازه زمانی برابر صفر است.



$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 6 \frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \rightarrow v_2 = 6 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0$$

دقت: در این سؤال، به طور کلی در بازه زمانی t_1 و t_2 ، به شرطی که $t = 1s$ در وسط آن بازه قرار گیرد ($\frac{t_1 + t_2}{2} = 1s$)، شتاب متوسط برابر صفر می‌شود. به عنوان مثال از $t_1 = 0.75s$ تا $t_2 = 1.25s$ نیز شتاب متوسط برابر صفر است.



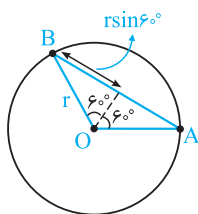
اگر متحرک از نقطه (x_A, y_A, z_A) به نقطه (x_B, y_B, z_B) منتقل شود، جابه‌جایی آن برابر $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ است. فرض کنید این متحرک از مبدأ $(0, 0, 0)$ شروع به حرکت کرده است. اگر این متحرک 10 متر از سطح زمین به سمت بالا حرکت کند مؤلفه y از صفر به $10m$ تبدیل می‌شود، در ادامه اگر $6m$ به سمت شمال برود، مؤلفه z از صفر به $-6m$ و در نهایت اگر 8 متر به غرب برود مؤلفه x از صفر به $-8m$ تبدیل می‌شود، بنابراین مختصات B برابر $(-8, 10, -6)$ است.

$$AB = \sqrt{(-8)^2 + 10^2 + (-6)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 10 \times 1.4 = 14m$$

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{14}{10} = 1.4 m/s$$

با توجه به این‌که ذره، $\frac{1}{3}$ محیط دایره را طی کرده است، مسافت طی شده توسط آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$l = \frac{1}{3} (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{3} (2\pi r) \approx \frac{1}{3} (6r) = 2r$$



از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی ذره برابر طول پاره‌خط AB است که با کمک هندسه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{d}| = AB = 2r \sin(60^\circ) = 2r \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}r$$

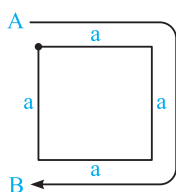
حالا با یک تناسب ساده، نسبت اندازه سرعت متوسط به تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{l} = \frac{\sqrt{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3} s_{av} = 2v_{av}$$

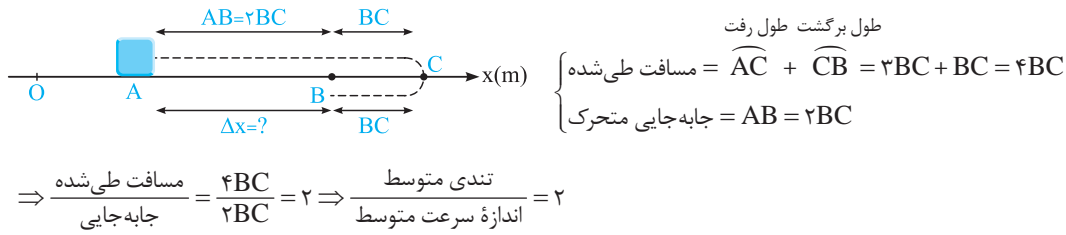
همان طور که در پاسخ سؤال (۱۰۶) مشاهده کردید، در این سؤال بیشترین جابه‌جایی زمانی روی

می‌دهد که مطابق شکل مقابل، متحرک از نقطه A تا B جابه‌جا شده باشد. در این حالت داریم:

$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{l} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

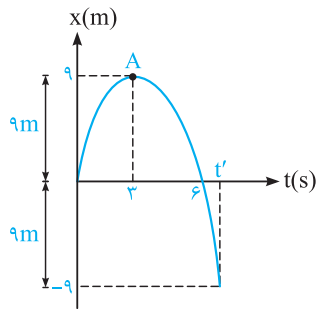


۱۳۱) با توجه به شکل، در مقایسهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک داریم:



تذکره جاب‌جایی برداری است که نقطهٔ شروع (A) را مستقیماً به نقطهٔ پایان (B) متصل کند، در صورتی که برای

محاسبهٔ مسافت طی شده باید طول مسیر رفت و برگشت را با یکدیگر جمع کرد.



۱۳۲) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا نمودار $(x - t)$ را برای حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار

می‌توان گفت هنگامی که فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر است، متحرک می‌تواند در ۹ متری سمت

چپ $(x = -9m)$ یا راست مبدأ $(x = +9m)$ باشد. بنابراین قدرمطلق مکان متحرک $|x|$ برابر ۹ است، نمودار

مکان - زمان این متحرک مطابق شکل مقابل است:

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید تنها در دو زمان ۳s و t' فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر می‌شود (نیازی به

محاسبهٔ t' نمی‌باشد).

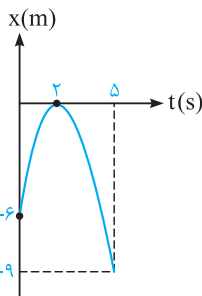
$$x = -t^2 + 6t \xrightarrow{\text{رأس سهمی} = -\frac{b}{2a}} t_A = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3s$$

دقت نحوهٔ به دست آوردن مختصات A:

$$x_A = -(3)^2 + 6 \times 3 = 9m \text{ (مکانی که متحرک در آن جا می‌ایستد)}$$

۱۳۳) متحرک در لحظهٔ $t = 2s$ تغییر جهت می‌دهد و از شروع حرکت تا لحظهٔ $t = 2s$ مسافت ۶m را طی می‌کند و تندی متوسط آن در این بازهٔ

زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:



$$s_{av_1} = \frac{I_1}{\Delta t_1} = \frac{6}{2} = 3m/s$$

در ادامهٔ مسیر، متحرک از نقطهٔ $x = -9m$ به $x = 0$ می‌رود و می‌توانیم بگوییم متحرک در کل حرکت،

مسافت ۱۵m را در مدت ۵s طی کرده است $(6 + 9 = 15m)$ ، بنابراین تندی متوسط آن در کل زمان حرکتش

برابر است با:

$$s_{av_2} = \frac{I_2}{\Delta t_2} = \frac{15}{5} = 3m/s$$

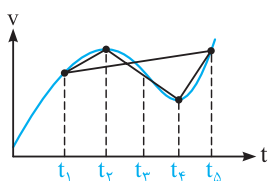
و در نهایت داریم:

$$\frac{s_{av_1}}{s_{av_2}} = \frac{3}{3} = 1$$

۱۳۴) مطابق تعریف شتاب متوسط $(|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t})$ ، کافی است سرعت در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی را داشته باشیم:

$$\text{معادلهٔ سرعت: } v = 0/3 \cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0/3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0/15 m/s \\ t_2 = \frac{1}{60} s \rightarrow v_2 = 0/3 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -0/15 m/s \end{cases}$$

$$\text{بزرگی شتاب متوسط: } |\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|-0/15 - (0/15)|}{\frac{1}{60}} = \frac{0/3}{\frac{1}{60}} = 18 m/s^2$$



۱۳۵) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، شتاب متوسط در آن بازهٔ

زمانی را نشان می‌دهد. در این سؤال شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان از $(t_1 \text{ تا } t_2)$ ،

$(t_2 \text{ تا } t_3)$ و $(t_4 \text{ تا } t_5)$ مثبت بوده و تنها در بازهٔ زمانی $(t_3 \text{ تا } t_4)$ منفی است. بنابراین در بازهٔ $(t_2 \text{ تا } t_3)$ ،

شتاب متوسط با سایر بازه‌ها هم‌جهت نیست (برای راحت‌تر شدن مقایسه، همهٔ خط‌های واصل موردنظر، در یک

شکل ترسیم شده است).