مهروماه

به نام پروردگار مهربان

رشتهٔ ریاضی **کنکور جدید**

به همراه سؤالات کنکور ۹۷

فیزیک جامع

پایهٔ دوازدهم **جلد پاسخ** + درسنامه

▪ نصرالله افاضل ▪ یاشار انگوتی ▪ مصطفی کیانی

مدیر و ناظر علمی گروه فیزیک: نصرالله افاضل

همکاران تألیف: حسن محمدی، امیرحسین مجوّزی

مقدمه

دانش‌آموز گرامی؛

پیش از استفاده از این کتاب، خوب است گپ کوتاهی با هم داشته باشیم. در جلد اول کتاب فیزیک جامع کوشیده‌ایم تســت‌های جامع و کامل و در ســطوح آموزشی ساده تا بسیار دشــوار (همان یک گام فراتر) برایتان فراهم و طراحی کنیم. این‌که چقدر در این خدمت موفق بوده‌ایم را شــما باید مشــخص کنید. دوســت داریم نظرات گران‌سنگ خود را برایمان ارسال کنید.

اما بدانید که ســؤالِ خوب، پاســخ خوب هم لازم دارد. در این قســمت هم کوشیده‌ایم تا پاسخ‌های کامل با راه‌حل‌های گوناگــون تســتی و مفهومــی برایتــان بیاوریــم. بنابراین اگر تســتی را درســت هم پاســخ دادی، باز هم پاسـخ تشــریحی آن را بخــوان، شــاید یــک روش دیگــر یا نکتهٔ ریــز یا تذکر دیگــری را هم دیــدی. مهم‌تر از همــه این‌که علاوه‌بر درس‌نامه‌های هر مبحث، راهبردهای آموزشی بسیار جامع را برایتان آماده کرده‌ایم تا یادگیری لذت‌بخش و مفاهیم برای شما به‌یاد ماندنی باشد. راهبردها، تکمیل‌کنندهٔ درس‌نامه‌ها هستند. برای آن که از دشواری مطالعه کاسته شود، همهٔ مفاهیم آموزشی را در هر مبحث، یک‌جا بیان نکرده‌ایم.

همان‌طور که در مقدمهٔ جلد اولِ این کتاب ذکر کردم، در هر مبحث اگر ابتدا تست‌هایی که با نشانِ مشخص کرده‌ایم را پاســخ دهید، با مراجعه به پاســخ آن‌ها، راهبردهای آموزشی را نیز خواهید آموخت. به‌این ترتیب آمادگی بیشتری برای پاسخ سایر تست‌های آن مبحث خواهید داشت.

لازم می‌دانــم علاوه‌بــر همهٔ همکاران بزرگوار مهروماه به‌ویژه جناب آقای احمد اختیاری مدیر فرزانه انتشــارات و اســتاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تالیف، از سرکار خانم مریم تاجداری که در صفحه‌آرایی این جلد، گروه تولید انتشارت را یاری دادند و آقای آرش محمدی برای کمک به ویراستاری علمی کتاب تشکر نمایم.

نصرالله افاضل

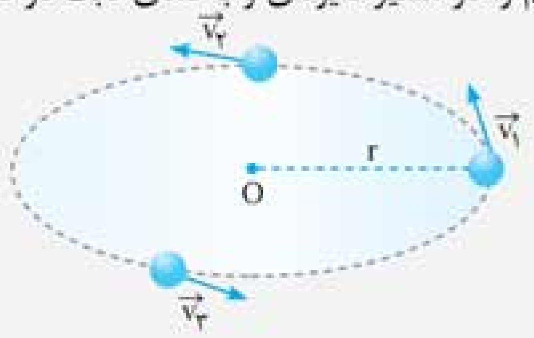
مدیر و ناظر علمی گروه فیزیک

فهرست

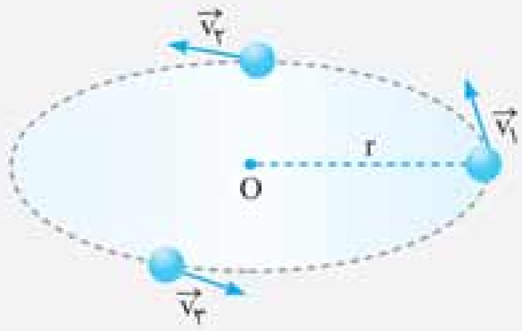
۵- حرکت دایره‌ای یکنواخت

در فصل ۱، ویژگی‌های حرکت در مسیر مستقیم را بررسی کردیم و در ابتدای فصل ۲ با استفاده از قوانین نیوتون، رابطهٔ بین شتاب و نیروی خالص و تأثیر جسم‌ها بر یکدیگر را آموختیم. اما می‌دانیم که همهٔ حرکت‌ها بر روی خط راست نیستند. بسیاری از جسم‌ها در مسیرهای منحنی، مانند دایره حرکت می‌کنند و به اصطلاح حرکت در دو بعد انجام می‌شود. برای بررسی ویژگی‌های حرکت در مسیر منحنی، نمی‌توان از معادلات مربوط به حرکت در مسیر مستقیم استفاده کرد. مثلاً معادلهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را نمی‌توان برای توپی که در بازی والیبال پرتاب می‌شود یا برای اتومبیلی که در پیچ جاده حرکت می‌کند یا برای ماهواره‌ای که به دور زمین می‌چرخد، به‌کار برد.

در این بخش حرکت جسم را در مسیر دایره‌ای و با تندی ثابت در نظر می‌گیریم و آن را بررسی می‌کنیم.



حرکت دایره‌ای یکنواخت: حرکتی است که با **تندی ثابت** در مسیر **دایره‌ای** انجام می‌شود.



(۱) بردار سرعت (لحظه‌ای) جسم همواره مماس بر مسیر و هم‌جهت با حرکت جسم است.

(۲) سرعت کمیتی برداری است. اگر جهت سرعت تغییر کند، حتی اگر اندازهٔ آن ثابت بماند (تندی ثابت باشد)، حرکت جسم **شتاب‌دار** است. در شکل مقابل $v_1 = v_2 = v_3$ است اما $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3$ می‌باشد.

حرکت جسمی که در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کند، **شتاب‌دار** است.

مفاهیم و تعاریف اولیه

دوره (تناوب): مدت زمانی است که طول می‌کشد تا جسم یک دور کامل مسیر دایره‌ای را بپیماید. دوره را با T نشان می‌دهیم و یکای آن در SI، ثانیه است.

رابطهٔ تندی با دوره

با توجه به تعریف تندی، یعنی مسافت طی‌شده بر مدت زمان آن، $v = \frac{l}{t}$، اگر مدت زمان یک دور کامل یعنی دوره (T) را در نظر بگیریم، در این مدت، جسم محیط دایره یعنی $2\pi r$ را طی می‌کند و می‌توان نوشت:

$$v = \frac{l}{t} \xrightarrow[t=T]{l=2\pi r} v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \underbrace{T}_{\text{دوره}} = \frac{2\pi \overset{\text{شعاع دایره}}{r}}{\underbrace{v}_{\text{تندی جسم}}}$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، متحرک با تندی ثابت حرکت می‌کند و دورهٔ آن نیز ثابت است.

مثال: جسمی در مسیر دایره‌ای به شعاع $10m$ با تندی $72\,km/h$ حرکت می‌کند. دورهٔ حرکت جسم چند ثانیه است؟ $(\pi = 3/14)$

۱) ۲/۱۴ ۲) ۳/۱۴ ۳) ۱/۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از رابطهٔ تندی و دورهٔ حرکت دایره‌ای یکنواخت یعنی $T = \frac{2\pi r}{v}$، می‌توان دورهٔ حرکت را به‌دست آورد:

$$v = 72\,km/h \div 3/6 = 20\,m/s$$

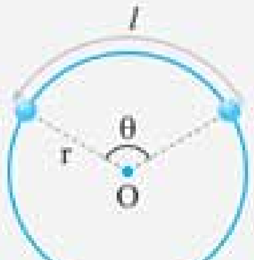
$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi \times 10}{20} = \pi = 3/14s$$

اگر متحرک در مدت زمان t، تعداد n بار (دور) مسیر دایره‌ای را طی کند، می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد چرخش‌ها} \leftarrow n = \frac{t \rightarrow \text{مدت‌زمان کل چرخش}}{T \rightarrow \text{مدت‌زمان یک چرخش}} \Rightarrow t = nT$$

این رابطه را بخوانید «تی اِن تی»!

اگر متحرک طول قسمتی از دایره (l) را در مدت t طی کند و طول مسیر طی‌شده (مسافت) رو به زاویهٔ مرکزی θ باشد، می‌توان نوشت:



$$\frac{l(\text{مسافت})}{۲\pi r(\text{محیط})}=\frac{t}{T}=\frac{\theta(rad)}{۲\pi}=\frac{\theta^{\circ}}{۳۶۰^{\circ}}$$

مثال: متحرکی در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت و دورهٔ ۰/۲s حرکت می‌کند. متحرک در چه مدتی $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را می‌پیماید؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳۰}$

پاسخ: گزینه ۴ از رابطهٔ $\frac{l}{۲\pi r}=\frac{t}{T}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{l}{۲\pi r}=\frac{t}{۰/۲}\xrightarrow{\frac{l}{۲\pi r}=\frac{۱}{۳}}t=\frac{۲}{۳۰}s$$

همهٔ نقاط واقع بر یک جسم که حول محور خودش دوران می‌کند، دورهٔ حرکت یکسان دارند. بنابراین تندی حرکت نقاط تنها به فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز (محور) دوران بستگی دارد. $v=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow{T_۱=T_۲}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{r_۱}{r_۲}$

مثلاً همهٔ نقاط پرهٔ یک توربین بادی که می‌چرخند، با دورهٔ یکسانی می‌چرخند. اما تندی نقاطی که به نوک پره نزدیک‌ترند (شعاع دوران بیشتری دارند) بیشتر است.

تعداد دور بر دقیقه را با rpm نشان می‌دهیم. مثلاً ۱۰rpm یعنی متحرک در هر دقیقه ۱۰ دور در مسیر دایره‌ای می‌چرخد؛ یعنی $n=۱۰$ و $t=۶۰s$ است، پس دورهٔ آن برابر است با: $T=\frac{۶۰}{۱۰}=۶s$

پاسخ‌های تشریحی

۷۱۴. گزینه ۴ گام اول با استفاده از رابطهٔ مسافت پیموده‌شده با مدت زمان آن یعنی $\frac{l}{۲\pi r}=\frac{t}{T}$، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۰/۵}{۲\pi\times۲}=\frac{۰/۱}{T}\Rightarrow T=۲/۴s$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ زاویهٔ طی‌شده با مدت زمان می‌توان نوشت:

$$\frac{t}{T}=\frac{\theta}{۳۶۰}\Rightarrow\frac{t}{۲/۴}=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}\Rightarrow t=۰/۸\,s$$

۷۱۵. گزینه ۲ بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ سرعت کمیت برداری است و در حرکت بر مسیر دایره‌ای، جهت سرعت تغییر می‌کند، پس ثابت نیست.

ب) درست؛ تندی، نسبت مسافت طی‌شده به زمان است و در مسیر دایره‌ای، یکنواخت، طول مسیر (محیط دایره) که در هر بازهٔ زمانی دلخواه طی می‌شود، یکسان است. $v=\frac{l}{t}=$ ثابت

پ) درست؛ سرعت در هر لحظه هم‌جهت با جابه‌جایی جسم در بازهٔ بسیار کوچک زمان یعنی یک لحظه است. پس مماس بر مسیر حرکت است.

ت) نادرست؛ عامل تغییر جهت سرعت در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیرو است. اگر نیروی خالص صفر باشد، علاوه بر اندازهٔ سرعت، جهت سرعت نیز تغییر نمی‌کند و جسم بر مسیر مستقیم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۷۱۶. گزینه ۳ بنابر رابطهٔ تندی با دورهٔ حرکت یعنی $v=\frac{۲\pi r}{T}$، دورهٔ حرکت متناسب با وارون تندی جسم است.

۷۱۷. گزینه ۳ همان‌طور که در درسنامه مطرح شد، هنگامی که یک جسم جامد حول محوری حرکت می‌کند، همهٔ نقاط متصل به جسم دورهٔ حرکت یکسان دارند.

۷۱۸. گزینه ۴ با توجه به تعریف دورهٔ حرکت یعنی «مدت زمان یک دور گردش در مسیر دایره‌ای» و این‌که عقربهٔ ساعت‌شمار در مدت $T_h=۱۲\times۶۰\times۶۰=۱۲\times۳۶۰۰\,s$ و عقربهٔ ثانیه‌شمار در مدت $T_s=۶۰s$ یک دور کامل می‌زنند، می‌توان دریافت نسبت دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار به دورهٔ حرکت عقربهٔ ثانیه‌شمار برابر است با:

$$\frac{T_h}{T_s}=\frac{۱۲\times۳۶۰۰}{۶۰}=۶۰\times۱۲=۷۲۰$$

۷۱۹. گزینه ۴ می‌توانیم از رابطهٔ $t=nT$ استفاده کنیم:

$$t=nT\xrightarrow[n=۳۰]{t=۱/۵\times۶۰=۹۰s}۹۰=۳۰T\Rightarrow T=۴/۵s$$

۷۲۰. گزینه ۲ می‌دانیم rpm یکای تعداد دور بر دقیقه است. عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ۱۲ ساعت یک دور می‌چرخد، پس برای این عقربه داریم:

$$\frac{۱}{۱۲}rph=\frac{۱}{۱۲\times۶۰}=\frac{۱}{۷۲۰}rpm$$

۷۲۱. گزینه۳ می‌دانیم یکای rpm، تعداد دور بر دقیقه است. بنابراین عقربهٔ ثانیه‌شمار یک دور را در مدت یک دقیقه و عقربهٔ ساعت‌شمار یک دور را در مدت ۱۲ ساعت یعنی $۱۲\times ۶۰ = ۷۲۰\,\text{min}$ می‌زند. ثانیه‌شمار: ۱rpm ، ساعت‌شمار $= \frac{۱}{۷۲۰}$

۷۲۲. گزینه ۱ زمین در مدت یک سال یعنی ۳۶۵ روز، یک دور به دور خورشید می‌چرخد. بنابراین باید حساب کنیم ۳۶۵ روز چند دقیقه است:

$$t = ۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰ = ۵۲۵۶۰۰ = ۵۲/۵۶\times ۱۰^{۴}\ \text{min}$$

پس زمین با آهنگ $\frac{۱}{۵۲/۵۶\times ۱۰^{۴}} = ۰/۱۹\times ۱۰^{-۵}$ دور بر دقیقه به دور خورشید می‌چرخد.

۷۲۳. گزینه۴ برای محاسبهٔ تعداد دور بر دقیقه، می‌توان از رابطهٔ $t = nT$ استفاده کرد: $t = ۶۰\text{s}\,,\ T = ۰/۰۴\text{s} \Rightarrow n = \frac{۶۰}{۰/۰۴} = ۱۵۰۰\ \text{rpm}$

۷۲۴. گزینه ۱ از رابطهٔ تندی جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، یعنی $v = \frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و با جای‌گذاری $r = ۲۰\times \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۲\text{m}$ و $T = ۰/۲\text{s}$ در این رابطه، تندی متحرک را به‌دست می‌آوریم: $v = \frac{۲\pi\times ۰/۲}{۰/۲} = ۲\pi\ \text{m/s}$

۷۲۵. گزینه۲ با توجه به این‌که دورهٔ حرکتِ چرخشی زمین به دور خودش، یک شبانه روز یعنی ۲۴ ساعت است، می‌توانیم از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ استفاده کنیم و با در نظر گرفتن دورهٔ حرکت برحسب ثانیه و شعاع استوا برحسب متر، سرعت نقطه‌ای روی استوا را به‌دست آوریم:

$$v = \frac{۲\pi r}{T} \xrightarrow[T = ۲۴\times ۳۶۰۰\text{s}]{r = ۶۴۰۰\times ۱۰^{۳} = ۶/۴\times ۱۰^{۶}\text{m}} v = \frac{۲\pi\times ۶/۴\times ۱۰^{۶}}{۲۴\times ۳۶۰۰} \simeq ۴۶۵/۱\,\text{m/s}$$

۷۲۶. گزینه۴ از رابطهٔ تندی حرکت دایره‌ای استفاده می‌کنیم: $v = \frac{۲\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲\pi\times ۲}{۱۰} = ۰/۴\pi\,\text{s}$

۷۲۷. گزینه ۱ **گام اول** می‌توانیم از رابطهٔ $t = nT$ استفاده کنیم و با در نظر گرفتن $n = ۳۶۰۰$ و $t = ۱\times ۶۰ = ۶۰\text{s}$، دورهٔ حرکت را به‌دست آوریم:

$$۶۰ = ۳۶۰۰\times T \rightarrow T = \frac{۱}{۶۰}\text{s}$$

گام دوم از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم:

$$v = \frac{۲\pi r}{T} \xrightarrow[T = \frac{۱}{۶۰}\text{s}]{r = ۲\text{m}} v = \frac{۲\pi\times ۲}{\frac{۱}{۶۰}} = ۲۴۰\pi\ \text{rad/s} \xrightarrow{\pi \simeq ۳} v = ۷۲۰\,\text{m/s}$$

۷۲۸. گزینه۳ **گام اول** با توجه به این‌که دورهٔ حرکت چرخشی زمین به دور خورشید یک سال است، می‌توان نوشت: $T = ۳۶۵\times ۲۴ = ۸۷۶۰\,\text{h}$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$، با در نظر گرفتن شعاع مدار زمین به دور خورشید یعنی $r = ۱/۵\times ۱۰^{۶}\text{km}$، تندی زمین به دور خورشید را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{۲\pi\times ۱/۵\times ۱۰^{۶}}{۸۷۶۰} \xrightarrow{\pi \simeq ۳} v = ۱۰۲۷/۳\,\text{km/h}$$

۷۲۹. گزینه۳ **گام اول** تکه لباس در محیط دایره‌ای به شعاع $r = \frac{۸۰}{۲} = ۴۰\,\text{cm}$ می‌چرخد، از رابطهٔ $t = nT$ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$t = ۱\times ۶۰ = ۶۰\text{s}\ ,\ n = ۱۲۰۰ \Rightarrow ۶۰ = ۱۲۰۰T \rightarrow T = ۰/۰۵\text{s}$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ می‌توان نوشت: $v = \frac{۲\pi\times ۰/۴}{۰/۰۵} \Rightarrow v = ۱۶\pi\,\text{m/s}$

۷۳۰. گزینه۳ **گام اول** می‌دانیم یکای rpm همان دور بر دقیقه است. از رابطهٔ $t = nT$، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$t = ۱\times ۶۰ = ۶۰\text{s}\,,\ n = ۱۲۰ \Rightarrow t = nT \Rightarrow ۶۰ = ۱۲۰\times T \rightarrow T = ۰/۵\text{s}$$

گام دوم از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و تندی وزنه را هنگام پرتاب به‌دست می‌آوریم: $v = \frac{۲\pi\times ۱/۵}{۰/۵} \Rightarrow v = ۶\pi\,\text{m/s}$

۷۳۱. گزینه ۱ **گام اول** با استفاده از رابطهٔ سرعت در حرکت دایره‌ای یعنی $v = \frac{۲\pi r}{T}$، دورهٔ حرکت پره را به‌دست می‌آوریم:

$$۵۰ = \frac{۲\pi\times ۲}{T} \Rightarrow T = \frac{۸}{۱۰۰}\pi \xrightarrow{\pi \simeq ۳} T = ۰/۲۴\text{s}$$

گام دوم از رابطهٔ $t = nT$ استفاده می‌کنیم و به ازای $t = ۱\times ۶۰ = ۶۰\text{s}$، تعداد دور پره را به‌دست می‌آوریم: $۶۰ = n\times ۰/۲۴ \rightarrow n = ۲۵۰$ دور

۷۳۲. گزینه۲ **گام اول** دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت و دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت شمار ۱۲ ساعت است. (زیروند h برای عقربهٔ ساعت‌شمار و زیروند min برای عقربهٔ دقیقه‌شمار بکار رفته است) $\frac{T_h}{T_{min}} = \frac{۱۲}{۱} = ۱۲$

گام دوم از رابطهٔ تندی حرکت دایره‌ای یعنی $v = \frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و رابطهٔ مقایسهٔ تندی نوک عقربه‌ها با یکدیگر را می‌نویسیم:

$$\frac{v_h}{v_{min}} = \frac{r_h}{r_{min}}\times \frac{T_{min}}{T_h} = \frac{۱}{۱/۵}\times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۸}$$

۷۳۳. گزینه۴ **گام اول** دورهٔ متحرک اول را از رابطهٔ $t = nT$ به‌دست می‌آوریم: $t = ۱\times ۶۰ = ۶۰\text{s}\,,\ n = ۵ \Rightarrow T_۱ = \frac{۶۰}{۵} = ۱۲\text{s}$

گام دوم دورهٔ متحرک دوم را از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ به‌دست می‌آوریم: $v_۲ = \frac{۲\pi r}{T_۲} \rightarrow T_۲ = \frac{۲\pi\times ۰/۶}{۲\pi\times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow T_۲ = ۶۰\text{s}$

گام سوم نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ را به‌دست می‌آوریم: $\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۶۰}{۱۲} = ۵$

۷۳۴. (گزینه ۲) گام اول چون هر دو شخص A و B روی دیسک ساکن هستند، هر تعداد دور که دیسک در یک دقیقه می‌چرخد، آن‌ها هم همان تعداد دور می‌چرخند. پس دورهٔ حرکت آن‌ها یکسان است.

گام دوم از رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و نسبت تندی دو شخص را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{T_B}{T_A}\xrightarrow{T_A=T_B}\frac{v_A}{v_B}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{۲}{۳}$$

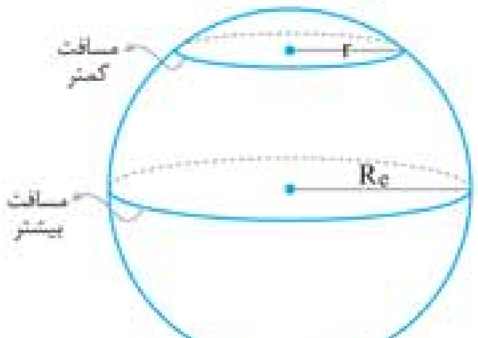
۷۳۵. (گزینه ۱) از رابطهٔ تندی حرکت دایره‌ای یعنی $v=\frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{T_B}{T_A}\xrightarrow[T_A=۲T_B]{r_A=۳r_B}\frac{v_A}{v_B}=۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۷۳۶. (گزینه ۲) چون A و B به یک محور بسته و متصل شده‌اند، دورهٔ حرکت آن‌ها یکسان است. اما چون در یک مدت معین، B مسافت بیشتری طی می‌کند، تندی B بیشتر از تندی A است و بنابر رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{T_B}{T_A}\xrightarrow[r_A=\frac{۱}{۳}r_B]{T_A=T_B}\frac{v_A}{v_B}=\frac{۱}{۳}$$

۷۳۷. (گزینه ۴) می‌دانیم همهٔ نقاط روی کرهٔ زمین، دورهٔ گردش یکسان (۲۴ ساعت) دارند. اما نقطه‌ای که به قطب شمال نزدیک‌تر باشد، در یک شبانه‌روز محیط دایرهٔ کوچک‌تری را طی می‌کند، پس تندی کم‌تری دارد.



۷۳۸. (گزینه ۳) می‌توان نشان داد که نسبت دور بر دقیقه یک جسم متناسب با وارون دورهٔ گردش است.

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{n_A}{n_B}=\frac{۲۰}{۳۰}$$

بنابراین از رابطهٔ تندی حرکت دایره‌ای یعنی $v=\frac{۲\pi r}{T}$ می‌توانیم نسبت تندی دو متحرک را بنویسیم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{۴}{۲}\times\frac{۲۰}{۳۰}=\frac{۴}{۳}$$

۷۳۹. (گزینه ۲) متحرک از A تا B، زاویهٔ مرکزی ۶۰° را طی کرده است؛ یعنی متحرک $\frac{۶۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۶}$ دایره را پیموده است. بنابراین مسافت طی‌شده از A تا B برابر $l=\frac{۲\pi r}{۶}$ می‌باشد و برای محاسبهٔ تندی گلوله، می‌توانیم به جای رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$ از رابطهٔ کلی تندی یعنی $v=\frac{l}{t}$ نیز استفاده کنیم:

$$v=\frac{l}{t}=\frac{\frac{۲\pi r}{۶}}{۰/۱}\xrightarrow{r=۰/۲m}v=۲\,m/s$$

نکته: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم که در آن l مسافت طی‌شده در مدت t است.

$$v=\frac{۲\pi r}{T}=\frac{l}{t}$$

۷۴۰. (گزینه ۴) **تذکر:** در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان طی کردن قسمتی از محیط دایره، متناسب با طول همان قسمت از دایره است. این نسبت برابر تندی متحرک است.

$$\begin{cases}v=\frac{l}{t}\\ v=\frac{۲\pi r}{T}\end{cases}\Rightarrow\frac{l}{t}=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow[t=۰/۲s]{l=\frac{۱}{۳}(۲\pi r)}\frac{\frac{۱}{۳}\times۲\pi r}{۰/۲}=\frac{۲\pi r}{T}\Rightarrow T=۰/۶s$$

۷۴۱. (گزینه ۴) **یادآوری:** در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نسبت طول طی‌شده به محیط دایره برابر زاویهٔ مرکزی (مربوط به طول طی‌شده) به ۲π است.

$$\frac{l}{۲\pi r}=\frac{\theta(rad)}{۲\pi}$$

گام اول با استفاده از رابطهٔ ذکر شده در یادآوری فوق، می‌توان نوشت:

$$\frac{l}{۲\pi r}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{۲\pi}\to l=\frac{۲\pi r}{۱۲}$$

گام دوم برای محاسبهٔ تندی دوچرخه سوار از رابطهٔ کلی $v=\frac{l}{t}$ استفاده می‌کنیم:

$$v=\frac{\frac{۲\pi\times۲۵}{۱۲}}{۱}\Rightarrow v=\frac{۱۲/۵\pi}{۳}\simeq۱۲/۵\,m/s$$

۷۴۲. (گزینه ۴) گام اول محور دو قرقره یکسان نیست، اما تسمه‌ای که از دور آن‌ها عبور کرده یکسان است؛ یعنی تندی هر نقطه روی محیط قرقره‌ها یکسان است. اما چون شعاع قرقره‌ها یکسان نیست، دورهٔ چرخش آن‌ها متفاوت است؛ یعنی قرقرهٔ کوچک‌تر در مدت زمان کم‌تری نسبت به قرقرهٔ A یک دور می‌چرخد.

گام دوم از رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و نسبت دورهٔ حرکت قرقره‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{T_B}{T_A}\xrightarrow[r_A=۲r_B]{v_A=v_B}۱=۲\times\frac{T_B}{T_A}\to T_B=\frac{۱}{۲}T_A$$

گام سوم دورهٔ حرکت T_A را به‌دست می‌آوریم:

$$t=nT\xrightarrow[n=۱۲۰۰]{t=۱\times۶۰=۶۰s}۶۰=۱۲۰۰\times T_A\to T_A=۰/۰۵s$$

گام چهارم دورهٔ حرکت T_B را به دست می‌آوریم:

$$T_B=\frac{۱}{۲}\times T_A=\frac{۱}{۲}\times۰/۰۵=۰/۰۲۵\,s$$

۷۴۳. (گزینه ۲) گام اول دقت کنید که چون محیط دو استوانه در تماس با یکدیگر هستند تندی نقطه‌ای روی محیط استوانه‌ها با یکدیگر برابر است. $(v_A=v_B)$

گام دوم دورهٔ حرکت استوانهٔ A را از رابطهٔ $t=nT$ حساب می‌کنیم:

$$t=۱\times۶۰=۶۰s\,,\,n=۶۰\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۶۰}=۱s$$

گام سوم از رابطهٔ تندی حرکت دایره‌ای یعنی $v=\frac{۲\pi r}{T}$ استفاده می‌کنیم و v را برای استوانهٔ A به‌دست می‌آوریم (این تندی برابر تندی استوانهٔ B است).

$$v=\frac{۲\pi\times ۰/۱}{۱}=۰/۲\pi\ m/s$$

۷۴۴. گزینه ۴

راهبرد ۱۵: شرط این‌که دو حرکت دایره‌ایِ هم‌جهت، هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت کنند اما بعد از مدت زمان t یکی از متحرک‌ها یک بار از متحرک دیگر جلو بیفتد، این است که اختـلاف تعـداد دورهای آن‌ها برابر یک باشد. از این رو با استفـاده از رابطهٔ $n=\frac{t}{T}$ داریم:

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow\begin{cases}n_A=\frac{t}{T_A}\\ n_B=\frac{t}{T_B}\end{cases}\Rightarrow n_B-n_A=t(\frac{۱}{T_B}-\frac{۱}{T_A})\Rightarrow t=\frac{T_BT_A}{T_A-T_B}$$

که در آن t مدت زمان لازم برای این‌که متحرک سریع‌تر یک دور کامل از متحرک دیگر جلو بیفتد، است.

در این سؤال می‌توان نوشت:

$$t=\frac{۱/۸\times ۲}{۲-۱/۸}=\frac{۳/۶}{۰/۲}=۱۸\ min$$

۷۴۵. گزینه ۳ **یادآوری:** انرژی جنبشی یک جسم از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌دست می‌آید.

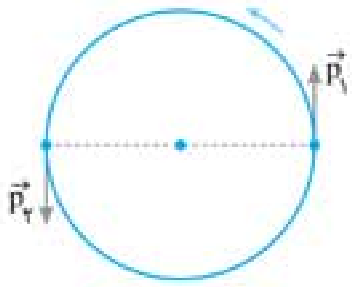
گام اول از رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$، می‌توان دریافت که اگر دورهٔ حرکت یک متحرک که در مسیر دایره‌ای معین حرکت می‌کند، نصف شود، تندی متحرک دو برابر می‌شود:

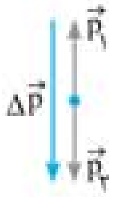
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{r_۲}{r_۱}\times\frac{T_۱}{T_۲}\xrightarrow{r_۲=r_۱}\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{T_۱}{\frac{T_۱}{۲}}=۲$$

گام دوم از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ می‌توان دریافت که اگر تندی متحرک دو برابر شود، انرژی جنبشی آن چهار برابر می‌شود:

$$\frac{K_۲}{K_۱}=\frac{m_۲}{m_۱}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\xrightarrow[v_۲=۲v_۱]{m_۱=m_۲}\frac{K_۲}{K_۱}=۴$$

۷۴۶. گزینه ۳ **یادآوری:** تکانه کمیتی برداری است و تغییر تکانهٔ یک جسم از تفریق دو بردار تکانه به‌دست می‌آید. $\Delta\vec{p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱$





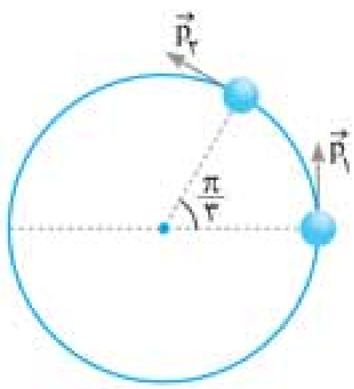
گام اول بردار تکانهٔ متحرک را در یک لحظه با $\vec{p}_۱$ و پس از مدت $\frac{T}{۲}$، با $\vec{p}_۲$ نشان می‌دهیم.

در این مدت زمان $(\frac{T}{۲})$، جهت بردار تکانه خلاف جهت $\vec{p}_۱$ می‌شود.

گام دوم تغییر تکانهٔ جسم را از رابطهٔ $\Delta\vec{p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱\xrightarrow{\vec{p}_۲=-\vec{p}_۱}\Delta\vec{p}=-\vec{p}_۱-\vec{p}_۱=-۲\vec{p}_۱$$

۷۴۷. گزینه ۳ **یادآوری:** ۱ برای محاسبهٔ تغییر تکانه از رابطهٔ تفریق برداری $\Delta\vec{p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱$ استفاده می‌کنیم.



۲ بزرگی تفریق دو بردار مانند دو بردار تکانه را که اندازهٔ یکسان دارند، می‌توان از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست آورد:

$$\Delta p=۲p\sin\frac{\theta}{۲}$$

در این سؤال چون حرکت در مسیر دایره‌ای و یکنواخت است، بزرگی سرعت و در نتیجه بزرگی تکانهٔ جسم تغییر نمی‌کند و می‌توان از رابطهٔ $\Delta p=۲p\sin\frac{\theta}{۲}$، بزرگی تغییر تکانهٔ جسم را به‌دست آورد.

$$|\vec{p}_۱|=|\vec{p}_۲|\Rightarrow\Delta p=۲\times p\sin(\frac{\pi}{۶})=p$$

۷۴۸. گزینه ۴ **یادآوری:** تغییر بردار سرعت در دو لحظه را می‌توان از رابطهٔ $\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱$ به‌دست آورد و اگر بزرگی سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ برابر باشند، بزرگی تغییر سرعت را می‌توان از رابطهٔ روبه‌رو حساب کرد:

$$v_۱=v_۲\Rightarrow\Delta v=۲v\sin\frac{\theta}{۲}$$

گام اول دورهٔ حرکت متحرک را با توجه به رابطهٔ $v=\frac{۲\pi r}{T}$ به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰=\frac{۲\pi\times ۲}{T}\Rightarrow T=۰/۴\pi\ s$$

گام دوم چون دورهٔ حرکت $۰/۴\pi\ s$ است و تغییر سرعت در مدت $۰/۱\pi\ s$ مورد نظر است، می‌توان زاویهٔ طی‌شدهٔ متحرک در مدت $۰/۱\pi\ s$ را به‌دست آورد:

$$\frac{\theta}{۲\pi}=\frac{t}{T}\Rightarrow\frac{\theta}{۲\pi}=\frac{۰/۱\pi}{۰/۴\pi}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

گام سوم از رابطهٔ $\Delta v=۲v\sin(\frac{\theta}{۲})$ استفاده می‌کنیم:

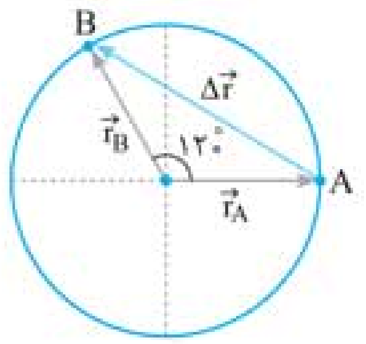
$$\Delta v=۲\times ۱۰\times\sin(\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Delta v=۱۰\sqrt{۲}\ m/s$$

۷۴۹. گزینه ۲ **گام اول** دورهٔ حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow[v=۱۲\ m/s]{r=۲m}۱۲=\frac{۲\pi\times ۲}{T}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۳}s$$

گام دوم مدت زمان $\frac{T}{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t=\frac{T}{۳}=\frac{\frac{\pi}{۳}}{۳}=\frac{\pi}{۹}=\frac{۱}{۳}s$$



گام سوم مقدار جابه‌جایی جسم را در مدت $\frac{T}{۳}$ یعنی مدتی که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را پیموده است، به‌دست می‌آوریم. با توجه به شکل مقابل و این‌که $r_A = r_B$ است، از رابطهٔ تفریق دو بردار هم‌اندازه یعنی $\Delta r = ۲r\sin\frac{\theta}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \Delta r = ۲\times۲\times\sin\frac{۱۲۰}{۲} \Rightarrow \Delta r = ۲\sqrt{۳}\,m$$

گام چهارم از رابطهٔ سرعت متوسط یعنی $v_{av} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۶\sqrt{۳}\ m/s$$

۷۵۰. (گزینه۴) **یادآوری:** تفریق دو بردار تغییر تکانه با اندازهٔ یکسان از رابطهٔ $\Delta p = ۲p\sin\frac{\theta}{۲}$ به‌دست می‌آید.

گام اول اندازهٔ تکانه جسم را از رابطهٔ $p = mv \xrightarrow{v=\frac{۲\pi r}{T}} p = \frac{۲\pi mr}{T}$ به‌دست می‌آوریم:

$$p = \frac{۲\pi\times۴\times۶}{۲} = ۲۴\pi\ kg.m/s$$

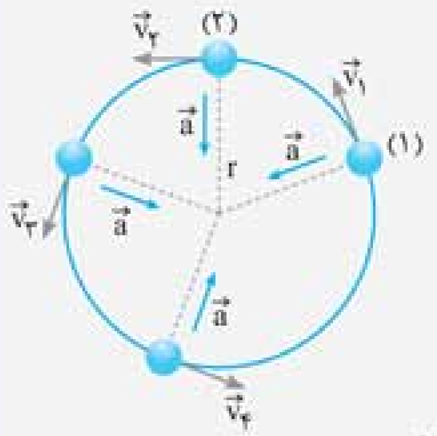
گام دوم زاویه بین دو بردار تکانه را در مدت $۰/۵s$ مشخص می‌کنیم. در مدت $t = ۰/۵s$، زاویهٔ تکانه به اندازهٔ θ تغییر کرده است و می‌توان θ را از رابطهٔ مقابل به‌دست آورد:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{t}{T} \Rightarrow \theta = \frac{۰/۵\times۲\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}rad$$

گام سوم تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta p = ۲p\sin(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}p \Rightarrow \Delta p = \sqrt{۲}\times۲۴\pi \Rightarrow \Delta p = ۲۴\pi\sqrt{۲}\ kg.m/s$$

۵ شتاب مرکزگرا و قانون دوم نیوتون



در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازهٔ سرعت یعنی تندی جسم ثابت است، اما جهت سرعت در هر لحظه تغییر می‌کند. از این‌رو بردار سرعت تغییر می‌کند و می‌دانیم که هر گاه بردار سرعت تغییر کند، حرکت شتاب‌دار خواهد بود.

(۱) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت بردار شتاب جسم به طرف **مرکز** دایره است. از این رو این شتاب، **شتاب مرکزگرا** نامیده می‌شود.

(۲) اندازهٔ شتاب مرکزگرا از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\underset{\text{شتاب مرکزگرا}}{a_c} = \frac{\overset{\text{تندی جسم}}{v^۲}}{\underset{\text{شعاع مسیر چرخش}}{r}}$$

(۳) یکای شتاب مرکزگرا متر بر مجذور ثانیه $(m/s^۲)$ است.

(۴) جهت شتاب مرکزگرا همواره عمود بر جهت سرعت جسم است.

(۵) جهت شتاب مرکزگرا در هر لحظه تغییر می‌کند. از این رو هر چند بزرگی آن $(a_c = \frac{v^۲}{r})$ مقدار ثابتی است، اما شتاب مرکزگرا (به دلیل تغییر جهت بردار آن)، **ثابت نیست**.

(۶) با استفاده از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ و تعریف شتاب مرکزگرا $a_c = \frac{v^۲}{r}$، می‌توان رابطهٔ شتاب مرکزگرا برحسب دوره و شعاع را به‌دست آورد:

$$a_c = \frac{v^۲}{r} \xrightarrow{v=\frac{۲\pi r}{T}} a_c = \frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$$

مثال: دوچرخه‌سواری در یک پیست دوچرخه‌سواری به شعاع ۳۰m با تندی ۳۶ km/h حرکت می‌کند. شتاب مرکزگرای دوچرخه‌سوار چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) ۴

پاسخ: (گزینه۳) از رابطهٔ شتاب مرکزگرا یعنی $a_c = \frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم:

$$v = ۳۶\ km/h \div ۳/۶ = ۱۰\ m/s$$

$$a_c = \frac{v^۲}{r} = \frac{۱۰^۲}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳}\ m/s$$

مثال: **در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اگر دورهٔ حرکت جسمی ۲ برابر و شعاع حرکت جسم ۳ برابر شود، شتاب مرکزگرای جسم چند برابر می‌شود؟**

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴ می‌توانیم از رابطهٔ $a_c = \frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ استفاده کنیم و در دو حالت شتاب مرکزگرا را مقایسه کنیم:

$$a_c = \frac{۴\pi^۲}{T^۲}r \Rightarrow \frac{a_{c_۲}}{a_{c_۱}} = (\frac{T_۱}{T_۲})^۲ \times \frac{r_۲}{r_۱} \xrightarrow[r_۲=۳r_۱]{T_۲=۲T_۱} \frac{a_{c_۲}}{a_{c_۱}} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۱} = \frac{۳}{۴}$$

مثال: **جسمی در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کند و بزرگی تکانهٔ جسم $۱۰\,kg.m/s$ است. اگر شتاب مرکزگرای جسم $۲/۵\,m/s^۲$ و شعاع مسیر $۱۰\,m$ باشد، جرم جسم چند کیلوگرم است؟**

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۱ گام اول از رابطهٔ شتاب مرکزگرا $a_c = \frac{v^۲}{r}$، تندی جسم را به‌دست می‌آوریم: $۲/۵ = \frac{v^۲}{۱۰} \Rightarrow v = ۵\,m/s$

گام دوم با توجه به این‌که مقدار تکانهٔ جسم و تندی جسم را می‌دانیم، می‌توانیم از رابطهٔ $p = mv$ استفاده کنیم و جرم جسم را به‌دست آوریم:

$$p = mv \xrightarrow[v=۵\,m/s]{p=۱۰\,kg.m/s} m = \frac{۱۰}{۵} = ۲\,kg$$

نیروی مرکزگرا

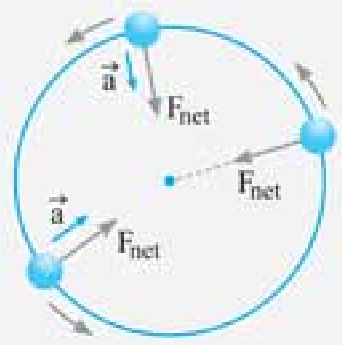
می‌دانیم اگر نیروی خالص بر جسمی اثر کند، به جسم شتاب می‌دهد. در حرکت بر مسیر مستقیم، اگر نیرو هم‌راستا با حرکت جسم باشد، ممکن است در جهت یا خلاف جهت جسم بر آن اثر کند و حرکت جسم تندشونده و یا کندشونده باشد.

در صورتی که نیروی خالص وارد بر جسم همواره عمود بر سرعت (حرکت) جسم باشد، اندازهٔ سرعت یعنی تندی جسم تغییر نمی‌کند اما جهت سرعت جسم تغییر می‌کند و جسم در مسیر دایره‌ای، حرکت یکنواخت خواهد داشت. بنابراین، اگر نیروی خالص وارد بر جسم، عمود بر سرعت جسم باشد، جسم در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کند. زیرا این نیرو شتابی به جسم می‌دهد که عمود بر سرعت جسم در هر لحظه و به سمت مرکز دایرهٔ مسیر است. بنابر قانون دوم نیوتون، بزرگی این نیرو از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F_{net} = ma \xrightarrow{a_c=\frac{v^۲}{r}} F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$$

با در نظر گرفتن $v = \frac{۲\pi r}{T}$ می‌توان نیروی خالص وارد بر جسم را به صورت زیر نیز نوشت:

$$F_{net} = m\frac{(\frac{۲\pi r}{T})^۲}{r} \Rightarrow F_{net} = m(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})r$$



نیروی خالص وارد بر جسم (در حرکت دایره‌ای یکنواخت)، به سمت مرکز دایره است. این نیروی خالص را **نیروی مرکزگرا** نیز می‌نامند.

بر هر جسم که در مسیر دایره‌ای حرکت یکنواخت دارد، نیروی خالصی به طرف مرکز دایره وارد می‌شود و این نیرو بسته به حرکت جسم می‌تواند نیروی کشش نخ، نیروی اصطکاک، نیروی گرانش، نیروی سطح و یا نیروی الکتریکی باشد.

مثال: **موتورسواری به جرم کل $۱۸۰\,kg$ با تندی ثابت $۱۰\,m/s$ پیچ جاده‌ای به شعاع $۲۰۰\,m$ را می‌پیماید. نیروی مرکزگرای وارد بر موتورسوار چند نیوتون است؟**

۱) ۹۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۹۰۰۰ ۴) ۹۰۰۰۰

پاسخ: گزینه ۱ بنابر رابطهٔ نیروی خالص وارد بر جسمی که در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است، یعنی $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$، می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۱۸۰ \times \frac{۱۰^۲}{۲۰۰} \Rightarrow F_{net} = ۹۰\,N$$

مثال: **جسمی به جرم $۲۰۰\,g$ با تندی ثابت، دایره‌ای به شعاع $۱۰۰\,cm$ را با $۱۲۰\,rpm$ می‌پیماید. نیروی مرکزگرای وارد بر جسم چند نیوتون است؟ $(\pi^۲ \simeq ۱۰)$**

۱) ۳۲ ۲) ۲۸ ۳) ۲۶ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۱ گام اول از رابطهٔ $t = nT$، دورهٔ چرخش جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$t = ۱ \times ۶۰ = ۶۰\,s \;,\; n = ۱۲۰ \Rightarrow T = \frac{t}{n} = \frac{۶۰}{۱۲۰} = ۰/۵\,s$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $F_{net} = m(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})r$، نیروی خالص وارد بر جسم را که همان نیروی مرکزگرای جسم است، به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net} = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} \times \frac{۴\pi^۲}{(۰/۵)^۲} \times \frac{۱۰۰}{۱۰۰} \Rightarrow F_{net} = ۳/۲\pi^۲ N = ۳۲N$$

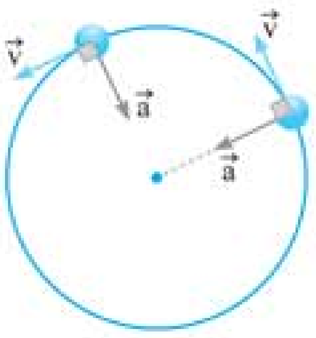
مثال: جسمی در مسیر دایره‌ای حرکت یکنواخت دارد و با تندی $۱۰ m/s$، دایره‌ای به شعاع $۵m$ را می‌پیماید. بزرگی تکانه جسم چند برابر بزرگی نیروی مرکزگرای جسم است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ با استفاده از رابطهٔ تکانه جسم یعنی $p = mv$ و رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$، نسبت مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} p = mv \\ F_{net} = m\frac{v^۲}{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{F_{net}} = \frac{r}{v} \xrightarrow[v=۱۰ m/s]{r=۵ m} \frac{p}{F} = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ‌های تشریحی



۷۵۱. گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت شتاب در هر لحظه با لحظهٔ قبلی متفاوت است و همواره به سمت مرکز دایره است. بنابراین شتاب متغیر است و گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست هستند. همچنین بنابر رابطهٔ $a_c = \frac{v^۲}{r}$، شتاب متناسب با مجذور تندی جسم است. بنابراین گزینهٔ «۴» نیز نادرست است. با توجه به شکل، گزینهٔ صحیح، گزینهٔ «۲» است.

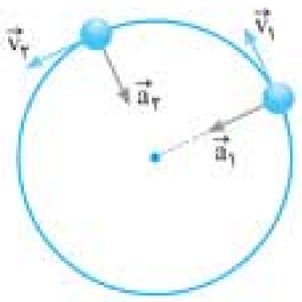
۷۵۲. گزینه ۲ بررسی عبارت‌ها:

الف) درست است؛ بنابر رابطهٔ $a_c = \frac{v^۲}{r}$، شتاب مرکزگرا متناسب با مجذور سرعت است.

ب) نادرست است؛ بنابر رابطهٔ $a_c = \frac{v^۲}{r}$، افزایش شعاعِ مسیر دایره سبب کاهش شتاب مرکزگرا می‌شود. «در واقع درست این است که بگوییم کاهش شتاب وارد بر جسم، سبب افزایش شعاع مسیر دایره‌ای می‌شود.»

پ) درست است؛ می‌توان از رابطهٔ شتاب مرکزگرا با دوره یعنی $a = \frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ دریافت که دورهٔ حرکت با کاهش شتاب جسم افزایش می‌یابد.

ت) نادرست است؛ شتاب با مجذورِ وارون دوره متناسب است. $(a \propto \frac{۱}{T^۲})$



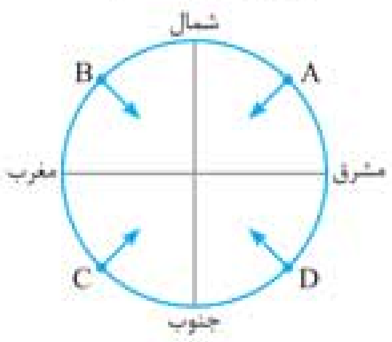
۷۵۳. گزینه ۳ سرعت و شتاب کمیت‌های برداری‌اند. اگر جهت آن‌ها تغییر کند حتی اگر بزرگی آن‌ها ثابت باشد، متغیر هستند. در حرکت دایره‌ای یکنواخت درست است که بزرگی سرعت یعنی تندی و بزرگی شتاب مرکزگرا ثابت هستند، اما در هر لحظه جهت آن‌ها تغییر می‌کند، پس این کمیت‌ها متغیرند.

$|\vec{v}_۱| = |\vec{v}_۲|$, $\vec{v}_۱ \neq \vec{v}_۲$

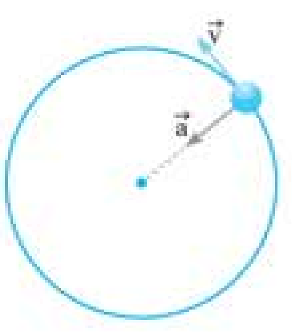
$|\vec{a}_۱| = |\vec{a}_۲|$, $\vec{a}_۱ \neq \vec{a}_۲$

۷۵۴. گزینه ۳ از رابطهٔ شتاب مرکزگرا یعنی $a_c = \frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم:

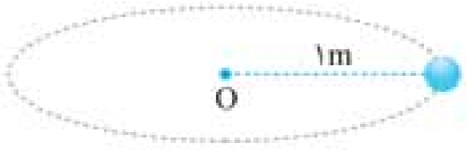
$$a_c = \frac{v^۲}{r} \xrightarrow[v=۵ m/s]{r=۲۰ m} a = \frac{۲۵}{۲۰} = ۱/۲۵ m/s^۲$$



۷۵۵. گزینه ۱ شتاب جسمی که با تندی ثابت در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، به طرف مرکز دایره است و در نقطه A به سمت جنوب غربی است.



۷۵۶. گزینه ۴ در شکل نیز ملاحظه می‌فرمایید که جهت شتاب مرکزگرا به سمت مرکز دایره است و بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد.



۷۵۷. گزینه ۲ **گام اول** شعاع دایرهٔ مسیر حرکت گلوله برابر $۱m$ (طول نخ) است و دورهٔ حرکت گلوله را از رابطهٔ $t=nT$ به‌دست می‌آوریم: $t=nT \xrightarrow[n=۳۰]{t=۱min=۶۰s} ۶۰=۳۰\times T \Rightarrow T=۲s$

گام دوم شتاب مرکزگرای گلوله را از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ حساب می‌کنیم: $a=\frac{۴\pi^۲}{۲^۲}\times ۱=\pi^۲\simeq ۱۰\,m/s^۲$

۷۵۸. گزینه ۳ از رابطهٔ شتاب مرکزگرا برحسب دوره و شعاع مدار یعنی $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$، استفاده می‌کنیم: $r=۳۶۰۰۰km=۳۶\times ۱۰^۶ m$

$T=۲۴h=۲۴\times ۳۶۰۰s$

$$a=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\times r \Rightarrow a=\frac{۴\times ۱۰\times ۳۶\times ۱۰^۶}{(۲۴\times ۳۶\times ۱۰^۲)^۲}=۱/۹\times ۱۰^{-۱} m/s^۲\simeq ۰/۲m/s^۲$$

۷۵۹. گزینه ۲ **گام اول** تندی حرکت زمین به دور خورشید را برحسب m/s و شعاع مدار زمین را برحسب m می‌نویسیم:

$$v=۳۰\,km/s \Rightarrow v=۳\times ۱۰^۴\,m/s \quad , \quad r=۱/۵\times ۱۰^۸ km=۱/۵\times ۱۰^{۱۱}m$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$، شتاب مرکزگرای زمین را به‌دست می‌آوریم: $a_c=\frac{v^۲}{r}=\frac{(۳\times ۱۰^۴)^۲}{۱/۵\times ۱۰^{۱۱}}=۶\times ۱۰^{-۳}\,m/s^۲$

۷۶۰. گزینه ۱ عقربهٔ ثانیه‌شمار در هر $۶۰s$ یک بار می‌چرخد، پس دورهٔ حرکت آن $T=۶۰s$ است. برای محاسبهٔ شتاب مرکزگرای نوک عقربه از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\times r$ استفاده می‌کنیم: $a_c=\frac{۴\times ۱۰}{(۶۰)^۲}\times\frac{۹}{۱۰۰}\Rightarrow a=۱۰^{-۳}\,m/s^۲$

۷۶۱. گزینه ۴ **گام اول** دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار $T_h=۱۲\,h$ و دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار $T_{min}=۱h$ است. (زیرا عقربهٔ ساعت‌شمار هر $۱۲\,h$ و عقربهٔ دقیقه‌شمار هر یک ساعت، یک دور می‌چرخند.)

گام دوم از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ استفاده می‌کنیم و نسبت شتاب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r \xrightarrow{r_{min}=r_h} \frac{a_{min}}{a_h}=(\frac{T_h}{T_{min}})^۲ \Rightarrow \frac{a_{min}}{a_h}=(\frac{۱۲}{۱})^۲=۱۴۴$$

۷۶۲. گزینه ۴ از رابطهٔ شتاب مرکزگرا با تندی جسم یعنی $a_c=\frac{v^۲}{r}$، می‌توان نسبت مورد نظر را به‌دست آورد.

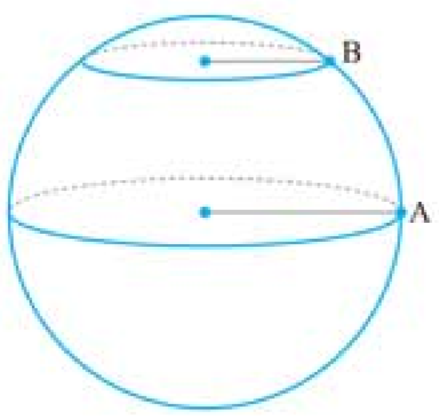
$$a_c=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\times\frac{r_۱}{r_۲}\Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱}=۳^۲\times\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۱۸$$

۷۶۳. گزینه ۲ **گام اول** از رابطهٔ شتاب مرکزگرا با دورهٔ حرکت یعنی $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=(\frac{T_۱}{T_۲})^۲\times\frac{r_۲}{r_۱}\xrightarrow[T_۲=۳T_۱]{r_۲=r_۱}\frac{a_۲}{a_۱}=(\frac{۱}{۳})^۲\Rightarrow\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱}{۹}$$

گام دوم درصد تغییرات شتاب مرکزگرا را با تفضیل در صورت به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱}{۹}\to\frac{a_۲-a_۱}{a_۱}=\frac{۱-۹}{۹}\Rightarrow\frac{\Delta a}{a_۱}=\frac{-۸}{۹}\simeq -۰/۸۸۸\Rightarrow\frac{\Delta a}{a_۱}\%=-۸۹\%$$



۷۶۴. گزینه ۱ **گام اول** می‌دانیم که همهٔ نقاط روی کرهٔ زمین، هم‌زمان یک دور کامل حول محور زمین می‌چرخند، پس دورهٔ حرکت همهٔ نقاط یکسان و برابر یک شبانه‌روز است.

گام دوم برای مقایسهٔ شتاب مرکزگرای نقاطی مانند A (در استوا) و B (نقطهٔ شمالی) از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ استفاده می‌کنیم. چون دورهٔ حرکت A و B یکسان است، می‌توان برای مقایسهٔ شتاب مرکزگرای A و B نوشت: $T_A=T_B\to\frac{a_A}{a_B}=\frac{r_A}{r_B}\xrightarrow{r_A>r_B}a_A>a_B$

دقت دارید که اگر از استوا به طرف نقاط شمالی حرکت کنیم، شعاع دایره‌ای که نقطه روی آن حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد (به دلیل چرخش زمین به دور خودش) کم‌تر می‌شود، از این رو $r_A>r_B$ است.

۷۶۵. گزینه ۱ **گام اول** از درس‌نامه می‌دانیم که اگر جسمی در مدت t ثانیه زاویهٔ مرکزی θ را طی کند، می‌توان از رابطهٔ $\frac{\theta}{۳۶۰}=\frac{t}{T}$ استفاده کرد و دورهٔ حرکت جسم یعنی T را به‌دست آورد: $\theta=۷۲^\circ , t=۰/۲s\Rightarrow\frac{۷۲^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۰/۲}{T}\Rightarrow T=۱s$

گام دوم از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$، شتاب مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم: $r=۵۰cm=۰/۵m$

$$a=\frac{۴\pi^۲}{(۱)^۲}\times ۰/۵\Rightarrow a=۲۰\,m/s^۲$$

۷۶۶. گزینه ۱ **گام اول** همان‌طور که در درس‌نامه مطرح شد، نسبت طی شدن زاویه مرکزی θ برحسب رادیان به ۲π، برابر نسبت مدت زمان طی کردن زاویه (t) به دورهٔ حرکت (T) است:

$$\frac{\theta(rad)}{۲\pi}=\frac{t}{T}\Rightarrow\frac{۱۰(rad)}{۲\pi(rad)}=\frac{۱}{T}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۵}s$$

گام دوم از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ شتاب مرکزگرای گلوله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_c=\frac{۴\pi^۲}{(\frac{\pi}{۵})^۲}\times ۰/۵\Rightarrow a=۵۰\,m/s^۲$$

۷۶۷. گزینه ۴ **گام اول** همان‌طور که در درس‌نامه مطرح کردیم، در حرکت دایره‌ای یکنواخت نسبت مسافت طی‌شده در یک دایره (l) به محیط آن برابر نسبت مدت زمان طی شدن مسافت به دورهٔ‌حرکت است.

$$\frac{l}{۲\pi r}=\frac{t}{T}$$

با جای‌گذاری $t=۰/۲s$ و $l=\frac{\pi}{۱۰}m$ و $r=۲m$ در این رابطه، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{\pi}{۱۰}}{۲\pi\times ۲}=\frac{۰/۲}{T}\Rightarrow T=۸s$$

گام دوم از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ استفاده می‌کنیم و شتاب مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم:

$$a_c=\frac{۴\pi^۲}{۸^۲}\times ۲\xrightarrow{\pi^۲\simeq ۱۰}a=۱/۲۵\,m/s^۲$$

۷۶۸. گزینه ۱ **گام اول** با استفاده از رابطهٔ $\frac{l}{۲\pi r}=\frac{t}{T}$، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$l=r\Rightarrow\frac{r}{۲\pi r}=\frac{\frac{۱}{\pi}}{T}\Rightarrow T=۲s$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$، می‌توان نوشت:

$$a_c=\frac{۴\pi^۲}{۲^۲}r=\pi^۲r$$

۷۶۹. گزینه ۳ **گام اول** از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم. چون شتاب مرکزگرا ۰/۴۴ افزایش یافته است، یعنی $a_۲=a_۱+۰/۴۴a_۱=۱/۴۴a_۱$ است.

$$\xrightarrow{r_۱=r_۲}\frac{a_۲}{a_۱}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\Rightarrow\frac{۱/۴۴a_۱}{a_۱}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\Rightarrow ۱/۲=\frac{v_۲}{v_۱}$$

گام دوم درصد تغییر سرعت را از رابطهٔ $\frac{\Delta v}{v_۱}\times ۱۰۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=۱/۲\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{v_۲-v_۱}{v_۱}=\frac{۱/۲-۱}{۱}\Rightarrow\frac{\Delta v}{v_۱}=۰/۲\times ۱۰۰=۲۰\%$$

۷۷۰. گزینه ۲ **گام اول** از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم و در هر دو پیچ مقدار شتاب مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم:

$$v=۷۲\,km/h\Rightarrow v=۷۲\div ۳/۶=۲۰\,m/s$$

$$r_۱=۲۰۰m\Rightarrow a_۱=\frac{۲۰^۲}{۲۰۰}=۲\,m/s^۲\quad,\quad r_۲=۴۰۰m\Rightarrow a_۲=\frac{۲۰^۲}{۴۰۰}=۱\,m/s^۲$$

گام دوم شتاب $a_۲$ کاهش یافته است و نصف شتاب $a_۱$ است. برای محاسبهٔ درصد تغییرات از رابطهٔ $\frac{\Delta a}{a_۱}\times ۱۰۰$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{a_۲-a_۱}{a_۱}=\frac{۱-۲}{۲}=-۰/۵\Rightarrow\frac{\Delta a}{a_۱}\times ۱۰۰=-۵۰\%$$

۷۷۱. گزینه ۲ اگر حرکت سیاره به دور خورشید را حرکت دایره‌ای یکنواخت در نظر بگیریم، می‌توانیم از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\times r$ نسبت مورد نظر را به‌دست آوریم:

$$r_A=۲r_B\,,\,T_A=۲\sqrt{۲}T_B\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=(\frac{T_B}{T_A})^۲\times\frac{r_A}{r_B}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=(\frac{T_B}{۲\sqrt{۲}T_B})^۲\times\frac{۲r_B}{r_B}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{۱}{۴}$$

۷۷۲. گزینه ۲ هر یک از عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_A}{a_B}=(\frac{v_A}{v_B})^۲\times(\frac{r_B}{r_A})\xrightarrow[r_A=۳r_B]{v_A=۳v_B}\frac{a_A}{a_B}=(\frac{۳}{۱})^۲(\frac{۱}{۳})=۳$$

بنابراین عبارت (الف) نادرست است.

ب) از رابطهٔ $v=\frac{۲\pi}{T}r$ استفاده می‌کنیم:

$$T=\frac{۲\pi r}{v}\to\frac{T_A}{T_B}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{v_B}{v_A}=۳\times\frac{۱}{۳}=۱$$

پس عبارت (ب) درست است.

پ) از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{v_A}{v_B})^۲\xrightarrow{m_A=\frac{۱}{۹}m_B}\frac{K_A}{K_B}=\frac{۱}{۹}\times ۳^۲=۱$$

پس عبارت (پ) درست است.

ت) از رابطهٔ $p=mv$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{p_A}{p_B}=\frac{m_Av_A}{m_Bv_B}=\frac{۱}{۹}\times ۳=\frac{۱}{۳}$$

پس عبارت (ت) نادرست است.

۷۷۳. گزینه ۴ **گام اول** از رابطهٔ شتاب مرکزگرا با سرعت یعنی $a_c=\frac{v^۲}{r}$ استفاده می‌کنیم. اما می‌دانیم در این رابطه بزرگی شتاب مرکزگرا را باید در نظر بگیریم.

$\vec a=۳\vec i+۴\vec j\Rightarrow a=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵\,m/s^۲$

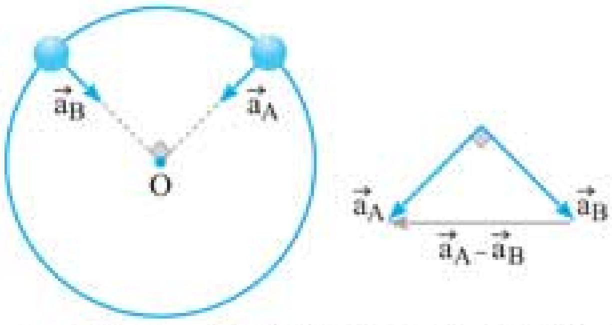
گام دوم رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ را به‌کار می‌بریم:

$۵=\frac{v^۲}{۲}\Rightarrow v=\sqrt{۱۰}\,m/s$

۷۷۴. گزینه ۲ **یادآوری:** حاصل تفریق دو بردار عمود بر هم $\vec A$ و $\vec B$ برابر است با:

$R'=\sqrt{A^۲+B^۲}$

می‌دانیم که شتاب کمیتی برداری است و بردار شتاب مرکزگرا همواره به طرف مرکز دایرهٔ مسیر است. مطابق شکل‌های روبه‌رو، شتاب‌های $\vec a_A$ و $\vec a_B$ بر هم عمودند. بنابراین چون اندازهٔ آن‌ها یکسان است، می‌توانیم تغییر شتاب مرکزگرا را از حاصل تفریق بردار $\vec a_A-\vec a_B$ به‌دست آوریم:



$$|\vec a_A-\vec a_B|=\sqrt{a_A^۲+a_B^۲}\xrightarrow{a_A=a_B=a}|\vec a_A-\vec a_B|=\sqrt{۲}a$$

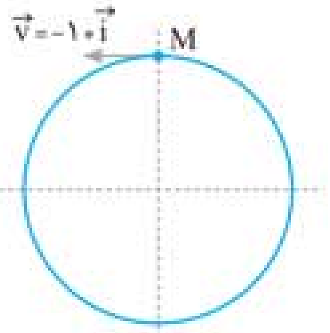
۷۷۵. گزینه ۱ **گام اول** در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بزرگی سرعت (تندی جسم) مقدار ثابتی است، بنابراین در این حرکت تندی جسم برابر است با:

$\vec v=-۱۰\vec i\Rightarrow v=۱۰\,m/s$

گام دوم بزرگی شتاب مرکزگرای جسم نیز از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ به‌دست می‌آید و آن را حساب می‌کنیم:

$r=۲m\Rightarrow a=\frac{۱۰^۲}{۲}=۵۰\,m/s^۲$

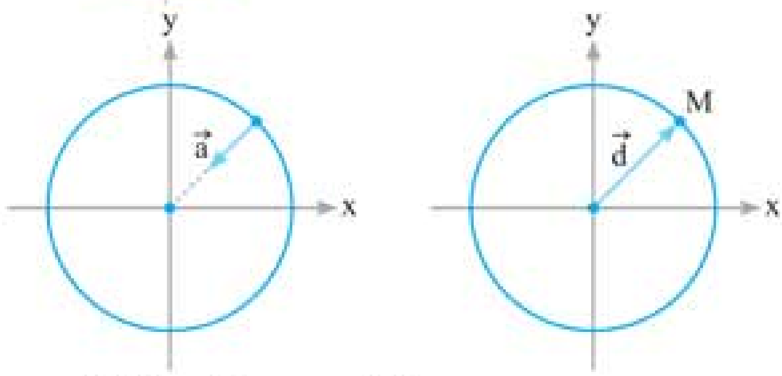
گام سوم چون شتاب مرکزگرا همواره عمود بر سرعت و به طرف مرکز دایره است و در لحظهٔ مورد نظر سرعت $\vec v=-۱۰\vec i\,m/s$ می‌باشد، در این لحظه جسم باید در نقطهٔ M (مطابق شکل) باشد تا بردار سرعت آن مماس بر مسیر و در جهت منفی محور x باشد.



گام چهارم شتاب مرکزگرا باید عمود بر سرعت باشد؛ یعنی یا در جهت محور $y(+\vec j)$ یا خلاف جهت محور $y(-\vec j)$ است. اما چون باید به سمت مرکز دایره باشد، در جهت $-\vec j$ می‌باشد.

$a=۵۰\,m/s^۲\Rightarrow\vec a=-۵۰\vec j\,m/s^۲$

۷۷۶. گزینه ۳ **تذکر:** در حرکت بر مسیر دایره‌ای، اگر مبدأ مکان را مرکز دایره در نظر بگیریم، بردار مکان هر نقطه مانند M، از مبدأ یعنی مرکز دایره به نقطهٔ M که روی دایره است، رسم می‌شود. یعنی بردار مکان همواره از مرکز به سمت نقطه‌ای روی محیط دایره است و چون بردار شتاب مرکزگرا از نقطه‌ای روی دایره (جسم در آن نقطه است) به سمت مرکز دایره می‌باشد، جهت بردار شتاب مخالف جهت بردار مکان است.



گام اول بزرگی شتاب را از رابطهٔ $a_c=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ به‌دست می‌آوریم:

$a=\frac{۴\times۱۰}{۲^۲}\times۰/۴=۴\,m/s^۲$

گام دوم جهت بردار مکان جسم یعنی زاویهٔ $\vec d$ با محور x را حساب می‌کنیم:

$tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۰}}{۰/۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$

گام سوم اکنون مؤلفه‌های شتاب را در راستای x و y به‌دست می‌آوریم:

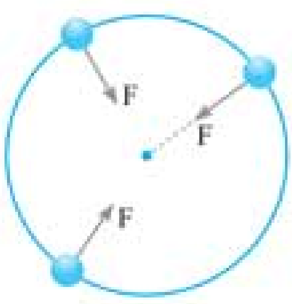
$a_x=a\cos۶۰^\circ=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$

$a_y=a\sin۶۰^\circ=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$

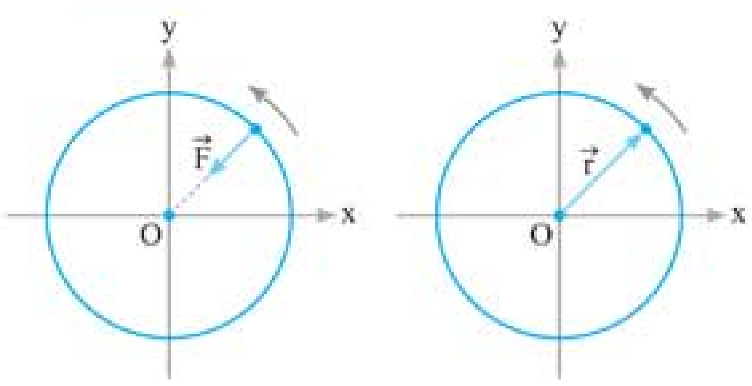
بنابراین بردار شتاب دو مؤلفه در خلاف جهت x و y دارد و برابر است با:

$\vec a=-۲\vec i-۲\sqrt{۳}\,\vec j$

۷۷۷. گزینه ۴ در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی خالص وارد بر جسم به طرف مرکز دایره است. هر چند اندازهٔ نیرو ثابت است، اما جهت آن در هر لحظه تغییر می‌کند.



۷۷۸. گزینه ۳ در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اگر مبدأ مکان در مرکز دایرهٔ مسیر باشد، بردار مکان به طرف جسم است اما بردار نیروی خالص وارد بر جسم به طرف مرکز یعنی مبدأ مکان است و در خلاف جهت آن می‌باشد.



۷۷۹. گزینه ۳ در حرکت دایره‌ای یکنواخت، باید بر جسم دوران‌کننده نیرویی به سمت داخل دایره و به سمت مرکز آن اثر کند تا این نیرو شتاب مرکزگرا را برای جسم فراهم کند و شتاب مرکزگرا جهت سرعت جسم را تغییر دهد و آن را در مسیر دایره نگه دارد.

۷۸۰. گزینه ۲ از رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F=m\frac{v^2}{r}$ استفاده می‌کنیم. در این رابطه تندی اتومبیل $v=36km/h\div 3/6=10m/s$ و شعاع مسیر دایره (پیچ جاده) برابر $r=100m$ است:

$$F=800\times\frac{10^2}{100}=800N$$

۷۸۱. گزینه ۴ گام اول چون جسم با $30rpm$ یعنی ۳۰ دور بر دقیقه دوران می‌کند، می‌توانیم رابطهٔ نیروی مرکزگرا را به‌کار بریم؛ زیرا جسم در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کند. اما ابتدا دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم. یادتان هست که در رابطهٔ $t=nT$، t مدت زمان مربوط به n دور چرخش و T دورهٔ جسم است.

$$t=nT\xrightarrow[n=30\,\text{دور}]{t=1min=60s}60=30T\Rightarrow T=2s$$

گام دوم رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ را به‌کار می‌بریم:

$$F=0/1\times\frac{4\pi^2}{2^2}\times 0/5\xrightarrow{\pi^2\simeq 10}F=\frac{1}{2}=0/5N$$

۷۸۲. گزینه ۲ گام اول دورهٔ حرکت وزنه را قبل از رها شدن وزنه از رابطهٔ $t=nT$ به‌دست می‌آوریم:

$$t=nT\xrightarrow[n=120\,\text{دور}]{t=1\times 60=60s}60=120\times T=T=0/5s$$

گام دوم برای محاسبهٔ نیروی مرکزگرا، چون دورهٔ حرکت و شعاع مسیر دایره را می‌دانیم، از رابطه $F=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ استفاده می‌کنیم:

$$F=5\times\frac{4\pi^2}{(0/5)^2}\times 1/5\Rightarrow F=1200N$$

۷۸۳. گزینه ۴ می‌توانیم از رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ استفاده کنیم و نسبت نیروها را در دو حالت به‌دست آوریم:

$$T_2=2T_1\ ,\ r_2=3r_1$$

$$\frac{F_2}{F_1}=(\frac{T_1}{T_2})^2\times\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow\frac{F_2}{F_1}=(\frac{T_1}{2T_1})^2\times(\frac{3r_1}{r_1})\Rightarrow\frac{F_2}{F_1}=\frac{3}{4}$$

۷۸۴. گزینه ۲ چون کمیت‌های جرم و تندی تغییر کرده‌اند، برای محاسبه نسبت نیروهای مرکزگرا در دو حالت از رابطهٔ $F=m\frac{v^2}{r}$ استفاده می‌کنیم:

$$m_2=\frac{1}{2}m_1\ ,\ v_2=3v_1$$

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{m_2}{m_1}\times(\frac{v_2}{v_1})^2\times\frac{r_1}{r_2}\xrightarrow{r_1=r_2}\frac{F_2}{F_1}=(\frac{\frac{1}{2}m_1}{m_1})\times(\frac{3v_1}{v_1})^2\Rightarrow\frac{F_2}{F_1}=\frac{9}{2}$$

۷۸۵. گزینه ۳ چون دوره، شعاع و جرم جسم تغییر کرده است، برای محاسبهٔ نسبت نیروی مرکزگرا در حالت دوم به حالت اول از رابطهٔ $F=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{m_2}{m_1}\times(\frac{T_1}{T_2})^2\times\frac{r_2}{r_1}\xrightarrow[r_2=2r_1]{T_2=2T_1\ ,\ m_2=\frac{1}{3}m_1}\frac{F_2}{F_1}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^2\times 2=\frac{1}{6}$$

۷۸۶. گزینه ۴ نیروی مرکزگرا همواره بر حرکت جسم عمود است و بنابر تعریف کار، نیروی مرکزگرا بر جسم کار انجام نمی‌دهد. به عبارت دیگر می‌دانیم هنگامی یک نیرو کار انجام می‌دهد که جسم در راستای اثر نیرو جابه‌جا شود و چون در مسیر دایره‌ای، جسم در راستای شعاع جابه‌جا نمی‌شود، کار نیروی مرکزگرا نیز صفر است.

۷۸۷. گزینه ۱ از رابطهٔ نیروی مرکزگرا $F_{net}=m\frac{v^2}{r}$ و انرژی جنبشی یعنی $K=\frac{1}{2}mv^2$ می‌توان استفاده کرد و نسبت این دو را نوشت:

$$\frac{K}{F}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{mv^2}{r}}=\frac{r}{2}=\frac{40}{2}=20$$

۷۸۸. گزینه ۴ گام اول می‌دانیم که انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ و نیروی مرکزگرا از رابطهٔ $F=m\frac{v^2}{r}$ یا $F=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ به‌دست می‌آید. چون شعاع جسم و انرژی جنبشی آن معلوم هستند، می‌توان نوشت:

$$\frac{K}{F}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{m\frac{v^2}{r}}=\frac{r}{2}\Rightarrow\frac{K}{F}=\frac{r}{2}$$

گام دوم با به‌کار بردن داده‌های $r=10m$ و $K=20J$ می‌توان نیروی مرکزگرا را حساب کرد:

$$\frac{20}{F}=\frac{10}{2}\Rightarrow F=4N$$

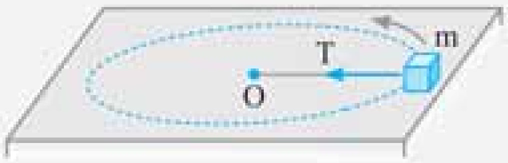
۷۸۹. گزینه ۱ توجه کنید که تندی جرم m و $2m$ یکسان است، زیرا دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند و حرکت تسمهٔ مشترک آن‌ها سبب می‌شود تندی هر ذره‌ای روی محیط قرقره‌ها با یکدیگر برابر باشد. بنابراین می‌توانیم از رابطهٔ $F=m\frac{v^2}{r}$ استفاده کنیم و نسبت نیروی مرکزگرای دو ذره را به‌دست آوریم:

$$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow\frac{F_2}{F_1}=\frac{m_2}{m_1}\times(\frac{v_2}{v_1})^2\times\frac{r_1}{r_2}\xrightarrow[m_2=2m_1]{v_2=v_1\ ,\ r_2=2r_1}\frac{F_2}{F_1}=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$$

۵ معرفی برخی از نیروهایی که نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کنند

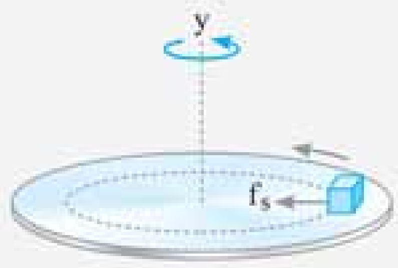
در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بر جسمی که در حال حرکت بر مسیر دایره است، ممکن است نیروهای گوناگونی اثر کند و این نیروها در راستاهای گوناگون باشند. اما در حرکت دایره‌ای یکنواخت، برایند نیروهای وارد بر جسم یعنی نیروی خالص وارد بر جسم باید به سمت مرکز دایرهٔ مسیر حرکت جسم باشد.

به عبارت دیگر در هر حرکت دایره‌ای یکنواخت، در اولین گام برای حل مسئله باید نیروهای وارد بر جسم را بشناسیم و تعیین کنیم چه نیروهایی یا چه مؤلفه‌هایی از آن‌ها به سمت مرکز دایره بر جسم وارد می‌شوند. این نیروی خالص، تأمین‌کنندهٔ نیروی مرکزگرایی است که باید جسم را در مسیر دایره نگه دارد. در شکل‌های زیر، برخی از نیروهایی که نقش نیروی مرکزگرا را در حرکت دایره‌ای یکنواخت جسم دارند، معرفی شده است.



جسم حول نقطهٔ O می‌چرخد و نیروی کشش نخ، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

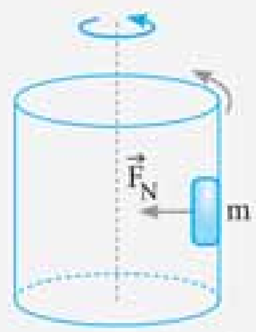
$$F_{net} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow T = m\frac{v^2}{r}$$



جسمی روی یک دیسک دوار قرار دارد. نیروی مرکزگرای جسم را نیروی اصطکاک ایستایی تأمین می‌کند.

در حرکت الکترون به دور هستهٔ اتم، نیروی جاذبهٔ الکتریکی هسته بر الکترون، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

$$F_e = m\frac{v^2}{r}$$

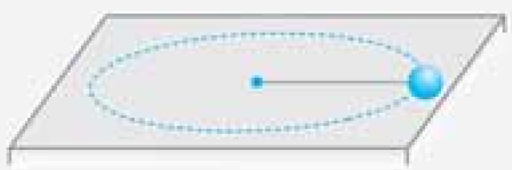


در حرکت دورانی استوانه قائم، نیروی عمودی سطح بر جسم نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

در حرکت ماهواره به دور زمین، نیروی گرانش زمین بر ماهواره نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

در ادامهٔ بحث، مثال‌هایی از برخی نیروها آورده‌ایم، آن‌ها را به دقت مطالعه کنید؛ زیرا نکات مهمی از موارد آموزشی را دربرمی‌گیرند.

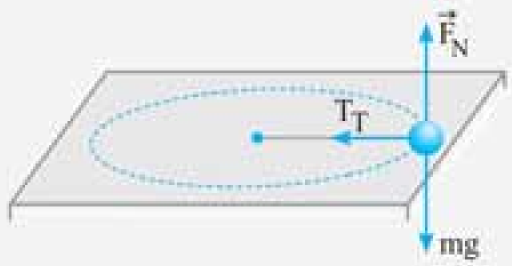
مثال: گلوله‌ای به جرم ۲۰g را به نخی به طول ۵۰cm می‌بندیم و آن را روی میز به دوران در می‌آوریم. اگر نخ با نیروی ۱۰N پاره شود، کم‌ترین دورهٔ حرکت گلوله چند ثانیه می‌تواند باشد؟ (اصطکاک ناچیز و $\pi^2 \simeq 10$ است.)



۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۲ گام اول نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید که در راستای عمود بر سطح (عمود بر شعاع مسیر دایره) دو نیرو بر جسم وارد می‌شود.

۱ نیروی وزن (mg) ۲ نیروی عمودی سطح بر جسم (F_N) و در راستای شعاع دایره، نیروی کشش نخ به سمت مرکز بر جسم اثر می‌کند.



گام دوم در راستای عمود بر دایرهٔ مسیر، برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است.

$$F_N - mg = 0$$

گام سوم در راستای شعاع دایره، فقط نیروی T_T بر جسم اثر می‌کند و این نیرو، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای را فراهم می‌کند. یعنی اگر نخ پاره شود، بنابر قانون اول نیوتون جسم مماس بر دایره و در مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنابراین می‌توان از قانون دوم نیوتون استفاده کرد و نوشت:

$$F_{net} = ma \xrightarrow[F_{net}=T_T]{a=\frac{v^2}{r}} T_T = m\frac{v^2}{r} \quad \text{یا} \quad T_T = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

گام چهارم چون باید کم‌ترین دورهٔ ممکن را به‌دست آوریم، از رابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:
دقت کنید هر قدر گلوله سریع‌تر بچرخد، تندی بیشتر و دورهٔ کم‌تر خواهد داشت و کشش نخ بیشتری برای نگه داشتن گلوله در مسیر دایره لازم است. از این رو به ازای حداقل دوره، بیشینهٔ نیروی قابل تحمل برای نخ ایجاد می‌شود.

$$T_{T_{max}} = m\left(\frac{4\pi^2}{T_{min}^2}\right)r \xrightarrow{T_{T_{max}}=10N} 10 = 0/02\times\frac{4\pi^2}{T_{min}^2}\times 0/5 \Rightarrow T_{min}=0/2s$$

مرور بر چگونگی پاسخ‌دهی به مسائل نیروهای حرکت دورانی؛ برای بررسی نیروهای وارد بر جسمی که حرکت دورانی یکنواخت دارد، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: نیروهای وارد بر جسم را تعیین و رسم می‌کنیم.

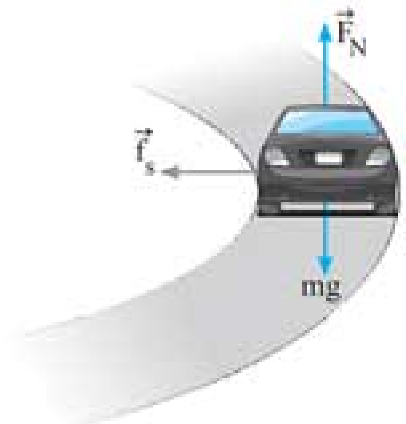
مرحلهٔ دوم: نیروها را در دو راستای عمود بر هم در نظر می‌گیریم: (۱) راستای عمود بر شعاع دایرهٔ مسیر (۲) راستای شعاع دایرهٔ مسیر

مرحلهٔ سوم: برایند نیروهای وارد بر جسم را در راستای عمود بر شعاع برابر صفر و برایند نیروهای وارد بر جسم را در راستای شعاع برابر $(m\frac{v^2}{r})$ یا $(m\frac{4\pi^2}{T^2}r)$ قرار می‌دهیم.

مرحلهٔ چهارم: از معادله‌های به‌دست آمده در مرحلهٔ سوم، مجهول مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

پاسخ‌های تشریحی

۷۹۰. (گزینهٔ ۳) **گام اول** نیروهای وارد بر خودرو را در شکل مقابل ملاحظه می‌فرمایید. نیروهای F_N و mg در راستای عمود بر شعاع دایره و نیروی اصطکاک ایستایی f_s به سمت مرکز دایره بر خودرو اثر می‌کند. در راستای عمود بر شعاع (و جاده) برایند نیروها صفر است و برای راستای شعاع دایره نیز نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.



$$\begin{cases} f_s = m\frac{v^2}{r} & \text{در راستای شعاع:} \\ F_N - mg = 0 & \text{در راستای عمود بر شعاع:} \end{cases}$$

گام دوم برای محاسبهٔ نیروی مرکزگرا می‌توان از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{v^2}{r}$ استفاده کرد.

$$36\,km/h \div 3/6 = 10\,m/s$$

$$F_{net} = 800\times\frac{10^2}{100} = 800N$$

گام سوم برای این‌که بیشترین تندی خودرو را حساب کنیم، باید توجه کنید که هر قدر تندی خودرو بیشتر باشد، نیروی مرکزگرای بیشتری لازم است تا خودرو را در مسیر پیچ نگه دارد؛ یعنی نیروی اصطکاک ایستایی بیشتر می‌شود اما می‌دانیم بیشینه‌ای برای نیروی اصطکاک ایستایی وجود دارد که برابر $f_{s,max} = \mu_s F_N$ است. بنابراین مقدار $F_N = mg$ را در نظر می‌گیریم و در رابطهٔ $f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r}$ قرار می‌دهیم.

$$\mu_s F_N = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow{F_N = mg} \mu_s mg = m\frac{v_{max}^2}{r} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$$

یعنی بیشترین تندی که بتوان به‌طور ایمن در پیچ جاده حرکت کرد، از رابطهٔ $v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$ مشخص می‌شود و برای این سؤال برابر است با:

$$v_{max} = \sqrt{0/2\times 100\times 10} = 10\sqrt{2}\ m/s$$

نکته: بیشینهٔ سرعت خودرو در پیچ جاده به جرم خودرو بستگی ندارد و به ضریب اصطکاک ایستایی و شعاع جاده بستگی دارد. $v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$
به همین دلیل در اتوبان‌ها شعاع پیچ‌ها را بزرگ در نظر می‌گیرند تا حرکت در آن‌ها با سرعت بیشتری امکان‌پذیر باشد.

۷۹۱. (گزینهٔ ۲) در این حرکت نیروی الکتریکی هسته بر الکترون یعنی $F_e = k\frac{e^2}{r^2}$ نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند (بار پروتون و الکترون را e در نظر گرفته‌ایم). نیروی F_e را برابر نیروی مرکزگرا قرار می‌دهیم.

$$k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \to v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = e\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

۷۹۲. (گزینهٔ ۲) در این حالت، نیروی کشش نخ بر گلوله، نیروی مرکزگرای لازم برای تغییر جهت سرعت گلوله و نگه داشتن گلوله در مسیر دایره را تأمین می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

ملاحظه می‌شود کشش نخ متناسب با مجذور تندی گلوله است.

۷۹۳. (گزینهٔ ۲) **گام اول** چون گلوله در هر ثانیه یک دور می‌چرخد، دورهٔ حرکت گلوله برابر یک ثانیه است.

گام دوم از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ نیروی مرکزگرا را حساب می‌کنیم. این همان نیروی کشش نخ (T_T) است.

$$T_T = m\frac{4\pi^2}{T^2}r = \frac{200}{1000}\times\frac{4\pi^2}{1^2}\times\frac{25}{100} \Rightarrow T_T = 2N$$

۷۹۴. گزینه ۴ **گام اول** طول فنر $۴\,cm$ تغییر کرده است و شعاع دایره نیز $۴۰\,cm$ است.

گام دوم نیروی کشش فنر، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای جسم را فراهم می‌کند.

$$F = m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow{F=kx} kx = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow ۴۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰} = ۱\times\frac{v^۲}{۰/۴} \Rightarrow v^۲ = ۶/۴ \Rightarrow v = ۸\sqrt{۰/۱}\ m/s$$

۷۹۵. گزینه ۱ **گام اول** در این حالت، نیروی مرکزگرا توسط نیروی فنر تأمین می‌شود و چون جسم در هر دقیقه ۱۲۰ دور می‌چرخد، می‌توان دورهٔ حرکت را از رابطهٔ $t = nT$ به‌دست آورد:

$$t = nT \xrightarrow[n=۱۲۰\text{دور}]{t=۱\times۶۰=۶۰s} T = \frac{۶۰}{۱۲۰} = ۰/۵\,s$$

گام دوم از رابطهٔ $F = m\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ و $F = kx$ می‌توان نوشت:

$$kx = m\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r \xrightarrow[T=۰/۵s,\,r=۱m]{k=۸۰۰\,N/m} ۸۰۰x = \frac{۲\times۴\times۱۰}{(۰/۵)^۲}\times۱ \Rightarrow x = ۰/۴m \Rightarrow x = ۴۰cm$$

۷۹۶. گزینه ۳ **گام اول** در مرحلهٔ اول نیروی وزن وزنه برابر نیروی کشش فنر است.

$$F_e = kx = mg$$

گام دوم در مرحلهٔ دوم که وزنه حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، چون طول فنر برابر حالت اول است، می‌توان نتیجه گرفت که نیروی کشش فنر در این حالت نیز برابر وزن گلوله است و چون در حالت دوم نیروی کشش فنر، نیروی مرکزگرا را فراهم می‌کند، می‌توان از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$ و $F_e = kx = mg$ و برابر قرار دادن آن‌ها، تندی جسم را به‌دست آورد.

$$mg = m\frac{v^۲}{r} \to v^۲ = rg = ۰/۴\times۱۰ \Rightarrow v = ۲\,m/s$$

(۱)

(۲)

۷۹۷. گزینه ۴ **گام اول** در حالت اول (شکل ۱) برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است و نیروهای وارد بر وزنه عبارت‌اند از: ۱ نیروی وزن (mg) و ۲ نیروی کشسانی فنر (F_e)؛ بنابر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$mg - F_e = ۰ \Rightarrow F_e = mg \quad (۱)$$

گام دوم در حالت دوم (شکل ۲)، جسم حرکت دایره‌ای یکنواخت با تندی v دارد و نیروی کشش فنر، نیروی مرکزگرای وارد بر جسم را تأمین می‌کند. چون طول فنر در حالت دوم برابر طول فنر در حالت اول است، نیروی کشسانی فنر در دو حالت یکسان است.

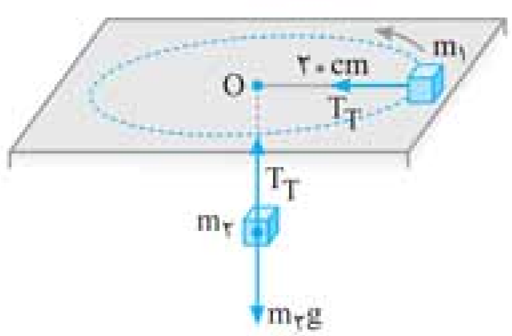
$$F_e = m\frac{v^۲}{r} \quad (۲)$$

گام سوم با مقایسه دو رابطهٔ (۱) و (۲) می‌توان رابطهٔ روبه‌رو را نوشت:

$$m\frac{v^۲}{r} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gr}$$

چون شعاع دایرهٔ مسیر برابر طول فنر یعنی L است، نتیجه می‌گیریم:

$$v = \sqrt{Lg}$$



۷۹۸. گزینه ۳ **گام اول** چون جسم $m_۲$ ساکن است، برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است. بر $m_۲$ دو نیرو وارد می‌شود: ۱ نیروی وزن $(m_۲g)$ و ۲ نیروی کشش نخ (T_T). پس برای جسم $m_۲$ می‌توان نوشت:

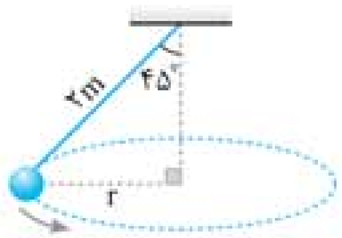
$$T_T - m_۲g = ۰ \Rightarrow T_T = m_۲g \quad (۱)$$

گام دوم جسم $m_۱$ در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است و نیروی کشش نخ، نیروی مرکزگرای جسم را تأمین می‌کند و چون دورهٔ حرکت معلوم است، می‌توان نوشت:

$$T_T = m_۱\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r \quad (۲)$$

گام سوم از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$m_۲g = m_۱\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r \Rightarrow \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۴\pi^۲}{T^۲g}r \xrightarrow{r=۰/۲m} \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۴\times۱۰}{(۰/۴)^۲\times۱۰}\times۰/۲ \Rightarrow \frac{m_۲}{m_۱} = ۵$$



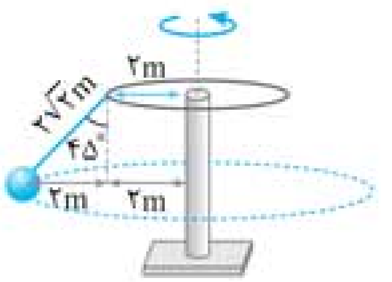
۷۹۹. گزینه ۲ **گام اول** با استفاده از این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۴۵°، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است، می‌توان نتیجه گرفت شعاع مسیر گلوله برابر است با:

$$r = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۲ = \sqrt{۲}\,m$$

گام دوم نیروی مرکزگرا را می‌توان از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$ یا $F_{net} = m\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ به‌دست آورد. در این سؤال راحت‌تر است که از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$، استفاده کنیم.

$$r = \sqrt{۲}m \to F = ۰/۵\times\frac{۴\pi^۲}{۲^۲}\times\sqrt{۲} \Rightarrow F = ۵\sqrt{۲}N$$

تذکر: در این سؤال مؤلفهٔ افقی T، یعنی $T\sin ۴۵^\circ$، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت گلوله در مسیر دایره را تأمین می‌کند.



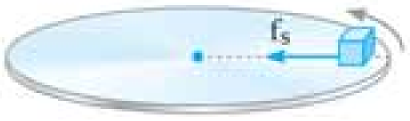
۸۰۰. گزینه ۲ **گام اول** در این سؤال چون تندی گلوله و جرم گلوله معلوم است، اگر شعاع دوران گلوله را مشخص کنیم، می‌توانیم از فرمول نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net}=m\frac{v^2}{r}$، استفاده کنیم. برای محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که گلوله دوران می‌کند، می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویهٔ $45°$، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است. بنابراین شعاع دایرهٔ مسیر برابر است با:

$$r=2+2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4m$$

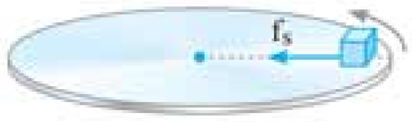
گام دوم از رابطهٔ $F_{net}=m\frac{v^2}{r}$ استفاده می‌کنیم:

$$F=2\times\frac{(\sqrt{40})^2}{4}=20N$$

گام سوم نیروی مرکزگرای لازم برای دوران گلوله را مؤلفه‌ای از نیروی کشش طناب که در راستای شعاع دوران است، تأمین می‌کند.



۸۰۱. گزینه ۳ نیروی اصطکاک ایستایی به سمت مرکز دایره بر جسم وارد می‌شود و آن را نسبت به دیسک ثابت نگه می‌دارد. گاهی این نیروی اصطکاک را نیروی اصطکاک ایستایی جانبی نیز می‌نامند.

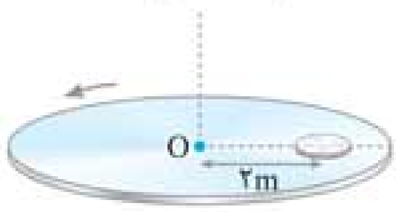


۸۰۲. گزینه ۴ در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت جسم همراه با صفحه را فراهم می‌کند.

$$f_s=m\frac{v^2}{r}$$

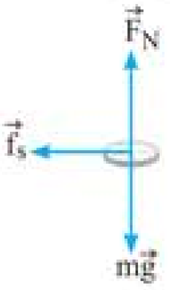
دقت کنید که r شعاع دوران جسم است. با جای‌گذاری $m=2kg$، $r=0/3m$ و $v=4\,m/s$ در این رابطه، نیروی اصطکاک ایستایی را به‌دست می‌آوریم:

$$f_s=2\times\frac{4^2}{0/3}=\frac{320}{3}N$$



۸۰۳. گزینه ۱ سکه در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است. نیروهای وارد بر سکه عبارت‌اند از:

۱ نیروی وزن (mg) ۲ نیروی عمودی سطح بر سکه (F_N) و نیروی اصطکاک ایستایی (f_s)



گام اول نیروهای وارد بر سکه را در دو راستای عمود بر هم، یکی راستای شعاع دایرهٔ مسیر حرکت و دیگری عمود بر شعاع مسیر حرکت در نظر می‌گیریم و از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم. سکه در راستای عمود بر شعاع شتاب ندارد و برایند نیروهای وارد بر آن صفر است و در راستای شعاع دایره، نیروی اصطکاک ایستایی به سمت مرکز دایره بر سکه وارد می‌شود و همین نیروی اصطکاک، نیروی مرکزگرای وارد بر آن را تأمین می‌کند.

$$\begin{cases} f_s=m\frac{4\pi^2}{T^2}r \\ F_N-mg=0 \end{cases}$$

گام دوم چون به ازای $r=2m$ سکه نمی‌لغزد، می‌توان دریافت به ازای $r=2m$ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه بر سکه وارد می‌شود.

$$\begin{cases} f_{s,max}=\frac{4\pi^2}{T^2}mr \\ F_N=mg \end{cases}\xrightarrow{f_{s,max}=\mu_s F_N}\mu_s mg=\frac{4\pi^2}{T^2}\times mr\Rightarrow\mu_s=\frac{4\pi^2 r}{T^2 g}$$

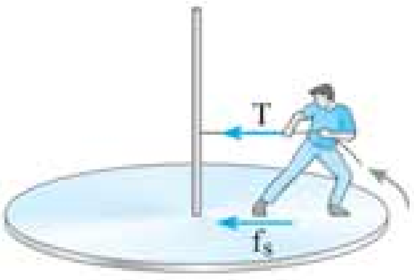
گام سوم مقدار دورهٔ حرکت را از رابطهٔ $T=\frac{t}{n}$ به‌دست می‌آوریم:

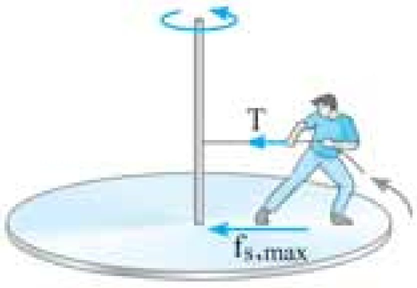
$$T=\frac{60s}{15}=4s$$

گام چهارم مقدار ضریب اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

$$\mu_s=\frac{4\pi^2}{4^2\times10}\times2\Rightarrow\mu_s=0/5$$

۸۰۴. گزینه ۴ در این حالت بسته به دوران دیسک و مقدار نیروی اصطکاک ایستایی، حالت‌های گوناگون می‌تواند وجود داشته باشد. فرض کنید ابتدا دیسک ساکن است. با حرکت دیسک، نیروی اصطکاک ایستایی که سطح دیسک بر شخص وارد می‌کند، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی شخص را فراهم می‌کند و نیروی کشش طناب صفر است. اما با افزایش تندی شخص و کاهش دورهٔ دوران، نیروی مرکزگرای بیشتری باید فراهم شود $(F_{net}=m\frac{v^2}{r})$ و نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد تا حالتی که اصطکاک ایستایی به بیشینهٔ مقدار خودش برسد و اگر باز هم تندی دیسک بیشتر شود، نیروی کشش طناب نیز بر شخص وارد می‌شود تا مجموع نیروی $f_{s,max}$ و کشش طناب، نیروی مرکزگرای لازم برای دوران شخص را فراهم کنند.





۸۰۵. گزینه ۳ **گام اول** در راستای شعاع دایرهٔ مسیر، بر شخص دو نیرو می‌تواند وارد شود: ۱ اصطکاک ایستایی ۲ کشش طناب. در این حالت، شرط این‌که کشش طناب وجود داشته باشد، این است که نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه کم‌تر از نیروی مرکزگرای شخص باشد.

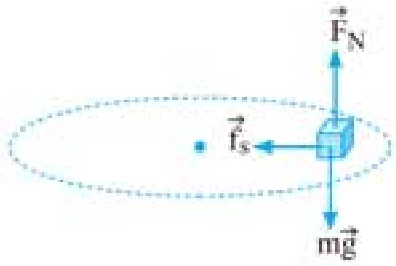
گام دوم نیروی مرکزگرا را از رابطهٔ $F_{net}=m\frac{v^2}{r}$ حساب می‌کنیم:

$$F=60\times\frac{5^2}{4}=375N$$

گام سوم نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه یعنی $f_{s,max}=\mu_s F_N$ را به‌دست می‌آوریم:

$$F_N=mg\Rightarrow f_{s,max}=0/4\times600=240N$$

گام چهارم چون نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی بیشتر از نیروی اصطکاک بیشینه است، پس باید نیروی کشش طناب $T=375-240=135N$ بر شخص به طرف مرکز وارد شود تا مجموع نیروی کشش طناب و اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرای وارد بر جسم را تأمین کنند.

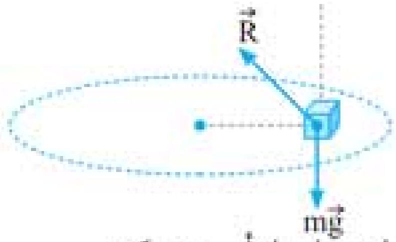


۸۰۶. پاسخ: (گزینه ۲) **گام اول** در حرکت جسم، سه نیرو بر جسم اثر می‌کند:
(۱) نیروی وزن $(m\vec{g})$ (۲) نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و (۳) نیروی اصطکاک ایستایی $(\vec{f}_s)$.
گام دوم نیروی f_s، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی آن را تأمین می‌کند و می‌توانیم با استفاده از فرمول نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net} = m\frac{v^2}{r}$، آن را به‌دست آوریم:

$$f_s = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow f_s = ۳\times\frac{۲^2}{۰/۳} = ۴۰N$$

گام سوم چون نیروی وارد شده از طرف سطح بر جسم مورد نظر است، از رابطهٔ $R=\sqrt{f_s^2+F_N^2}$، مقدار نیروی سطح بر جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_N = mg = ۳۰N \\ f_s = ۴۰N \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{۴۰^2+۳۰^2} = ۵۰N$$



تذکر: در ابتدای پاسخ این تست گفتیم سه نیرو بر جسم اثر می‌کند. اما در واقع درست این است که بگوییم دو نیرو بر جسم اثر می‌کند که عبارت‌اند از:
(۱) نیروی وزن که از طرف زمین بر جسم وارد می‌شود. (۲) نیروی سطح بر جسم یعنی R و همان‌طور که در درسنامهٔ نیروی سطح گفتیم f_s و F_N را می‌توان مؤلفه‌های R در نظر گرفت.

۸۰۷. (گزینه ۱) نیرویی اصطکاک جانبی که از سطح جاده بر اتومبیل وارد می‌شود و به سمت مرکز پیچ است، نیروی مرکزگرای اتومبیل را تأمین می‌کند.

۸۰۸. (گزینه ۳) **گام اول** نیروهای وارد بر خودرو در جادهٔ افقی عبارت‌اند از: (۱) نیروی وزن $(m\vec{g})$ (۲) نیروی عمودی سطح (F_N) (۳) نیروی اصطکاک ایستایی.
گام دوم همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، چون بیشترین سرعت مجاز خودرو را می‌توان آستانهٔ سُر خوردن آن در نظر گرفت، نتیجه می‌گیریم در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است و از رابطهٔ $f_{s,max} = \mu_s F_N$ به‌دست می‌آید و این نیرو، نیروی مرکزگرا را فراهم می‌کند.
گام سوم از رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net} = m\frac{v^2}{r}$ استفاده می‌کنیم و برابر $f_{s,max}$ قرار می‌دهیم:

$$f_{s,max} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_s F_N = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow{F_N=mg} \mu_s mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_s = \frac{v^2}{rg} \xrightarrow[r=۱۰۰m]{v=۳۶km/h\div ۳/۶=۱۰m/s} \mu_s = \frac{۱۰^2}{۱۰۰\times۱۰} = ۰/۱$$

تذکر: حداکثر سرعت مجاز خودرو به جرم آن بستگی ندارد.

۸۰۹. (گزینه ۳) با توجه به این‌که بیشترین سرعت مجاز خودرو در یک جاده با ضریب اصطکاک μ_s از رابطهٔ $v_{max}=\sqrt{\mu_s rg}$ به‌دست می‌آید، برای مقایسه و محاسبهٔ نسبت بیشترین سرعت در این دو پیچ به شعاع‌های $r_1 = ۱۰۰m$ و $r_2 = ۸۰m$، از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v_{max_1}}{v_{max_2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۸۰}} = \sqrt{۱/۲۵}$$

۸۱۰. (گزینه ۳) **گام اول** بنابر آن‌چه که در درس‌نامه مطرح شد، تندی مجاز یعنی بیشترین تندی یا سرعت ایمن برای خودرو در یک پیچ، از رابطهٔ $v_{max}=\sqrt{\mu_s rg}$ به‌دست می‌آید. برای دو حالت نسبت را می‌نویسیم:

$$\frac{v_{max\,\text{بارانی}}}{v_{max\,\text{خشک}}} = \sqrt{\frac{\mu_{s\,\text{بارانی}}}{\mu_{s\,\text{خشک}}}}$$

گام دوم ضریب اصطکاک جادهٔ بارانی را برحسب ضریب اصطکاک جادهٔ خشک به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_{s\,\text{بارانی}} = \mu_{s\,\text{خشک}} - ۰/۳۶\,\mu_{s\,\text{خشک}} = ۰/۶۴\,\mu_{s\,\text{خشک}}$$

گام سوم از نسبت سرعت‌های مجاز استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v_{max\,\text{بارانی}}}{v_{max\,\text{خشک}}} = \sqrt{\frac{۰/۶۴\,\mu_{s\,\text{خشک}}}{\mu_{s\,\text{خشک}}}} = ۰/۸$$

۸۱۱. (گزینه ۲) **گام اول** دقت کنید که نیروی اصطکاک ایستایی جعبه با سطح، نیروی مرکزگرای جعبه را فراهم می‌کند و نیروی اصطکاک ایستایی جاده بر لاستیک، نیروی مرکزگرای کامیون را تأمین می‌کند. برای این‌که جعبه سُر نخورد، نیروهای وارد بر جعبه را در نظر می‌گیریم.
گام دوم نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر بیشترین نیروی مرکزگرا است.

$$f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow[F_N=mg]{f_{s,max}=\mu_s F_N} \mu_s F_N = m\frac{v_{max}^2}{r} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu_s rg} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{۰/۲\times۵۰\times۱۰} = ۱۰\,m/s$$

۸۱۲. (گزینه ۳) از رابطهٔ نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net} = m\frac{v^2}{r}$ و انرژی جنبشی یعنی $K=\frac{1}{2}mv^2$ می‌توان نوشت:

$$\frac{F}{K} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \frac{F}{K} = \frac{۲}{r} \xrightarrow[K=۲\times۱۰^۵J]{r=۱۰۰m} F = ۴\times۱۰^۳\,N$$

۸۱۳. (گزینه ۳) نیروی الکتریکی هسته بر الکترون، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت الکترون به دور هسته را تأمین می‌کند و این نیرو از رابطهٔ $F = k\frac{qe}{r^2}$ به‌دست می‌آید که در آن e بار الکترون و q بار هسته است.

۸۱۴. گزینه «۲» با توجه به این‌که نیروی الکتریکی به‌طور مؤثر، نیروی مرکزگرای حرکت دایره‌ای الکترون را فراهم می‌کند و از رابطهٔ $F_e = k\frac{e^۲}{r^۲}$ به‌دست می‌آید، می‌توان این نیرو را برابر نیروی مرکزگرا یعنی $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$ قرار داد:

$$k\frac{e^۲}{r^۲} = m_e\frac{v^۲}{r} \to v^۲ = \frac{ke^۲}{m_e r} \Rightarrow v \propto \frac{۱}{\sqrt{m_e}}$$

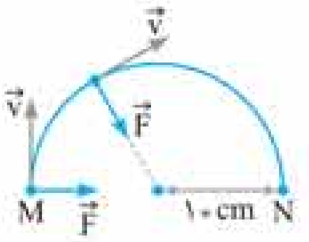
۸۱۵. گزینه «۱» گام اول در این حرکت دایره‌ای، نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار، نیروی مرکزگرای ذره را تأمین می‌کند. بنابراین با استفاده از رابطهٔ $F_{net} = m\frac{v^۲}{r}$ و $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ می‌توان نوشت:

$$\frac{K}{F} = \frac{\frac{۱}{۲}mv^۲}{m\frac{v^۲}{r}} = \frac{r}{۲}$$

گام دوم با قرار دادن $F = ۱/۵\times۱۰^{-۱۷}N$ و $r = ۲۸\times۱۰^{-۳}m$ در معادلهٔ فوق، انرژی جنبشی ذره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{K}{۱/۵\times۱۰^{-۱۷}} = \frac{۲۸\times۱۰^{-۳}}{۲} \Rightarrow K = ۲۱\times۱۰^{-۲۰}J$$

۸۱۶. گزینه «۴» **یادآوری:** اگر ذرهٔ بارداری (q) عمود بر میدان مغناطیسی B با سرعت v پرتاب شود، نیروی الکترومغناطیسی بر ذره وارد می‌شود که اندازهٔ این نیرو $F = qvB$ است و جهت آن از قاعدهٔ دست راست (برای بار مثبت) یا دست چپ (برای بار منفی) به‌دست می‌آید.



گام اول در این سؤال چون بار الکترون منفی است، با به‌کار بردن قاعدهٔ دست چپ متوجه می‌شویم که جهت میدان مغناطیسی درون‌سوست. (چهار انگشت در جهت v، شست در جهت F و کف دست چپ جهت میدان B را نشان می‌دهد.)

گام دوم نیروی $F = qvB$، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت الکترون در مسیر دایره‌ای را ایجاد می‌کند.

$$qvB = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow B = \frac{mv}{qr} = \frac{۹\times۱۰^{-۳۱}\times۱/۶\times۱۰^{۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰^{-۱}} \Rightarrow B = ۹\times۱۰^{-۵}T$$ درون‌سو

۸۱۷. گزینه «۲» گام اول می‌دانیم که نیروی مغناطیسی که از میدان مغناطیسی بر بار متحرک درون آن وارد می‌شود، همواره عمود بر سرعت و عمود بر میدان مغناطیسی است.

گام دوم از این رو کار نیروی مغناطیسی بر ذرهٔ باردار صفر است و بنابر قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییر انرژی جنبشی ذره صفر است.

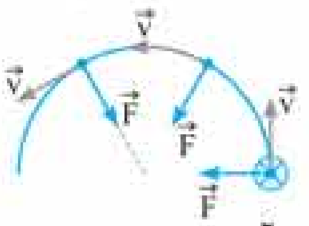
$$W_T = \Delta K \xrightarrow{W_T = W_B = ۰} \Delta K = ۰\,J$$

پس انرژی جنبشی ذره ثابت می‌ماند و در نتیجه تندی ذره نیز تغییر نمی‌کند.

$$K_۲ = K_۱ \Rightarrow v_۲ = v_۱$$

گام سوم تکانه کمیتی برداری است و هر چند بزرگی سرعت ذره (تندی ذره) ثابت می‌ماند، اما چون جهت سرعت ذره تغییر می‌کند، تکانه نیز تغییر می‌کند.

۸۱۸. گزینه «۲» گام اول چون بار ذره‌ها مثبت است، جهت نیروی مغناطیسی (الکترومغناطیسی) وارد بر ذره را با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم. چهار انگشت در جهت v و کف دست در جهت میدان درون‌سوی B، انگشت شست جهت F یعنی سمت چپ را نشان می‌دهد. پس گزینه‌های «۱» یا «۲» می‌توانند درست باشند.



گام دوم نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(F = qvB\sin\theta)$، نیروی مرکزگرا را فراهم می‌کند.

$$qvB\sin\theta = m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow{\sin\theta = ۱} r = \frac{mv}{qB}$$

گام سوم بار، سرعت و میدان مغناطیسی برای ذره‌ها یکسان است. بنابراین چون جرم ذرهٔ B بیشتر از جرم ذرهٔ A است، می‌توان دریافت شعاع مسیر ذرهٔ B بزرگ‌تر از شعاع مسیر ذرهٔ A است.

$$m_B > m_A \Rightarrow r_B > r_A$$

۸۱۹. گزینه «۳» بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ «۱»: از رابطهٔ انرژی جنبشی $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ برای پروتون و α می‌توان نوشت:

$$\frac{K_P}{K_\alpha} = \frac{\frac{۱}{۲}m_P v_P^۲}{\frac{۱}{۲}m_\alpha v_\alpha^۲} \xrightarrow[m_\alpha = ۴m_P]{K_P = K_\alpha} ۱ = \frac{۱}{۴}\times\frac{v_P^۲}{v_\alpha^۲} \Rightarrow v_P = ۲v_\alpha$$

پس گزینهٔ «۱» نادرست است.

گزینهٔ «۲»: از رابطهٔ تکانه و مقایسه آن با انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{p^۲}{۲m} \xrightarrow{K_P = K_\alpha} \frac{p_\alpha^۲}{۲m_\alpha} = \frac{p_P^۲}{۲m_P} \xrightarrow{m_\alpha = ۴m_P} \frac{p_\alpha^۲}{۴m_P} = \frac{p_P^۲}{m_P} \Rightarrow p_\alpha = ۲p_P$$

پس گزینهٔ «۲» نادرست است.

گزینهٔ «۳»: نیروی مغناطیسی $F = qvB$ را برابر نیروی مرکزگرا در نظر می‌گیریم:

$$qvB = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = \frac{p}{qB} \xrightarrow[q_\alpha = ۲q_P]{p_\alpha = ۲p_P} r_\alpha = r_P$$

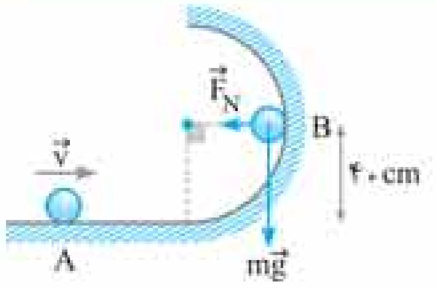
پس گزینهٔ «۳» درست است.

گزینهٔ «۴»: نیروی الکترومغناطیسی با بار ذره متناسب است و بار ذرهٔ α دو برابر بار پروتون است، پس گزینهٔ «۴» هم نادرست است.

۸۲۰. گزینه «۱»

راهبرد «۱۶»: در این گونه مسائل می‌توانیم ابتدا از قوانین پایستگی انرژی مکانیکی یا قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، سرعت گلوله را در نقطهٔ مورد نظر به‌دست آوریم. سپس با توجه به نیروهایی که بر گلوله وارد می‌شوند، برایند نیروهای وارد بر گلوله (در راستای شعاع دایره) را برابر $m\frac{v^۲}{r}$ یا $m\frac{۴\pi^۲}{T^۲}r$ قرار دهیم.

نکته: اگر از نیروهایی که بر جسم اثر می‌کنند، فقط نیروی وزن کار انجام دهد و اصطکاک یا نیروهای خارجی کار انجام ندهند، می‌توان سرعت گلوله را در مکان دوم از رابطهٔ روبه‌رو حساب کرد: $v^2 = 2g\Delta h + v_0^2$
در این رابطه v_0 سرعت گلوله در مکان (لحظهٔ) اولیه است و Δh مقدار جابه‌جایی قائم گلوله در مکان دوم نسبت به مکان اول است. اگر گلوله بالاتر باشد، $\Delta h < 0$ و اگر پایین‌تر باشد، $\Delta h > 0$ است.

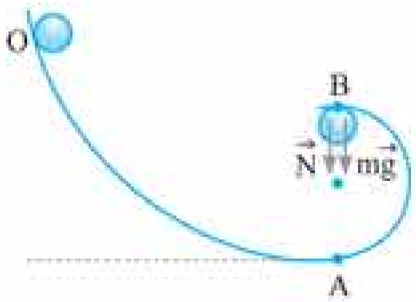


گام اول در این سؤال نقطهٔ B، ۴۰cm بالاتر از نقطهٔ A است و چون اصطکاک ناچیز است، سرعت گلوله هنگام عبور از B را از رابطهٔ $v_B^2 = 2g\Delta h + v_A^2$ حساب می‌کنیم. توجه کنید که $\Delta h = -0/4m$ است.

$$v_B^2 = 2\times10\times(-0/4)+10^2 = 92 \Rightarrow v_B = \sqrt{92}\ m/s$$

گام دوم نیروهای وارد بر جسم در نقطهٔ B عبارت‌اند از:
(۱) نیروی وزن و (۲) نیروی عمودی سطح. چون در نقطهٔ B در راستای شعاع فقط نیروی عمودی سطح بر جسم اثر می‌کند، می‌توان این نیرو را برابر نیروی مرکزگرا در نظر گرفت:

$$F_N = m\frac{v_B^2}{r} = \frac{0/2\times92}{0/4} = 46N$$



۸۲۱. (گزینهٔ ۲) **یادآوری:** برای استفاده از قانون دوم نیوتون در مسیر حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروهای خالص وارد بر جسم در راستای شعاع دایره را برابر $m\frac{v^2}{r}$ یا $m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ قرار می‌دهیم.

گام اول در این سؤال در نقطهٔ B دو نیرو بر گلوله وارد می‌شود:
(۱) نیروی وزن $(m\vec{g})$ که به طرف پایین است. (۲) نیروی عمودی سطح بر گلوله $(\vec{F}_N)$ که آن نیز به طرف پایین است.

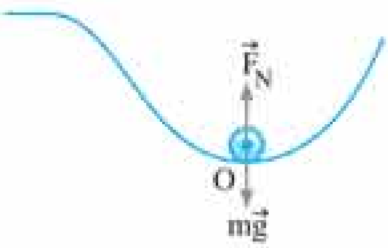
گام دوم برایند نیروهای وارد بر گلوله را برابر نیروی مرکزگرا قرار می‌دهیم:

$$mg + F_N = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow F_N = m\frac{v^2}{r} - mg \Rightarrow F_N = \frac{0/2\times25}{1} - 0/2\times10 = 5-2 = 3N$$

۸۲۲. (گزینهٔ ۳) **گام اول** جسم در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. بنابر راهبرد «۱۶»، ابتدا سرعت جسم را در نقطهٔ O به‌دست می‌آوریم:

$$E_A = E_O \to mgh + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_O^2$$

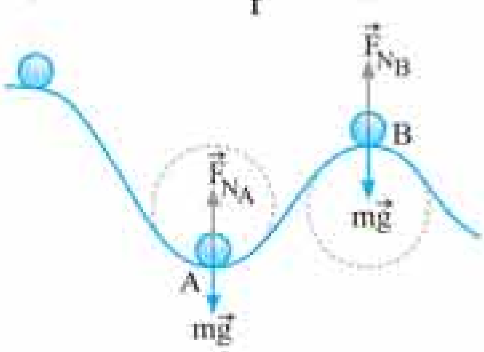
$$\Rightarrow v_O^2 = 2g\Delta h + v_A^2 \xrightarrow[\Delta h=5m]{v_A=0\ m/s} v_O^2 = 2\times10\times5 = 100 \Rightarrow v_O = 10\ m/s$$



گام دوم در نقطهٔ O دو نیرو بر جسم وارد می‌شود:
(۱) نیروی عمودی سطح که رو به بالاست و (۲) نیروی وزن جسم که مخالف $\vec{F}_N$ و به طرف پایین است.

گام سوم برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای شعاع دایرهٔ مسیر در نقطهٔ O را حساب می‌کنیم. دقت کنید در این حالت جهت رو به مرکز را با علامت مثبت در نظر می‌گیریم (زیرا شتاب جسم به سمت مرکز است) و برایند را برابر نیروی مرکزگرا قرار می‌دهیم.

$$F_N - mg = m\frac{v_O^2}{r} \to F_N = m\frac{v_O^2}{r} + mg = \frac{0/1\times100}{5} + 0/1\times10 = 3N$$



۸۲۳. (گزینهٔ ۲) جسم در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. مطابق شکل، نیروهای وارد بر جسم در نقاط A و B را رسم کرده‌ایم:

گام اول در نقطهٔ A، نیروی $\vec{F}_{N_A}$ به سمت مرکز دایره‌ای است که جسم قسمتی از آن را می‌پیماید. در این نقطه برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای شعاع دایره، برابر $m\frac{v^2}{r}$ است:

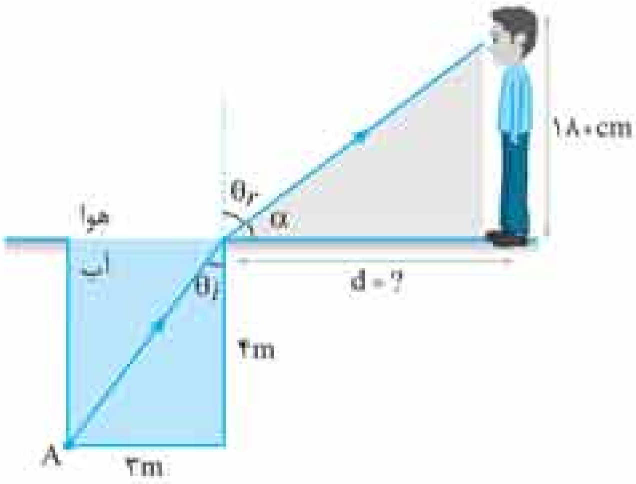
$$F_{N_A} - mg = m\frac{v_A^2}{r} \Rightarrow F_{N_A} = m\frac{v_A^2}{r} + mg \Rightarrow F_{N_A} > mg \quad (1)$$

گام دوم در نقطهٔ B، نیروی $m\vec{g}$ به سمت مرکز دایره و $\vec{F}_{N_B}$ به سمت بیرون مرکز است. برایند این نیروها برابر نیروی مرکزگرا در نقطهٔ B است:

$$mg - F_{N_B} = m\frac{v_B^2}{r} \Rightarrow mg = m\frac{v_B^2}{r} + F_{N_B} \Rightarrow F_{N_B} < mg \quad (2)$$

گام سوم از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) می‌توان دریافت:

$$F_{N_B} < F_{N_A}$$



۱۴۹۹. گزینهٔ ۳ **گام اول** نور از محیط غلیظ‌تر به محیط رقیق‌تر وارد شده است. بنابراین، پرتو نور تابیده شده از نقطهٔ A در مرز بین دو ناحیه می‌شکند و از خط عمود دور شده و به چشم شخص می‌رسد. (مطابق شکل)
دقت کنید که برای محاسبه حداکثر فاصله شخص تا لبهٔ استخر نور باید به شکل بالا به چشم شخص برسد.

گام دوم زاویهٔ تابش را با استفاده از روابط مثلثاتی می‌یابیم:

$$\tan\theta_i = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \theta_i = ۳۷^\circ$$

گام سوم با استفاده از رابطهٔ $n_۱ \sin\theta_i = n_۲ \sin\theta_r$ داریم:

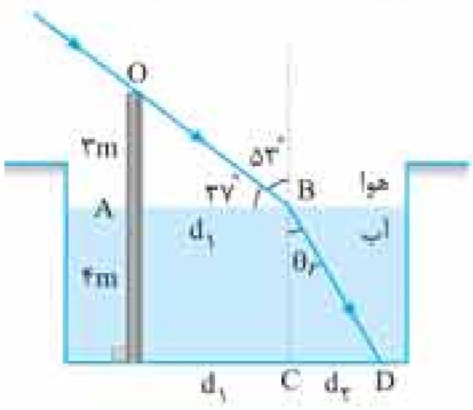
$$\left.\begin{array}{l} n_۱ = \frac{۴}{۳} \\ n_۲ = ۱ \\ \theta_i = ۳۷^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۴}{۳}\sin ۳۷^\circ = ۱\times\sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{۴}{۳}\times\frac{۶}{۱۰} = ۰/۸ \Rightarrow \theta_r = ۵۳^\circ$$

گام چهارم بنابراین زاویهٔ α برابر است با:

$$\alpha = ۹۰^\circ - \theta_r = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

گام پنجم در مثلث هاشور خورده داریم:

$$\tan\alpha = \frac{۱/۸}{d} \Rightarrow d = \frac{۱/۸}{\tan ۳۷^\circ} = \frac{۱/۸}{\frac{۳}{۴}} = ۲/۴\,m$$



۱۵۰۰. گزینهٔ ۲ **گام اول** در ابتدا با استفاده از قانون شکست اسنل، زاویهٔ θ_r را به‌دست می‌آوریم:

$$n_۱\sin\theta_i = n_۲\sin\theta_r \Rightarrow ۱\times\sin ۵۳^\circ = \frac{۴}{۳}\sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۱۰} = ۰/۶ \Rightarrow \theta_r = ۳۷^\circ$$

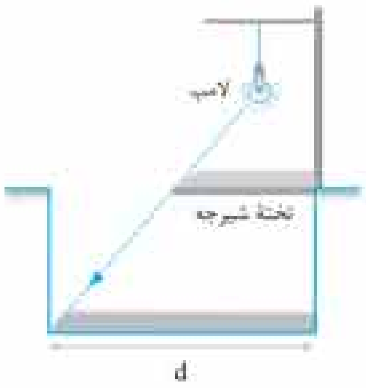
گام دوم با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث‌های $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ داریم:

$$\overset{\triangle}{BCD}: \tan\theta_r = \frac{d_۲}{۴} \Rightarrow \tan ۳۷^\circ = \frac{d_۲}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{d_۲}{۴} \Rightarrow d_۲ = ۳m$$

$$\overset{\triangle}{OAB}: \tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{d_۱} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{d_۱} \Rightarrow d_۱ = ۴m$$

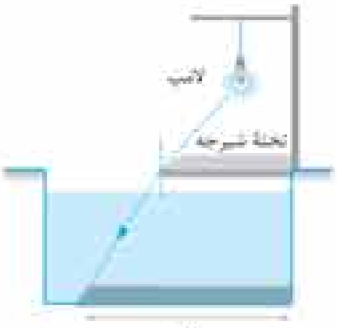
گام سوم طول سایهٔ میله برابر است با:

$$d_۱ + d_۲ = ۳ + ۴ = ۷m$$

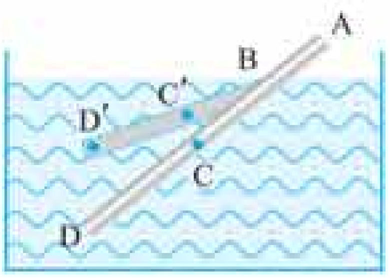


۱۵۰۱. گزینهٔ ۱ سایهٔ تختهٔ شیرجه را در دو حالت بررسی می‌کنیم: ۱ استخر خالی از آب باشد. ۲ استخر پر از آب باشد.

گام اول حالتی را در نظر می‌گیریم که استخر خالی از آب است. در این حالت سایهٔ تخته شیرجه مطابق شکل مقابل و طول آن برابر d است.



گام دوم حال حالتی را در نظر می‌گیریم که استخر از آب پر است. در این حالت، پرتو هنگام ورود به آب از مسیر اولیهٔ خود منحرف شده و چون نور از محیط رقیق‌تر به محیط غلیظ‌تر (هوا به آب) وارد شده است، پرتو شکست به خط عمود نزدیک‌تر شده و $d' < d$ است. بنابراین طول سایهٔ تخته شیرجه در حالتی که استخر پر از آب است کوتاه‌تر از حالتی است که استخر خالی است.



۱۵۰۲. گزینهٔ ۳ همان‌طور که در شکل مشخص است، تصویر نقاط C و D هر دو مقداری نزدیک‌تر به سطح جدایی دو محیط به نظر می‌آیند. به عبارت دیگر، نقطهٔ C' بالاتر از نقطهٔ C و نقطهٔ D' بالاتر از نقطهٔ D دیده خواهد شد. در این حالت تصویر میله کوتاه‌تر به نظر می‌رسد. پس اگر ناظر از هوا به میله به‌صورت تقریباً عمودی نگاه کند، طول قسمت داخل آب را $\frac{۳}{۴}$ برابر (عکس ضریب شکست مطلق آب) می‌بیند و آن را نزدیک‌تر به سطح آب تصور می‌کند.

۱۵۰۳. گزینهٔ ۴ برای جواب دادن به این تست به نکات زیر توجه کنید:

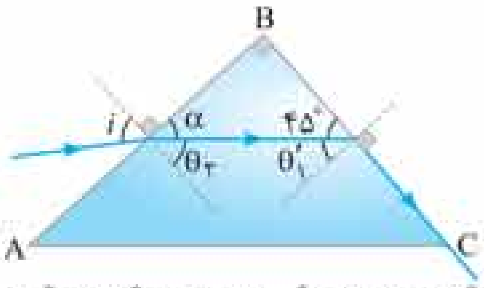
۱ پرتو در هنگام ورود از محیط غلیظ‌تر به محیط رقیق‌تر، شکسته شده و از خط عمود دور می‌شود و بالعکس! (پرتو در هنگام ورود از محیط رقیق‌تر به محیط غلیظ‌تر، شکسته شده و به خط عمود نزدیک می‌شود.)

۲ اگر پرتوی تابشی در هنگام ورود به محیط‌های شفاف موازی، با خط عمود زاویهٔ i بسازد، این پرتو هنگامی که محیط‌های موازی را ترک می‌کند و وارد محیطی با ضریب شکست یکسان با محیط اولیه می‌شود، بازهم با خط عمود زاویهٔ i خواهد ساخت.

گام اول پرتو از هوا وارد یک محیط شفاف شده است، با توجه به نکتهٔ ۱، پرتو دچار شکست شده و به خط عمود نزدیک می‌شود.

گام دوم در مرحلهٔ بعد، پرتو از یک محیط غلیظ وارد یک محیط رقیق‌تر می‌شود $(n_۱ > n_۲)$، بنابراین پرتو دچار شکست شده و این بار از خط عمود دور می‌شود. تا اینجا گزینهٔ «۱» و گزینهٔ «۲» اشتباه هستند.

گام سوم در مرحلهٔ آخر، پرتو از محیط $n_۲$ وارد هوا می‌شود. بنابراین پرتو باید دچار شکست شود به‌طوری که اولاً از خط عمود دور شود و ثانیاً چون مجدداً وارد هوا شده، با همان زاویهٔ تابش اولیه از محیط‌های موازی خارج شود. این ویژگی‌ها تنها در گزینهٔ «۴» دیده می‌شود. (پرتو موازی با راستای پرتو اولیه از محیط‌های شفاف متوالی موازی خارج شده است.)



۱۵۰۴. گزینه۴ **گام اول** با توجه به این‌که پرتو شکست مماس بر وجه BC از منشور خارج شده است، طبق شکل، زاویهٔ شکست در وجه BC برابر $\theta'_2 = 90^\circ$ می‌شود.

با نوشتن رابطهٔ شکست اسنل در وجه BC داریم: (محیط (۲) را هوا و محیط (۱) را منشور در نظر می‌گیریم)

$$n_1 \sin\theta'_1 = n_2 \sin\theta'_2 \xrightarrow[\theta'_2=90^\circ]{n_1=\sqrt{2}\,,\,n_2=1} \sqrt{2}\times\sin\theta'_1 = 1\times\sin 90^\circ \Rightarrow \sin\theta'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta'_1 = 45^\circ$$

گام دوم در مثلث کوچک بالایی، زاویهٔ α (زاویهٔ پرتو شکست با وجه AB) را محاسبه می‌کنیم:

$$90^\circ + 45^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

بنابراین زاویهٔ شکست در وجه AB برابر است با:

$$\theta_2 = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

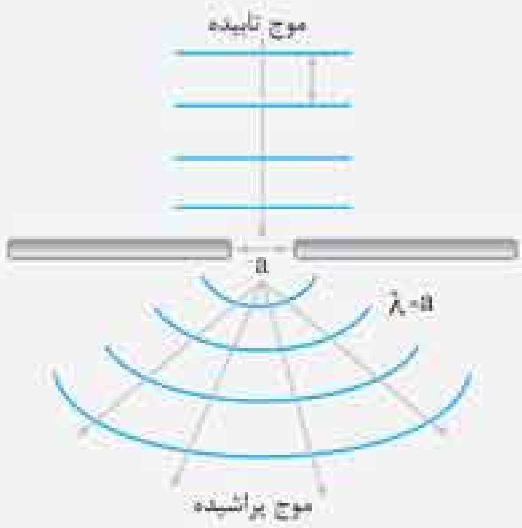
گام سوم حال با نوشتن رابطهٔ شکست اسنل در وجه AB داریم: (محیط (۲) را هوا و محیط (۱) را منشور در نظر می‌گیریم)

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \xrightarrow[\theta_2=45^\circ]{n_1=1\,,\,n_2=\sqrt{2}} 1\times\sin\theta_1 = \sqrt{2}\times\sin 45^\circ \Rightarrow \sin\theta_1 = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow \theta_1 = i = 90^\circ$$

۱۵۰۵. گزینه۳ **گام اول** به این دلیل که $n_2 > n_1$ است، محیط (۲) غلیظ‌تر از محیط (۱) است و پرتو نور SI باید در هنگام ورود به محیط (۲) دچار شکست شده و به خط عمود نزدیک‌تر شود. بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» اشتباه هستند.

گام دوم باریکهٔ نوری که شامل پرتوهایی با طول موج‌های مختلف باشد، در هنگام عبور از مرز دو محیط در زاویه‌های مختلفی شکسته می‌شود، به‌طوری که پرتوهای با طول موج کم‌تر، بیشتر شکسته می‌شوند. بنابراین چون طول موج نور آبی از نور قرمز کم‌تر است، نور آبی بیشتر دچار شکست شده و در نهایت به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

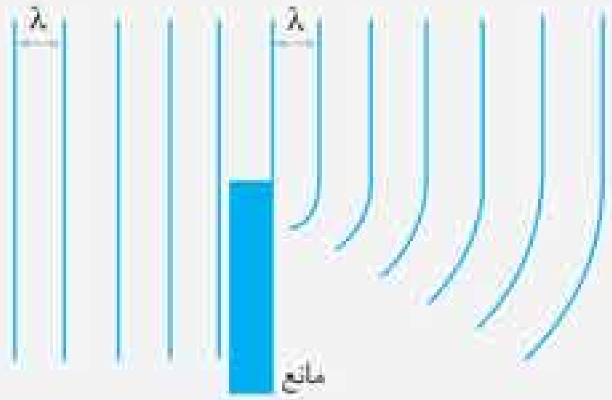
پراش موج



اگر در مسیر انتشار یک موج مانع یا شکافی قرار دهیم، در صورتی که مطابق شکل‌های زیر ابعاد مانع یا شکاف در حدود طول‌موج باشد، بخشی از موج که از لبهٔ مانع یا شکاف عبور می‌کند، به وضوح به اطراف مانع یا شکاف گسترده می‌شود.

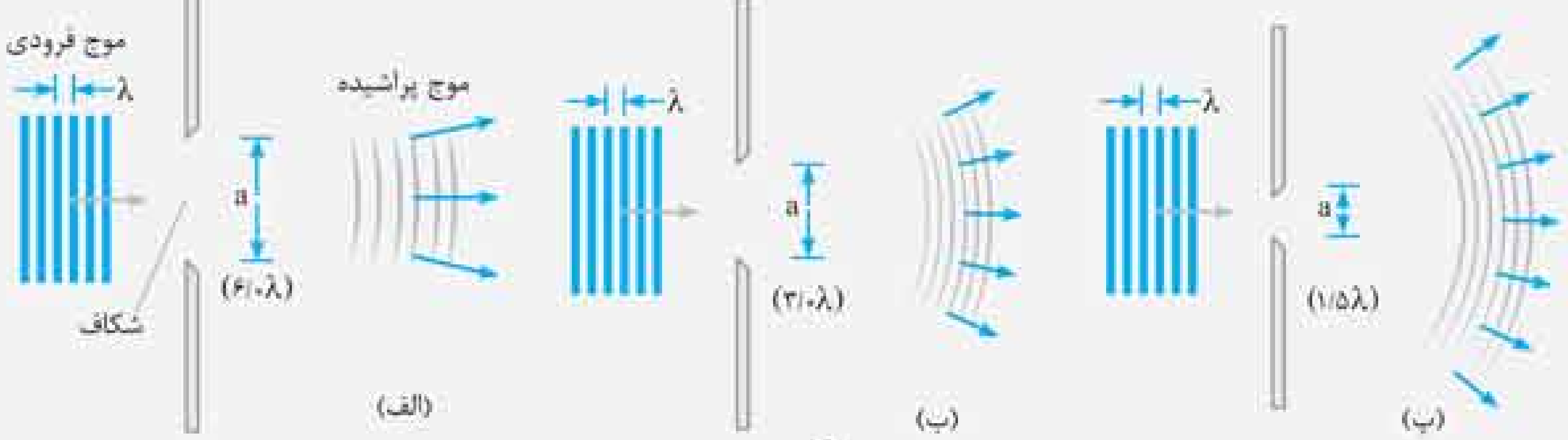
به این پدیده که موج در عبور از یک شکاف یا مانع با ابعادی از مرتبهٔ طول‌موج، به اطراف گسترده می‌شود، **پراش** می‌گویند.

۱ طول‌موج و بسامد موج پراشیده با طول‌موج و بسامد موج فرودی **برابر** است، اما راستای انتشار پرتوهای آن با موج فرودی یکسان نیست.



۲ پراش برای همهٔ انواع موج اتفاق می‌افتد.

۳ شکل‌های زیر وضعیت طرح‌واری را نشان می‌دهد که در آن موج تختی با طول‌موج λ به مانعی می‌رسد که شکافی با پهنای a دارد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن پهنای شکاف (کاهش a)، قسمتی از موج که از شکاف می‌گذرد، کاملاً از حالت موج تخت خارج شده و به اطراف شکاف، گسترده (پراشیده) می‌شود.

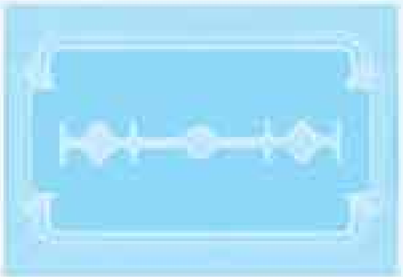


با توجه به این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش موج بیشتر است. این یعنی هرچقدر پهنای شکاف (یا ابعاد مانع) کوچک‌تر از طول‌موج باشد، پراش بیشتر می‌شود. همچنین می‌توان گفت:

۱ به ازای یک طول‌موج ثابت (موج یکسان)، هرچقدر پهنای شکاف یا اندازهٔ مانع کوچک‌تر باشد، پراش بیشتر است.

۲ به ازای یک شکاف یا مانع یکسان، هرچقدر طول‌موج بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتر است.

۱ **دامنهٔ موج** در پراش بی‌تأثیر است.



۲ پراش پدیده‌ای فراتر از صرفاً گستردگی بیشتر موج است و مثلاً اگر پراش نوری تک‌فام از یک شکاف باریک یا لبه‌ای تیز را روی پرده ملاحظه کنیم، همواره نوارهای تاریک و روشنی موسوم به نقش پراش را موازی با لبه‌های شکاف مشاهده می‌کنیم. شکل مقابل نقش پراش نوری تک‌فام از لبه‌های تیز درون و بیرون یک تیغ را نشان می‌دهد. تحلیل نقش پراش مبتنی بر بحث تداخل امواج است که در بخش بعد می‌آموزیم.

مثال: موج تختی از یک شکاف عبور کرده و پراشیده می‌شود. برای بارزتر شدن پراش، به‌ترتیب از راست به چپ، طول موج و پهنای شکاف چگونه باید تغییر کنند؟

۱) افزایش، کاهش ۲) کاهش، افزایش ۳) افزایش، افزایش ۴) کاهش، کاهش

پاسخ: گزینه ۱ همان‌طور که گفتیم هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتر می‌شود. نسبت $\frac{\lambda}{a}$ با افزایش λ و یا کاهش a، بزرگ‌تر می‌شود.

مثال: برای آن‌که سیگنال‌های تلویزیونی که از آنتن‌های روی دکل‌ها فرستاده می‌شوند، به ناحیهٔ سایهٔ یک ساختمان برسند، کدام اقدام زیر مناسب‌تر است؟

۱) افزایش بسامد سیگنال ۲) کاهش بسامد سیگنال ۳) افزایش دامنهٔ سیگنال ۴) کاهش دامنهٔ سیگنال

پاسخ: گزینه ۲ با برخورد سیگنال‌های تلویزیونی با لبه‌های یک ساختمان، پراش رخ داده و سیگنال‌ها به اطراف ساختمان پخش می‌شوند. می‌دانیم هرچقدر طول موج بیشتر باشد، پراش بیشتر شده و احتمال رسیدن سیگنال‌ها به ناحیهٔ سایهٔ ساختمان افزایش می‌یابد. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، مشخص است که با کاهش بسامد، طول موج افزایش یافته و در نتیجه پراش بیشتر می‌شود. توجه کنید که دامنهٔ موج در پراش بی‌تأثیر است.

پاسخ‌های تشریحی

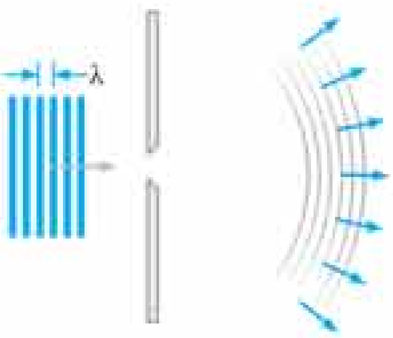
۱۵۰۶. گزینه ۲ صوت ایجادشده توسط آژیر با برخورد به لبهٔ ساختمان، پراشیده شده و به اطراف ساختمان گسترده می‌شود و به گوش شخص می‌رسد.

۱۵۰۷. گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها

گزینه «۱» نادرست؛ همان‌طور که در درسنامه گفتیم، هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش بارزتری رخ می‌دهد. در نتیجه بدون اطلاع از طول موج نمی‌توان دربارهٔ ابعاد مانع بحث کرد.

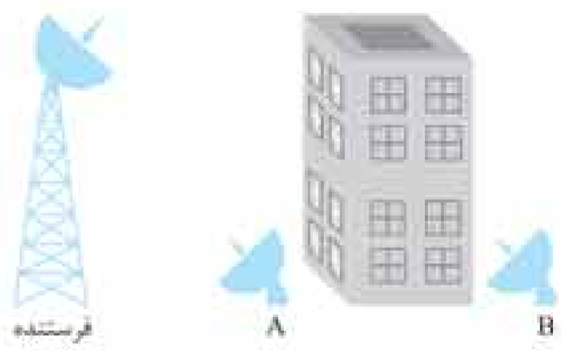
گزینه «۲» نادرست؛ پراش هم در عبور از یک روزنه و هم در عبور موج از لبهٔ مانع رخ می‌دهد.

گزینه «۴» نادرست؛ هرچقدر ابعاد شکاف یا روزنه بزرگ‌تر باشد، پراش موج کم‌تر می‌شود.



۱۵۰۸. گزینه ۲ با عبور موج از یک شکاف که پهنای آن در حدود طول موج است، موج پراشیده شده و به اطراف شکاف گسترده می‌شود. با پراشیده شدن موج، بسامد، طول موج، فاصلهٔ بین دو جبههٔ موج متوالی که همان طول موج است و تندی انتشار موج تغییری نمی‌کنند و مطابق شکل مطابق فقط راستاهای پرتوی موج به دلیل گسترده شدن موج تغییر می‌کند.

۱۵۰۹. گزینه ۱ در عبور موج از یک شکاف، موج به اطراف شکاف گسترده می‌شود (پراشیده می‌شود) و راستای انتشار پرتوهای موج تغییر می‌کند، اما فاصلهٔ جبهه‌های موج که برابر با طول موج است، تغییری نمی‌کند و همواره ثابت است. در نتیجه گزینهٔ «۱» درست است.



۱۵۱۰. گزینه ۳ گیرندهٔ A در مقابل فرستنده قرار دارد و موج به آن می‌رسد.
گیرندهٔ B در پشت ساختمان و ناحیهٔ سایهٔ آن قرار دارد. با برخورد امواج به لبهٔ ساختمان (پشت بام) موج پراشیده شده و به اطراف گسترده می‌شود و می‌تواند به گیرندهٔ B نیز برسد. یعنی با پدیدهٔ پراش، موج به ناحیهٔ سایهٔ ساختمان نیز می‌تواند برسد.

۱۵۱۱. گزینه ۲ **یادآوری:** طبق متن درسنامه می‌دانیم که هرچقدر طول موج بزرگ‌تر شود، پراش بیشتر می‌شود.
گیرنده در ناحیهٔ سایهٔ ساختمان قرار دارد و هرچقدر پراش موج از لبه‌های ساختمان بیشتر باشد، احتمال رسیدن موج به گیرنده افزایش می‌یابد. برای افزایش پراش، باید طول موج بزرگ‌تر شود. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، برای افزایش طول موج باید بسامد را کاهش دهیم.

۱۵۱۲. گزینه ۱ با افزایش طول موج، پراش افزایش می‌یابد. اما افزایش دامنه تأثیری در پراش ندارد، چون فقط در حالتی پراش رخ می‌دهد که طول موج در حدود ابعاد مانع یا شکاف باشد و دامنهٔ موج در این پدیده تأثیرگذار نیست.

۱۵۱۳. گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها

گزینه «۱» نادرست؛ طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، با افزایش بسامد، طول‌موج کاهش یافته و پراش کم‌تر می‌شود.

گزینه «۲» نادرست؛ با افزایش a (پهنای شکاف) نسبت $\frac{\lambda}{a}$ کوچک‌تر شده و پراش کم می‌شود.

گزینه «۳» درست؛ اگر طول موج λ و پهنای شکاف a باشد، هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش و در نتیجه گستردگی موج به اطراف شکاف بیشتر است. مشخص است که با افزایش λ، نسبت $\frac{\lambda}{a}$ افزایش می‌یابد.

گزینه «۴» نادرست؛ دامنه در پراش بی‌تأثیر است.

۱۵۱۴. گزینه ۲ اگر طول موج λ و پهنای شکاف a باشد، هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتر می‌شود. بنابراین با افزایش λ و یا کاهش a پراش بیشتر می‌شود. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، برای افزایش λ باید بسامد را کاهش دهیم. در نتیجه گزینه «۲» درست است.

۱۵۱۵. گزینه ۴ هرچقدر طول موج بزرگ‌تر باشد، پراش از یک مانع یکسان نیز بیشتر می‌شود. بین امواج داده‌شده، ELF دارای بیشترین طول موج (کم‌ترین بسامد) است.

۱۵۱۶. گزینه ۱ گسترده شدن کم‌تر به معنای پراش کم‌تر است. می‌دانیم در عبور نور از یک شکاف، هرچقدر طول موج بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتر است. بنابراین برای داشتن کم‌ترین پراش باید طول موج کم‌ترین باشد. بین گزینه‌های داده‌شده، پرتوی X طول موج کم‌تر (بسامد بیشتر) دارد و در نتیجه پرتوها پراش کم‌تری برای آن رخ داده و کم‌تر به اطراف شکاف گسترده می‌شود.

۱۵۱۷. گزینه ۲ می‌دانیم در عبور نور از یک شکاف معین، هرچقدر طول موج بیشتر باشد، پراش بیشتر می‌شود. با تغییر نور چراغ قوه از قرمز به آبی، طول موج کاهش می‌یابد. در نتیجه پراش نور در عبور از شکاف نیز کاهش می‌یابد و نسبت به قبل کم‌تر به اطراف شکاف گسترده می‌شود. در نتیجه نسبت به حالت قبل همگراتر می‌شوند.

۱۵۱۸. گزینه ۳ برای رسیدن صدای شخص A به گوش شخص B، صوت باید در هنگام عبور از شکاف بین دو دیوار و لبهٔ دیوارها پراشیده شده و پخش شود. برای داشتن پراش بیشتر باید طول موج بزرگ‌تر شود. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، هرچقدر بسامد (f) کاهش یابد، طول موج بیشتر شده و پراش و گستردگی صدا افزایش می‌یابد.

۱۵۱۹. گزینه ۲ می‌دانیم اگر ابعاد شکاف در حدود طول موج باشد، پراش بارزی رخ می‌دهد. همچنین هرچقدر ابعاد شکاف کوچک‌تر شود، پراش نیز بیشتر می‌شود. در نتیجه حداکثر مقدار a در حدود طول موج است و به ازای پهناهای بزرگ‌تر از آن پراش خیلی خیلی کم می‌شود، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a_{max} \simeq \lambda \xrightarrow{\lambda=\frac{c}{f}} a_{max} = \frac{c}{f} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۳\times۱۰^{۹}} = ۱۰^{-۱}\,m = ۰/۱\,m$$

۱۵۲۰. گزینه ۱ هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتر است. با استفاده از رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\frac{c}{f}}{a} = \frac{c}{fa}$$

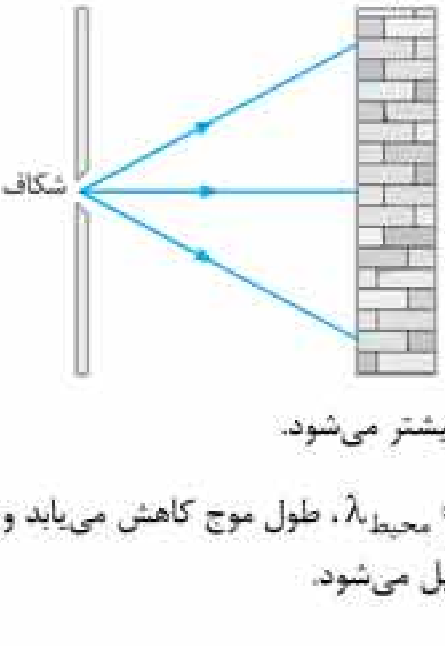
طبق رابطهٔ فوق، هرچقدر حاصل‌ضرب fa کوچک‌تر باشد، نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر شده و موج بیشتر پراشیده می‌شود. در نتیجه حاصل fa را در هریک از گزینه‌ها محاسبه می‌کنیم:

گزینه «۱»: $fa = ۱۰^{۸}\times۱۰^{-۳} = ۱۰^{۵}$ ، گزینه «۲»: $fa = ۱۰^{۹}\times۲\times۱۰^{-۲} = ۲\times۱۰^{۷}$

گزینه «۳»: $fa = ۱۰^{۷}\times۲\times۱۰^{-۲} = ۲\times۱۰^{۵}$ ، گزینه «۴»: $fa = ۱۰^{۱۰}\times۱۰^{-۳} = ۱۰^{۷}$

مشاهده می‌کنید که در گزینه «۱» کم‌ترین مقدار fa و در نتیجه بیشترین میزان پراش را داریم.

۱۵۲۱. گزینه ۱ هرچقدر طول موج بیشتر باشد، پراش موج در برخورد با مانع بیشتر است. همچنین می‌دانیم در آب‌های کم‌عمق با افزایش عمق آب، تندی انتشار موج در سطح آن بیشتر می‌شود. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ مشخص است که با افزایش تندی (v)، طول موج افزایش یافته و پراش نیز بیشتر می‌شود، در نتیجه گزینه «۱» درست است.



۱۵۲۲. گزینه ۴ اگر طول موج λ و پهنای شکاف a باشد، هرچقدر نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر باشد، پراش و گستردگی موج بیشتر شده و قرص روشن بزرگ‌تری روی دیوار ایجاد می‌شود.

تأثیر تک‌تک گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱» نادرست؛ با کوچک‌تر شدن شکاف (کاهش a)، پراش بیشتر شده و قطر لکهٔ روشن روی دیوار افزایش می‌یابد.

گزینه «۲» نادرست؛ با تغییر رنگ لامپ از آبی به قرمز، طول موج افزایش یافته و نسبت $\frac{\lambda}{a}$ بزرگ‌تر شده، پراش بیشتر شده و لکهٔ بزرگ‌تری روی دیوار تشکیل می‌شود.

گزینه «۳» نادرست؛ طبق شکل مقابل مشخص است که با افزایش فاصلهٔ بین دیوار و شکاف، قطر لکهٔ روشن روی دیوار بیشتر می‌شود.

گزینه «۴» درست؛ با انجام آزمایش در آب، ضریب شکست محیط (n) افزایش می‌یابد و در نتیجه طبق رابطهٔ $\lambda_{محیط} = \frac{\lambda_{خلأ}}{n}$، طول موج کاهش می‌یابد و با کاهش طول موج، پراش و میزان گستردگی نور خروجی از شکاف کم‌تر شده و لکهٔ روشن کوچک‌تری روی دیوار تشکیل می‌شود.

تداخل امواج

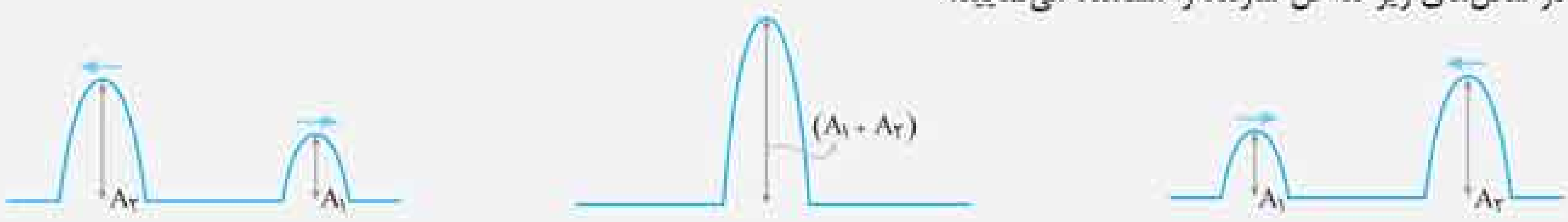
۵

اصل برهم‌نهی امواج: وقتی چندین موج به‌طور هم‌زمان بر ناحیه‌ای از فضا تأثیر بگذارند (همپوشانی موج‌ها)، اثر خالص آن‌ها برابر مجموع اثرهای مجزای هریک از آن‌ها است.

تداخل: ترکیب دو یا چند موج است که هم‌زمان از یک منطقه از فضا عبور می‌کنند.

تپ‌ها و موج‌هایی که همپوشانی می‌کنند، به هیچ‌وجه شکل و حرکت یکدیگر را تغییر نمی‌دهند. بنابراین پس از همپوشانی، بدون هرگونه تغییر شکلی به حرکت خود ادامه می‌دهند.

تداخل سازنده: اگر تپ‌ها هنگام همپوشانی تپ بزرگ‌تری را ایجاد کنند (یعنی اثر یکدیگر را تقویت کنند)، به آن تداخل سازنده می‌گویند. در شکل‌های زیر تداخل سازنده را مشاهده می‌نمایید.



(۳) (۲) (۱)

در هنگام تداخل سازنده، دامنهٔ موج برایند، بیشینه خواهد بود و برابر مجموع جبری دامنهٔ هریک از موج‌هاست.

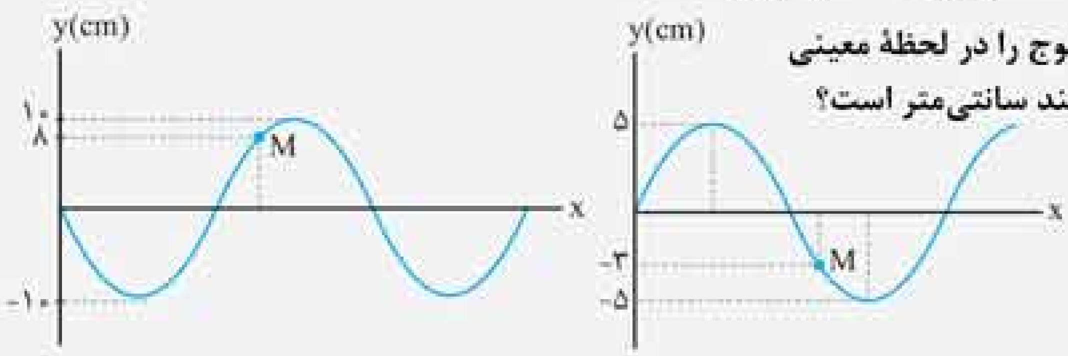
تداخل ویرانگر: اگر تپ‌ها هنگام همپوشانی اثر یکدیگر را حذف نمایند، به آن تداخل ویرانگر می‌گویند. در شکل‌های زیر، تداخل ویرانگر را مشاهده می‌نمایید.

(۳) (۲) (۱)

در هنگام تداخل ویرانگر، دامنهٔ موج برایند، کمینه است، به‌طوری که برابر قدرمطلق تفاضل دامنهٔ هر یک از موج‌هاست. اگر در هنگام تداخل، دامنهٔ دو موج هم‌اندازه باشند، دامنهٔ موج برایند صفر می‌شود.

مثال: **شکل‌های مقابل نمودار جابه‌جایی ـ مکان دو موج را در لحظهٔ معینی نشان می‌دهند. جابه‌جایی برایند نقطهٔ M در این لحظه چند سانتی‌متر است؟**

۱) ۱۱
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۱۰



پاسخ: گزینه ۲ چون تداخل ویرانگر است، جابه‌جایی نهایی نقطهٔ M برابر تفاضل مقدار جابه‌جایی نقطهٔ M در هریک از دو موج می‌باشد.

$$A_M = ۸ - ۳ \Rightarrow A_M = ۵cm$$

تداخل امواج سطحی آب

اگر دوگوی کوچک را با بسامد یکسان، به‌طور هم‌زمان بر سطح آب به نوسان درآوریم، دو دسته امواج دایره‌ای شکل ایجاد می‌شود. این امواج در برخی نقاط همدیگر را تقویت می‌کنند (تداخل سازنده انجام می‌دهند) و در برخی نقاط همدیگر را تضعیف می‌کنند (تداخل ویرانگر انجام می‌دهند). سطح آب در نقاطی که تداخل سازنده است، به شدت بالا و پایین می‌رود و در نقاطی که تداخل ویرانگر است، نوسان چندانی نخواهد داشت.

تداخل امواج صوتی

فرض کنید مطابق شکل مقابل، دو بلندگو امواج هم‌بسامدی را در فضا منتشر کنند، چنانچه میکروفونی را در امتداد خط فرضی نشان داده شده در شکل که در فاصلهٔ مناسبی از بلندگوها قرار دارد، حرکت دهیم درمی‌یابیم که بلندی صدا به‌طور متناوب کم و زیاد می‌شود. در واقع در نقاطی که تداخل سازنده انجام می‌گیرد (دامنهٔ موج برایند بیشینه)، بلندی صدا زیاد (L) و در نقاطی که تداخل ویرانگر انجام می‌شود (دامنهٔ موج برایند کمینه)، بلندی صدا کم (S) است. دقت کنید، فاصلهٔ بین نقطه‌های S و L مجاور هم، باید نه خیلی زیاد و نه خیلی کم باشد.

فاصلهٔ بین نقاط S و L به بسامد و طول‌موج صوت گسیل‌شده از هر یک از بلندگوها وابسته است، به‌طوری که اگر بسامد صوت گسیل‌شده از بلندگوها خیلی کم باشد، طول‌موج زیاد می‌شود، در نتیجه فاصلهٔ نقطه‌های S و L مجاور هم زیاد می‌شود و برعکس اگر بسامد صوت گسیل‌شده از بلندگوها خیلی زیاد باشد، طول‌موج کم می‌شود، در نتیجه فاصلهٔ نقطه‌های S و L مجاور هم کم خواهد شد.

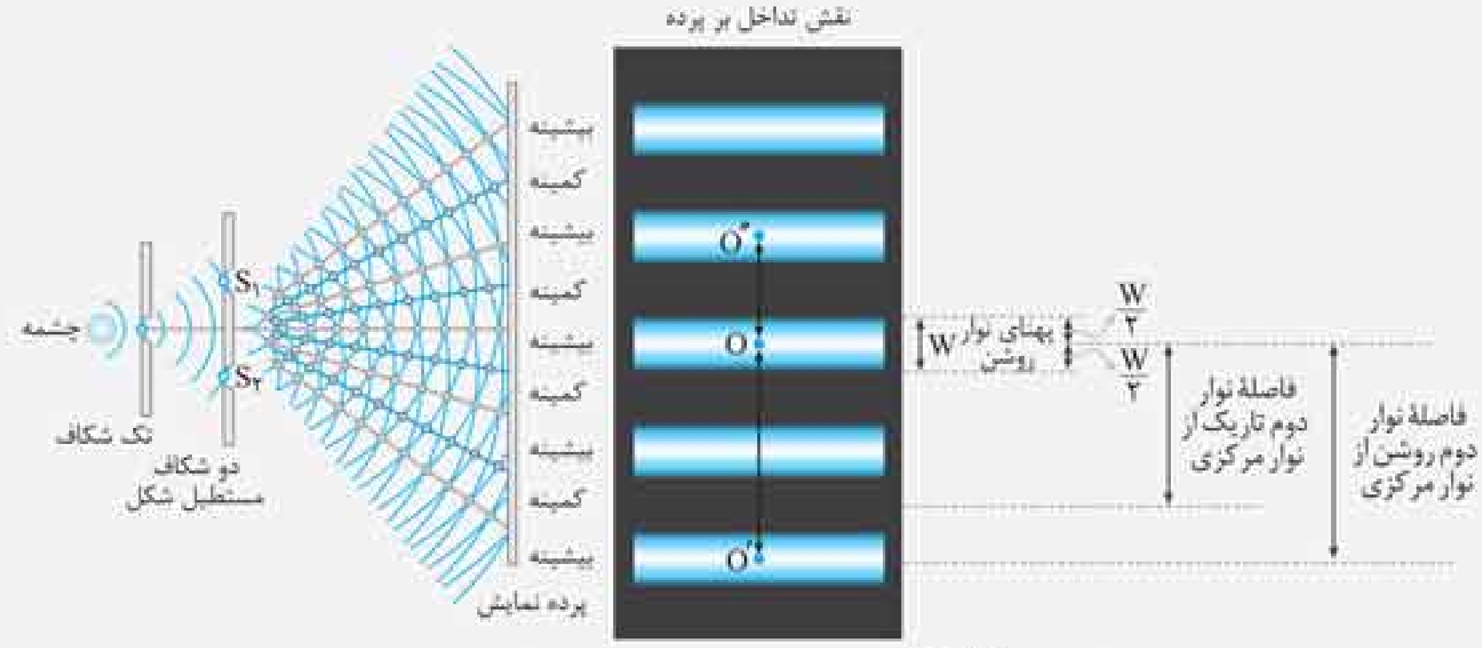
تداخل امواج نوری

توماس‌یانگ نشان داد که نور نیز مانند موج‌های سطحی آب، موج‌های صوتی و همهٔ انواع موج‌های دیگر تداخل می‌کند و به‌طور تجربی ثابت کرد نور، یک موج است.

آزمایش یانگ برای تداخل امواج نوری

یانگ، نور حاصل از یک چشمه تکفام را بر تک‌شکافی تاباند (منظور از نور تکفام نوری شامل یک طول‌موج است). نور خروجی از تک‌شکاف بر اثر پراش، گسترده می‌شود و دو شکاف S_1 و S_2 را روشن می‌کند. موج‌های حاصل از پراش نور توسط این دو شکاف با یکدیگر تداخل می‌کنند و مطابق شکل، نقش تداخلی (نوارهای روشن و تاریک روی پرده) به‌وجود می‌آورند.

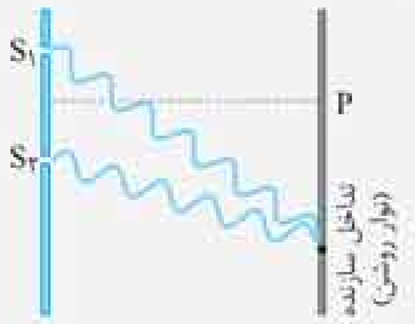
اگر از نور لیزر استفاده کنیم، دیگر نیازی به استفاده از تک‌شکاف در آزمایش یانگ نیست.



طبق شکل بالا، فاصلهٔ بین دو نوار روشن متوالی (مثلاً OO'') که برابر فاصلهٔ بین دو نوار تاریک متوالی است، دو برابر پهنای هر نوار تاریک یا روشن است؛ با توجه به شکل فوق $OO'' = 2W$ است.

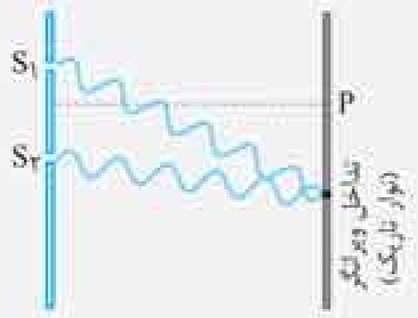
۱ نقش نوارهای روشن و تاریک روی پرده که ناشی از تداخل‌های سازنده و ویرانگر هستند، نقش تداخلی خوانده می‌شود.

۲ نقطه‌های با تداخل سازنده (تداخلی بیشینه)، نوارها یا فریزهای روشن را تشکیل می‌دهند.



۳ نقطه‌های با تداخل ویرانگر (تداخلی کمینه)، نوارها یا فریزهای تاریک را تشکیل می‌دهند. این نوارها را می‌توان بین نوارهای روشن مجاور مشاهده کرد.

۴ در محل تشکیل نوارهای روشن، دو موج همدیگر را تقویت می‌کنند، بنابراین تداخل آن‌ها سازنده است. در این محل شکم تشکیل می‌گردد.



۵ در محل تشکیل نوارهای تاریک، دو موج همدیگر را تضعیف می‌کنند، بنابراین تداخل ویرانگر است. در این محل گره تشکیل می‌گردد.

پهنای نوارهای روشن و تاریک

در نقش تداخلی، در مورد پهنای نوارهای روشن و تاریک می‌توان گفت:

۱ پهنای هر نوار تاریک یا روشن با هم برابر است.

۲ پهنای نوارهای تاریک و روشن متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است. بنابراین، با افزایش طول‌موج نور به‌کار رفته، پهنای نوارهای روشن و تاریک افزایش یافته و برعکس، با کاهش طول‌موج نور به‌کار رفته، پهنای نوارها کاهش می‌یابد.

۳ اگر آزمایش یانگ را با نورهای مختلف انجام دهیم، پهنای نوارهای روشن و تاریک با نور قرمز بیشترین مقدار و با نور بنفش کم‌ترین مقدار را دارد. زیرا در طیف نور مرئی، بزرگ‌ترین طول‌موج مربوط به نور قرمز و کم‌ترین آن مربوط به نور بنفش است.

چون در آزمایش یانگ، پهنای نوارهای روشن و تاریک متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است، اگر پهنای نوارها را با W نشان دهیم، از رابطهٔ مقایسه‌ای زیر می‌توان برای محاسبهٔ پهنای نوارها در طول‌موج‌های مختلف استفاده کرد.

$$W \propto \lambda \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

چون $\lambda=\frac{c}{f}$ است، (طول‌موج با بسامد رابطهٔ معکوس دارد.) رابطهٔ بین پهنای نوارها و بسامد نور به‌صورت زیر است:

$$\frac{W_۲}{W_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\xrightarrow{\lambda=\frac{c}{f}}\frac{W_۲}{W_۱}=\frac{f_۱}{f_۲}$$

در استفاده از دو رابطهٔ اخیر، باید شرایط آزمایش بدون تغییر باقی بماند؛ یعنی پارامترهایی مثل فاصلهٔ دو شکاف، فاصلهٔ شکاف‌ها از پرده و ... ثابت بمانند.

مثال: آزمایش یانگ را یک‌بار با نوری به طول‌موج $۰/۷۵\mu m$ و بار دیگر در همان شرایط با نور دیگری به طول‌موج $۰/۴۸\mu m$ انجام می‌دهیم. اگر مجموع پهنای یکی از نوارهای روشن و تاریک در هر یک از دو آزمایش برابر $۴/۱mm$ باشد، پهنای هر نوار در حالت اول چند میلی‌متر است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳ گام اول چون پهنای هر نوار روشن و تاریک با هم برابر و متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است، می‌توان نوشت:

$$W\propto\lambda\Rightarrow\frac{W_۱}{W_۲}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\xrightarrow[\lambda_۲=۰/۴۸\mu m]{\lambda_۱=۰/۷۵\mu m}\frac{W_۱}{W_۲}=\frac{۰/۷۵}{۰/۴۸}\Rightarrow\frac{W_۱}{W_۲}=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow W_۲=\frac{۱۶}{۲۵}W_۱$$

یعنی پهنای نوار در آزمایش با طول‌موج $\lambda_۲=۰/۴۸\mu m$، $\frac{۱۶}{۲۵}$ برابر حالت اول است.

گام دوم چون مجموع پهنای هریک از نوارهای روشن و تاریک در هر یک از دو آزمایش برابر $۴/۱mm$ است، می‌توان نوشت:

$$(\text{آزمایش اول})W_۱+(\text{آزمایش دوم})W_۲=۴/۱\xrightarrow{W_۲=\frac{۱۶}{۲۵}W_۱}W_۱+\frac{۱۶}{۲۵}W_۱=۴/۱$$

$$\Rightarrow\frac{۴۱W_۱}{۲۵}=۴/۱\Rightarrow W_۱=\frac{۲۵\times۴/۱}{۴۱}\Rightarrow W_۱=۲/۵mm$$

اگر آزمایش یانگ را یک‌بار در هوا با طول‌موج λ و سپس در محیط شفاف دیگری با ضریب شکست n انجام دهیم، بنا به رابطهٔ $\lambda'=\frac{\lambda}{n}$، طول‌موج نور $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود. بنابراین چون $W\propto\lambda$ است، پهنای هر یک از نوارهای روشن و تاریک در محیط شفاف نیز $\frac{۱}{n}$ برابر خواهد شد. در این حالت رابطهٔ بین پهنای هر یک از نوارها و ضریب شکست محیط شفاف (n) به‌صورت زیر است:

$$\frac{W'}{W}=\frac{\lambda'}{\lambda}\xrightarrow{\lambda'=\frac{\lambda}{n}}\frac{W'}{W}=\frac{\frac{\lambda}{n}}{\lambda}\Rightarrow\frac{W'}{W}=\frac{۱}{n}$$

در این رابطه W' پهنای هر یک از نوارها در محیط شفاف، W پهنای هر یک از نوارها در هوا و n ضریب شکست محیط شفاف است. (توجه داریم که ضریب شکست هوا $n=۱$ در نظر گرفته می‌شود.)

طبق نکتهٔ اخیر می‌توان استدلال کردکه اگر آزمایش یانگ در دو محیط شفاف با ضریب شکست‌های $n_۱$ و $n_۲$ انجام شود، نسبت پهنای هر یک از نوارهای تداخلی ایجاد شده در هر یک از دو محیط برابر است با:

$$\frac{W_۱}{W_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}$$

مثال: آزمایش یانگ در دو محیط به ضریب شکست‌های $n_۱$ و $n_۲$ انجام شده است. اگر پهنای نوار در محیط (۱) برابر $۲mm$ و در محیط (۲) برابر $۲/۵mm$ باشد، نسبت $\frac{n_۲}{n_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

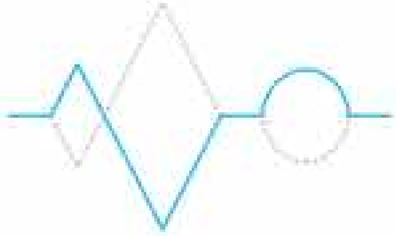
پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم $W\propto\frac{۱}{n}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{W_۱}{W_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}\xrightarrow[W_۲=۲/۵mm]{W_۱=۲mm}\frac{۲}{۲/۵}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{۴}{۵}$$

پاسخ‌های تشریحی

۱۵۲۳. گزینه ۲ در طرح تداخلی امواج، جابه‌جایی‌های قائم امواج A و B به هم افزوده می‌شوند.

۱۵۲۴. گزینه ۳ وقتی دو موج ناهم‌فاز به یک نقطه می‌رسند، قلهٔ یک موج در مقابل درهٔ دیگری قرار می‌گیرد. بنابراین، دامنهٔ نوسان حاصل از برایند آن‌ها برابر قدرمطلق تفاضل دامنه‌های آن دو موج است؛ یعنی: $A=|A_۲-A_۱|$



۱۵۲۵. گزینه۴ مطابق شکل مقابل، وقتی دو تپ به هم می‌رسند، باید جابه‌جایی حاصل از هر تپ در یک نقطه، قرینهٔ جابه‌جایی حاصل از تپ دیگر در همان نقطه باشد تا برایند آن‌ها ویرانگر و ریسمان در لحظه‌ای به شکل خط راست در آید.

۱۵۲۶. گزینه ۱ چون موج‌ها به‌صورت قله و دره به یک نقطه رسیده‌اند، این دو موج در فاز مخالف هستند. بنابراین دامنهٔ موج برایند برابر تفاضل دامنهٔ موج‌های سازندهٔ آن است: $A_{کل} = |A_۲ - A_۱| = ۶ - ۴ = ۲cm$

۱۵۲۷. گزینه۲ چون در نقطهٔ L صدای بالا و در نقطهٔ S صدای ضعیف شنیده می‌شود، الزاماً در نقطهٔ L دامنهٔ موج صوتی تداخلی بیشینه و در این نقطه شکم تشکیل می‌شود. از طرفی در نقطهٔ S دامنهٔ موج صوتی تداخلی کمینه و در این نقطه گره تشکیل خواهد شد. با توجه به این‌که فاصلهٔ بین هر گره (S) و شکم (L) قبل یا بعد از آن برابر $\frac{\lambda}{۴}$ است، برای کاهش این فاصله باید طول‌موج صدای بلندگو را کاهش دهیم.

۱۵۲۸. گزینه ۱ چون در نقطهٔ موردنظر دامنهٔ موج برایند بیشینه است، در آن نقطه دو قله یا دو درهٔ موج به هم رسیده‌اند. بنابراین تداخلشان سازنده است و در آن نقطه نوارهای روشن تشکیل می‌شود.

۱۵۲۹. گزینه۴ می‌دانیم پهنای هر نوار تاریک یا روشن متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است. از طرف دیگر طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، طول‌موج نور به‌کار رفته متناسب با عکس بسامد $(\lambda \propto \frac{1}{f})$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم پهنای هر نوار تاریک یا روشن با بسامد نور به‌کار رفته نسبت عکس دارد $(W \propto \frac{1}{f})$، لذا با کاهش بسامد نور به‌کار رفته، پهنای هر نوار روشن یا تاریک افزایش می‌یابد.

۱۵۳۰. گزینه۲ شرط تشکیل نوارهای تداخلی روشن و تاریک روی پرده در آزمایش یانگ به‌صورت زیر بیان شده است.

(مضرب زوج π) $\Delta\varphi = ۲\underbrace{m}_{\text{شماره نوار روشن}}\pi$ (اختلاف فاز دو موج در محل نوار) $\Rightarrow$ دو موج هم‌فاز باشند $\Rightarrow$ تداخل دو موج سازنده باشد $\Rightarrow$ نوار روشن

(مضرب فرد π) $\Delta\varphi = (۲\underbrace{m'}_{\text{شماره نوار تاریک}} - ۱)\pi$ (اختلاف فاز دو موج در محل نوار) $\Rightarrow$ دو موج در فاز مخالف باشند $\Rightarrow$ تداخل دو موج ویرانگر باشد $\Rightarrow$ نوار تاریک

۱۵۳۱. گزینه۲ می‌دانیم پهنای هر نوار تاریک یا روشن متناسب با طول‌موج است. از طرف دیگر، می‌دانیم طول‌موج نور قرمز بزرگ‌تر از طول‌موج نور سبز است. بنابراین با به‌کار بردن نور قرمز به جای نور سبز، پهنای هر نوار روشن یا تاریک افزایش می‌یابد.

۱۵۳۲. گزینه۳ می‌دانیم پهنای هر نوار تاریک یا روشن متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W \propto \lambda \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{\lambda'}{\lambda} \xrightarrow[\lambda=۶۰۰nm]{W=۲mm,\ \lambda'=۴۸۰nm} \frac{W'}{۲} = \frac{۴۸۰}{۶۰۰} \Rightarrow \frac{W'}{۲} = \frac{۸}{۱۰} = W' = ۱/۶mm$$

۱۵۳۳. گزینه ۱ می‌دانیم پهنای هر نوار تاریک یا روشن متناسب با طول‌موج $(W \propto \lambda)$ است. از طرف دیگر، طول‌موج متناسب با عکس بسامد $(\lambda \propto \frac{1}{f})$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم، پهنای هر نوار روشن و تاریک متناسب با عکس بسامد $(W \propto \frac{1}{f})$ است. در این حالت می‌توان نوشت.

$$W \propto \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{W}{W'} = \frac{f'}{f} \xrightarrow[W=x]{W'=x'} \frac{x}{x'} = \frac{f'_{زرد}}{f_{بنفش}} \xrightarrow{f_{بنفش}=۱/۵f'_{زرد}} \frac{x}{x'} = \frac{f'_{زرد}}{۱/۵f'_{زرد}} \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{۲}{۳}$$

۱۵۳۴. گزینه۴ وقتی نور از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود، بسامد (f) و در نتیجه دورهٔ تناوب $(T = \frac{1}{f})$ آن ثابت می‌ماند؛ زیرا این دو از ویژگی‌های چشمهٔ نور است و به شرایط محیط بستگی ندارد. از طرف دیگر، بنا به رابطهٔ $\lambda_{آب} = \frac{\lambda_{هوا}}{n}$، با ورود نور از هوا به آب، چون ضریب شکست محیط بزرگ‌تر می‌شود، طول‌موج نور در آب کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که پهنای هر نوار تاریک و روشن متناسب با طول‌موج است، در نتیجه پهنای نوارها در آب نسبت به هوا کوچک‌تر می‌شود.
بنابراین، پهنای نوارها کوچک‌تر شده و دورهٔ تناوب نور ثابت می‌ماند.

۱۵۳۵. گزینه۲ می‌دانیم طول‌موج نور در هر محیط شفاف با ضریب شکست آن محیط نسبت عکس دارد. از طرف دیگر، پهنای هر نوار روشن و تاریک متناسب با طول‌موج است. بنابراین اگر پهنای هر نوار را با W نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{W_{هوا}}{W_{آب}} = \frac{\lambda_{هوا}}{\lambda_{آب}} = \frac{n_{آب}}{n_{هوا}} \xrightarrow[n_{هوا}=۱]{n_{آب}=\frac{۴}{۳}} \frac{W_{هوا}}{W_{آب}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱} \Rightarrow \frac{W_{هوا}}{W_{آب}} = \frac{۴}{۳}$$

۱۵۳۶. گزینه۲ **گام اول** چون $W_۱ < W_۲$ است و $W \propto \lambda$ می‌باشد، باید $\lambda_۲ > \lambda_۱$ باشد، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۳» خط می‌خورند. می‌دانیم پهنای هر نوار تاریک یا روشن متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W \propto \lambda \Rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} \xrightarrow[W_۲=۲/۵mm]{W_۱=۲mm} \frac{۲/۵}{۲} = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} \Rightarrow \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = ۱/۲۵ \Rightarrow \lambda_۲ = ۱/۲۵\lambda_۱$$

گام دوم چون مجموع طول‌موج‌ها برابر ۱۰۸۰nm است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lambda_۲ + \lambda_۱ = ۱۰۸۰ \xrightarrow{\lambda_۲=۱/۲۵\lambda_۱} ۱/۲۵\lambda_۱ + \lambda_۱ = ۱۰۸۰ \Rightarrow ۲/۲۵\lambda_۱ = ۱۰۸۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴}\lambda_۱ = ۱۰۸۰ \Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۴\times۱۰۸۰}{۹}$$

$$\lambda_۱ = ۴۸۰nm,\ \lambda_۲ = ۱/۲۵\lambda_۱ = ۱/۲۵\times۴۸۰ \Rightarrow \lambda_۲ = ۶۰۰nm$$

۱۵۳۷. گزینه ۱ گام اول طول‌موج $\lambda_۲$ در هوا را به‌دست می‌آوریم. چون $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ و $\lambda'_۱+\lambda'_۲ = ۸۱۰\,nm$ است، می‌توان نوشت:

$$\lambda'_۱+\lambda'_۲=۸۱۰ \Rightarrow \frac{\lambda_۱}{n}+\frac{\lambda_۲}{n}=۸۱۰ \xrightarrow[n=\frac{۴}{۳}]{\lambda_۱=۶۰۰\,nm} \frac{۶۰۰}{\frac{۴}{۳}}+\frac{\lambda_۲}{\frac{۴}{۳}}=۸۱۰ \Rightarrow ۴۵۰+\frac{۳}{۴}\lambda_۲=۸۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{۴}\lambda_۲=۳۶۰ \Rightarrow \lambda_{۲\,(\text{هوا})}=۴۸۰\,nm$$

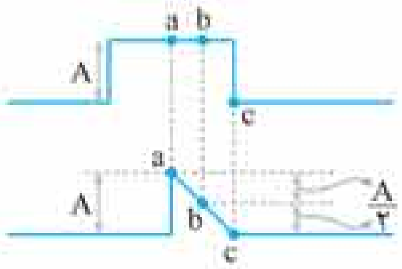
گام دوم چون پهنای هر نوار تاریک و روشن متناسب با طول‌موج نور به‌کار رفته است ($W \propto \lambda$)، می‌توان نوشت:

$$\frac{W_{۲\,\text{هوا}}}{W_{۱\,\text{آب}}}=\frac{\lambda_{۲\,\text{هوا}}}{\lambda_{۱\,\text{آب}}} \xrightarrow{\lambda_{۱\,\text{آب}}=\frac{\lambda_{۱\,\text{هوا}}}{n}} \frac{W_{۲\,\text{هوا}}}{W_{۱\,\text{آب}}}=\frac{\lambda_{۲\,\text{هوا}}}{\frac{\lambda_{۱\,\text{هوا}}}{n}} \xrightarrow[\lambda_{۱\,\text{هوا}}=۶۰۰\,nm]{\lambda_{۲\,\text{هوا}}=۴۸۰\,nm,\ n=\frac{۴}{۳}} \frac{W_{۲\,\text{هوا}}}{W_{۱\,\text{آب}}}=\frac{۴۸۰}{\frac{۶۰۰}{\frac{۴}{۳}}}$$

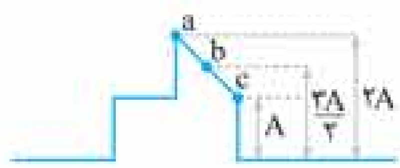
$$\Rightarrow \frac{W_{۲\,\text{هوا}}}{W_{۱\,\text{آب}}}=\frac{۴۸۰\times\frac{۴}{۳}}{۶۰۰}=\frac{۶۴۰}{۶۰۰} \Rightarrow \frac{W_{۲\,\text{هوا}}}{W_{۱\,\text{آب}}}=\frac{۱۶}{۱۵}$$

۱۵۳۸. گزینه ۴ می‌دانیم $W \propto \lambda \propto \frac{1}{f} \propto \frac{1}{n}$ است. بنابراین برای کاهش پهنای نوارها باید از نوری با طول‌موج کم‌تر (بسامد بیشتر) استفاده کنیم و یا آزمایش را در محیطی با ضریب شکست بیشتر انجام دهیم.

۱۵۳۹. گزینه ۳ با فرض این‌که دامنه دو موج یکسان و نقطه b وسط ac باشد، داریم:



$$A_a = A + A = ۲A$$
$$\Rightarrow A_b = A + \frac{A}{۲} = \frac{۳A}{۲}$$
$$A_c = A + ۰ = A$$

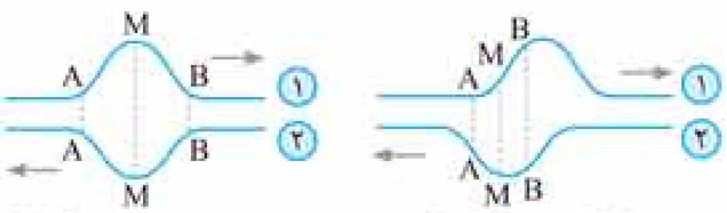


۱۵۴۰. گزینه ۴ هنگامی که جابه‌جایی‌های قائم حاصل از دو تپ در هر لحظه، در نقطهٔ A هم‌اندازه اما خلاف جهت هم باشند، در آن صورت نقطه A ساکن می‌ماند. به بیان دقیق‌تر هنگامی که طرح حاصل از دو تپ نسبت به نقطه A نسبت به یکدیگر تقارن مرکزی داشته باشند، آن‌گاه طبق آن چه گفته شد، نقطه A ساکن می‌ماند. (نقطهٔ A مرکز تقارن است.)

توجه داشته باشید، چون نقطه A مرکز تقارن است، از این رو با دوران °۱۸۰ شکل abcd به شکل a'b'c'd' می‌رسیم.

۱۵۴۱. گزینه ۴ موج داده شده در «گزینه ۳» یک لحظه (مثلاً t_A) می‌تواند موج مورد نظر را خنثی کند (این دو موج نسبت به یک نقطه روی ریسمان نسبت به هم تقارن مرکزی دارند)، اما نمی‌توانند برای همیشه اثر یکدیگر را از بین ببرند و پس از عبور از یکدیگر شکل خود را حفظ می‌کنند.

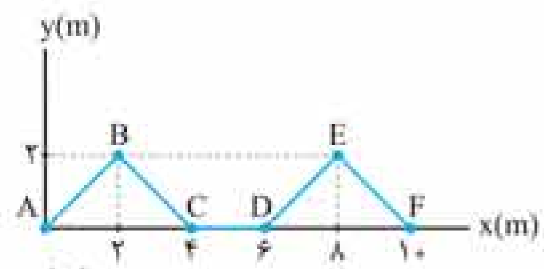
۱۵۴۲. گزینه ۴



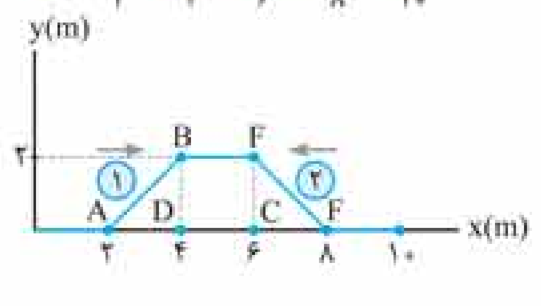
همان‌طور که در شکل مشخص است، دو تپ (۱) و (۲) فقط نسبت به نقطه M تقارن مرکزی دارند و این یعنی با تداخل دو تپ نقطه M همواره ساکن می‌ماند (نادرستی «گزینه ۲»). از طرف دیگر، چون AM = MB است، از این رو دو تپ A و B تقارن مرکزی ندارند و این نقاط ساکن نمی‌مانند (نادرستی «گزینه ۱»).

همان‌طور که در شکل دوم مشاهده می‌کنید جابه‌جایی قائم AM در تپ (۲) بیشتر است و از این رو AM پایین می‌آید. در مقابل جابه‌جایی قائم BM در تپ (۱) بیشتر است و از این رو BM بالا می‌رود.

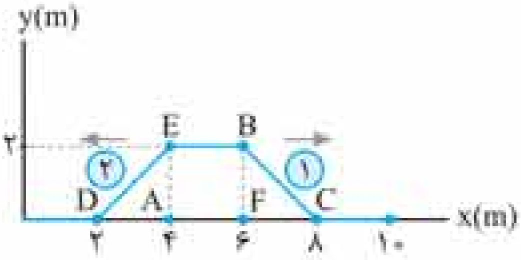
۱۵۴۳. گزینه ۱ چون تندی انتشار هر یک از تپ‌ها برابر $۱\,m/s$ است، از این‌رو هر یک از نقاط واقع بر این تپ‌ها پس از گذشت $۲s$، به اندازه $|\Delta x| = vt = ۱\times۲ = ۲m$ جابه‌جا می‌شوند. فقط توجه داشته باشید که نقاط واقع بر تپ (۱)، $+۲m$ و نقاط واقع بر تپ (۲)، $-۲m$ جابه‌جا می‌شوند؛ زیرا تپ (۱) در جهت محور x و تپ (۲) در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود. با مشخص کردن مکان نهایی برخی نقاط تپ‌ها روی محور x پس از دو ثانیه، شکل نهایی تپ حاصل به‌دست می‌آید.



$$\Delta x = x - x_۰ \Rightarrow x = x_۰ + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۰ + ۲ = ۲m \\ x_B = ۲ + ۲ = ۴m \\ x_C = ۴ + ۲ = ۶m \\ x_D = ۶ - ۲ = ۴m \\ x_E = ۸ - ۲ = ۶m \\ x_F = ۱۰ - ۲ = ۸m \end{cases}$$



به عنوان تمرین بیایید طرح تداخلی را در لحظه $t = 4s$ هم به‌دست آوریم.

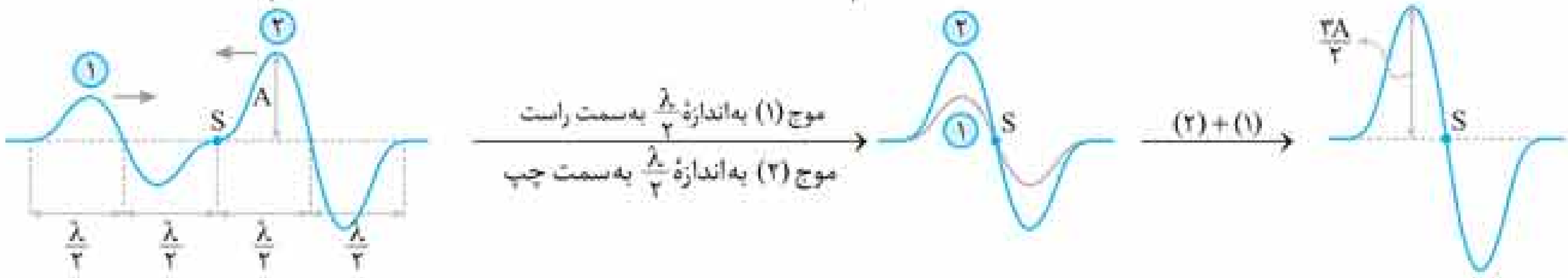


$$x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 + 4 = 4m \\ x_B = 2 + 4 = 6m \\ x_C = 4 + 4 = 8m \\ x_D = 6 - 4 = 2m \\ x_E = 8 - 4 = 4m \\ x_F = 10 - 4 = 6m \end{cases}$$

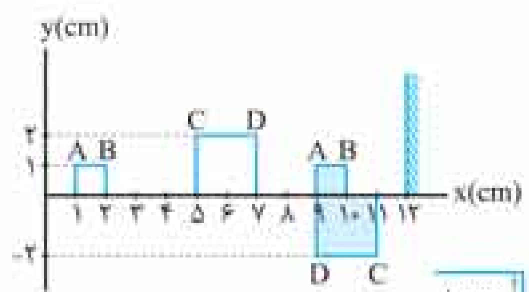
که دقیقاً مشابه طرح تداخلی در $t = 2s$ است. جالب بود نه؟!

حال از شما سؤالی می‌پرسیم. در چه لحظه‌ای، مجدداً طرح تداخلی مشابه طرح دو تپ در زمان $t = 0s$ خواهد شد؟ به عنوان تمرین بیشتر آن را بررسی کنید.

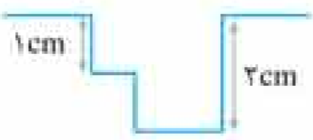
۱۵۴۴. گزینه ۴ همان‌طور که می‌دانیم هر موج در مدت T (دوره تناوب) به اندازهٔ یک طول‌موج (λ) و در مدت $\frac{T}{2}$ به‌اندازهٔ نصف طول‌موج ($\frac{\lambda}{2}$) و ... جابه‌جا می‌شود. بنابراین وقتی دورهٔ تناوب $T = 4s$ باشد و طرح تداخلی در $t = 2s$ را بخواهد، باید پیشروی هر موج را به‌اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ در نظر گرفته و سپس طرح تداخلی را ترسیم کنیم. توجه داشته باشید که پیشروی موج به‌اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ به این معنا است که هر نقطه روی موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ جابه‌جا شود.



۱۵۴۵. گزینه ۲ توجه داریم که هر نقطه روی هر دو تپ مسافتی برابر با $|\Delta x| = vt = 1\frac{cm}{s} \times 8s = 8cm$ را طی می‌کند و با توجه به این‌که یک انتها ثابت است، موج در برخورد با آن وارونه می‌شود و داریم:

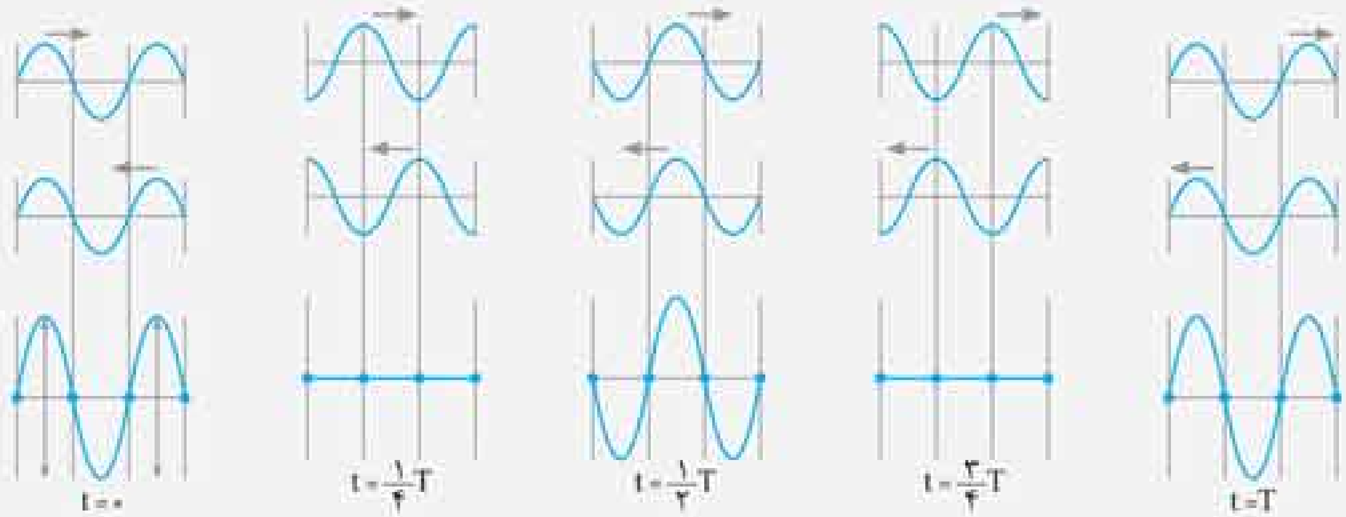


از طرفی چون جابه‌جایی‌های قائم قرینه هستند، طرح تداخلی نهایی به‌صورت زیر خواهد بود.



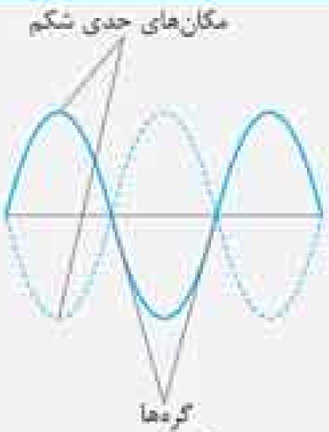
۵ موج ایستاده و تشدید در ریسمان کشیده

اگر یک انتهای ریسمانی را ثابت نگه داریم و انتهای دیگر آن را به نوسان در آوریم، موج بازتابیده از انتهای ثابت با موج تابیده ترکیب می‌شوند و موجی برایند ایجاد می‌کنند که به آن موج ایستاده می‌گویند. مطابق اصل برهم‌نهی، شکل این موج در چند لحظهٔ مختلف از یک دوره، در زیر رسم شده است.



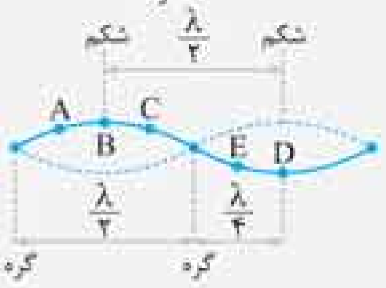
در شکل‌های فوق، در لحظه‌های صفر، $\frac{1}{2}T$ و T تداخل سازنده است. در این لحظه‌ها، دو قله یا دو دره با هم ترکیب شده‌اند. در لحظه‌های $\frac{T}{4}$ و $\frac{3T}{4}$، تداخل ویرانگر است. در این لحظه‌ها یک قله و یک دره با هم ترکیب شده‌اند.

گره: در نقاطی از ریسمان که موج‌های تابیده و بازتابیده به‌صورت یک قله و یک دره به هم می‌رسند، یکدیگر را حذف و اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و آن نقاط ساکن می‌مانند. به این نقاط گره می‌گویند.



شکم: در نقاطی از ریسمان که موج‌های تابیده و بازتابیده به‌صورت دو قله و یا دو دره به هم می‌رسند، یکدیگر را تقویت و به شدت نوسان می‌کنند، به این نقاط شکم می‌گویند.
در شکل مقابل، یک موج ایستاده با گره‌ها و شکم‌ها در یک ریسمان نشان داده شده است.

(۱) دامنهٔ موج برایند در گره‌ها صفر است.
(۲) دامنهٔ موج برایند در شکم‌ها بیشینه است. اگر دامنهٔ موج تابیده و بازتابیده A باشد، دامنهٔ موج برایند در شکم‌ها $2A$ است.
(۳) در نقاطی که تداخل ویرانگر است، گره تشکیل می‌شود.
(۴) در نقاطی که تداخل سازنده باشد، شکم تشکیل می‌شود.
(۵) در نقاطی که گره تشکیل می‌گردد، موج‌های تابیده و بازتابیده کاملاً ناهم‌فاز (در فاز مخالف) هستند.
(۶) در نقاطی که شکم تشکیل می‌شود، موج‌های تابیده و بازتابیده هم‌فاز هستند.
(۷) فاصلهٔ دو گره متوالی و یا دو شکم متوالی برابر $\frac{\lambda}{2}$ و فاصلهٔ یک گره از شکم مجاورش برابر $\frac{\lambda}{4}$ است.

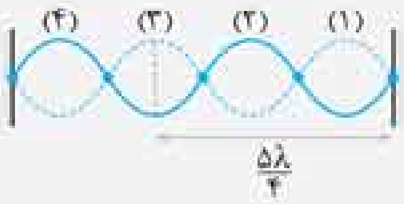


(۸) تمام نقاط بین دو گره متوالی هم‌بسامد و هم‌فاز هستند، اما دامنهٔ آن‌ها یکسان نیست. نقاطی که در طرفین یک گره وجود دارند، هم‌بسامد هستند اما هم‌فاز نیستند. در شکل فوق، نقاط A، B و C هم‌بسامد و هم‌فاز هستند، اما هم‌دامنه نیستند و با نقاط D و E هم‌فاز نیستند.

مثال: در ریسمانی که دو انتهای آن بسته است، موج ایستاده تشکیل می‌شود. اگر در طول ریسمان ۴ شکم ایجاد شود و فاصلهٔ سومین شکم از انتهای بسته ۵۰cm باشد، طول طناب چند متر است؟

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۲ گام اول شکل موج ایستاده را رسم می‌کنیم. دقت کنید، تعداد گره‌ها یکی بیشتر از تعداد شکم‌ها است و در انتهای بسته گره تشکیل می‌شود.



گام دوم از روی فاصلهٔ سومین شکم تا انتهای بسته، طول‌موج λ را می‌یابیم. با توجه به شکل، فاصلهٔ سومین شکم از انتهای بسته برابر $5\frac{\lambda}{4}$ است. بنابراین λ برابر است با:

$$\frac{5\lambda}{4} = 50 \Rightarrow \lambda = 40\text{cm}$$

گام سوم با توجه به شکل، طول طناب برابر 2λ است. بنابراین داریم:

$$L = 2\lambda \xrightarrow{\lambda = 40\text{cm}} L = 2 \times 40 \Rightarrow L = 80\text{cm}$$

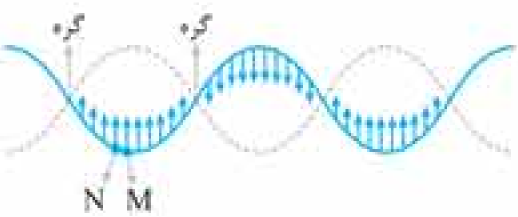
پاسخ‌های تشریحی

۱۵۴۶. گزینه ۱ در موج ایستاده، دامنهٔ نقاط مختلف متفاوت است. به عنوان مثال، در گره‌ها دامنه برابر صفر و در شکم‌ها دامنه، بیشینه است. از طرف دیگر، تمام نقاط بین دو گره متوالی هم‌بسامد و هم‌فازند و نقاطی که در طرفین یک گره هستند، هم بسامد و ناهم‌فازند.

۱۵۴۷. گزینه ۴ موج ایستاده در هر سه محیط جامد (ریسمان، فنر و...)، مایع (در سطح آب) و گاز (در لوله‌های صوتی) تشکیل می‌شود.

۱۵۴۸. گزینه ۴ وقتی در ریسمانی موج ایستاده تشکیل می‌گردد:

(۱) بسامد همهٔ نقاط ریسمان یکسان و ثابت است.



(۲) بنابر رابطهٔ $\varphi = \omega t$، شناسه (فاز) هر نقطه با زمان تغییر می‌کند.

تذکر: با وجود تغییر فازهای نقاط بین دو گره (مثلاً M و N)، این نقاط همواره هم‌فاز می‌مانند.

(۳) دامنهٔ نوسان هر نقطه از تار ثابت است.

تذکر: دامنهٔ نوسان نقاط مختلف با هم برابر نیست.

۱۵۴۹. گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ «۲» نادرست؛ مکان شکم (قلهٔ موج) در هر دوره **دو مرتبه** صفر می‌شود.

گزینهٔ «۱» و «۴» درست؛ نقاط بین دو گرهٔ متوالی هم‌فاز و نقاط بین دو شکم متوالی ناهم‌فازاند.

گزینهٔ «۳» درست؛ مکان گره، پیوسته صفر است؛ به بیان دیگر گره در حین نوسان جابه‌جا نمی‌شود.

۱۵۵۰. گزینه ۱ در موج ایستاده‌ای که در یک بُعد تشکیل شده است:

(۱) تمام نقاط با بسامد یکسان نوسان می‌کنند و نقطه‌های بین دو گرهٔ متوالی هم‌فازند.

(۲) چون دامنهٔ نوسان نقاط بین دو گرهٔ متوالی متفاوت و بسامد آن‌ها یکسان است، بنابر رابطهٔ $v_{max} = A\omega$، تندی آن‌ها در لحظهٔ عبور از نقطهٔ تعادل یکسان نیست.

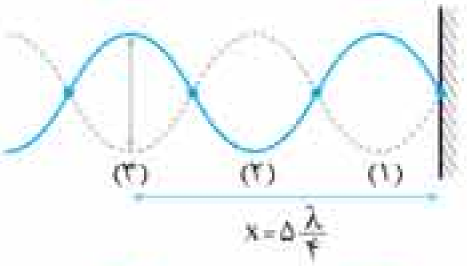
۱۵۵۱. گزینه ۴ چون نقطهٔ A روی شکم واقع است، بیشینهٔ دامنه را دارد. بنابراین، طبق رابطهٔ $v_{max} = A\omega$، بیشینهٔ سرعت نقطهٔ A بزرگ‌تر از بیشینه سرعت نقطهٔ M است. دقت کنید که سرعت هر ذره هنگام عبور از وضع تعادل، بیشینهٔ سرعت یا همان v_{max} نامیده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها

گزینه «۱» نادرست؛ دامنهٔ نوسان در نقطهٔ A بزرگ‌تر از دامنهٔ نوسان در نقطهٔ M است.

گزینه «۲» نادرست؛ تمام نقاط بین دو گرهٔ متوالی، هم‌فازند. بنابراین، اختلاف فاز بین دو نقطهٔ A و M برابر صفر است.

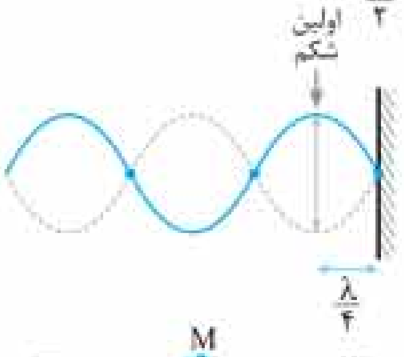
گزینه «۳» نادرست؛ در موج ایستاده همهٔ نقاطِ محیط با بسامد یکسان نوسان می‌کنند.



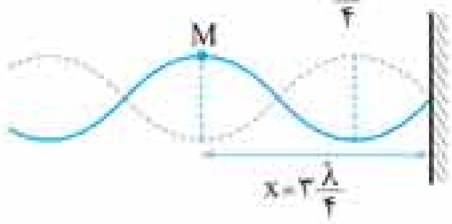
۱۵۵۲. گزینه ۲ به‌طورکلی در موج‌های ایستاده، فاصلهٔ شکم‌ها از انتهای ثابت (محل تشکیل گره)، برابر مضرب فردی از $\frac{\lambda}{4}$ است؛ یعنی $x=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$ است. (n شمارهٔ شکم است).

$$x=(2n-1)\frac{\lambda}{4}\xrightarrow{n=3}x=(2\times3-1)\frac{\lambda}{4}\Rightarrow x=\frac{5}{4}\lambda$$

۱۵۵۳. گزینه ۱ می‌دانیم در نقاطی که دو موج رفت و برگشت ناهم‌فازند، یک قله و یک دره به هم می‌رسند، به‌طوری که اثر هم را خنثی نموده و گره تشکیل می‌گردد. بنابراین، با توجه به شکل روبه‌رو، نزدیک‌ترین فاصله از یک انتهای بسته (خود، یک گره است) که موج رفت و برگشت ناهم‌فازند، برابر $\frac{\lambda}{2}$ است.



۱۵۵۴. گزینه ۱ مطابق شکل روبه‌رو، چون در انتهای بسته گره تشکیل می‌گردد، فاصلهٔ اولین شکم از دیوار برابر $\frac{\lambda}{4}$ است. از طرف دیگر، چون تندی انتشار موج در سیم ثابت است، با افزایش بسامد دیاپازون، بسامد تشدیدی در سیم نیز افزایش می‌یابد. بنابراین، طبق رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$، طول‌موج کاهش یافته و فاصلهٔ اولین شکم از دیوار که برابر $\frac{\lambda}{4}$ است نیز، کاهش خواهد یافت.



۱۵۵۵. گزینه ۲ **گام اول** با توجه به شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ M از انتهای بستهٔ ریسمان برابر $3\frac{\lambda}{4}$ است. بنابراین ابتدا با استفاده از معادلهٔ $x=0/2\cos(60\pi t)$، بسامد نوسان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/2\cos(60\pi t)\Rightarrow\omega=60\pi\ \ rad/s$$

$$\omega=2\pi f\Rightarrow60\pi=2\pi f\Rightarrow f=30Hz$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$، طول‌موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=12m/s}\lambda=\frac{12}{30}\Rightarrow\lambda=0/4m$$

گام سوم فاصلهٔ نقطهٔ M تا انتهای بستهٔ ریسمان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=3\frac{\lambda}{4}\xrightarrow{\lambda=0/4m}x=3\times\frac{0/4}{4}=3\times0/1\Rightarrow x=0/3m$$

۱۵۵۶. گزینه ۴ **بررسی گزینه‌ها**

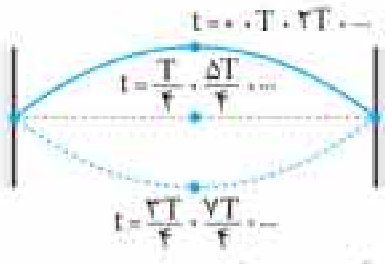
گزینه «۱» نادرست؛ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ C و D برابر $\frac{3}{4}$ طول‌موج است.

گزینه «۲» نادرست؛ نقاط A و B روی شکم واقع‌اند، بنابراین دامنهٔ آن‌ها با هم برابر است. چون بسامد آن‌ها نیز یکسان است، بنابر رابطهٔ $v_{max}=A\omega$ تندی آن‌ها نیز با هم برابر است.

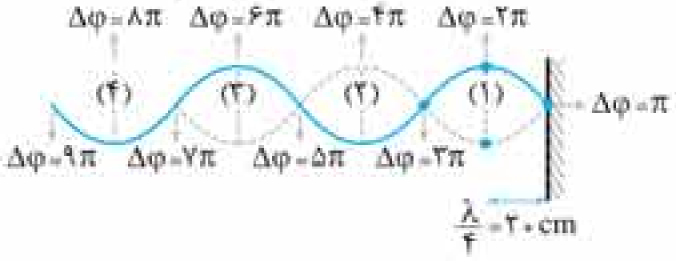
گزینه «۳» نادرست؛ نقطهٔ C گره بوده و ساکن است.

گزینه «۴» درست؛ نقاط بین دو گرهٔ مشخص همواره حرکتی در خلاف جهت نقاط بین دو گرهٔ قبل و بعد از آن گره انجام می‌دهند.

۱۵۵۷. گزینه ۱ چون $T=\frac{1}{f}$ است، لحظهٔ $t=\frac{1}{f}$ برابر لحظهٔ $t=T$ می‌باشد. بنابراین، در این لحظه هر ذره از تار یک نوسان کامل انجام می‌دهد و به مکان اول خود بازمی‌گردد.



به شکل مقابل توجه کنید. در لحظات $t=\frac{T}{4},\frac{5T}{4},\ldots$، چون تمام ذره‌های تار هم‌زمان از نقطهٔ تعادل که برای آن‌ها یکسان است، می‌گذرند، در این لحظات تار به‌صورت یک خط راست می‌شود.

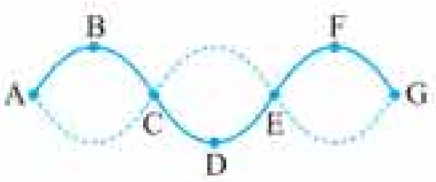


۱۵۵۸. گزینه ۴ **گام اول** می‌دانیم فاصلهٔ گره‌ها از انتهای بسته، مضرب درستی از $\frac{\lambda}{2}$ و فاصلهٔ شکم‌ها از انتهای بسته، مضرب فردی از $\frac{\lambda}{4}$ است. بنابراین، ابتدا باید مشخص کنیم در فاصلهٔ ۲۰ سانتی‌متری انتهای بستهٔ ریسمان، گره تشکیل می‌شود یا شکم. با توجه به شکل مقابل و با توجه به طول‌موج $(\lambda=80cm)$، محل گره‌ها و شکم‌ها را تعیین می‌کنیم.

گام دوم همان‌طور که در شکل می‌بینیم، در فاصلهٔ $20cm$ از انتهای بستهٔ ریسمان، شکم تشکیل شده است. در این نقطه دو موج هم‌فاز (دو قله یا دو دره) به هم رسیده‌اند. لذا اختلاف فاز آن‌ها صفر و یا مضرب زوجی از $\pi\ rad$ است. بنابراین، اختلاف فاز موج تابیده و بازتابیده در محل اولین شکم در فاصلهٔ $20cm$ از انتهای بسته، برابر $2\pi\ rad$ است.

۱۵۵۹. گزینه ۳ وقتی در نقطهٔ A و C گره ایجاد شده باشد، فاصلهٔ این دو نقطه برابر $\frac{\lambda}{2}$ است و گره‌های بعدی در نقاط E و G تشکیل می‌شوند.

بنابراین، چون فاصلهٔ نقاط A، B، C، D، E، F و G یکسان است، فاصلهٔ بین هر دو نقطه برابر $\frac{\lambda}{4}$ است.

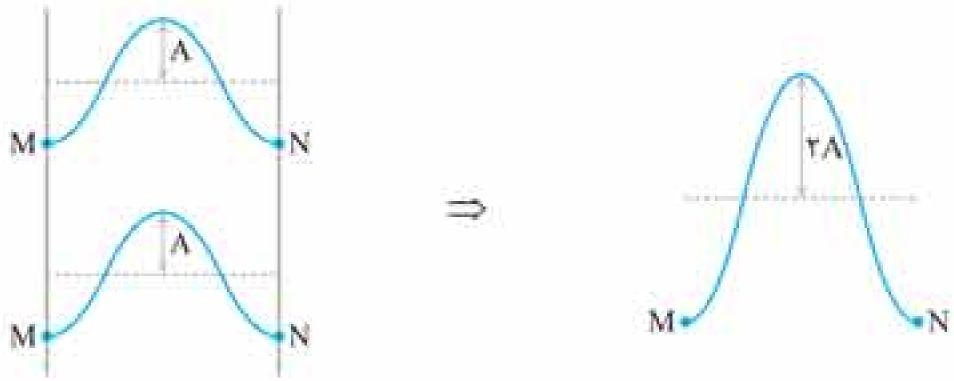


همچنین، چون در نقطهٔ B شکم تشکیل شده است، در نقطهٔ D و F نیز شکم تشکیل خواهد شد. با توجه به این‌که نقاط تار واقع در شکم‌ها به شدت نوسان می‌کنند، ممکن است، کاغذهای واقع در این دو نقطه از روی تار بیفتند.

۱۵۶۰. گزینه ۴ بنابر رابطهٔ $\Delta\varphi = \omega\Delta t$، در مدت $t = \frac{T}{4}$ پس از لحظهٔ $t = 0$ $(\Delta t = \frac{T}{4})$، نقاط M و N به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}\text{rad}$ تغییر فاز می‌دهند؛ زیرا:

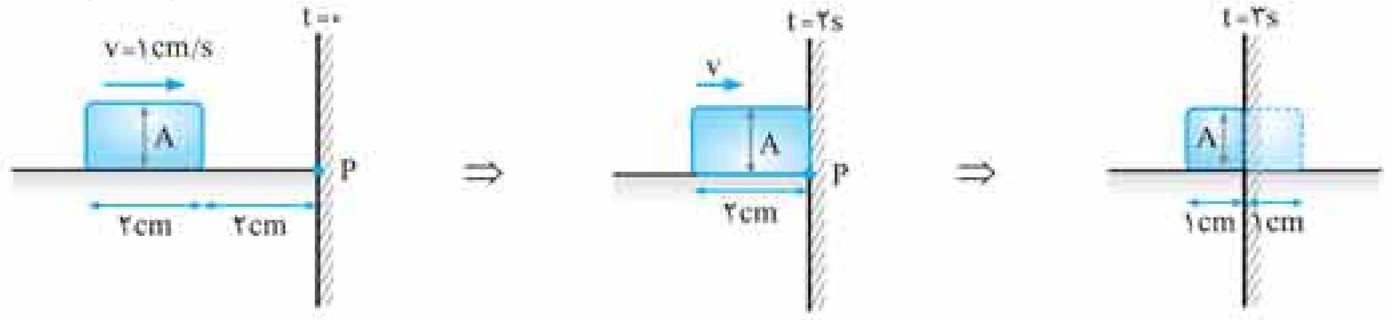
$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \xrightarrow[\omega = \frac{2\pi}{T}]{\Delta t = \frac{T}{4}} \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

بنابراین، با توجه به تغییر فاز هر نقطه و جهت انتشار موج‌ها، شکل ریسمان به‌صورت زیر در می‌آید:



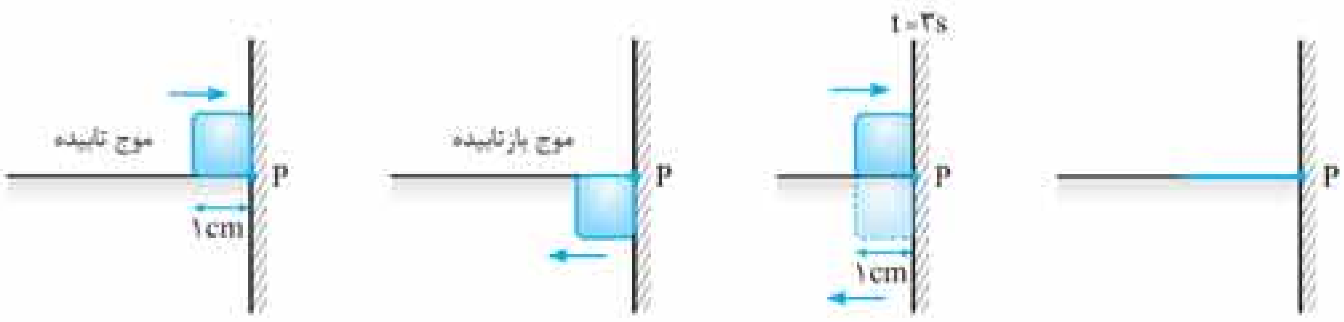
۱۵۶۱. گزینه ۴ چون موج با تندی $v = 1\text{cm/s}$ حرکت می‌کند، بنابر رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$، موج پس از ۲s به نقطهٔ P (انتهای بسته) ریسمان می‌رسد؛ زیرا فاصلهٔ تپ از نقطهٔ P برابر ۲ cm است.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2}{1} \Rightarrow \Delta t = 2\text{s}$$



(موج فرضی)

از طرف دیگر، چون شکل نوسان در لحظهٔ $t = 3\text{s}$ خواسته شده است، در ۱s باقی‌مانده باید موج به اندازهٔ ۱cm پیشروی کند. چون موج به انتهای بستهٔ ریسمان رسیده است، باید در این نقطه بازتاب نموده و به‌صورت وارون در خلاف جهت حرکت کند، بنابراین در این لحظه یک قله و یک دره به هم می‌رسند، لذا اثر یکدیگر را خنثی نموده و خطی راست دیده خواهد شد.



۵ بسامدهای تشدید تار

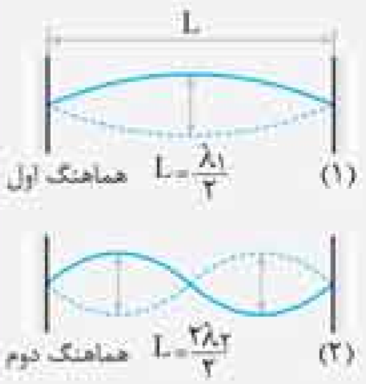
اگر یک سر تار را به گیره‌ای متصل نموده و سر دیگر آن را با بسامدهای معینی به نوسان در آوریم، تداخل بین موج‌های تابیده و بازتابیده موجب ایجاد موج ایستادهٔ بارزی (یا اصطلاحاً یک مد نوسان) در تار می‌شود. در این حالت، گفته می‌شود تار در این بسامدهای معین که بسامدهای تشدیدی خوانده می‌شوند، به تشدید در آمده است.

◄ اگر تار در بسامدی غیر از بسامدهای تشدیدی نوسان کند، موج ایستادهٔ بارزی ایجاد نمی‌شود.

در سازهای موسیقی، موج‌های ایستاده را می‌توان با ضربه‌زدن بر تارها (مانند سنتور) و پوسته‌ها (مانند طبل) و یا دمیدن در ستون‌های هوا (مانند نی) ایجاد کرد.

رابطه بسامدهای تشدید تار

مطابق شکل‌های زیر، در بسامدهای تشدیدی تار، ساده‌ترین نقش موج، یک شکم در وسط و دو گره در طرفین دارد. در این حالت طول تار برابر $L = \frac{\lambda_1}{2}$ است و تار هماهنگ اول خود را با بسامد f ایجاد می‌کند (شکل ۱).



در حالتی که با تغییر نیروی کشش، جرم یا ... (به غیر از طول تار) تعداد گره‌ها و شکم‌های ایجادشده در تار را افزایش دهیم، بسامد صوت ایجادشده و طول‌موج آن تغییر می‌کند و برای نقش سادهٔ بعدی در طول تار، سه گره و دو شکم تشکیل می‌گردد. در این حالت، طول تار برابر $L = \frac{2\lambda_2}{2}$ است و تار هماهنگ دوم خود را با بسامد f_2 ایجاد می‌کند (شکل ۲).