چگالی

یک کیلوگرم آهن سنگین‌تره یا یک کیلوگرم پنبه؟ این سؤال از قدیم برای سنجیدن هوش بچه‌ها به کار می‌رفته است. هدف این سؤال نشان‌دادن این مطلب است که اجسام مختلفی که جرم و وزن یکسان دارند، ممکن است حجم‌های خیلی متفاوتی داشته باشند.[۱]

این‌که اجسام با جرم یکسان، حجم‌های متفاوتی داشته باشند یا اجسام با حجم برابر، جرم‌های مختلفی داشته باشند، ناشی از تفاوت چگالی آن‌ها است.

چگالی از ویژگی‌های مهم هر ماده است و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V}$$

یکای چگالی در SI، کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3) است، اما یکاهای دیگری نیز برای آن کاربرد دارند. مهم‌ترین یکاهای غیراستاندارد برای چگالی g/cm^3 و kg/L است.

چگالی برحسب kg/L و چگالی برحسب g/cm^3 $\xrightleftharpoons[\times 1000]{\div 1000}$ چگالی برحسب kg/m^3

نکته چگالی را جرم واحد حجم یا جرم حجمی نیز می‌نامند. یعنی اگر جرم یکای حجم ماده‌ای را حساب کنیم، چگالی ماده را حساب کرده‌ایم.

در جدول صفحه‌ی بعد چگالی برخی از مواد در دمای $0\,^\circ C$ و فشار $1\,atm$ نوشته شده است:

جدول (۶): چگالی برخی از مواد

ماده	$\rho\ (kg/m^3)$	مایع‌ها	$\rho\ (kg/m^3)$
یخ	$9/17\times10^2$	آب	$1/00\times10^3$
آلومینیم	$2/7\times10^3$	گلیسرین	$1/26\times10^3$
آهن	$7/86\times10^3$	اتیل الکل	$8/06\times10^2$
مس	$8/92\times10^3$	بنزن	$8/79\times10^2$
نقره	$1/05\times10^4$	جیوه	$1/36\times10^4$
سرب	$1/13\times10^4$	هوا	$1/29\times10^0$
طلا	$1/93\times10^4$	اکسیژن	$1/43\times10^0$
پلاتین	$2/14\times10^4$	هیدروژن	$8/99\times10^{-2}$
اورانیوم	$1/87\times10^4$	هلیم	$1/79\times10^{-1}$

مثال و پاسخ

مثال **این‌که می‌گوییم چگالی سیمان $2300\ kg/m^3$ است، چه مفهومی دارد؟**

پاسخ یعنی اگر یک بلوک سیمانی به حجم $1\ m^3$ داشته باشیم، جرم آن $2300\ kg$ است.

مثال **تبدیل واحدهای زیر را انجام دهید.**

الف) $1\ g/cm^3 = \cdots\cdots\ kg/L$ ب) $1\ kg/m^3 = \cdots\cdots\ g/cm^3$ پ) $1\ kg/L = \cdots\cdots\ kg/m^3$

پاسخ

الف) $1\frac{g}{cm^3}\times\frac{1\ kg}{10^3\ g}\times\frac{10^3\ cm^3}{1\ L}=1\ kg/L$ این چگالی آب است.

ب) $1\frac{kg}{m^3}\times\frac{10^3\ g}{1\ kg}\times\frac{1\ m^3}{10^6\ cm^3}=10^{-3}\ g/cm^3$

پ) $1\frac{kg}{L}\times\frac{10^3\ L}{1\ m^3}=10^3\ kg/m^3$ این هم چگالی آب است.

مثال **در ظرفی ۲۷۲ گرم جیوه وجود دارد. اگر جیوه را خالی کنیم و به جای آن آب بریزیم، جرم آب چند کیلوگرم خواهد شد؟**

($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6\ g/cm^3$, $\rho_{\text{آب}} = 1\ g/cm^3$)

پاسخ ابتدا حجم ظرف را به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم ظرف: } V=\frac{m}{\rho}=\frac{272\ g}{13/6\ \frac{g}{cm^3}}=20\ cm^3$$

حالا داخل این حجم را آب ریخته و جرم آن را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم آب: } m=\rho_{\text{آب}}V=1\frac{g}{cm^3}\times 20\ cm^3=20\ g=2/0\times10^{-2}\ kg$$

۱- البته در این سؤال از اثر ناچیز نیروی شناوری صرف‌نظر شده است، یعنی به نحوی مسئله را آرمانی در نظر گرفته و مدل‌سازی کرده‌ایم (*همون مدل‌سازی فورمون*).

مثال و پاسخ

مثال **۱۰ L آب چند گرم بیشتر از ۱۰ L بنزین جرم دارد؟** ($\rho_{بنزین} = ۶۸۰\ kg/m^۳$ ، $\rho_{آب} = ۱\ g/cm^۳$)

پاسخ باید جرم ۱۰ L آب و ۱۰ L بنزین را حساب کرده و با هم مقایسه کنیم. در هر مورد ابتدا تبدیل واحدهای لازم را انجام می‌دهیم.

$$\rho_{آب} = ۱\frac{g}{cm^۳} \times \frac{۱۰^۳\ cm^۳}{۱\ L} = ۱۰^۳\ g/L \qquad m_{آب} = \rho_{آب} V = ۱۰^۳ \frac{g}{L} \times ۱۰\ L = ۱۰^۴\ g$$

$$\rho_{بنزین} = ۶۸۰\frac{kg}{m^۳} \times \frac{۱۰^۳\ g}{۱\ kg} \times \frac{۱\ m^۳}{۱۰^۳\ L} = ۶۸۰\ g/L \qquad m_{بنزین} = \rho_{بنزین} V = ۶۸۰\frac{g}{L} \times ۱۰\ L = ۶۸۰۰\ g$$

$$m_{آب} - m_{بنزین} = ۱۰۰۰۰\ g - ۶۸۰۰\ g = ۳۲۰۰\ g$$

محاسبه‌ی چگالی

آیا می‌دانستید اگر هوای موجود در کلاستان را فشرده کرده و به یک ظرف دربسته و سبک وارد کنید، بعد از ورود هوا دیگر نمی‌توانید آن ظرف را از روی زمین بردارید؟!

قبل از اثبات این ادعا، نحوه‌ی محاسبه‌ی چگالی را بخوانید تا استفاده از آن، ادعای بالا را ثابت کنیم.

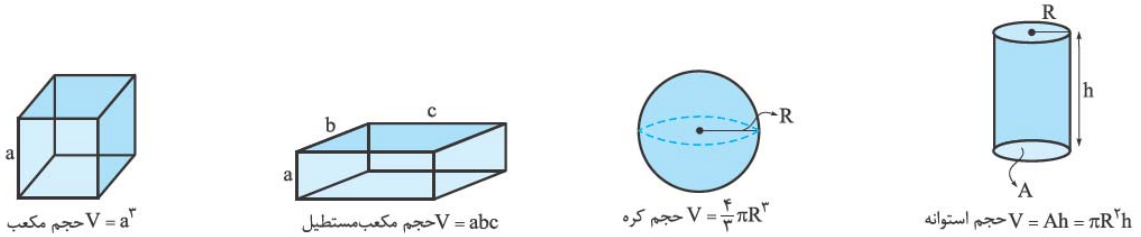
برای محاسبه‌ی چگالی یک جسم باید دو چیز را تعیین کرد:

۱) جرم جسم (m) ۲) حجم جسم (V)

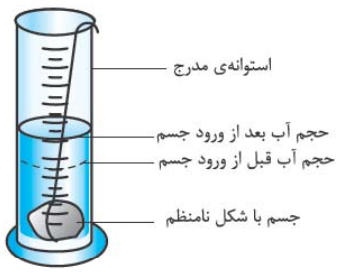
تعیین جرم: جرم جسم را با استفاده از ترازو اندازه می‌گیریم.

تعیین حجم: برای تعیین حجم یک جسم دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱) حجم اجسامی که شکل هندسی ساده دارند به کمک روابط تعیین حجم در هندسه به دست می‌آیند. چند نمونه از این اجسام و رابطه‌ی محاسبه‌ی حجم هر یک را در شکل‌های زیر می‌بینید:



۲) برای محاسبه‌ی حجم جسمی که شکل هندسی ساده ندارد، آن را داخل یک استوانه‌ی مدرج حاوی آب می‌اندازیم به گونه‌ای که تمام حجم آن زیر آب قرار گیرد. تغییر ارتفاع آب در استوانه‌ی مدرج، برابر با حجم جسم است.



حالا وقت آن است که ادعای خود را ثابت کنیم. مثال زیر را دریابید.

مثال و پاسخ

مثال **کلاستان را مکعب‌مستطیلی با ابعاد ۳m × ۴m × ۹m در نظر بگیرید. هوای موجود در کلاس شما چند کیلوگرم است؟**

پاسخ از جدول چگالی‌ها می‌دانیم که $\rho_{هوا} = ۱/۲۹\ kg/m^۳$ است. بنابراین داریم:

$$\text{حجم کلاس}: V = ۹m \times ۴m \times ۳m = ۱۰۸\ m^۳$$

$$m = \rho V = ۱/۲۹\ kg/m^۳ \times ۱۰۸\ m^۳ = ۱۳۹/۳۲\ kg$$

دیدید گفتم؟! فکر نمی‌کنم بتوانید ظرفی به جرم تقریبی ۱۴۰ کیلوگرم را از زمین بلند کنید.

مثال و پاسخ

مثال **فلز اُسمیوم از چگال‌ترین عناصر یافت‌شده روی زمین است. قطعه‌ای از این فلز به اندازه‌ی تقریبی یک توپ والیبال به شعاع ۱۰ cm، چند کیلوگرم است؟** $(\rho_{\text{اسمیوم}} = ۲۲/۵\times۱۰^{۳}\ \text{kg/m}^{۳},\ \pi \simeq ۳)$

پاسخ حجم توپ را حساب می‌کنیم:

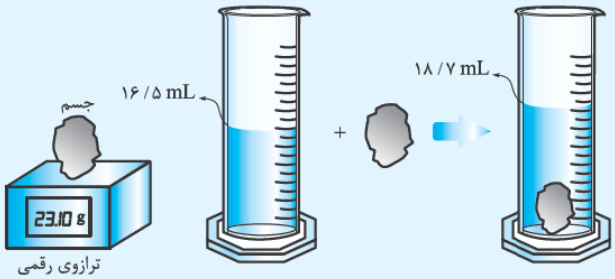
$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳}\times ۳\times(۱۰\times۱۰^{-۲}\text{m})^{۳} = ۴\times۱۰^{-۳}\ \text{m}^{۳}$$

$$m = \rho V = (۲۲/۵\times۱۰^{۳})\ \text{kg/m}^{۳}\times(۴\times۱۰^{-۳})\text{m}^{۳} = ۹۰\ \text{kg}$$

توپی به ابعاد تقریبی توپ والیبال اگر از فلز اسمیوم ساخته شده باشد، ۹۰ kg جرم دارد. جرم توپ والیبال واقعی کم‌تر از ۳۰۰ g است.

مثال **الف** **با توجه به شکل زیر، چگالی جسم را برحسب g/L، $\text{g/cm}^{۳}$، $\text{kg/m}^{۳}$ به دست آورید.**

ب **با استفاده از جدول چگالی‌ها، جنس جسم را تعیین کنید.**



پاسخ **الف** حجم جسم را با توجه به تغییر ارتفاع مایع در استوانه‌ی مدرج تعیین می‌کنیم:

$$V = ۱۸/۷\ \text{mL} - ۱۶/۵\ \text{mL} = ۲/۲\ \text{mL}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{۲۳/۱۰\ \text{g}}{۲/۲\ \text{mL}} = \frac{۲۳/۱۰\ \text{g}}{۲/۲\times۱۰^{-۳}\ \text{L}} = ۱۰۵۰۰\ \text{g/L}$$

$$۱۰۵۰۰\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}}\times\frac{۱\ \cancel{\text{L}}}{۱۰^{۳}\ \text{cm}^{۳}} = ۱۰/۵\ \text{g/cm}^{۳}$$

$$۱۰۵۰۰\ \frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{L}}}\times\frac{۱۰^{۳}\ \cancel{\text{L}}}{۱\ \text{m}^{۳}}\times\frac{۱\ \text{kg}}{۱۰^{۳}\ \cancel{\text{g}}} = ۱۰۵۰۰\ \text{kg/m}^{۳} = ۱/۰۵\times۱۰^{۴}\ \text{kg/m}^{۳}$$

ب چگالی به دست آمده مربوط به نقره است.

محاسبه‌ی چگالی اجسام حفره‌دار

در انواعی از مسائل چگالی با اجسامی روبه‌رو هستیم که دارای حفره هستند؛ یعنی تمام یا قسمتی از جسم موردنظر، توخالی است. در این مسائل می‌توان حجم حفره را از تفاوت حجم ظاهری و حجم واقعی جسم به دست آورد:

حجم حفره (فضای خالی) = حجم ظاهری − حجم واقعی

حجم ظاهری، حجم جسم با توجه به ابعادش و با در نظر گرفتن حجم حفره است.

حجم واقعی، حجم ماده‌ی به کار رفته در جسم است. این حجم را می‌توان با استفاده از جرم و چگالی جسم تعیین کرد:

$$\text{حجم واقعی}: V = \frac{m}{\rho}$$

مثال و پاسخ

مثال **یک مجسمه‌ی فلزی ۴۰ kg جرم و ۰/۰۶۰ $\text{m}^{۳}$ حجم دارد. چگالی فلز به کار رفته در مجسمه ۸۰۰۰ $\text{kg/m}^{۳}$ است. حجم فضای خالی درون مجسمه را حساب کنید.**

پاسخ

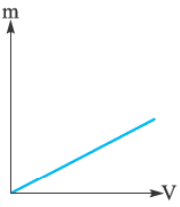
$$\text{حجم ظاهری} = ۰/۰۶۰\ \text{m}^{۳}$$

$$\text{حجم واقعی} = \frac{m}{\rho} = \frac{۴۰}{۸۰۰۰} = ۰/۰۰۵\ \text{m}^{۳}$$

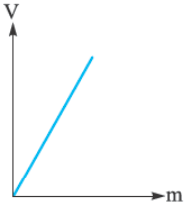
$$\text{حجم فضای خالی} = \text{حجم ظاهری} - \text{حجم واقعی} = ۰/۰۶۰\ \text{m}^{۳} - ۰/۰۰۵\ \text{m}^{۳} = ۰/۰۵۵\ \text{m}^{۳}$$

محاسبه‌ی چگالی از روی نمودار

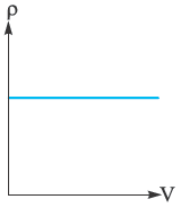
در مسائل مختلف ممکن است با هر یک از نمودارهای زیر روبه‌رو شویم. این نمودارها در دمای ثابت رسم می‌شوند و اطلاعات لازم برای حل سؤال را در اختیار ما قرار می‌دهند.



در نمودار $m-V$، شیب خط نشان‌دهنده‌ی چگالی ماده است.



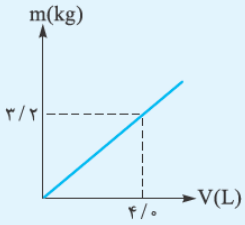
در نمودار $V-m$، شیب خط وارون چگالی ماده را نشان می‌دهد.



در نمودار $\rho-V$، مساحت زیر نمودار، نشان‌دهنده‌ی جرم ماده است.

مثال و پاسخ

مثال **نمودار تغییرات جرم برحسب حجم $(m-V)$ ماده‌ای در دمای ثابت به صورت مقابل است. چگالی این ماده را در SI به دست آورید.**



پاسخ شیب این خط برابر با چگالی جسم است. ابتدا چگالی را برحسب kg/L به دست آورده و بعد به واحد kg/m^3 تبدیل می‌کنیم.

$$\rho = 0/8\,\frac{kg}{\cancel{L}} \times \frac{10^3\,\cancel{L}}{1\,m^3} = 800\,kg/m^3$$

$$\rho = \frac{(3/2-0)\,kg}{(4/0-0)\,L} = \frac{3/2\,kg}{4/0\,L} = 0/8\,kg/L$$

چگالی آلیاژ (مخلوط)

اگر دو یا چند ماده با هم مخلوط شوند و حجم هر کدام از آن‌ها بر اثر مخلوط‌شدن تغییر نکند، داریم:

$$\text{چگالی آلیاژ (مخلوط)} = \frac{\text{جرم کل}}{\text{حجم کل}} \Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1+m_2+\cdots}{V_1+V_2+\cdots}$$

توجه یک اشتباه خطرناک که بعضی‌ها مرتکب می‌شوند این است که برای پیداکردن چگالی مخلوط، چگالی مواد اولیه را با هم جمع می‌کنند! حواستان باشد وقتی دو یا چند ماده با هم مخلوط شوند، ماده‌ی جدیدی داریم که جرمش مجموع جرم‌های مواد اولیه و حجمش مجموع حجم‌های آن‌ها است و این به معنی جمع‌کردن چگالی‌ها نیست.

مثال و پاسخ

مثال **۹۰۰ گرم آب و ۸۰۰ گرم الکل را با هم مخلوط می‌کنیم. اگر تغییر حجمی رخ ندهد، چگالی محلول چه‌قدر است؟**
$(\rho_{\text{آب}} = 1\,g/cm^3\ ,\ \rho_{\text{الکل}} = 0/8\,g/cm^3)$

پاسخ در این سؤال جرم آب و الکل داده شده و برای محاسبه‌ی حجم باید از $V=\frac{m}{\rho}$ استفاده کنیم.

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} \Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1+m_2}{\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}} = \frac{900\,g+800\,g}{\frac{900\,g}{1\,\frac{g}{cm^3}}+\frac{800\,g}{0/8\,\frac{g}{cm^3}}} = \frac{1700\,g}{1900\,cm^3} \simeq 0/89\,g/cm^3$$

کاربردهای چگالی

چگالی یکی از مفاهیم پرکاربرد در فیزیک است. در این‌جا با چند نمونه از کاربردهای آن آشنا می‌شویم:

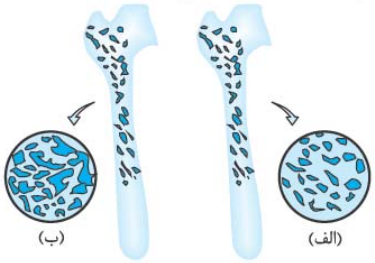
نمونه ۱ **استاندارد شیر**. طبق دستورالعمل مؤسسه‌ی استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران، چگالی شیر خام تحویلی در کارخانه‌های شیر و لبنیات باید در دمای $15\,^\circ C$ بین $1029\,kg/m^3$ تا $1032\,kg/m^3$ باشد.

نمونه۲ طراحی کشتی. اجسامی می‌توانند روی آب شناور بمانند که چگالی آن‌ها از چگالی آب کم‌تر باشد. یک کشتی به این دلیل روی آب شناور می‌ماند که چگالی کل کشتی (با احتساب فضاهای خالی) از چگالی آب کم‌تر است.

وقتی شناورماندن کشتی را با زیر آب رفتن یک گیره‌ی فلزی کاغذ مقایسه می‌کنیم، متوجه می‌شویم که شناورماندن روی آب ربطی به سنگینی یا سبکی اجسام ندارد و فقط به چگالی آن‌ها مربوط است.

نمونه۳ انتخاب خاموش‌کننده‌ی مناسب برای آتش. وقتی دو مایع مخلوط‌نشدنی در یک ظرف ریخته شوند، مایعی که چگالی کم‌تری دارد، بالاتر قرار می‌گیرد. چگالی آب از بنزین بیشتر است؛ بنابراین اگر بنزین شعله‌ور شود و روی آن آب بریزیم، آب در زیر بنزین قرار خواهد گرفت و شعله را خاموش نمی‌کند. برای خاموش‌کردن بنزین شعله‌ور از گاز کربن دی‌اکسید استفاده می‌شود که چگالی کم‌تری نسبت به بنزین دارد.

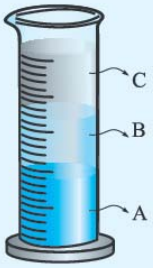
نمونه۴ سنجش تراکم استخوان. یکی از بیماری‌های شایع دوران پیری، پوکی استخوان یا همان کاهش چگالی استخوان است. چگالی‌سنجی استخوان روشی است که با استفاده از آن می‌توان میزان سختی استخوان‌های بدن را تعیین کرد.



نمونه۵ تشخیص تعداد گلبول‌های قرمز خون. چگالی خون در بدن یک فرد سالم در حدود $1050\ kg/m^3$ است. اگر تعداد گلبول‌های قرمز خون بیشتر از حد طبیعی باشد، چگالی خون زیاد می‌شود. کم‌شدن تعداد گلبول‌ها هم باعث کاهش چگالی خون می‌شود. با اندازه‌گیری چگالی خون می‌توان تعداد تقریبی گلبول‌های قرمز را تعیین کرد.

مثال و پاسخ

مثال **سه مایع مخلوط‌نشدنی را در یک استوانه‌ی مدرج ریخته‌ایم. این سه مایع عبارت‌اند از: آب ($\rho_{آب}=1/0\times10^3\ kg/m^3$) و جیوه ($\rho_{جیوه}=1/36\times10^4\ kg/m^3$) و گلیسرین ($\rho_{گلیسرین}=1/26\times10^3\ kg/m^3$). با توجه به مطلبی که در نمونه‌ی ۳ دیدید، تعیین کنید A، B و C هرکدام چه مایعی هستند؟**



پاسخ در نمونه‌ی ۳ دیدیم وقتی دو یا چند مایع مخلوط‌نشدنی در یک ظرف ریخته شوند، مایع با چگالی کم‌تر، بالاتر قرار می‌گیرد، بنابراین:

$A \rightarrow$ جیوه $\qquad B \rightarrow$ گلیسرین $\qquad C \rightarrow$ آب

مثال **چگالی خون برای یک فرد سالم در محدوده‌ی $1/04\ g/cm^3$ تا $1/06\ g/cm^3$ قابل‌قبول است. در آزمایشگاه به اندازه‌ی $6\ cm^3$ از شخصی خون گرفته می‌شود. اگر جرم خون گرفته‌شده $6/12\ g$ باشد، شخص سالم است یا خیر؟**

پاسخ چگالی خون شخص: $\rho=\frac{m}{V}=\frac{6/12\ g}{6\ cm^3}=1/02\ g/cm^3$

بنابراین این شخص سالم نیست و دچار کمبود گلبول‌های قرمز خون است.

تمرین

۴۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) چگالی مایعات، همیشه از چگالی جامدات کم‌تر است.

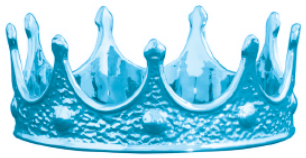
ب) یک چوب‌کبریت روی آب استخر شناور می‌ماند، زیرا جرم آن از جرم آب استخر کم‌تر است.

پ) در دما و فشار ثابت، چگالی آب درون یک لیوان و چگالی آب استخر با هم برابر است.

ت) چگالی آلیاژ از چگالی هر کدام از مواد مخلوط‌شده بیشتر است.

۴۴- چگالی یک نوشابه‌ی گازدار وقتی که هنوز بطری آن باز نشده بیشتر است یا هنگامی که آن را داخل لیوان ریخته‌ایم؟

۴۵- در زمان ارشمیدس، پادشاه مقداری طلای خالص به طلاسازی می‌دهد تا یک تاج طلایی زیبا برایش ساخته شود. وقتی طلاساز تاج را به پادشاه می‌دهد، پادشاه شک می‌کند که آیا تاج جدیدش از طلای خالص ساخته شده یا ناخالصی مس دارد. پادشاه از ارشمیدس برای حل این مشکل کمک می‌خواهد و او این مسئله را حل می‌کند. به نظر شما راه حل ارشمیدس چه بوده است؟



۴۶- چگالی ستاره‌های کوتوله‌ی سفید در SI حدود ۱۰۰ میلیون است. جرم مقداری از این ستاره به اندازه‌ی تقریبی یک حبه‌قند چند کیلوگرم است؟

۴۷- اگر مقداری یخ را به طور کامل ذوب کنیم، حجم آن $10\ cm^3$ تغییر می‌کند. جرم یخ ذوب‌شده چه‌قدر است؟

$(\rho_{آب} = 1000\ kg/m^3 \ , \ \rho_{یخ} = 900\ kg/m^3)$

۴۸- یک قطعه فلز با چگالی $4/0\ g/cm^3$ را درون ظرفی لبریز از روغن می‌اندازیم. اگر $72\ g$ روغن از ظرف سرریز شود، جرم قطعه فلز چند گرم است؟ $(\rho_{روغن} = 0/8\ g/cm^3)$

۴۹- جرم یک ورقه‌ی مسی $21/6\ g$ و مساحت آن $20\ cm^2$ است. ضخامت ورقه را به دست آورید. $(\rho_{مس} = 9\ g/cm^3)$

۵۰- قطر یک گوی فلزی نصف قطر یک گوی چوبی است. اگر جرم آن ۴ برابر جرم گوی چوبی باشد، چگالی فلز چند برابر چگالی چوب است؟

۵۱- الف) مکعبی آلومینیمی داریم که $21/6\ g$ جرم دارد. طول ضلع این مکعب را به دست آورید.

ب) مکعب بالا را ذوب کرده و از آن یک حجم کروی می‌سازیم. شعاع این کره را به دست آورید. $(\rho_{آلومینیم} = 2/7 \times 10^3\ kg/m^3 \ , \ \pi = 3)$

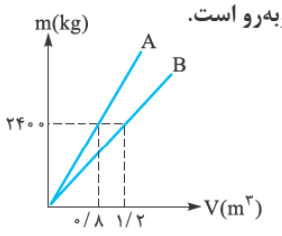
۵۲- یک کره‌ی نقره‌ای به قطر $10\ cm$ و جرم $3150\ g$ در اختیار داریم. حجم حفره‌ای که درون این کره وجود دارد را به دست آورید.

$(\rho_{نقره} = 10500\ kg/m^3, \pi = 3)$

۵۳- $500\ cm^3$ آب را با چند سانتی‌متر مکعب از مایعی به چگالی $1/2\ g/cm^3$ مخلوط کنیم تا چگالی مخلوط $1/1\ g/cm^3$ شود؟

$(\rho_{آب} = 1\ g/cm^3)$

۵۴- در دمای ثابت، نمودار تغییرات جرم برحسب حجم $(m - V)$ دو ماده‌ی A و B به صورت روبه‌رو است.



الف) اگر جرم‌های مساوی از آن‌ها را با هم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط چه‌قدر خواهد شد؟

ب) اگر حجم‌های مساوی از آن‌ها را با هم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط چه‌قدر خواهد شد؟

حالا می‌توانیم جرم طلایی که ادعا می‌شود سرقت شده را حساب کنیم:

تومان 10^{12} ~ قیمت ادعایی طلاها

تومان 10^{8} ~ $9/712\times10^{7}$ = قیمت هر کیلوگرم طلا

$$\Rightarrow \text{جرم طلاها} \sim \frac{10^{12}}{10^{8}} \sim 10^{4}\ \text{kg}$$

یعنی آن خلافکار ادعا کرده که به تنهایی حدود ۱۰ تن طلا را با یک کیسه دزدیده است! *نتیجه‌ی اخلاقی: خلافکارها دروغ می‌گویند!*

۴۳- الف) نادرست ب) نادرست

پ) درست ت) نادرست

۴۴- وقتی نوشابه داخل بطری بازنشده قرار دارد، مقدار زیادی گاز در آن محلول است. چگالی گاز به مقدار قابل توجهی از چگالی مایع کم‌تر است و وقتی در مایع حل می‌شود، چگالی مخلوط کاهش می‌یابد. با ریختن نوشابه داخل لیوان، گاز زیادی از نوشابه خارج شده و چگالی آن افزایش می‌یابد.

۴۵- ارشمیدس یک قطعه طلای خالص که دقیقاً هم‌وزن تاج پادشاه بود، برداشت و آن را داخل یک ظرف پر از آب گذاشت. مقدار آبی که از ظرف بیرون ریخت برابر با حجم آن مقدار طلای خالص بود. او به این ترتیب توانست چگالی طلا را محاسبه کند.

سپس تاج پادشاه را داخل ظرف پر از آب قرار داد و آب بیرون‌ریخته را اندازه گرفت. چون چگالی مس از طلا کم‌تر است، اگر تاج ناخالصی مس داشته باشد، آب بیرون‌ریخته (حجم تاج) از دفعه‌ی قبلی بیشتر است و چگالی تاج که ساخته از آلیاژ طلا و مس بود از چگالی طلای خالص کم‌تر می‌شود. او به این صورت توانست متقلب‌بودن طلاساز را اثبات کند.

۴۶- چگالی در SI برحسب کیلوگرم بر متر مکعب بیان می‌شود، پس:

$$\rho_{\text{کوتوله‌ی سفید}} = 100\times10^{6}\ \text{kg/m}^3 = 10^{8}\ \text{kg/m}^3$$

حالا باید ابعاد یک حبه‌قند را برآورد کنیم. یک حبه‌قند حجمی در حدود $1\ \text{cm}^3$ دارد.

$$m = \rho V = 10^{8}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 1\ \text{cm}^3 \times \frac{1\ \text{m}^3}{10^{6}\ \text{cm}^3} = 10^{2}\ \text{kg}$$

یک حبه‌قند از ستاره‌های کوتوله‌ی سفید حدود ۱۰۰ کیلوگرم جرم دارد!

۴۷- جرم یخ تغییری نمی‌کند. بنابراین جرم قبل از ذوب (یخ) و بعد از ذوب (آب) را برابر قرار می‌دهیم: $m_1 = m_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$

حجم ثانویه $10\ \text{cm}^3$ کم‌تر از حجم اولیه است، زیرا یخ وقتی ذوب می‌شود حجمش کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 (V_1 - 10\ \text{cm}^3)$$

$$\Rightarrow (900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})\times V_1 = (1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(V_1 - 10^{-5}\ \text{m}^3)$$

$$\Rightarrow 900V_1 = 1000V_1 - 10^{-2}\ \text{kg}$$

$$\Rightarrow 10^{-2}\ \text{kg} = (1000-900)V_1 = (100\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})V_1$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{10^{-2}\ \text{kg}}{100\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 10^{-4}\ \text{m}^3$$

حال می‌توان جرم یخ ذوب‌شده را حساب کرد:

$$m_1 = \rho_1 V_1 \Rightarrow m_1 = (900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})\times(10^{-4}\ \text{m}^3) = 0/09\ \text{kg}$$

۴۸- چگالی فلز را داریم و برای محاسبه‌ی جرم آن باید حجمش را به دست آوریم. حجم فلز دقیقاً برابر با حجم روغنی است که از ظرف بیرون می‌ریزد.

$$V = \frac{m_{\text{روغن}}}{\rho_{\text{روغن}}} \Rightarrow V = \frac{72\ \text{g}}{0/8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 90\ \text{cm}^3$$

$$\text{جرم فلز: } m_{\text{فلز}} = \rho_{\text{فلز}} V \Rightarrow m_{\text{فلز}} = 4/0\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\times 90\ \text{cm}^3 = 360\ \text{g}$$

۴۹- با استفاده از جرم و چگالی داده‌شده، حجم ورقه‌ی مسی را تعیین می‌کنیم:

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V = \frac{21/6\ \text{g}}{9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 2/4\ \text{cm}^3$$

حالا با استفاده از حجم به دست آمده و مساحت داده‌شده، ضخامت را به دست می‌آوریم:

$$V = Ad \Rightarrow d = \frac{V}{A} = \frac{2/4\ \text{cm}^3}{20\ \text{cm}^2} = 0/12\ \text{cm} = 1/2\ \text{mm}$$

۵۰- برای مقایسه‌ی چگالی دو جسم می‌نویسیم:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{m_1}{V_1}}{\frac{m_2}{V_2}} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1}{m_2}\times\frac{V_2}{V_1}$$

نسبت جرم‌ها داده شده و کافی است نسبت حجم‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = (\frac{r_2}{r_1})^3 \xrightarrow{\frac{r_2}{r_1}=2} \frac{V_2}{V_1} = (\frac{r_2}{r_1})^3 = 2^3 = 8$$

حالا می‌توانیم نسبت چگالی‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{چوب}}} = \frac{m_1}{m_2}\times\frac{V_2}{V_1} = 4\times8 = 32$$

۵۱- الف) با توجه به جرم و چگالی داده‌شده، حجم مکعب را به دست آورده و با استفاده از آن، طول ضلع را تعیین می‌کنیم:

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{\text{مکعب}} = \frac{21/6\times10^{-3}\ \text{kg}}{2/7\times10^{3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 8\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

از طرفی می‌دانیم: $\text{حجم مکعب} = (\text{طول ضلع})^3 \Rightarrow V = a^3$

$$\Rightarrow 8\times10^{-6}\ \text{m}^3 = a^3 \Rightarrow a = 2\times10^{-2}\ \text{m} = 2\ \text{cm}$$

ب حجم کره‌ی ساخته‌شده دقیقاً برابر با حجم مکعب اولیه است.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow ۸\times۱۰^{-۶}\,m^۳=\frac{۴}{۳}\times۳\times r^۳$$

$$\Rightarrow r^۳=۲\times۱۰^{-۶}\,m^۳ \Rightarrow r=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۱۰^{-۲}\,m=\sqrt[۳]{۲}\,cm$$

۵۲- برای پیداکردن حجم حفره، ابتدا حجم ظاهری و حجم واقعی کره را به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم ظاهری: } V_{\text{ظاهری}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\times۳\times(۵\,cm)^۳$$

$$\Rightarrow V_{\text{ظاهری}}=۵۰۰\,cm^۳$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم واقعی: } V_{\text{واقعی}}=\dfrac{m}{\rho}\\ \rho_{\text{نقره}}=۱۰۵۰۰\dfrac{\cancel{kg}}{\cancel{m^۳}}\times\dfrac{۱۰^۳\,g}{۱\,\cancel{kg}}\times\dfrac{۱\,\cancel{m^۳}}{۱۰^۶\,cm^۳}=۱۰/۵\,g/cm^۳\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow V_{\text{واقعی}}=\frac{۳۱۵۰\,g}{۱۰/۵\,\frac{g}{cm^۳}}=۳۰۰\,cm^۳$$

$$\text{حجم نقره}=V_{\text{ظاهری}}-V_{\text{واقعی}}=۵۰۰-۳۰۰=۲۰۰\,cm^۳$$

۵۳- در این سؤال صحبتی از جرم نشده و در عوض چگالی همه‌ی مواد داده شده است؛ بنابراین در رابطه‌ی چگالی مخلوط، به جای m از ρV استفاده می‌کنیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲}$$

$$\Rightarrow ۱/۱\,\frac{g}{cm^۳}=\frac{(۱\,\frac{g}{cm^۳})(۵۰۰\,cm^۳)+(۱/۲\,\frac{g}{cm^۳})V_۲}{(۵۰۰\,cm^۳)+V_۲}$$

$$\Rightarrow (۵۵۰\,g)+(۱/۱\,\frac{g}{cm^۳})V_۲=(۵۰۰\,g)+(۱/۲\,\frac{g}{cm^۳})V_۲$$

$$\Rightarrow ۵۰\,g=(۰/۱\,\frac{g}{cm^۳})V_۲ \Rightarrow V_۲=\frac{۵۰\,g}{۰/۱\,\frac{g}{cm^۳}}=۵۰۰\,cm^۳$$

۵۴- ابتدا با استفاده از نمودار داده‌شده، چگالی دو ماده را تعیین می‌کنیم:

$$\rho_A=\frac{۲۴۰۰\,kg}{۰/۸\,m^۳}=۳۰۰۰\,kg/m^۳$$

$$\rho_B=\frac{۲۴۰۰\,kg}{۱/۲\,m^۳}=۲۰۰۰\,kg/m^۳$$

الف چون چگالی‌ها را داریم، در رابطه‌ی چگالی مخلوط، به جای V از $\frac{m}{\rho}$ استفاده می‌کنیم. رابطه را برای وقتی که دو جرم مساوی m را مخلوط کرده باشیم، می‌نویسیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m+m}{\frac{m}{\rho_A}+\frac{m}{\rho_B}}=\frac{۲m}{\frac{m}{۳۰۰۰\,\frac{kg}{m^۳}}+\frac{m}{۲۰۰۰\,\frac{kg}{m^۳}}}$$

$$=\frac{(۲m)\,kg}{(۵m)\,\frac{kg}{(۶۰۰۰)\,\frac{kg}{m^۳}}}=۲۴۰۰\,kg/m^۳$$

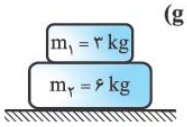
ب حجم مساوی را V می‌گیریم و در رابطه‌ی مخلوط، به جای m از ρV استفاده می‌کنیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\rho_AV+\rho_BV}{V+V}=\frac{(\rho_A+\rho_B)\cancel{V}}{۲\cancel{V}}$$

$$=\frac{۳۰۰۰\,\frac{kg}{m^۳}+۲۰۰۰\,\frac{kg}{m^۳}}{۲}=۲۵۰۰\,kg/m^۳$$

۲۹- جرم یک دستگاه خودرو بنز مدل C 300 حدود ۱۵۰۰ kg است. اگر فشاری که هر یک از تایرها بر سطح زمین وارد می‌کند برابر ۳۷۵ kPa باشد، اندازه‌ی سطح تماس هر تایر چند سانتی‌متر مربع است؟ (سطح تماس تایرها با زمین را یکسان و شتاب گرانش را $10\ m/s^2$ فرض کنید.)

۳۰- اگر مساحت کف جسم m_2، $100\ cm^2$ باشد، برای شکل مقابل موارد زیر را به دست آورید. ($g = 10\ m/s^2$)



الف) فشار کل وارد بر سطح زمین

ب) فشار حاصل از جسم ۳ کیلوگرمی

۳۱- فشاری که در هنگام ایستادن بر روی سطح زمین ایجاد می‌کنید، حدوداً چند پاسکال است؟

فشار در شاره

اگر به استخر رفته باشید، حتماً واردشدن فشار آب به گوش‌هایتان را تجربه کرده‌اید. فشاری که آب به شما وارد می‌کند، ناشی از نیروی عمودی‌ای است که هر شاره‌ی ساکن (*چه مایع باشه چه گاز*) به هر سطحی که با آن در تماس است، وارد می‌کند. این نیروی عمودی به خاطر برخورد مولکول‌های در حال حرکت شاره با سطح جسمِ در تماس با شاره است.

محاسبه‌ی فشار در شاره

برای محاسبه‌ی فشار در هر نقطه‌ی دلخواه درون یک شاره‌ی ساکن با چگالی یکنواختِ ρ، از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم: $P_2 = P_1 + \rho gh$

که P_1 فشار در سطح (۱) و P_2 فشار در سطح (۲) است. در این رابطه g شتاب گرانشی و h اختلاف عمق سطح (۱) و سطح (۲) است.

اثبات

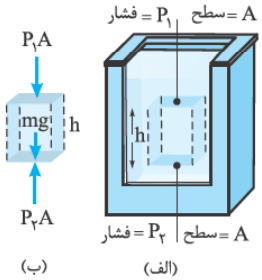
۱ بخشی از شاره را به ارتفاع h که مانند شکل روبه‌رو بین دو سطح فرضی به مساحت A قرار دارد، در نظر می‌گیریم.

۲ با توجه به این‌که به هر سطح در شاره نیرویی به اندازه‌ی $F_\perp = PA$ به طور عمودی وارد می‌شود، مطابق قسمت (ب) شکل روبه‌رو، نیروهای وارد بر این بخش را رسم می‌کنیم.

۳ چون شاره در حال تعادل است، نیروها متوازن‌اند و برایند آن‌ها صفر است؛ بنابراین در راستای قائم داریم:

$$P_2A = P_1A + mg$$

۴ چون $m = \rho V = \rho Ah$ است، رابطه‌ی بالا به صورت زیر می‌شود:



$$P_2A = P_1A + \rho Ahg \Rightarrow P_2A = (P_1 + \rho gh)A \Rightarrow \boxed{\underbrace{P_2}_{\text{فشار در سطح ۲}} = \underbrace{P_1}_{\text{فشار در سطح ۱}} + \underbrace{\rho gh}_{\substack{\text{اختلاف فشار سطح ۲} \\ \text{با فشار سطح ۱ ناشی} \\ \text{از فشار شاره}}}}$$

نتیجه ۱ اختلاف فشار دو نقطه از یک مایع که اختلاف عمق آن‌ها برابر h است، مساوی فشار حاصل از شاره‌ای به ارتفاع h است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho gh}$$

نتیجه ۲ هر چه در یک شاره به عمق بیشتری برویم، فشار بیشتر می‌شود.

نتیجه ۳ همان‌طور که از رابطه‌ی بالا مشخص است، فشار ناشی از شاره، تنها به چگالی، شتاب گرانشی و ارتفاع آن بخش از شاره که موردنظر است، بستگی دارد و به مساحت سطح مقطع آن وابسته نیست.

مثال و پاسخ

مثال **نقطه‌ی A درون یک استخر پر از آب از نقطه‌ی B به اندازه‌ی ۴ m پایین‌تر است. اگر فشار نقطه‌ی A برابر ۱۶۰۰۰۰ Pa باشد، فشار در نقطه‌ی B چند پاسکال است؟ ($\rho_{آب} = 1000\ kg/m^3$)**

پاسخ با توجه به این‌که عمق نقطه‌ی A بیشتر از عمق نقطه‌ی B است، داریم:

$$P_A = P_B + \rho gh \Rightarrow P_A - \rho gh = P_B \Rightarrow P_B = 160000\,Pa - 1000\frac{kg}{m^3} \times 10\frac{m}{s^2} \times 4\,m = 160000\,Pa - 40000\,Pa = 120000\,Pa$$

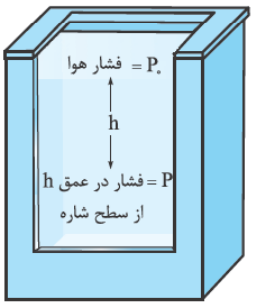
مثال و پاسخ

مثال فشار ناشی از مایع در عمق ۶۰ cm از سطح آزاد الکل چند پاسکال است؟ ($\rho_{\text{الکل}} = ۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$)

پاسخ با توجه به رابطه‌ی ρgh به راحتی مقدار فشار حاصل از مایع را به دست می‌آوریم:

$$P = \rho gh = ۸۰۰ \frac{kg}{m^۳} \times ۱۰ \frac{m}{s^۲} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} m = ۴۸۰۰ Pa$$: فشار حاصل از مایع

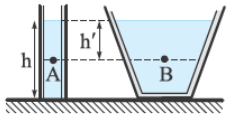
فشار کل در عمق h از سطح آزاد مایع



معمولاً رابطه‌ی $P_۲ = P_۱ + \rho gh$ را برحسب عمق از سطح مایع بیان می‌کنیم. برای این کار مطابق شکل روبه‌رو نقطه‌ی ۱ را در سطح شاره در نظر می‌گیریم. در این حالت فشار نقطه‌ی ۱ برابر فشار هوا می‌شود؛ بنابراین $P_۱ = P_۰$ است. از طرفی می‌توانیم نقطه‌ی ۲ را هر جایی درون شاره در نظر بگیریم و فشار در این نقطه را با P نشان دهیم. در این صورت داریم:

$$P_۲ = \rho gh + P_۱ \xrightarrow[P_۲ = P]{P_۱ = P_۰} \boxed{P = \rho gh + P_۰}$$

در ادامه می‌بینید که فشار هوا ($P_۰$) در سطح دریاهای آزاد، حدود $۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa$ است که به این مقدار **یک اتمسفر (۱ atm)** نیز می‌گوییم[۱].



نکته فشار در مایع به شکل ظرفی که مایع در آن قرار دارد، بستگی ندارد و فقط به عمق از سطح مایع بستگی دارد. مثلاً فشار در دو نقطه‌ی A و B در شکل مقابل مساوی است، با این‌که شکل ظرف‌ها متفاوت است و حجم آب بالای نقطه‌ی B بیشتر است.

مثال و پاسخ

مثال اگر فشار هوا $۱۰^۵$ پاسکال باشد، فشار کل در عمق ۲ متری آب یک استخر چند کیلوپاسکال است؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$ و چگالی آب $= ۱ g/cm^۳$)

پاسخ کافی است، مقادیر داده‌شده را در رابطه‌ی $P = \rho gh + P_۰$ قرار دهید تا فشار در عمق ۲ متری را به دست آورید. فقط باید به این نکته توجه کنید که چگالی برحسب $g/cm^۳$ داده شده است و باید آن را برحسب $kg/cm^۳$ در رابطه قرار دهید:

$$\rho_{\text{آب}} = ۱ g/cm^۳ = ۱۰۰۰ kg/cm^۳$$

بنابراین داریم:

$$P = \rho_{\text{آب}} gh + P_۰ = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۲ + ۱۰^۵ = ۱۲۰۰۰۰ Pa = ۱۲۰ kPa$$

مثال جیمز کامرون کارگردان مشهور کانادایی در سال ۲۰۱۲ از عمیق‌ترین نقطه‌ی اقیانوس‌ها برای مستند Deepsee Challenge به طور سه‌بعدی فیلم‌برداری کرد. عمق این نقطه که به گودال چلنجر معروف است، از سطح دریا ۱۰۹۹۴ m است. فشار در این عمق برحسب پاسکال چه‌قدر است؟ این فشار چند برابر فشار هوا است؟ ($P_۰ = ۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa$ و چگالی آب به طور میانگین $۱ g/cm^۳$ است.)

پاسخ کافی است از رابطه‌ی $P = \rho gh + P_۰$ استفاده کنیم:

$$P = \rho gh + P_۰ = (۱ \times ۱۰۰۰ \frac{kg}{m^۳}) \times (۱۰ \frac{m}{s^۲}) \times (۱۰۹۹۴ m) + ۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa \Rightarrow P \simeq ۱/۱ \times ۱۰^۸ Pa$$

همان‌طور که می‌بینید فشار در آن نقطه بسیار زیاد است. برای این‌که هم خیلی زیاد بودن این فشار را بیشتر درک کنید و هم پاسخ قسمت دوم مسئله را بدهیم، این مقدار را تقسیم بر فشار هوا می‌کنیم:

$$\frac{P}{P_۰} = \frac{۱/۱ \times ۱۰^۸ Pa}{۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa} = ۱/۰۸ \times ۱۰^۳$$

یعنی فشار در آن نقطه ۱۰۰۰ برابر فشار هوا است. *(اگر می‌خواهید این موضوع را دقیق درک کنید، به عمق ۱۰ متری آب در یک استخر بروید. آن‌جا فشار فقط ۲ برابر فشار هواست!)*

۱- معمولاً فشار هوا را برای راحتی $۱۰^۵ Pa$ در نظر می‌گیرند.

اصل پاسکال و ادعای شگفت‌انگیز دوم

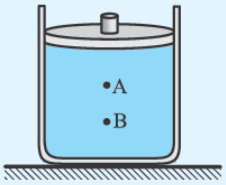
شاید برایتان این سؤال ایجاد شده باشد که فشار هوا در سطح مایع چه ربطی به فشار در عمق h دارد و چرا باید P_0 هم در نظر بگیریم؟ جواب این سؤال را پاسکال در قرن ۱۷ این‌گونه بیان کرد:

اصل پاسکال: اگر فشار در یک نقطه از مایع درون یک ظرف به میزان ΔP تغییر کند، فشار در تمام نقطه‌های آن مایع به اندازه‌ی ΔP تغییر می‌کند.

به همین خاطر است که وقتی فشار هوا به سطح مایع وارد می‌شود، این فشار به تمام نقاط مایع منتقل می‌شود و ما برای به دست آوردن فشار یک نقطه در مایع باید P_0 را هم در نظر بگیریم.

مثال و پاسخ

مثال **در شکل مقابل، فشار در نقاط A و B در درون مایع برابر P_A و P_B است. وزنه‌ای را روی پیستون آزاد قرار می‌دهیم. اگر در اثر وزنه، افزایش فشار در آن نقاط، ΔP_A و ΔP_B باشد، کدام رابطه درست است؟**



۱) $\Delta P_B < \Delta P_A \, , P_B = P_A$

۲) $\Delta P_B = \Delta P_A \, , P_B < P_A$

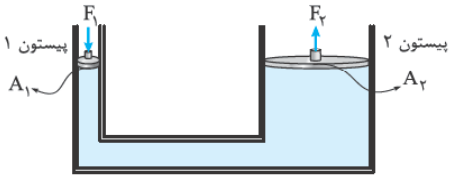
۳) $\Delta P_B > \Delta P_A \, , P_B < P_A$

۴) $\Delta P_B = \Delta P_A \, , P_B > P_A$

پاسخ گزینه‌ی «۴» عمق B از عمق A بیشتر است؛ بنابراین $P_B > P_A$ است. از طرفی طبق اصل پاسکال با قراردادن وزنه روی پیستون، فشار در تمام نقاط مایع به یک اندازه افزایش می‌یابد؛ پس $\Delta P_B = \Delta P_A$ است.

بالابر هیدرولیکی

بالابر هیدرولیکی همان وسیله‌ای است که شما می‌توانید با آن پراید را بلند کنید.



طبق اصل پاسکال در بالابرهای هیدرولیکی، افزایش فشار ناشی از اعمال نیروی F_1 بر پیستون (۱) بدون هیچ کم و کاستی به پیستون (۲) منتقل می‌شود و داریم:

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = (\frac{A_2}{A_1})F_1$$

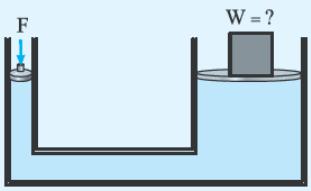
این رابطه به ما می‌گوید اگر نیروی کوچک F_1 را بر پیستون (۱) اعمال کنیم، در پیستون (۲) نیروی F_2 به اندازه‌ی $(\frac{A_2}{A_1})$ برابرِ نیروی F_1 به وجود می‌آید. پس هر چه نسبت $\frac{A_2}{A_1}$ (نسبت مساحت پیستون دوم به اول) را افزایش دهیم، مقدار نیروی F_2 بیشتر می‌شود و می‌توانیم با اعمال نیروی کوچک F_1، نیروی بسیار بیشتری را در پیستون (۲) ایجاد کنیم.

$$A_2 >> A_1 \Rightarrow F_2 >> F_1$$

به همین خاطر از این بالابرها برای جابه‌جایی اجسام بسیار سنگین (مثلاً اتومبیل‌ها) با اعمال نیروی کم استفاده می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال **در شکل روبه‌رو، جرم و اصطکاک پیستون‌ها ناچیز و شعاع پیستون بزرگ‌تر ۱۰ برابر شعاع پیستون کوچک‌تر است. اگر به پیستون کوچک‌تر نیروی $F = 20\ N$ را وارد کنیم، برای حفظ تعادل، وزنه‌ای به وزن چند نیوتون را باید روی پیستون بزرگ قرار داد؟**



پاسخ

گام اول برای بالابر هیدرولیکی داریم:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{W}{A_2} \Rightarrow \frac{W}{F} = \frac{A_2}{A_1} \xrightarrow{A=\pi r^2} \frac{W}{F} = (\frac{r_2}{r_1})^2$$

گام دوم می‌دانیم $r_2 = 10 r_1$ است، پس:

$$\frac{W}{F} = (\frac{10 r_1}{r_1})^2 = 100 \xrightarrow{F=20N} \frac{W}{20} = 100 \Rightarrow W = 2000\ N$$

فشار هوا

ما برای این‌که خودبه‌خود منفجر نشویم، به فشار هوا نیاز داریم! (*البته در جایی که راعش نباشه وگرنه از فشار هوا هم کاری برنمیاد!*) هوا یا همان جو زمین به دلیل وزنی که دارد، به تمام اشیای داخلش، فشار وارد می‌کند. همان‌طور که قبلاً گفتیم، مقدار این فشار را در سطح دریاهای آزاد با P_0 نشان می‌دهیم. اگر این فشار وجود نداشت، فشار خونی که در رگ‌های ما در جریان است، از درون به ما فشار می‌آورد و باعث می‌شد، تکه‌تکه شویم. به همین خاطر است که فضانوردان برای راهپیمایی‌های فضایی از لباس‌های مخصوص استفاده می‌کنند.

محاسبه‌ی اختلاف فشار هوا برای دو نقطه با اختلاف ارتفاع کم‌تر از هزار متر: برای به دست آوردن اختلاف فشار هوا برای دو نقطه با اختلاف ارتفاع کم‌تر از ۱۰۰۰ m از رابطه‌ی $P_2 - P_1 = \rho gh$ استفاده می‌کنیم که h اختلاف ارتفاع دو نقطه است.

مثال و پاسخ

مثال **چگالی هوای تهران در دمای ۲۰°C تقریباً ۱/۰ kg/m³ است. اختلاف فشار هوای بالا و پایین برج میلاد، با ارتفاع ۴۳۵ m چه‌قدر است؟ ($g = 10\ m/s^2$)**

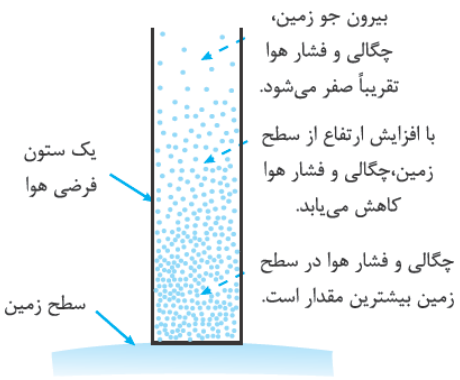
پاسخ

$$P_2 - P_1 = \rho gh = (1\frac{kg}{m^3})(10\frac{m}{s^2})(435) = 4350\ Pa$$

نکته با توجه به این‌که چگالی گازها خیلی کم است، در محفظه‌های کوچک گاز مانند شکل روبه‌رو، اختلاف فشار در نقاط مختلف داخل محفظه ناچیز است. به همین خاطر می‌توانیم فشار را در تمام نقاط گاز یکسان در نظر بگیریم.

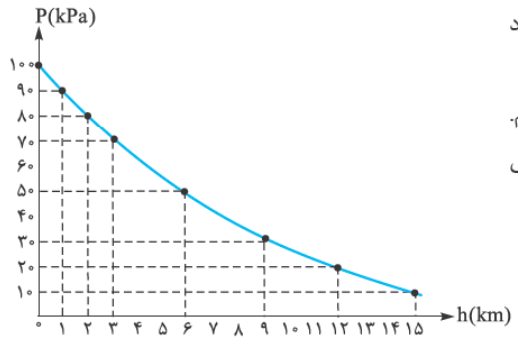
محاسبه‌ی اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع بیش از هزار متر دارند:

برای محاسبه‌ی اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع قابل توجهی دارند، دیگر نمی‌توانیم از رابطه‌ی $P_2 - P_1 = \rho gh$ استفاده کنیم. این موضوع به این خاطر است که چگالی هوا در ارتفاع‌های مختلف یکسان نیست و با افزایش ارتفاع از سطح زمین به شدت کاهش می‌یابد. در واقع نیروی جاذبه‌ی زمین باعث می‌شود که لایه‌های زیرین شاره نسبت به لایه‌های بالایی شاره متراکم‌تر شوند. در نتیجه هر چه به سطح زمین نزدیک‌تر می‌شویم، چگالی و فشار هوا افزایش می‌یابد.



نمونه اختلاف فشار قله‌ی دماوند و سطح دریا با استفاده از رابطه‌ی $P_2 - P_1 = \rho gh$ حدود ۷۴ kPa می‌شود، ولی مقدار واقعی آن تقریباً ۵۰ kPa است.

در واقع برای محاسبه‌ی فشار هوا در نقاط مختلف باید از نمودار روبه‌رو استفاده کنیم. همان‌طور که می‌بینید برای اختلاف ارتفاع‌های زیاد، رابطه‌ی فشار با ارتفاع دیگر خطی نیست.



یکای بار (bar): یکی از یکاهای فشار که در هواشناسی متداول است و از آن روی نقشه‌های آب و هوا استفاده می‌شود، **بار (bar)** است. هر بار معادل 10^5 Pa است:

$$1\ bar = 1/000 \times 10^5\ N/m^2 = 1/000 \times 10^5\ Pa$$

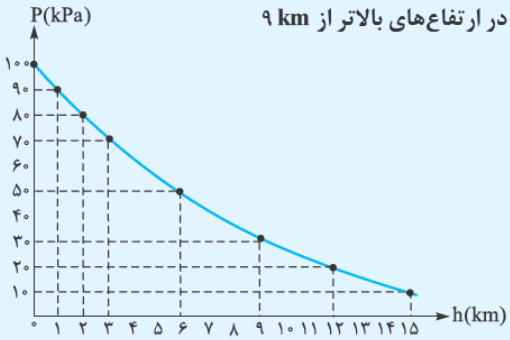
مثال و پاسخ

مثال فشار هوای وارد بر هر مترمربع از سطح زمین در ساحل دریاها ناشی از وزن یک ستون هوای فرضی مانند شکل روبه‌رو است که تا بالاترین بخش جو زمین ادامه دارد. اگر جرم هوای درون این ستون فرضی ۱۰ تن باشد، فشار هوا در سطح دریا چند بار است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

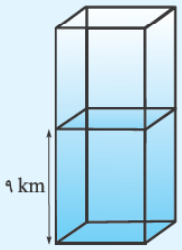
پاسخ می‌دانیم فشار وارد بر یک سطح از رابطه‌ی $P = \frac{F_\perp}{A}$ به دست می‌آید. در این‌جا $F_\perp = mg$ است؛ پس:

$$P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{(10\ Tonn)(10\ \frac{m}{s^2})}{1\ m^2} = \frac{(10\times10^3\ kg)(10\ \frac{m}{s^2})}{1\ m^2} \Rightarrow P = 10^5\ Pa = 1\ bar$$

مثال با توجه به نمودار روبه‌رو، چه‌قدر از جرم ستون هوای مثال قبل در ارتفاع‌های بالاتر از ۹ km قرار دارد؟ $(g = 10\ m/s^2)$



پاسخ همان‌طور که در مثال قبل گفتیم، فشار وارد بر هر مترمربع از یک ستون هوا ناشی از وزن هوای بالای آن سطح است. حالا سطح موردنظر را در ارتفاع ۹ کیلومتری از سطح زمین در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار، فشار در این ارتفاع حدود ۳۰ kPa است، که ناشی از وزن ستون هوای بالای این ارتفاع است؛ پس داریم:



$$P = \frac{W}{A} = \frac{mg}{A} \Rightarrow 30000\ Pa = \frac{m\times(10\ \frac{m}{s^2})}{1\ m^2} \Rightarrow m = 3000\ kg$$

تمرین

۳۲- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) نیرویی که توسط شاره به اجسام در تماس با آن وارد می‌شود، ناشی از برخورد مولکول‌های شاره با سطح اجسام است.

ب) فشار حاصل از مایع به جنس مایع بستگی دارد.

پ) فشار مایع به شتاب گرانشی بستگی ندارد.

ت) فشار مایع به شکل ظرفی که مایع در آن قرار دارد، بستگی ندارد.

۳۳- در جمله‌های زیر جاهای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف) وقتی شاره ساکن است، به هر سطحی که با آن در تماس باشد، نیرویی ..... وارد می‌کند.

ب) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا به شدت ..... می‌یابد.

پ) نیروی جاذبه‌ی زمین سبب می‌شود که لایه‌های زیرین هوا نسبت به لایه‌های بالایی ..... شوند.

ت) در هواشناسی و روی نقشه‌های آب و هوا، معمولاً از یکای ..... برای فشار هوا استفاده می‌کنند.

۳۴- کلمه‌ی مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

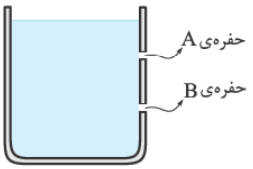
الف) با افزایش عمق، فشار ناشی از شاره (افزایش ـ کاهش) می‌یابد.

ب) فشار هوا در ارتفاع‌های بالاتر (کم‌تر ـ بیشتر) از فشار سطح دریاست.

پ) هر چه به سطح زمین نزدیک‌تر می‌شویم، چگالی هوا (افزایش ـ کاهش) می‌یابد.

ت) یک بار (۱ bar) معادل (10^5 ـ 10^4) پاسکال است.

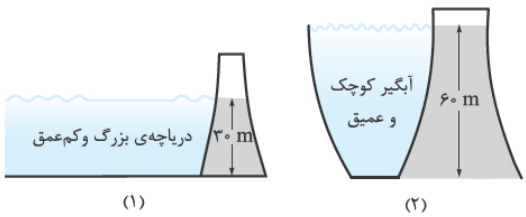
۳۵- در بدنه‌ی ظرفی که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است، دو حفره ایجاد شده است. آب از کدام‌یک از حفره‌ها با سرعت بیشتری خارج می‌شود؟ فشار آب در محل کدام حفره بیشتر است؟



۳۶- چرا بادکنکی که از گاز هیدروژن پر شده است، در ارتفاعات می‌ترکد؟

۳۷- نمودار فشار کل وارد بر ته ظرف پر از مایع را برحسب عمق مایع رسم کنید.

۳۸- مقدار آبی که در پشت سد شماره‌ی (۱) جمع شده است $45\times10^6\ m^3$ و مقدار آبی که پشت سد شماره‌ی (۲) جمع شده است، $20\times10^6\ m^3$ است. فشار در کف کدام سد بیشتر است؟ چرا؟



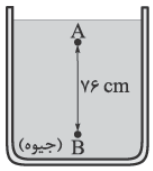
۳۹- یک نهنگ در عمق ۱۰۰ متری اقیانوس است و حرکت نمی‌کند. اگر فشار متوسط آب بر روی باله‌ی آن $10^6\ Pa$ باشد، بزرگی نیروی عمودی‌ای که آب به باله به مساحت $1200\ cm^2$ وارد می‌کند، چند نیوتون است؟

۴۰- اگر عمق آب استخری $5\ m$ باشد، اختلاف فشار بین کف استخر و سطح آب چند پاسکال است؟

$(\rho_{آب}=1000\ kg/m^3\ ,\ g=10\ m/s^2)$

۴۱- اختلاف فشار دو نقطه‌ی A و B را در شکل روبه‌رو به دست آورید.

$(g=9/8\ m/s^2\ ,\ \rho_{Hg}=13600\ kg/m^3)$



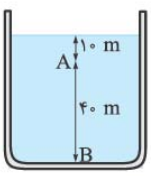
۴۲- در یک کارخانه‌ی شکلات‌سازی طول حوضچه‌ی شیر $15\ m$ و عرض آن $5\ m$ و عمق آن $2\ m$ است. اگر $\rho_{شیر}=1/05\ kg/L$ باشد، چه فشاری برحسب بار از طرف شیر بر کف حوضچه وارد می‌شود؟ $(g=10\ m/s^2)$

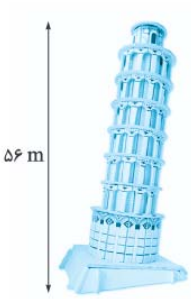
۴۳- عمیق‌ترین استخر جهان Y40 نام دارد. اگر فشار در کف این استخر $5\ bar$ باشد، عمق آن چند متر است؟ $(\rho_{آب}=1\ g/cm^3\ ,\ g=10\ m/s^2\ ,\ P_0=10^5\ Pa)$

۴۴- اگر فشار جو $10^5\ Pa$ باشد، در چه عمقی از سطح دریا، فشار سه برابر فشار جو است؟ $(\rho_{آب\ دریا}=1000\ kg/m^3\ ,\ g=10\ m/s^2)$

۴۵- در شکل روبه‌رو، فشار در نقطه‌ی B چند برابر فشار در نقطه‌ی A است؟

$(P_0=10^5\ Pa\ ,\ \rho_{آب}=1\ g/cm^3\ ,\ g=10\ m/s^2)$





۴۶- ارتفاع برج پیزا (برج کج) ۵۶ m است. اختلاف فشار هوای بالا و پایین این برج چند پاسکال است؟ $(g = 10\ m/s^2 ,\ \rho_{هوا} = 1\ kg/m^3)$

۴۷- در شکل روبه‌رو، فشار در سطح مایع P_1 و در کف ظرف برابر P_2 است. با پایین‌آوردن پیستون، فشار در سطح مایع را ۲ برابر می‌کنیم. فشار در کف ظرف در این حالت P'_2 می‌شود. کدام رابطه‌ی زیر درست است؟

۱) $P'_2 = 2P_2$
۲) $P'_2 = P_2$
۳) $2P_2 < P'_2 < 3P_2$
۴) $P_2 < P'_2 < 2P_2$

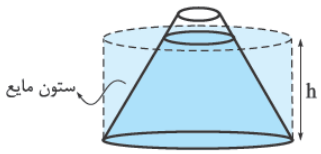
ستون مایع و نیروی ناشی از فشار مایع

در درس‌نامه‌ی قبل گفتیم که فشار ناشی از مایع به شکل ظرف و مساحت کف ظرف وابسته نیست و فقط به عمق از سطح آزاد مایع بستگی دارد. با توجه به این موضوع مفهومی را به نام ستون مایع، بیان می‌کنیم:

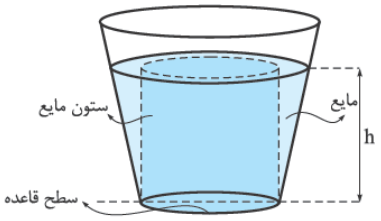
ستون مایع: مقداری از مایع که حجم آن برابر حجم منشور یا استوانه‌ی قائمی است که روی قاعده‌ی ظرف ساخته می‌شود و ارتفاع آن برابر فاصله‌ی عمودی سطح مایع از کف ظرف است.

مثلاً در شکل‌های زیر حجم محصور بین خط‌چین‌ها، ستون مایع است. همان‌طور که می‌بینید در همه‌ی شکل‌های زیر برای حجم ستون مایع داریم:

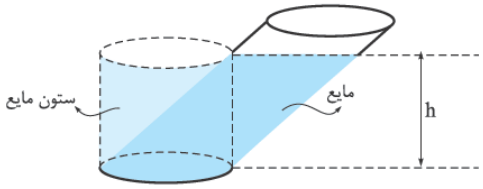
$$V_{\text{ستون مایع}} = A_{\text{کف ظرف}} h$$



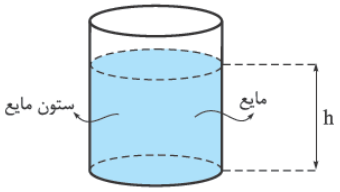
$V_{\text{ستون مایع}} < V_{\text{مایع}}$



$V_{\text{ستون مایع}} > V_{\text{مایع}}$



$V_{\text{ستون مایع}} = V_{\text{مایع}}$



$V_{\text{ستون مایع}} = V_{\text{مایع}}$

در واقع فشار حاصل از مایع در هر نقطه‌ی درون مایع، برابر فشار ستون مایع بالای آن نقطه است. به همین خاطر است که اثباتی که برای فشار حاصل از مایع در درس‌نامه‌ی قبل دیدید، برای هر ظرفی با هر شکلی برقرار است.

نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع

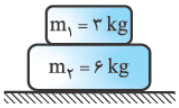
کاربرد اصلی ستون مایع در به دست آوردن نیرویی است که مایع به کف ظرف وارد می‌کند. در واقع نیرویی که از سوی مایع به کف ظرف وارد می‌شود، برابر وزن ستون مایع است.

$$F = P_{\text{مایع}} A_{\text{کف ظرف}} = \rho g h A_{\text{کف ظرف}} = \rho g V_{\text{ستون مایع}} = g(\rho V_{\text{ستون مایع}}) = m_{\text{ستون مایع}} g = W_{\text{ستون مایع}}$$

گام دوم با استفاده از رابطه‌ی $P=\frac{F_\perp}{A}$ اندازه‌ی سطح تماس هر تایر را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{F_\perp}{A} \Rightarrow 375\,kPa=\frac{3750\,N}{A} \Rightarrow 375\times10^{3}\,Pa=\frac{3750\,N}{A}$$
$$\Rightarrow A=\frac{3750\,N}{375\times10^{3}\,Pa}=10^{-2}\,m^2=100\,cm^2$$

۳۰- الف **گام اول** ابتدا اندازه‌ی نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:



$$\vec{N}+\vec{W}_{کل}=0 \Rightarrow \vec{N}=-\vec{W}_{کل}$$
$$\Rightarrow |\vec{N}|=|\vec{W}_{کل}|=(m_1+m_2)g=(3kg+6kg)\times10\,m/s^2=90\,N$$

گام دوم
$$P=\frac{F_\perp}{A}=\frac{|\vec{N}|}{A}$$
$$P=\frac{90\,N}{100\,cm^2}=\frac{90\,N}{100\times10^{-4}\,m^2}=9000\,Pa$$

ب کافی است اندازه‌ی وزن m_1 را بر مساحت کف m_2 تقسیم کنیم:

$$P=\frac{F_\perp}{A}=\frac{|\vec{W}|}{A}=\frac{m_1g}{A}=\frac{30\,N}{100\,cm^2}=\frac{30\,N}{100\times10^{-4}\,m^2}=3000\,Pa$$

۳۱- اگر وزن یک فرد را حدود ۶۰ kg و کف هر پای او را مستطیلی با اضلاع ۱۰ cm و ۲۰ cm در نظر بگیریم، داریم: *(دقت کنید دو پا داریم)*:

$$P=\frac{F_\perp}{A}=\frac{|\vec{W}|}{A}=\frac{mg}{A}=\frac{60\times10}{2\times20\,cm\times10\,cm}$$
$$=\frac{60\times10}{2\times0/2\,m\times0/1\,m}=15000\,Pa$$

۳۲- الف درست **ب** درست

پ نادرست ـ در رابطه‌ی $P=\rho gh$ می‌بینیم که فشار ناشی از شاره به شتاب گرانشی وابسته است.

ت درست

۳۳- الف عمودی **ب** کاهش

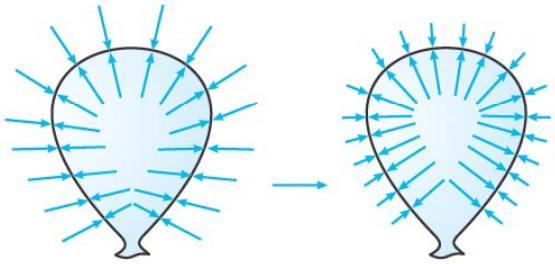
پ متراکم‌تر **ت** بار

۳۴- الف افزایش **ب** کم‌تر

پ افزایش **ت** 10^5

۳۵- آب از حفره‌ی پایینی یعنی B با سرعت بیشتری خارج می‌شود. این اتفاق به این دلیل رخ می‌دهد که عمق نقطه‌ی B بیشتر از نقطه‌ی A و در نتیجه فشار در نقطه‌ی B بیشتر از فشار در نقطه‌ی A است؛ پس نیرویی که آب را در نقطه‌ی B به بیرون هل می‌دهد، از نیرویی که آب را در نقطه‌ی A به بیرون هل می‌دهد، بیشتر است.

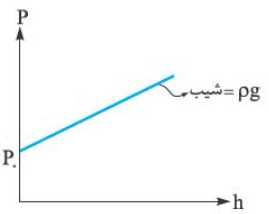
۳۶- فشار هوا در ارتفاعات کم است. به همین خاطر هر چه بادکنک بالاتر برود، اختلاف فشار داخل و خارج بادکنک بیشتر می‌شود. این اختلاف فشار باعث می‌شود به دیواره‌ی بادکنک مطابق شکل زیر نیرویی به سمت بیرون وارد شود که باعث ترکیدن بادکنک می‌شود.



فشار هوا در ارتفاعات کم است و این باعث ترکیدن بادکنک می‌شود.

در سطح زمین، فشار هوا به اندازه‌ای است که جلوی ترکیدن بادکنک را می‌گیرد.

۳۷- فشار کل در مایع به صورت $P=\rho gh+P_\circ$ است؛ بنابراین فشار کل برحسب عمق مایع، یک تابع خطی با شیب ρg و عرض از مبدأ $P_\circ$ است.



۳۸- فشار حاصل از مایع به جرم و حجم مایع وابسته نیست، بلکه به عمق مایع وابسته است. در این سؤال، هر چند حجم آب جمع‌شده در پشت سد شماره‌ی(۱) بیشتر است؛ اما عمق آب (h) پشت سد شماره‌ی (۲) بیشتر است؛ بنابراین با توجه به رابطه‌ی $P=\rho gh+P_\circ$ فشار در کف سد(۲) بیشتر است.

۳۹- فشار چه حاصل از شاره باشد چه حاصل از جامد، به صورت $P=\frac{F_\perp}{A}$ تعریف می‌شود:

$$P=\frac{F_\perp}{A} \Rightarrow 10^6\,Pa=\frac{F}{1200\,cm^2}=\frac{F}{1200\times10^{-4}\,m^2}$$
$$\Rightarrow F=(10^6\,Pa)\times(1200\times10^{-4}\,m^2)=120000\,N$$

۴۰- اختلاف فشار بین کف و سطح آب از رابطه‌ی $P-P_\circ=\rho gh$ به دست می‌آید:

$$P-P_\circ=\rho gh=1000\,\frac{kg}{m^3}\times10\,\frac{m}{s^2}\times5\,m=50000\,Pa$$

۴۱- با توجه به رابطه‌ی $P_B-P_A=\rho gh$ داریم:

$$P_B-P_A=\rho gh=13600\,\frac{kg}{m^3}\times9/8\,\frac{m}{s^2}\times\frac{76}{100}\,m$$
$$=1/012928\times10^5\,Pa\simeq1/013\times10^5\,Pa=1\,atm$$

همان‌طور که می‌بینید فشار حاصل از یک ستون جیوه به ارتفاع ۷۶ cm برابر فشار هوا در سطح دریاهای آزاد (یعنی ۱ atm) شد.

۴۲- وقتی می‌خواهیم فشار حاصل از مایع را به دست آوریم، برایمان اصلاً مهم نیست که طول و عرض ظرف (این‌جا حوضچه) چه‌قدر است. تنها چیزی که برایمان مهم است، عمق ظرف است؛ پس داریم:

$$P = \rho_{\text{شیر}} gh = (1/05 \frac{kg}{L})(10 \frac{m}{s^2})(2\ m)$$

$$= (1/05 \times 10^3 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})(2\ m) = 21000\ Pa = 0/21\ bar$$

۴۳- اولاً بگوییم فشار ۵ bar فشار بسیار زیادی است. به همین خاطر افرادی که می‌خواهند به کف این استخر بروند، فشار قابل توجهی را تحمل می‌کنند. برای به دست آوردن عمق این استخر ابتدا باید فشار و چگالی را برحسب یکاهای مناسب بنویسیم:

$$P = 5\ bar = 5 \times 10^5\ Pa$$

$$\rho_{\text{آب}} = 1\ g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$$

حالا با استفاده از رابطه‌ی $P_{\text{کل}} = \rho gh + P_0$، عمق استخر را به دست می‌آوریم:

$$P = \rho gh + P_0 \Rightarrow 5 \times 10^5\ Pa = (1000 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})(h) + 10^5\ Pa$$

$$\Rightarrow h = \frac{(5 \times 10^5 - 10^5)Pa}{(1000 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})} = 40\ m$$

پس عمق این استخر شگفت‌انگیز ۴۰ m است.

۴۴- در این نوع سؤال‌ها باید به این‌که فشار کل خواسته شده است یا فشار حاصل از مایع، خیلی توجه کنید. این‌جا چون فشار خواسته شده است، باید فشار کل را در نظر بگیریم. باید دقت کنید که فشار کل، فشار حاصل از مایع به اضافه‌ی فشار کل است، پس:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho gh + P_0}{P_0} \Rightarrow 3 = \frac{\rho gh + P_0}{P_0} \Rightarrow 3P_0 = \rho gh + P_0$$

$$\Rightarrow 2P_0 = \rho gh$$

در واقع ما باید عمقی را به دست آوریم، که در آن نقطه فشار حاصل از مایع دو برابر فشار هوا باشد:

$$2P_0 = \rho gh \Rightarrow 2 \times 10^5\ Pa = (1000 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})(h)$$

$$\Rightarrow h = \frac{2 \times 10^5\ Pa}{1000 \frac{kg}{m^3} \times 10 \frac{m}{s^2}} = 20\ m$$

نکته به ازای هر ۱۰ متری که درون آب پایین می‌رویم، تقریباً به اندازه‌ی یک اتمسفر (1 atm) به فشار کل اضافه می‌شود.

۴۵- **روش اول** با استفاده از رابطه‌ی $P_{\text{کل}} = \rho gh + P_0$ داریم:

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{\rho gh_B + P_0}{\rho gh_A + P_0} = \frac{(1000 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})(50\ m) + 10^5\ Pa}{(1000 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2})(10\ m) + 10^5\ Pa}$$

$$= \frac{6 \times 10^5\ Pa}{2 \times 10^5\ Pa} = 3$$

روش دوم همان‌طور که در سؤال قبل گفتیم، به ازای هر ۱۰ m که درون آب می‌رویم، 10^5 Pa به فشار کل اضافه می‌شود. نقطه‌ی A در عمق ۱۰متری است، پس فشار در این نقطه برابر است با:

$$P = \underbrace{1 \times 10^5}_{\text{فشار حاصل از آب}} + \underbrace{10^5}_{\text{فشار هوا}} = 2 \times 10^5$$

به همین صورت فشار در نقطه‌ی B برابر است با:

$$P = \underbrace{5 \times 10^5}_{\text{فشار مایع}} + \underbrace{10^5}_{\text{فشار هوا}} = 6 \times 10^5$$

بنابراین $\frac{P_B}{P_A}$ برابر است با:

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{6 \times 10^5}{2 \times 10^5} = 3$$

۴۶- اختلاف فشار هوای دو نقطه را که اختلاف ارتفاع کمی با هم دارند، با استفاده از رابطه‌ی $P_2 - P_1 = \rho gh$ به دست می‌آوریم؛ بنابراین داریم:

$$P_2 - P_1 = (1 \frac{kg}{m^3})(10 \frac{m}{s^2}) \times (56\ m) = 560\ Pa$$

۴۷- گزینه‌ی «۴» فشار در کف ظرف (P_2) برابر مجموع فشار سطح مایع (P_1) و فشار ناشی از ستون مایع است؛ بنابراین:

$$P_2 = \rho gh + P_1$$

اگر فشار در سطح مایع را دو برابر کنیم، $P_1' = 2P$ می‌شود. براساس اصل پاسکال این تغییر فشار به تمام قسمت‌های مایع منتقل می‌شود، پس:

$$P_2' = \rho gh + P_1' = \rho gh + 2P_1$$

بنابراین با توجه به این رابطه داریم:

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \rho gh + P_1 \\ P_2' &= \rho gh + 2P_1 \\ 2P_2 &= 2\rho gh + 2P_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_2 < P_2' < 2P_2$$

۴۸- **الف** نادرست ـ نیرویی که مایع بر کف ظرف حاوی مایع وارد می‌کند، برابر حاصل‌ضرب فشار مایع در مساحت کف ظرف است که برابر وزن ستون مایع می‌شود نه وزن مایع. این مقدار می‌تواند بیشتر، کم‌تر یا مساوی وزن مایع باشد.

ب درست

۴۹- **الف** مساحت کف ظرف

ب نصف ـ بدون تغییر

پ مستقیم ـ مستقیم

۵۰- **الف** ارتفاع مایع در دو ظرف یکسان است؛ بنابراین فشار حاصل از مایع در دو ظرف برابر است. یعنی داریم: $P_1 = P_2$

ب نیروی وارد بر کف ظرف، برابر فشار ضرب در مساحت کف ظرف است، پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ A_1 &= A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1A_1 = P_2A_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$