# ۱۳

• موضوع: روابط بین ریشه‌ها • نوع آزمون: مبحثی
• صفحهٔ کتاب درسی: حسابان ۱ صفحات ۸ و ۹ • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۴۱- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+m=0$، دو برابر ریشهٔ دیگر است. قدرمطلق اختلاف این دو ریشه، چه‌قدر از m کم‌تر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۴۲- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^4+2x^3+x^2=1$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $-1$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۳- به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجه‌دوم $(m+2)x^2+(5-m)x+4=m^2$، عکس یکدیگرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-2$ ۴) هیچ مقدار m

۱۴۴- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ چه عددی است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $5\sqrt{3}$

۱۴۵- مقدار m کدام باشد، تا یکی از ریشه‌های $4x^2-5x+2m-1=0$ از نصف ریشهٔ دیگر، یک واحد کم‌تر باشد؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴۶- اگر $\alpha+1$ و $\beta+1$، ریشه‌های $x(2x-3)=1$ باشند، ریشه‌های $x^2+ax+b=0$، اعداد $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\alpha}{\beta}$ هستند. مقدار a چه عددی است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴۷- حدود m کدام باشد تا معادلهٔ $x^4+(m-2)x^2+5-m=0$، دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد؟

۱) $m>4$ ۲) $m<-4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $-9<m<-4$

۱۴۸- اگر $\sqrt{3}+2$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ باشد، به طوری که a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه حاصل ab کدام است؟

۱) $-2$ ۲) ۲ ۳) $-4$ ۴) ۴

۱۴۹- معادلهٔ درجه‌دوم که هر ریشهٔ آن از عکس ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-4x-1=0$، یک واحد کم‌تر باشد، کدام است؟

۱) $x^2+6x+2=0$ ۲) $x^2-6=0$ ۳) $x^2-6x+2=0$ ۴) $x^2-2=0$

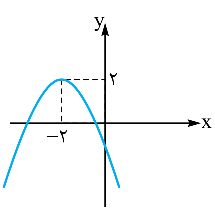
۱۵۰- اگر $\alpha$ و $\beta$، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{2\beta^2}{4\alpha-1}+\frac{2\alpha^2}{4\beta-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{2}$ ۲) ۱۷ ۳) ۳۴ ۴) $\frac{34}{3}$

# ۱۴

• موضوع: تابع درجه‌دوم و حل معادلات به روش هندسی • نوع آزمون: مبحثی
• صفحهٔ کتاب درسی: حسابان ۱ صفحات ۱۰ تا ۱۶ • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۵۱- نمودار سهمی $f(x)=-x^2+bx+c$، به صورت مقابل است. حاصل‌ضرب صفرهای این سهمی کدام است؟

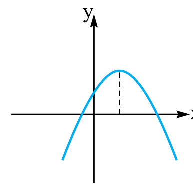
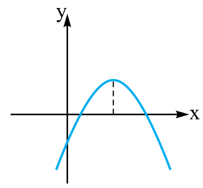
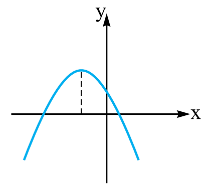
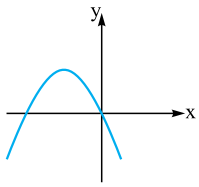



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵۲- اگر $(-2,a)$ و $(0,a)$، دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن سهمی کدام است؟

۱) $x=1$ ۲) $x=-1$
۳) $x=a$ ۴) $x=\frac{a}{2}$

۱۵۳- فرض کنید $f(x)=ax^2+bx+c$، $a<0$ و $bc>0$ باشد؛ در این صورت، نمودار سهمی f به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۵۴- ارتفاع یک موشک (h) در زمان t از رابطهٔ $h(t)=-16t^2+144t$ به دست می‌آید. ماکسیمم ارتفاع این موشک چه‌قدر است؟

۱) ۲۲۶  ۲) ۳۲۶  ۳) ۲۲۴  ۴) ۳۲۴

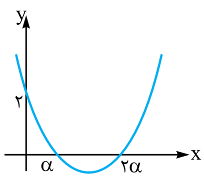
۱۵۵- به ازای کدام مقدار m، سهمی به معادلهٔ $y=mx^2-4x+2m+1$، زیر خط $y=3$ قرار دارد و بر این خط مماس است؟

۱) $-2$  ۲) $2$  ۳) $-3$  ۴) $-1$

۱۵۶- کم‌ترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y=\sqrt{2x+5}$ از نقطهٔ $A(3,0)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$  ۲) $\sqrt{14}$  ۳) $\sqrt{18}$  ۴) $3/5$

۱۵۷- نمودار تابع $f(x)=x^2-mx+n$ به شکل مقابل است. مقدار m کدام است؟




۱) ۲
۲) $-2$
۳) ۳
۴) $-3$

۱۵۸- معادلهٔ $x=\frac{|x|}{x-2}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

۱۵۹- حدود m کدام باشد تا نمودار $f(x)=x^2+4mx+(m^2+1)$، از ناحیهٔ سوم عبور کند؟

۱) $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$  ۲) $m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$  ۳) $m>\frac{\sqrt{3}}{6}$  ۴) $m<-\frac{\sqrt{3}}{6}$

۱۶۰- اگر رأس یک سهمی، روی نیمساز ربع چهارم باشد و محور xها را در نقاطی به طول‌های $-2$ و ۴ قطع کند، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{8}{9}$  ۲) $-\frac{2}{3}$  ۳) $-\frac{5}{3}$  ۴) $-\frac{1}{3}$

**۱۵**

• موضوع: جامع فصل
• نوع آزمون: استاندارد
• صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۷۰ تا ۷۷
حسابان ۱ صفحات ۷ تا ۱۶
• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

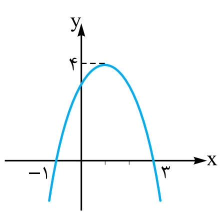
۱۶۱- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین صفر تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$  ۲) $2\sqrt{2}$  ۳) $3\sqrt{2}$  ۴) $4\sqrt{2}$

۱۶۲- زمینی مستطیل‌شکل به مساحت ۵۲/۸ متر مربع را با ۲ هزار کاشی مستطیل‌شکل پوشانده‌ایم. اگر طول کاشی‌ها یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن باشد، عرض هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

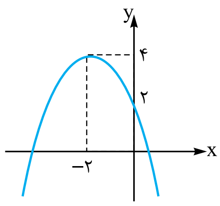
۱) ۱۵  ۲) ۹  ۳) ۶  ۴) ۸

۱۶۳- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، به صورت زیر است. مقدار c کدام است؟




۱) $\frac{9}{4}$
۲) $\frac{13}{4}$
۳) ۳
۴) $\frac{7}{2}$

۱۶۴- اگر نمودار $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل باشد، abc چه عددی است؟




۱) ۲
۲) ۴
۳) −۱/۵
۴) −۲/۵

۱۶۵- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-1)^4-(x^2-1)^2-6=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2\sqrt{1+\sqrt{3}}$ ۳) ۲ ۴) $1+\sqrt{3}$

۱۶۶- تابع $f(x)=(x^2-2)^2+x^2+a$، چهار صفر متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $-\frac{7}{4}>a>-4$ ۲) $a<-4$ ۳) $a>4$ ۴) $-\frac{7}{4}<a<4$

۱۶۷- اگر a، ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $3x^2-7x+3=0$ باشد، حاصل $\frac{a^2+1}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{49}{37}$ ۴) $\frac{55}{21}$

۱۶۸- هرگاه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x(2x+1)=m$ باشند، به طوری که $\alpha^3-\alpha^2=\beta^2-\beta^3$ برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{3}{10}$ ۲) $-\frac{3}{14}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) m یافت نمی‌شود.

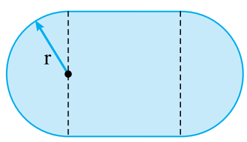
۱۶۹- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر دو ریشهٔ معادلهٔ $9x^2-mx+4=0$ برابر $\frac{7}{3}$ است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۱

۱۷۰- اگر معادلهٔ $x^2+x-7=0$، دارای ریشه‌های $x_1=\frac{2}{\alpha}-1$ و $x_2=\frac{2}{\beta}-1$ باشد، ریشه‌های کدام معادله $\alpha$ و $\beta$ است؟

۱) $7x^2+2x-4=0$ ۲) $7x^2-4x+4=0$ ۳) $7x^2-2x-4=0$ ۴) $7x^2+4x+4=0$

۱۷۱- استادیومی با یک مستطیل و دو نیم‌دایره در دو انتهای آن ساخته شده است. اگر محیط استادیوم ۳۰۰ متر باشد، ماکزیمم مساحت آن کدام است؟ $(\pi\simeq 3)$




۱) ۴۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰
۳) ۷۵۰۰ ۴) ۹۰۰۰

۱۷۲- به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $3x^2+(m-5)x-m+2=0$، دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت است؟

۱) $m>5$ ۲) $m<2$ ۳) $m<5$ و $m\neq 1$ ۴) $m<2$ و $m\neq -1$

۱۷۳- معادلهٔ $|x+1|=x^2+3x+1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۴- به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $f(x)=(m-1)x^2+\sqrt{3}x-m-1$، همواره بالای محور xها است؟

۱) $\frac{1}{2}<m<1$ ۲) $1<m<2$ ۳) $m>1$ ۴) $\varnothing$

۱۷۵- هرگاه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، مقدار $(\alpha+\frac{1}{\beta})^3+(\beta+\frac{1}{\alpha})^3$ چه عددی است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۸ ۴) ۵۷۶

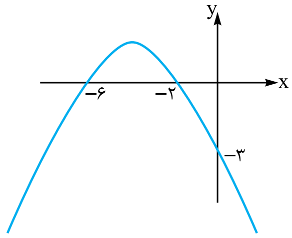
## ۱۶

• موضوع: جامع فصل
• نوع آزمون: به سوی ۱۰۰
• صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۷۰ تا ۷۷
حسابان ۱ صفحات ۷ تا ۱۶
• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

۱۷۶- اگر معادلهٔ $\frac{1}{x-1}+\frac{a+1}{x-x^2}=1$، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، a چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) مقداری برای a یافت نمی‌شود.

۱۷۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. حداکثر مقدار تابع چه عددی است؟




۱) $1$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۸- $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$ هستند. مقدار $\frac{b}{a}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{18}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴) $\frac{-\sqrt{6}}{12}$

۱۷۹- اگر برد تابع $f(x)=3x^2+2x-1$ به صورت $[a,+\infty)$ باشد، محور تقارن تابع $g(x)=ax^2+3x-1$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۱۸۰- معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$ به ازای مقادیر صحیح a و b، دارای ریشهٔ $3+\sqrt{2}$ است. معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن a و b باشد، کدام است؟

۱) $x^2+x-42=0$ ۲) $x^2-x-42=0$ ۳) $x^2-1=0$ ۴) $x^2-6x+7=0$

۱۸۱- هرگاه $x^3-(a-2)x^2+(a-1)x=2$، دارای ۳ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، کم‌ترین مقدار طبیعی برای a چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۲- اگر $\alpha$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ باشد، مقدار $\alpha^3-17\alpha$ چه عددی است؟

۱) $-8$ ۲) $8$ ۳) $-4$ ۴) $4$

۱۸۳- سهمی $f(x)=(k+1)x^2-4x+k=0$ بر خط $y=-1$ مماس است. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور طول‌ها جدا می‌کند، چه عددی است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2$ ۴) $1$

۱۸۴- اگر $f(x)=ax^2+bx+f(2)$ باشد و این تابع بر محور xها مماس باشد، حاصل $a+b$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f(2)$ ۲) $2f(2)$ ۳) $-f(2)$ ۴) $-2f(2)$

۱۸۵- با فرض آن‌که $\alpha+1$ و $\beta+1$، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+2x-1=0$ باشند، $\alpha^2\beta$ و $\beta^2\alpha$، ریشه‌های $x^2+kx+k=0$ هستند. مقدار k چه عددی است؟

۱) $16$ ۲) $-16$ ۳) $8$ ۴) $-8$

۱۸۶- اگر ۱، $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های $2x^3+ax^2-2x-3=0$ باشند، معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $\frac{1}{\beta}$ و $\frac{1}{\alpha}$ باشند، کدام است؟

۱) $2x^2-3x-2=0$ ۲) $2x^2-5x-3=0$ ۳) $3x^2+5x+2=0$ ۴) $3x^2-2x-3=0$

۱۸۷- $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های $4x^2-3x-2=0$ و $(2\alpha-1)^2$ و $(2\beta-1)^2$ ریشه‌های $x^2+kx+n=0$ هستند. مقدار k چه عددی است؟

۱) $-\frac{27}{4}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{21}{4}$ ۴) $-\frac{21}{4}$

۱۸۸- اگر a و b اعداد صحیح باشند و یکی از ریشه‌های $x^4+ax^2+b=0$، عدد $\alpha=\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $a+b$ چه عددی است؟

۱) $2$ ۲) $4$ ۳) $-2$ ۴) $-4$

۱۸۹- حاصل‌ضرب ریشه‌های $x(1+\sqrt{x})^2-8\sqrt{x}(1+\sqrt{x})+12=0$ چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۹۰- نمودار $y=(a+3)x^2+ax-2$ از کدام ناحیه ممکن است عبور نکند؟

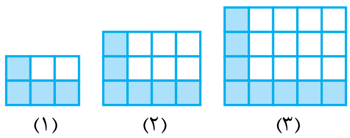
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

# ۶۶

● موضوع: ریاضی دهم

● صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۱۴ تا ۱۰۹

● ۲۰ تست در ۳۵ دقیقه




۷۷۱- با توجه به الگوی مقابل در شکل دهم، تعداد خانه‌های سفید چند برابر تعداد خانه‌های رنگ‌شده است؟

۱) ۶    ۲) ۱۲

۳) ۱۰    ۴) ۵

۷۷۲- بین دو عدد ۵ و ۴۵ تعداد ۹ واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، پنجمین واسطه چه عددی است؟

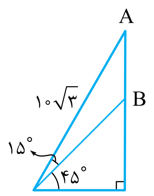
۱) ۲۹    ۲) ۲۵    ۳) ۳۴    ۴) ۲۰

۷۷۳- حداقل عدد طبیعی n کدام باشد تا $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}>۱۰$ برقرار باشد؟

۱) ۱۰۰    ۲) ۱۲۰    ۳) ۱۲۱    ۴) ۱۰۱

۷۷۴- در مثلث ABC ساده‌شدهٔ $\frac{c\sin\hat{B}}{a-c.\cos\hat{B}}$ کدام است؟

۱) $\tan\hat{C}$    ۲) $\cot\hat{C}$    ۳) $\tan\hat{B}$    ۴) $\cot\hat{B}$




۷۷۵- در شکل مقابل اندازهٔ AB چه عددی است؟

۱) $۵(۳-\sqrt{۲})$

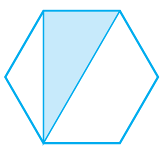
۲) $۵(۳+\sqrt{۳})$

۳) $۵(۲+\sqrt{۳})$

۴) $۵(۳-\sqrt{۳})$

۷۷۶- به فرض آن‌که $۲\sin^۲ x+\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}$ مقدار $\tan^۴ x$ چه عددی است؟

۱) ۲    ۲) ۴    ۳) $۲\sqrt{۲}$    ۴) ۱



۷۷۷- شکل مقابل یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ را نشان می‌دهد. مساحت مثلث رنگ‌شده کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$    ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$    ۴) $۳\sqrt{۲}$

۷۷۸- ساده‌شدهٔ $\frac{\cot^۲ x}{۱+\cot^۲ x}+\frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ در کدام گزینه آمده است؟

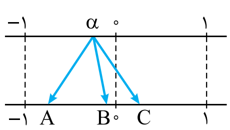
۱) $۲\cos^۲ x$    ۲) $۲\sin^۲ x$    ۳) ۱    ۴) ۲

۷۷۹- مقدار عددی عبارت $۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۹$ به ازای $x=\frac{\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}$ چه عددی است؟

۱) $-۸$    ۲) $-۵$    ۳) $-۱۱$    ۴) $-۴$

۷۸۰- اگر $A=\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}$ کدام عدد گویا است؟

۱) $A\sqrt{۲}$    ۲) $A\sqrt{۶}$    ۳) $A\sqrt{۳}$    ۴) A




۷۸۱- در شکل مقابل A,B,C به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟

۱) $\alpha^۳,\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{\alpha}$    ۲) $\alpha^۲,\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{-\alpha}$

۳) $\sqrt[۳]{\alpha},\alpha^۳,\alpha^۲$    ۴) $\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{-\alpha},\alpha^۳$

۷۸۲- اگر $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۱}=۲۷$ ، مقدار $\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$    ۲) $-\frac{۱}{۹}$    ۳) $-۳$    ۴) $-۹$

۷۸۳- اگر $a>۱$، مجموعه‌جواب $\frac{x-a}{ax-۱}<۰$ کدام بازه است؟

۱) $(\frac{۱}{a},a)$ ۲) $(۰,a)$ ۳) $(\frac{۱}{a},۱)$ ۴) $(۰,\frac{۱}{a})$

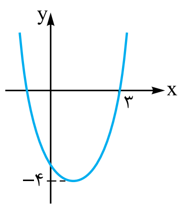
۷۸۴- مجموعه‌جواب $|۳x-۴|<x$ بازهٔ $(a,b)$ است، مقدار $\frac{a+b}{۲}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۷۸۵- طول قطر یک مستطیل ۱۳ و محیط آن ۳۴ است. مساحت مستطیل چه‌قدر از محیط آن بیشتر است؟

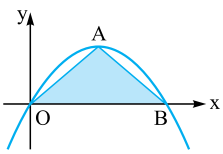
۱) ۵۶ ۲) ۲۶ ۳) ۴۳ ۴) ۳۸

۷۸۶- نمودار سهمی $y=x^۲-ax+b$ شکل زیر است. ریشهٔ کوچک‌تر چه عددی است؟



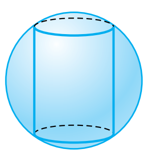

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-۱$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $-۲$

۷۸۷- شکل مقابل معادلهٔ سهمی $y=-x^۲+۶x$ و A رأس سهمی است. محیط مثلث ABO چه عددی است؟




۱) $۳(۱+۲\sqrt{۱۰})$ ۲) $۳(۲+\sqrt{۱۰})$
۳) $۶(۲+\sqrt{۱۰})$ ۴) $۶(۱+\sqrt{۱۰})$

۷۸۸- استوانه‌ای داخل کره‌ای به شعاع ۵ مطابق شکل مقابل محاط شده است. حجم استوانه را به صورت تابعی بر حسب ارتفاع استوانه نوشته‌ایم، ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $V=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳h^۲)$ ۲) $V=\pi(۱۰۰h-h^۳)$
۳) $V=\frac{\pi}{۴}(۱۰۰-h^۲)$ ۴) $V=\frac{\pi}{۴}(۱۰۰h-h^۳)$

۷۸۹- کدام تابع، تابعی ثابت نمی‌باشد؟

۱) $f(x)=\frac{۴-۶x}{۳x-۲}$ ۲) $f(x)=\sqrt{\sin x-۱}$ ۳) $f(x)=\frac{۲^x}{۲^x+۳\times ۲^x}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

۷۹۰- اگر f تابعی خطی باشد، به طوری که $f(۲)=۴$ و $f(-۱)=-۵$ کدام تابع ثابت است؟

۱) $f(x)+۳x$ ۲) $f(x)-۴x$ ۳) $۳x-f(x)$ ۴) $۴x+f(x)$

## ۶۷

• موضوع: حسابان ۱
• صفحهٔ کتاب درسی: صفحات ۱ تا ۱۵۱
• ۲۰ تست در ۳۵ دقیقه

۷۹۱- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ ابتدایی آن $S_n=۲n-n^۲$ است. مجموع n جملهٔ دوم از کدام رابطه به دست می‌آید؟

۱) $۴n-۳n^۲$ ۲) $۴n-۴n^۲$ ۳) $۲n-۳n^۲$ ۴) $۴n-۲n^۲$

۷۹۲- نمودار $y=۲x^۲-۶x+m$ خط $y=۲x+۵$ را در ۲ نقطه به طول مثبت قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $۳<m<۱۳$ ۲) $m>۳$ ۳) $۵<m<۱۳$ ۴) $m>۵$

۷۹۳- حاصل‌ضرب ریشه‌های $\frac{۲x+۲}{x}+\frac{۲x}{x+۱}=۵$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

۷۹۴- معادلهٔ $\sqrt{x+۵}=\sqrt{۲x+\sqrt{x-۳}}$ یک ریشهٔ مشترک با معادلهٔ $ax^۲+۲x+۸=۰$ دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-۱$ ۴) $-۲$

**۱۴۸- گزینهٔ ۳** در این معادله، جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-a}{۱}=-a$ و ضرب ریشه‌ها برابر $b=\frac{b}{۱}$ است. اگر a و b صحیح باشند، جمع و ضرب ریشه‌ها هم، صحیح هستند. تنها عددی که جمع و ضرب آن با $۲+\sqrt{۳}$، هر دو صحیح هستند، عدد $۲-\sqrt{۳}$ است. پس دو ریشهٔ معادله، $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ می‌باشند. حالا با توجه به جمع و ضرب ریشه‌ها که گفتیم، a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$(۲+\sqrt{۳})+(۲-\sqrt{۳})=-a \Rightarrow ۴=-a \Rightarrow a=-۴$$

$$(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=b \Rightarrow ۲^۲-\sqrt{۳}^۲=b \Rightarrow b=۱$$

و در نتیجه داریم: $ab=-۴$.

**۱۴۹- گزینهٔ ۱** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۴x-۱=۰$ باشند، داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-(-۴)}{۳}=\frac{۴}{۳}\ ,\ \alpha\beta=\frac{-۱}{۳}$$

به دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن، $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ باشند.
جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{جدید}=\frac{۱}{\alpha}-۱+\frac{۱}{\beta}-۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}-۲ \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{-۱}{۳}}-۲=-۴-۲=-۶ \\ P_{جدید}=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱ \\ \frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{\frac{-۱}{۳}}-\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{-۱}{۳}}+۱=۲ \end{cases}$$

حالا معادلهٔ جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-S_{جدید}x+P_{جدید}=۰ \Rightarrow x^۲-(-۶)x+۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۶x+۲=۰$$

**۱۵۰- گزینهٔ ۳** $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله هستند و در معادله صدق می‌کنند.

$$۲x^۲-۴x+۱=۰ \begin{cases} ۲\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰ \Rightarrow ۴\alpha-۱=۲\alpha^۲ \\ ۲\beta^۲-۴\beta+۱=۰ \Rightarrow ۴\beta-۱=۲\beta^۲ \end{cases}$$

حاصل $\frac{۲\alpha^۲}{۴\beta-۱}+\frac{۲\beta^۲}{۴\alpha-۱}$ را می‌خواهیم. به جای $۴\alpha-۱$ و $۴\beta-۱$ به ترتیب $۲\alpha^۲$ و $۲\beta^۲$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲\alpha^۲}{۴\beta-۱}+\frac{۲\beta^۲}{۴\alpha-۱}=\frac{۲\alpha^۲}{۲\beta^۲}+\frac{۲\beta^۲}{۲\alpha^۲}=\frac{\alpha^۲}{\beta^۲}+\frac{\beta^۲}{\alpha^۲}$$

$$=(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})^۲-۲=(\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta})^۲-۲$$

می‌دانیم $S=-\frac{b}{a}=۲$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$ است؛ بنابراین حاصل عبارت بالا برابر است با:

$$(\frac{S^۲-۲P}{P})^۲-۲=(\frac{۴-۱}{\frac{۱}{۲}})^۲-۲=۳۶-۲=۳۴$$

## آزمون ۱۴

**۱۵۱- گزینهٔ ۲** در سهمی، x رأس برابر است با $\frac{-b}{۲a}$. بنابراین داریم:

$$\frac{-b}{۲(-۱)}=-۲ \Rightarrow b=-۴$$

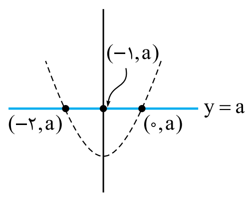
از طرفی نقطهٔ $(-۲,۲)$ روی سهمی قرار دارد و باید داشته باشیم $f(-۲)=۲$. در نتیجه: $-(-۲)^۲-۴(-۲)+c=۲ \Rightarrow c=-۲$

بنابراین، معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=-x^۲-۴x-۲$ درمی‌آید. صفرهای تابع در واقع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند:

$$-x^۲-۴x-۲=۰$$

حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه۲، برابر $\frac{c}{a}$ است، در نتیجه جواب $\frac{-۲}{-۱}=۲$ می‌باشد.

**۱۵۲- گزینهٔ ۲** نقاط $(۰,a)$ و $(-۲,a)$، روی خط افقی $y=a$ قرار دارند.




محور تقارن سهمی، عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. پس خطی عمودی است که از نقطهٔ $(-۱,a)$ عبور می‌کند. ($-۱$ وسط ۰ و $-۲$ است.)
بنابراین معادلهٔ محور تقارن، $x=-۱$ است.

**۱۵۳- گزینهٔ ۱** اگر bc مثبت باشد، دو حالت امکان دارد:

**حالت ۱** b و c مثبت باشند. در این صورت:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}>۰ \\ P=\frac{c}{a}<۰ \end{cases}$$

(دقت کنید که a منفی است.)

پس ضرب ریشه‌ها منفی و جمعشان مثبت است. یعنی دو ریشه با علامت مختلف داریم که اندازهٔ ریشهٔ مثبت، بزرگ‌تر است. این اتفاق در ۱ افتاده است.

**حالت ۲** b و c منفی باشند. در این صورت:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}<۰ \\ P=\frac{c}{a}>۰ \end{cases}$$

پس در حالت دوم حاصلضرب ریشه‌ها مثبت و مجموعشان منفی است. یعنی دو ریشهٔ منفی داریم که در هیچ‌کدام از گزینه‌ها چنین نموداری نمی‌بینیم.
پس همان ۱، جواب تست است. توجه داشته باشید که شرط $a<۰$، باعث می‌شود که شاخه‌های سهمی رو به پایین باشد که در تمام گزینه‌ها همین‌طور است.

۱۵۴- گزینهٔ ۴ تابع ارتفاع موشک، درجه‌دوم (سهمی) است و چون ضریب $t^۲$ منفی است، سهمی دارای ماکسیمم است. ماکسیمم ارتفاع موشک، همان h رأس سهمی است.

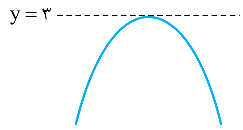
$$t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۴۴}{۲(-۱۶)}=\frac{۹}{۲}$$

با جای‌گذاری $\frac{۹}{۲}$ در معادلهٔ تابع، h رأس به دست می‌آید:

$$\text{ماکسیمم ارتفاع}=h(\frac{۹}{۲})=-۱۶\times(\frac{۹}{۲})^۲+۱۴۴\times\frac{۹}{۲}$$

$$=-۴\times۹\times۹+۷۲\times۹=۹(۷۲-۳۶)=۳۶\times۹=۳۲۴$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴ باید نمودار سهمی به صورت روبه‌رو باشد:




پس اولاً باید شاخه‌های سهمی رو به پایین باشند و در نتیجه ضریب $x^۲$، کوچک‌تر از صفر است، یعنی: $m<۰$. ثانیاً باید y رأس سهمی برابر ۳ باشد. x رأس سهمی از رابطهٔ $\frac{-b}{۲a}$ برابر است با: $\frac{-(-۴)}{۲m}=\frac{۲}{m}$. از جای‌گذاری این مقدار در معادلهٔ تابع، y رأس را به دست می‌آوریم و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$y_{\text{رأس}}=m(\frac{۲}{m})^۲-۴(\frac{۲}{m})+۲m+۱=۳$$

$$\Rightarrow m\times\frac{۴}{m^۲}-\frac{۸}{m}+۲m=۲\Rightarrow\frac{۴}{m}-\frac{۸}{m}+۲m-۲=۰$$

$$\Rightarrow-\frac{۴}{m}+۲m-۲=۰\xrightarrow{\times m}-۴+۲m^۲-۲m=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}}m^۲-m-۲=۰\Rightarrow m=-۱\ \text{یا}\ m=۲$$

$$\xrightarrow{m<۰}m=-۱$$

۱۵۶- گزینهٔ ۱ مختصات هر نقطه روی $y=\sqrt{۲x+۵}$ به صورت $(x,\sqrt{۲x+۵})$ است. فاصلهٔ آن از A را پیدا می‌کنیم:

$$L=\sqrt{(x-۳)^۲+(\sqrt{۲x+۵}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۶x+۹+۲x+۵}$$

$$=\sqrt{x^۲-۴x+۱۴}=\sqrt{(x-۲)^۲+۱۰}$$

وقتی L کم‌ترین مقدار می‌شود که $x^۲-۴x+۱۴$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد. کم‌ترین مقدار آن هم در $f(\frac{-b}{۲a})=f(۲)$ رخ می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$L_{min}=\sqrt{۲^۲-۴(۲)+۱۴}=\sqrt{۱۰}$$

۱۵۷- گزینهٔ ۳ از نقطهٔ $(۰,۲)$ که روی نمودار سهمی است، می‌فهمیم که باید $f(۰)=۲$ باشد. بنابراین:

$$f(۰)=۰^۲-m\times۰+n=۲\Rightarrow n=۲$$

از طرفی ریشه‌های تابع برابر $\alpha$ و $۲\alpha$ هستند. ضرب ریشه‌ها هم از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$\alpha.۲\alpha=\frac{n}{۱}=۲\Rightarrow۲\alpha^۲=۲\Rightarrow\alpha^۲=۱\Rightarrow\alpha=۱$$

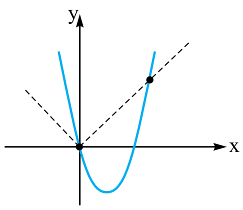
توجه کنید که ریشه‌ها با توجه به شکل، هر دو مثبت هستند، پس جواب $\alpha=-۱$ قابل‌قبول نیست. به این ترتیب، ریشه‌ها، اعداد ۱ و ۲ هستند و جمع ریشه‌ها برابر ۳ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{-b}{a}=۳\Rightarrow\frac{-(-m)}{۱}=۳\Rightarrow m=۳$$

۱۵۸- گزینهٔ ۲ با طرفین‌وسطین، می‌توانیم معادله را به صورت زیر درآوریم:

$$|x|=x(x-۲)\Rightarrow|x|=x^۲-۲x$$

تعداد جواب‌های معادله را می‌توان به کمک رسم نمودار پیدا کرد. کافی است که تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y=|x|$ و $y=x^۲-۲x$ را بیابیم.




(برای رسم $y=x^۲-۲x$، دقت کنید که یک سهمی با شاخه رو به بالا با ریشه‌های ۰ و ۲ داریم.) با توجه به نمودار، واضح است که دو منحنی، دو نقطهٔ تلاقی دارند و در نتیجه، معادله دو جواب دارد.

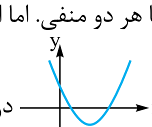
۱۵۹- گزینهٔ ۱ چون ضریب $x^۲$ مثبت است، شاخه‌های سهمی رو به بالا است. پس اگر سهمی ریشه نداشته باشد یا تنها یک ریشه داشته باشد، نه از ناحیهٔ سوم می‌گذرد و نه از ناحیهٔ چهارم. پس معادلهٔ سهمی، باید دو ریشه داشته باشد و در نتیجه $\Delta>۰$ است و داریم:

$$\Delta=(۴m)^۲-۴(m^۲+۱)>۰\Rightarrow۱۶m^۲-۴m^۲-۴>۰$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}}۴m^۲-m^۲-۱>۰\Rightarrow m^۲>\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow m>\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ \text{یا}\ m<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\qquad(۱)$$

از طرفی ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=\frac{m^۲+۱}{۱}$ و همواره مثبت است. پس یا هر دو ریشه، مثبت‌اند و یا هر دو منفی. اما اگر دو ریشهٔ مثبت داشته باشیم، نمودار به صورت



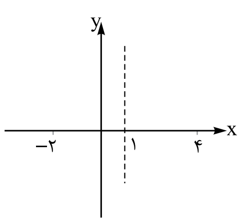

درمی‌آید و باز هم از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد، پس دو ریشهٔ منفی داریم و باید جمع ریشه‌ها منفی باشد. در نتیجه:

$$\frac{-b}{a}=\frac{-۴m}{۱}<۰\Rightarrow m>۰\qquad(۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) به جواب می‌رسیم:

$$m>\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶۰- گزینهٔ ۱ معادلهٔ یک سهمی، درجه۲ است. وقتی سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های ۲- و ۴ قطع می‌کند، باید ۲- و ۴، ریشه‌های معادلهٔ درجه۲ سهمی باشند. در نتیجه، معادلهٔ این سهمی به صورت $y=k(x+۲)(x-۴)$ است.



حالا باید ضریب $k$ را تعیین کنیم. محور تقارن هر سهمی، خطی موازی محور $y$ها است که از رأس سهمی می‌گذرد. از طرفی، باید محور تقارن دقیقاً از نقطهٔ وسط پاره‌خطی که نقاط برخورد با محور $x$ها را به هم وصل می‌کند، بگذرد. پس محور تقارن خط $x=۱$ است. (میانگین $-۲$ و ۴ برابر ۱ است.) پس $x$ رأس سهمی، برابر ۱ است و با توجه به این‌که رأس، روی خط $y=-x$ قرار دارد، $y$ رأس برابر $-۱$ خواهد بود. پس نقطهٔ $(۱,-۱)$ باید در معادلهٔ سهمی صدق کند، در نتیجه:

$$-۱=k(۱+۲)(۱-۴) \Rightarrow k=\frac{۱}{۹}$$

یعنی معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{۱}{۹}(x+۲)(x-۴)$ است و برای پیداکردن $y$ نقطهٔ برخورد با محور $y$ها، کافی است در معادله، $x$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=\frac{۱}{۹}(۰+۲)(۰-۴)=\frac{-۸}{۹}$$

## آزمون ۱۵

**۱۶۱- گزینهٔ ۴** اگر از تغییر متغیر $x^۲=y$ استفاده کنیم به معادلهٔ درجه ۲ روبه‌رو می‌رسیم: $y^۲-۱۰y+۱۶=۰$

از این معادله، دو جواب ۲ و ۸ برای $y$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$\begin{cases} y=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ y=۸ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}=\pm۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین، بزرگ‌ترین ریشهٔ (صفر) تابع، $۲\sqrt{۲}$ و کوچک‌ترین ریشه، برابر $-۲\sqrt{۲}$ است و اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$۲\sqrt{۲}-(-۲\sqrt{۲})=۴\sqrt{۲}$$

**۱۶۲- گزینهٔ ۴** هر متر مربع برابر با $۱۰۰\times۱۰۰$ سانتی‌متر مربع است. پس مساحت زمین، $۵۲/۸\times۱۰۰۰۰$ سانتی‌متر مربع است. اگر عرض هر کاشی را $x$ بگیریم، طول کاشی برابر $۴x+۱$ است و مساحت یک کاشی برابر است با $x(۴x+۱)$. بنابراین مساحت کل زمین، $۲۰۰۰x(۴x+۱)$ خواهد بود و داریم:

$$۲۰۰۰x(۴x+۱)=۵۲/۸\times۱۰۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۲x(۴x+۱)=۵۲/۸\times۱۰ \Rightarrow x(۴x+۱)=۲۶۴$$

حالا کافی است که گزینه‌ها را امتحان کنید. (حل چنین معادلهٔ درجه۲ای با محاسبهٔ $\Delta$، زمان زیادی لازم دارد.) با توجه به گزینه‌ها $x=۸$ می‌باشد.

**۱۶۳- گزینهٔ ۳** ریشه‌های سهمی $-۱$ و ۳ هستند و در نتیجه، معادلهٔ آن به صورت $y=k(x+۱)(x-۳)$ است. از طرفی، $x$ رأس سهمی، درست وسط نقاط $-۱$ و ۳ است:

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-۱+۳}{۲}=۱$$

بنابراین مختصات رأس سهمی، $(۱,۴)$ است که باید در معادله صدق کند:

$$۴=k(۱+۱)(۱-۳) \Rightarrow ۴=-۴k \Rightarrow k=-۱$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=-(x+۱)(x-۳)=-x^۲+۲x+۳$$

این معادله همان معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ است؛ در نتیجه باید ضریب جمله‌های متشابه، برابر باشند: $a=-۱, b=۲, c=۳$

**۱۶۴- گزینهٔ ۱** اگر رأس سهمی، نقطهٔ $(\alpha,\beta)$ باشد، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ خواهد بود. رأس سهمی در نمودار، نقطهٔ $(-۲,۴)$ است. بنابراین، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+۲)^۲+۴$ است. از طرف دیگر، نقطهٔ $(۰,۲)$ روی سهمی قرار دارد، پس باید مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق کند.

در نتیجه:

$$۲=a(۰+۲)^۲+۴ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، معادلهٔ سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$y=\frac{-۱}{۲}(x+۲)^۲+۴=\frac{-۱}{۲}(x^۲+۴x+۴)+۴$$

$$=\frac{-۱}{۲}x^۲-۲x+۲$$

پس $a=\frac{-۱}{۲}$، $b=-۲$ و $c=۲$ است و داریم: $abc=۲$

**۱۶۵- گزینهٔ ۱** در این معادله اگر عدد $\alpha$ ریشه باشد، قطعاً $-\alpha$ هم ریشه است، چون عبارت $(x^۲-۱)^۴-(x^۲-۱)^۲-۶$ به ازای $x=\alpha$ و $x=-\alpha$، مقدار یکسانی دارد. بنابراین، این معادله هر چندتا ریشه که داشته باشد، این ریشه‌ها، دوتا دوتا قرینهٔ یکدیگرند و در نتیجه، مجموع تمام ریشه‌ها برابر صفر است.

**۱۶۶- گزینهٔ ۱**

$$f(x)=(x^۲-۲)^۲+x^۲+a$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۴-۴x^۲+۴+x^۲+a$$

$$=x^۴-۳x^۲+۴+a$$

اگر فرض کنیم $x^۲=t$ باشد در این صورت داریم:

$$y=t^۲-۳t+۴+a$$

برای این‌که معادلهٔ اولیه ۴ ریشه داشته باشد، باید معادلهٔ $t^۲-۳t+۴+a=۰$ دارای ۲ ریشهٔ مثبت باشد چون $x^۲=t$ است هر جواب مثبت $t$، ۲ جواب برای $x$ ایجاد می‌کند. شرط دو ریشهٔ مثبت این است که:

(۱) $\Delta>۰ \Rightarrow (-۳)^۲-۴(۴+a)(۱)>۰ \Rightarrow ۹-۱۶-۴a>۰$

$$\Rightarrow -۷>۴a \Rightarrow a<-\frac{۷}{۴}$$

(۲) ضرب ریشه‌ها مثبت $\Rightarrow \frac{۴+a}{۱}>۰ \Rightarrow a>-۴$

(۳) جمع ریشه‌ها مثبت $\Rightarrow \frac{-(-۳)}{۱}>۰ \Rightarrow ۳>۰$ ✓

از اشتراک جواب‌های به دست آمده به $-۴<a<-\frac{۷}{۴}$ می‌رسیم.

**۱۶۷- گزینهٔ ۱** ابتدا دقت کنید $\frac{a^۲+۱}{a}=a+\frac{۱}{a}$ بوده و از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۳}=۱$. چون ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است، اگر یک ریشه برابر $a$ باشد، ریشهٔ دیگر

$\frac{۱}{a}$ خواهد بود. پس عبارت $a+\frac{۱}{a}$ که در سؤال خواسته شده، جمع ریشه‌های معادله است و برابر است با: $\frac{-b}{a}=\frac{-(-۷)}{۳}=\frac{۷}{۳}$

---

**۱۶۸- گزینهٔ ۴** معادله را به صورت $۲x^۲+x-m=۰$ می‌نویسیم. معلوم است که جمع و ضرب ریشه‌ها برابرند با:

$$\alpha+\beta=\frac{-۱}{۲} \text{ و } \alpha\beta=\frac{-m}{۲}$$

حالا معادلهٔ $\alpha^۳-\alpha^۲=\beta^۲-\beta^۳$ را ساده می‌کنیم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=\alpha^۲+\beta^۲$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)=(a+\beta)^۲-۲\alpha\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$$

حالا مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را در معادلهٔ آخر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\frac{-۱}{۲})((\frac{-۱}{۲})^۲-۳(\frac{-m}{۲}))=(\frac{-۱}{۲})^۲-۲(\frac{-m}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{۲}(\frac{۱}{۴}+\frac{۳m}{۲})=\frac{۱}{۴}+m \Rightarrow \frac{-۱}{۸}-\frac{۳m}{۴}=\frac{۱}{۴}+m$$

$$\xrightarrow{\times ۸} -۱-۶m=۲+۸m \Rightarrow ۱۴m=-۳ \Rightarrow m=\frac{-۳}{۱۴}$$

اما باید بررسی کنیم که آیا معادلهٔ اصلی به ازای $m=\frac{-۳}{۱۴}$، دو ریشه دارد یا نه. معادله به صورت $۲x^۲+x+\frac{۳}{۱۴}=۰$ است و در نتیجه:

$$\Delta=۱^۲-۴\times۲\times\frac{۳}{۱۴}=۱-\frac{۲۴}{۱۴}<۰$$

پس معادله جواب ندارد و لذا هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

---

**۱۶۹- گزینهٔ ۱** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله باشند، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{۷}{۳}$$

از طرفی، می‌دانیم ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، در نتیجه $\alpha\beta=\frac{۴}{۹}$.

حالا دو طرف رابطهٔ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{۷}{۳}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\alpha}^۲+۲\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^۲=\frac{۴۹}{۹} \Rightarrow \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=\frac{۴۹}{۹}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+۲\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۴۹}{۹} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۴۹}{۹}-۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۳۷}{۹}$$

حالا در معادلهٔ درجه ۲ سؤال به سراغ جمع ریشه‌ها می‌رویم. جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است. پس داریم:

$$\frac{-(-m)}{۹}=\frac{۳۷}{۹} \Rightarrow m=۳۷$$

---

**۱۷۰- گزینهٔ ۱** S و P را برای معادلهٔ جدیدی که به دنبال آن هستیم، محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ است. جمع و ضرب ریشه‌ها را در معادلهٔ $x^۲+x-۷=۰$ می‌نویسیم:

$$\text{جمع ریشه‌ها}: \frac{-b}{a}=-۱ \Rightarrow \frac{۲}{\alpha}-۱+\frac{۲}{\beta}-۱=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۱$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها}: \frac{c}{a}=-۷$$

$$\Rightarrow (\frac{۲}{\alpha}-۱)(\frac{۲}{\beta}-۱)=\frac{۴}{\alpha\beta}-(\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta})+۱=-۷$$

از قسمت قبل می‌دانیم $\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۱$ است؛ پس:

$$\frac{۴}{\alpha\beta}-۱+۱=-۷ \Rightarrow \frac{۴}{\alpha\beta}=-۷ \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{۴}{۷}=P$$

می‌دانیم $\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=۱$ است، پس:

$$\frac{۲(\alpha+\beta)}{\frac{-۴}{۷}}=۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=-\frac{۴}{۷} \Rightarrow (\alpha+\beta)=-\frac{۲}{۷}=S$$

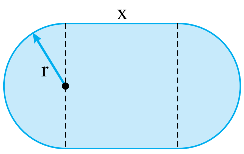
حالا معادله را با داشتن S و P می‌نویسیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۲}{۷}x-\frac{۴}{۷}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۷} ۷x^۲+۲x-۴=۰$$

---

**۱۷۱- گزینهٔ ۳** فرض کنید طول مستطیل x باشد. محیط استادیوم برابر است با:




$$۲x+۲\pi r=۲x+۶r=۳۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x+۳r=۱۵۰$$

$$\Rightarrow x=۱۵۰-۳r$$

مساحت استادیوم برابر است با:

$$S=x(۲r)+\pi r^۲=x(۲r)+۳r^۲$$

$$\xrightarrow{x=۱۵۰-۳r} S=(۱۵۰-۳r)(۲r)+۳r^۲=۳۰۰r-۶r^۲+۳r^۲$$

$$=۳۰۰r-۳r^۲$$

**روش ۱** مساحت به ازای $r=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳۰۰}{-۶}=۵۰$ ماکزیمم می‌گردد. پس:

$$S=۳۰۰(۵۰)-۳(۵۰)^۲=۷۵۰۰$$

**روش ۲** مساحت استادیوم برابر است با:

$$S=x(۲r)+\pi r^۲=x(۲r)+۳r^۲$$

$$\xrightarrow{x=۱۵۰-۳r} S=(۱۵۰-۳r)(۲r)+۳r^۲$$

$$=۳۰۰r-۶r^۲+۳r^۲=۳۰۰r-۳r^۲$$

$$S'=۰ \Rightarrow ۳۰۰-۶r=۰ \Rightarrow r=۵۰$$

پس ماکزیمم مساحت به ازای $r=۵۰$ ایجاد می‌شود:

$$S_{max}=S(۵۰)=۳۰۰(۵۰)-۳(۵۰)^۲=۷۵۰۰$$

---

**۱۷۲- گزینهٔ ۴** معادله باید دو ریشه داشته باشد، پس $\Delta>۰$ است:

$$\Delta=(m-۵)^۲-۴(-m+۲)(۳)>۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۱۰m+۲۵+۱۲m-۲۴=m^۲+۲m+۱$$

$$=(m+۱)^۲>۰ \Rightarrow m\neq-۱$$

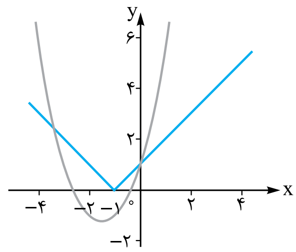
برای این‌که دو ریشهٔ مثبت داشته باشیم، باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، مثبت باشد:

$$P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-m+2}{3}>0 \Rightarrow -m+2>0 \Rightarrow m<2$$

$$S=\frac{-b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{m-5}{3}>0 \Rightarrow m-5<0 \Rightarrow m<5$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده به $m<2$ و $m\neq -1$ می‌رسیم.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار دو تابع $y=|x+1|$ و $y=x^2+3x+1$ رسم شود، تعداد نقاط برخورد دو نمودار، همان تعداد جواب‌های معادلهٔ داده‌شده است.




برای رسم $y=|x+1|$، کافی است که نمودار $y=|x|$ را یک واحد به سمت چپ ببریم. نمودار $y=x^2+3x+1$ یک سهمی با شاخه‌های رو به بالا است که در آن $x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2}$.

و در نتیجه داریم: $y_{\text{رأس}}=(\frac{-3}{2})^2+3(\frac{-3}{2})+1=\frac{-5}{4}$

بنابراین، نمودارها به این صورت هستند که با توجه به نمودارها، ۲ نقطهٔ برخورد وجود دارد، پس معادله ۲ جواب دارد.

۱۷۴- گزینهٔ ۴ برای این‌که نمودار سهمی، همواره بالای محور xها باشد، باید اولاً $\Delta<0$ بوده تا سهمی با محور xها برخورد نکند و ثانیاً ضریب $x^2$ مثبت باشد تا شاخه‌های سهمی رو به بالا باشند. بنابراین داریم:

$$\Delta=3-4(m-1)(-m-1)=3+4(m^2-1)<0$$

$$\Rightarrow 3+4m^2-4<0 \Rightarrow m^2<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2}<m<\frac{1}{2} \quad (1)$$

همچنین باید داشته باشیم: $m-1>0 \Rightarrow m>1 \quad (2)$

اشتراک شرط‌های (۱) و (۲)، جواب مسئله است که چون اشتراکی ندارند، ۴ صحیح است.

۱۷۵- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $x^2-3x+1=0$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=1$ است. در نتیجه داریم:

$$\alpha\beta=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\beta},\ \beta=\frac{1}{\alpha}$$

بنابراین، می‌توانیم عبارت موردنظر را به صورت زیر ساده کنیم:

$$(\alpha+\frac{1}{\beta})^3+(\beta+\frac{1}{\alpha})^3=(\alpha+\alpha)^3+(\beta+\beta)^3=8\alpha^3+8\beta^3$$

$$=8(\alpha^3+\beta^3)=8((\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta))$$

از طرفی، در معادلهٔ اصلی می‌دانیم: $\alpha+\beta=3$ و $\alpha\beta=1$. در نتیجه حاصل عبارت برابر است با:

$$8((3)^3-3(1)(3))=8\times 18=144$$

# آزمون ۱۶

۱۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف معادله را در $x-x^2$ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین برود:

$$a+1+\frac{x-x^2}{x-1}=x-x^2 \Rightarrow a+1+\frac{x(1-x)}{x-1}=x-x^2$$

$$\Rightarrow a+1-x=x-x^2 \Rightarrow x^2-2x+(a+1)=0$$

اگر این معادله، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، $\Delta$ ی آن برابر صفر است:

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(a+1)=-4a=0 \Rightarrow a=0$$

اگر $a=0$ باشد، معادلهٔ درجه۲ به صورت $x^2-2x+1=0$ درمی‌آید که ریشهٔ مضاعف آن $x=1$ است، ولی $x=1$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، چون مخرج کسر را صفر می‌کند. پس مقداری برای a وجود ندارد.

۱۷۷- گزینهٔ ۱ چون نمودار در نقاط $-2$ و $-6$ با محور xها برخورد کرده، این دو عدد، ریشه‌های $f(x)=0$ هستند. پس باید در تجزیهٔ $f(x)$، عامل $x+2$ و عامل $x+6$ وجود داشته باشد و داریم:

$$f(x)=k(x+2)(x+6)$$

از طرفی، با توجه به نمودار داریم $f(0)=-3$. در نتیجه:

$$k(0+2)(0+6)=-3 \Rightarrow k=\frac{-1}{4}$$

بنابراین، معادلهٔ f به صورت $f(x)=\frac{-1}{4}(x+2)(x+6)$ است.

از طرفی، بیشترین مقدار f، با توجه به تقارن نمودار، در نقطهٔ وسط نقاط برخورد با محور xها است. یعنی بیشترین مقدار به ازای $x=\frac{-2-6}{2}=-4$ به دست می‌آید و داریم:

$$f(-4)=\frac{-1}{4}(-4+2)(-4+6)=-\frac{1}{4}(-2)(2)=1$$

۱۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا جمع و ضرب ریشه‌های معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\frac{-a}{1}\\ \sin 15^\circ.\cos 15^\circ=\frac{b}{1}\end{cases}$$

حالا b را محاسبه می‌کنیم:

$$b=\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin(2\times 15^\circ)=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

حالا برای محاسبهٔ a، دو طرف معادلهٔ اول را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$-a=\sin 15^\circ+\cos 15^\circ$$

$$\Rightarrow a^2=\underbrace{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}_{1}+\underbrace{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}_{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow a^2=1+\sin 30^\circ \Rightarrow a^2=\frac{3}{2}$$

اما چون $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ$ مقداری مثبت است، a باید منفی باشد:

$$a=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{6}}{12}$$

**۱۷۹- گزینهٔ ۴**

برد تابع $f(x)=3x^2+2x-1$ به صورت $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ است.

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4-4(3)(-1)}{4(3)}=-\frac{16}{4(3)}=-\frac{4}{3}$$

بنابراین $a=-\frac{4}{3}$ است. پس ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x-1$$

$$\Rightarrow \text{محور تقارن}: -\frac{b}{2a}=\frac{-3}{2(-\frac{4}{3})}=\frac{9}{8}$$

**۱۸۰- گزینهٔ ۲**

برای این‌که ضرایب a و b صحیح باشند، ریشهٔ دیگر معادله باید $3-\sqrt{2}$ باشد. ($3-\sqrt{2}$ تنها عددی است که جمع و ضرب آن در $3+\sqrt{2}$ گویا است.)

پس معادله به صورت زیر است:

$$(x-(3-\sqrt{2}))\,(x-(3+\sqrt{2}))=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+(3^2-\sqrt{2}^2)=0 \Rightarrow x^2-6x+7=0$$

از مقایسهٔ این معادله با $x^2+ax+b=0$ معلوم می‌شود: $a=-6$ و $b=7$ بوده و حالا باید معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌های آن، $-6$ و $7$ باشند. این معادله به شکل زیر است:

$$(x+6)\,(x-7)=0 \Rightarrow x^2-x-42=0$$

**۱۸۱- گزینهٔ ۴**

عدد ۱ در معادله صدق می‌کند، پس عبارت $x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس می‌توان عبارت را با تقسیم‌کردن بر $x-1$ تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-(x^3-x^2)} & x^2+(3-a)x+2 \\
(3-a)x^2+(a-1)x-2 & \\
\underline{-((3-a)x^2-(3-a)x)} & \\
2x-2 & \\
\underline{-(2x-2)} & \\
0 &
\end{array}$$

در نتیجه داریم:

$$x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2$$
$$=(x-1)\,(x^2+(3-a)x+2)$$

برای این‌که معادله ۳ ریشهٔ متمایز داشته باشد، باید عبارت درجه۲ در پرانتز دوم، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس باید $\Delta$ ی این عبارت مثبت باشد:

$$\Delta=(3-a)^2-4\times1\times2>0 \Rightarrow a^2-6a+9-8>0$$

$$\Rightarrow a^2-6a+1>0 \Rightarrow a<3-\sqrt{8} \text{ یا } a>3+\sqrt{8}$$

پس کم‌ترین مقدار طبیعی برای a از عبارت $a>3+\sqrt{8}$ به دست می‌آید که برابر است با شش.

ولی حواستان را جمع کنید اگر $a=6$ باشد، $x=1$ ریشهٔ مضاعف می‌شود؛ ببینید:

معادله: $(x-1)(x^2+(3-a)x+2)=0$

$$\xrightarrow{a=6}(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-1)(x-2)$$
$$=(x-1)^2(x-2)$$

در این حالت ۳ ریشه با علامت متفاوت نداریم. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای a، ۷ می‌شود.

**۱۸۲- گزینهٔ ۴**

$\alpha$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^2-4\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2-1=4\alpha$$

حالا عبارت $\alpha^3-17\alpha$ را ساده می‌کنیم:

$$\alpha^3-17\alpha=\alpha(\alpha^2-17)=\alpha(\underbrace{\alpha^2-1}_{4\alpha}-16)=\alpha(4\alpha-16)$$
$$=4\alpha(\alpha-4)$$

حالا باز سراغ رابطهٔ $\alpha^2-4\alpha-1=0$ می‌رویم و این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha^2-4\alpha=1 \Rightarrow \alpha(\alpha-4)=1 \xrightarrow{\times 4} 4\alpha(\alpha-4)=4$$

**۱۸۳- گزینهٔ ۲**

وقتی سهمی بر خط $y=-1$ مماس است، y رأس سهمی برابر $-1$ است. x رأس سهمی، از رابطهٔ $\frac{-b}{2a}$ برابر است با: $\frac{-(-4)}{2(k+1)}=\frac{2}{k+1}$ و با جای‌گذاری $\frac{2}{k+1}$ در معادله و با داشتن y رأس، k به دست می‌آید:

$$f(\frac{2}{k+1})=(k+1)\times\frac{4}{(k+1)^2}-4\times\frac{2}{k+1}+k=-1$$

اگر دو طرف معادله را در $k+1$ ضرب کنیم، داریم:

$$4-8+k(k+1)=-(k+1) \Rightarrow k^2+2k-3=0$$

$$\Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1$$

اما اگر $k=-3$ باشد، ضریب $x^2$ در معادله، منفی می‌شود و در نتیجه شاخه‌های سهمی رو به پایین خواهد بود و چون سهمی بر خط $y=-1$ مماس است، با محور xها برخوردی ندارد. پس $k=1$ است و معادلهٔ سهمی به صورت $y=2x^2-4x+1$ درمی‌آید.

برای پیداکردن نقاط برخورد با محور xها، معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

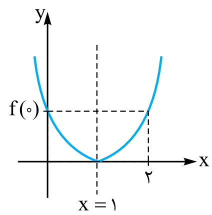
$$2x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس نقاط برخورد با محور xها، $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$(1+\frac{\sqrt{2}}{2})-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

**۱۸۴- گزینهٔ ۳** با جاگذاری $x=0$ در تابع f خواهیم داشت:

$$f(0)=f(2)$$




چون دو نقطه با طول‌های صفر و ۲ روی f عرض برابر دارند می‌توان نتیجه گرفت که خط $x=1$ محور تقارن تابع است: بنابراین مطابق شکل، تابع در رأس خود که آن هم طول برابر ۱ دارد بر محور x ها مماس است:

$$f(1)=0 \Rightarrow a+b+f(2)=0 \Rightarrow a+b=-f(2)$$

**۱۸۵- گزینهٔ ۳** ابتدا جمع و ضرب ریشه‌ها را برای معادلهٔ $x^2+2x-1=0$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \alpha+1+\beta+1=\frac{-2}{1} \Rightarrow \alpha+\beta=-4 \\ (\alpha+1)(\beta+1)=\frac{-1}{1} \Rightarrow \alpha\beta+\underbrace{\alpha+\beta}_{-4}+1=-1 \Rightarrow \alpha\beta=2 \end{cases}$$

حالا کافی است که مجموع ریشه‌ها را در معادلهٔ $x^2+kx+k=0$ پیدا کنیم:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\frac{-k}{1} \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-k$$

$$\Rightarrow 2\times(-4)=-k \Rightarrow k=8$$

**۱۸۶- گزینهٔ ۳** ابتدا ۱ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$2\times1^3+a\times1^2-2\times1-3=0 \Rightarrow a=3$$

حالا که ضرایب معادله معلوم شده، آن را تجزیه می‌کنیم. البته می‌دانیم یکی از عوامل تجزیه، $x-1$ است:

$$2x^3+3x^2-2x-3=2x^3-2x+3x^2-3$$

$$=2x(x^2-1)+3(x^2-1)=(x^2-1)(2x+3)$$

$$=(x-1)(x+1)(2x+3)$$

بنابراین ریشه‌ها برابر ۱، ۱− و $\frac{-3}{2}$ هستند و حالا باید معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌های آن، $\frac{1}{\alpha}=-1$ و $\frac{1}{\beta}=\frac{-2}{3}$ باشند. این معادله به شکل زیر است:

$$(x+1)(x+\frac{2}{3})=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

$$\xrightarrow{\times3} 3x^2+5x+2=0$$

**۱۸۷- گزینهٔ ۴** جمع و ضرب ریشه‌ها در معادلهٔ $4x^2-3x-2=0$ برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-(-3)}{4}=\frac{3}{4} \\ \alpha\beta=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

حالا جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم:

جمع ریشه‌ها $=(2\alpha-1)^2+(2\beta-1)^2$

$$=4\alpha^2-4\alpha+1+4\beta^2-4\beta+1$$

$$=4(\alpha^2+\beta^2)-4(\alpha+\beta)+2$$

$$=4((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)-4(\alpha+\beta)+2$$

$$=4((\frac{3}{4})^2-2(\frac{-1}{2}))-4(\frac{3}{4})+2=\frac{21}{4}$$

ضرب ریشه‌ها $=(2\alpha-1)^2(2\beta-1)^2=(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1)^2$

$$=(4(\frac{-1}{2})-2(\frac{3}{4})+1)^2=\frac{25}{4}$$

در نتیجه، معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-\frac{21}{4}x+\frac{25}{4}=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{21}{4} \\ n=\frac{25}{4} \end{cases}$$

**۱۸۸- گزینهٔ ۴** برای این‌که به ضرایب صحیح برسیم، ریشهٔ $\beta=\sqrt{3+\sqrt2}-\sqrt{3-\sqrt2}$ را هم برای معادله در نظر می‌گیریم. ابتدا معادلهٔ درجه‌دومی می‌نویسیم که α و β ریشه‌های آن باشند:

$$(x-(\sqrt{3+\sqrt2}+\sqrt{3-\sqrt2}))(x-(\sqrt{3+\sqrt2}-\sqrt{3-\sqrt2}))=0$$

$$\Rightarrow x^2-2\sqrt{3+\sqrt2}x+(3+\sqrt2-3+\sqrt2)=0$$

$$\Rightarrow x^2+2\sqrt2=2\sqrt{3+\sqrt2}x$$

حالا دو طرف معادلهٔ آخر را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^4+8+4\sqrt2x^2=4(3+\sqrt2)x^2$$

$$\Rightarrow x^4+8+4\sqrt2x^2=12x^2+4\sqrt2x^2$$

$$\Rightarrow x^4-12x^2+8=0$$

در نتیجه داریم $a=-12$ و $b=8$. $a+b=-4$

**۱۸۹- گزینهٔ ۱** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sqrt x(1+\sqrt x))^2-8(\sqrt x+x)+12=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt x+x)^2-8(\sqrt x+x)+12=0$$

حالا معادله را به صورت عبارتی درجه۲ برحسب $\sqrt x+x$ ببینید و آن را تجزیه کنید: $(x+\sqrt x-2)(x+\sqrt x-6)=0$

$$\begin{cases} x+\sqrt x-2=0 \xrightarrow{\sqrt x=t} t^2+t-2=0 \\ \Rightarrow (t-1)(t+2)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt x=1 \Rightarrow x=1 \\ t=-2 \Rightarrow \sqrt x=-2\ (\text{غیرقابل قبول}) \end{cases} \\ x+\sqrt x-6=0 \xrightarrow{\sqrt x=t} t^2+t-6=0 \\ \Rightarrow (t+3)(t-2)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \sqrt x=2 \Rightarrow x=4 \\ t=-3 \Rightarrow \sqrt x=-3 \Rightarrow (\text{غیرقابل قبول}) \end{cases} \end{cases}$$

پس ریشه‌ها $x=1$ و $x=4$ هستند و ضربشان برابر ۴ است.

**۱۹۰- گزینهٔ ۱** ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$y=a(x^2+x)+3x^2-2$$

حالا دو مقدار $x=0$ و $x=-1$ که باعث می‌شوند $a$ حذف شود را جای‌گذاری می‌کنیم.

$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$ نمودار از نقطهٔ $(0,-2)$ می‌گذرد.

$\Rightarrow$ نمودار حتماً از ناحیه‌های ۳ و ۴ عبور می‌کند.

$x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$ نمودار از نقطهٔ $(-1,1)$ می‌گذرد.

$\Rightarrow$ نمودار حتماً از ناحیهٔ دوم می‌گذرد.

دقت کنید که نقاط $(0,-2)$ و $(-1,1)$ به ازای هر مقدار $a$، روی منحنی قرار دارند.
پس تنها ممکن است که از ناحیهٔ یک عبور نکند.

# آزمون ۱۷

**۱۹۱- گزینهٔ ۱** برای این‌که $m^2\in(3m-2,2m)$ باشد، باید داشته باشیم: $3m-2<m^2<2m$

این دو نامعادله را به طور جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3m-2<m^2 \Rightarrow m^2-3m+2>0 \Rightarrow (m-1)(m-2)>0 \\ \Rightarrow m<1 \text{ یا } m>2 \quad (1) \\ m^2<2m \Rightarrow m^2-2m<0 \Rightarrow m(m-2)<0 \\ \Rightarrow 0<m<2 \quad (2) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های (۱) و (۲)، جواب نهایی است: $0<m<1$

**۱۹۲- گزینهٔ ۳** علامت عبارت درجه‌دوم خارج دو ریشه، موافق علامت ضریب $x^2$ است، پس $-2$ و $b$ ریشه‌های عبارت $ax^2+3x-a$ هستند.
اگر $x=-2$، ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+3x-a=0$ باشد، باید در این معادله صدق کند. در نتیجه:

$$4a-6-a=0 \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$$

پس عبارت به صورت $2x^2+3x-2$ است و داریم:

$$2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$$

ریشه‌های عبارت برابر $-2$ و $\frac{1}{2}$ هستند. در نتیجه $b=\frac{1}{2}$.

**۱۹۳- گزینهٔ ۳** برای حل نامعادله‌های $4x-5<x+3<4x+m$
در مرحلهٔ اول، از هر ۳ عبارت $4x$ را کم کنید: $-5<-3x+3<m$
حالا از ۳ طرف ۳ واحد کم می‌کنیم: $-8<-3x<m-3$
و در آخرین مرحله، ۳ طرف را بر $-3$ تقسیم می‌کنیم. دقت کنید که ضرب و تقسیم نامعادله در عدد منفی، جهت نابرابری‌ها را عوض می‌کند:

$$\frac{-8}{-3}>x>\frac{m-3}{-3} \Rightarrow \frac{3-m}{3}<x<\frac{8}{3}$$

در نتیجه، با توجه به این‌که جواب بازه $(-2,b)$ است، داریم:

$$\begin{cases} \frac{3-m}{3}=-2 \Rightarrow 3-m=-6 \Rightarrow m=9 \\ b=\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+m=\frac{8}{3}+9=\frac{35}{3}$$

**۱۹۴- گزینهٔ ۲** برای این‌که نمودار تابع $f$، بالای خط $y=\frac{5}{2}$ قرار داشته باشد، باید داشته باشیم $f(x)>\frac{5}{2}$، بنابراین باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{7}{2}x-x^2+1>\frac{5}{2} \Rightarrow -x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}>0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} 2x^2-7x+3<0 \Rightarrow (2x-1)(x-3)<0 \Rightarrow \frac{1}{2}<x<3$$

در نتیجه داریم: $a=\frac{1}{2}$ و $b=3$ و $b-a=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

**۱۹۵- گزینهٔ ۲** جدول تعیین علامت عبارت درجه‌دوم، هرگز چنین شکلی ندارد. این جدول می‌تواند مربوط به یک عبارت درجه‌یک باشد، پس باید ضریب $x^2$ در عبارت $A(x)$ را برابر صفر قرار دهیم: $a-2=0 \Rightarrow a=2$
اما چون علامت عبارت بعد از ریشه، منفی است، معلوم می‌شود که ضریب $x$ در عبارت منفی بوده است، پس $b-2$ منفی است و چون $b$ عددی طبیعی است، فقط $b=1$ قابل‌قبول است. حالا داریم $f(x)=-x+c$ و می‌دانیم عدد ۲، ریشهٔ $f$ است. در نتیجه:

$$f(2)=0 \Rightarrow -2+c=0 \Rightarrow c=2$$

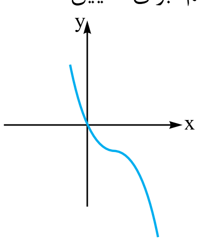
**۱۹۶- گزینهٔ ۱** عبارت $(x^2+ax+b)(x-1)$ به خاطر پرانتز $(x-1)$، ریشهٔ ۱ دارد. از طرفی، چون جواب نامعادله $[-1,+\infty)$ است، باید $-1$ هم، ریشهٔ این عبارت باشد. همچنین علامت عبارت، هم قبل از $x=1$ و هم بعد از آن مثبت بوده، چون در تمام بازهٔ $(-1,+\infty)$، علامت مثبت است. پس در $x=1$ تغییر علامت نداریم و $x=1$ باید ریشهٔ مضاعفِ عبارت باشد. این در صورتی اتفاق می‌افتد که $x=1$، یک بار هم، ریشهٔ پرانتز $(x^2+ax+b)$ باشد، پس دو ریشهٔ این پرانتز، ۱ و $-1$ هستند و داریم:

$$x^2+ax+b=(x-1)(x+1)=x^2-1$$

اگر ضریب جملات متشابه را برابر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a=0, b=-1 \Rightarrow a-b=1$$

**۱۹۷- گزینهٔ ۴** عبارت $x^2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس می‌توانیم از نامعادله حذفش کنیم. برای تعیین علامت $(f(x)-2)$ کافی است نمودار را دو واحد به سمت پایین منتقل کنیم. مطابق شکل $(f(x)-2)$ به ازای $x$های کوچک‌تر از صفر مثبت و به ازای $x$های بزرگ‌تر از صفر، منفی است.



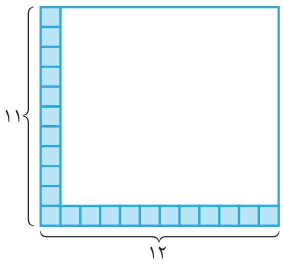

$$\frac{f(x)-2}{x+1}\geq 0 \Rightarrow$$

| | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | ۰ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)-2$ | $+$ | | $+$ | ۰ | $-$ |
| $\frac{f(x)-2}{x+1}$ | $-$ | ت‌ن | $+$ | ۰ | $-$ |

با توجه به جدول، جواب نامعادلهٔ بازهٔ $(-1,0]$ است.

# آزمون ۶۶

**۷۷۱- گزینهٔ ۴** شکل اول مستطیلی با ابعاد ۳×۲ است، شکل دوم ۴×۳، شکل سوم ۵×۴ و ... شکل دهم مستطیلی ۱۲×۱۱ است.




در شکل دهم ۲۲=۱۱+۱۱ خانه رنگ شده است. بنابراین نسبت خانه‌های سفید به خانه‌های رنگ‌شده برابر است با:

$$\frac{۱۱\times۱۲-۲۲}{۲۲}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

**۷۷۲- گزینهٔ ۲** قدرنسبت برابر است با: $\frac{۴۵-۵}{۹+۱}=\frac{۴۰}{۱۰}=۴$

بنابراین پنجمین واسطه، ششمین جملهٔ دنباله است و برابر است با:

$$a_۶=a_۱+۵d=۵+۵\times۴=۲۵$$

**۷۷۳- گزینهٔ ۳** مخرج هر کسر را با ضرب‌کردن در مزدوج مخرج، گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}>۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}$$

$$\times\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}\times\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}>۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۳-۲}+\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}{۴-۳}$$

$$+\dots+\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{n+۱-n}>۱۰ \Rightarrow \cancel{\sqrt{۲}}-۱+\cancel{\sqrt{۳}}$$

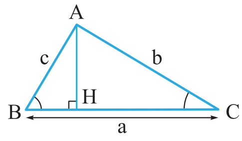
$$-\cancel{\sqrt{۲}}+\cancel{\sqrt{۴}}-\cancel{\sqrt{۳}}+\dots+\sqrt{n+۱}-\cancel{\sqrt{n}}>۱۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+۱}-۱>۱۰ \Rightarrow \sqrt{n+۱}>۱۱$$

$$\Rightarrow n+۱>۱۲۱ \Rightarrow n>۱۲۰$$

پس حداقل مقدار طبیعی برای n برابر ۱۲۱ است.

**۷۷۴- گزینهٔ ۱** با توجه به شکل داریم:

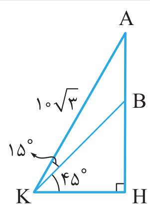



$$\begin{cases}\sin\hat{B}=\frac{AH}{c}\Rightarrow c.\sin\hat{B}=AH\\ \cos\hat{B}=\frac{BH}{c}\Rightarrow c.\cos\hat{B}=BH\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{c\sin\hat{B}}{a-c.\cos\hat{B}}=\frac{AH}{a-BH}=\frac{AH}{CH}=\tan\hat{C}$$

**۷۷۵- گزینهٔ ۴** با توجه به شکل داریم:




$$\sin ۶۰^\circ=\frac{AH}{۱۰\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow AH=۱۰\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵$$

$$\cos ۶۰^\circ=\frac{KH}{۱۰\sqrt{۳}} \Rightarrow KH=۱۰\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}=۵\sqrt{۳}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{BH}{KH} \Rightarrow BH=KH\times\tan ۴۵^\circ$$

$$=۵\sqrt{۳}\times۱=۵\sqrt{۳}$$

در نتیجه داریم: $AB=AH-BH=۱۵-۵\sqrt{۳}=۵(۳-\sqrt{۳})$

**۷۷۶- گزینهٔ ۴**

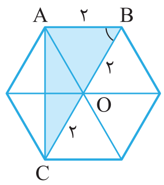
$$۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sin^۲x+\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos^۲x=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$\tan^۲x=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۱ \Rightarrow \tan^۴x=۱$$

**۷۷۷- گزینهٔ ۳** اگر در یک شش‌ضلعی منتظم قطرها را رسم کنیم، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان ایجاد می‌شود. در مثلث ABC می‌دانیم $AB=OB=OC=۲$ است.




مساحت مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها می‌شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

**۷۷۸- گزینهٔ ۳**

$$\frac{\tan^۲x}{۱+\tan^۲x}+\frac{\cot^۲x}{۱+\cot^۲x}=\frac{\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}{\frac{۱}{\cos^۲x}}+\frac{\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}}{\frac{۱}{\sin^۲x}}$$

$$=\sin^۲x+\cos^۲x=۱$$

**۷۷۹- گزینهٔ ۲** $۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۹=(۲x-۱)^۳-۸$

اگر به جای x عدد $\frac{\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}$ را قرار دهیم، داریم:

$$(۲\times\frac{\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}-۱)^۳-۸=\sqrt[۳]{۳}^۳-۸=۳-۸=-۵$$

**۷۸۰- گزینهٔ ۳** روش ۱

$$\begin{cases}۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲\\ ۵-۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$A=\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}$$

$$=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $A\sqrt{۳}$ عددی گویا است.

**روش ۲**

$$A=\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^۲=۵+۲\sqrt{۶}+۵-۲\sqrt{۶}+۲(\sqrt{((۵^۲)-(۲\sqrt{۶})^۲})$$

$$A^۲=۱۰+۲=۱۲ \Rightarrow A=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

پس $\sqrt{۳}A$ عددی گویا است.

---

**۷۸۱- گزینهٔ ۳** $\alpha$ عددی بین صفر و ۱- است. پس $\alpha^۲$ مثبت و $\alpha^۳$ و $\sqrt[۳]{\alpha}$ منفی هستند. از طرفی اعداد بین ۱- و ۱ هر چه توان بزرگ‌تری داشته باشند، از نظر اندازه (قدرمطلق) کوچک‌ترند. پس با توجه به منفی‌بودن $\alpha$ داریم: $\sqrt[۳]{\alpha}<\alpha^۳$

---

**۷۸۲- گزینهٔ ۲** $\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۱}=A$

حالا طرفین عبارت $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۱}=۲۷$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۱})(\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۱})=۲۷A$$

$$x-۲-(x+۱)=۲۷A \Rightarrow -۳=۲۷A \Rightarrow A=\frac{-۱}{۹}$$

---

**۷۸۳- گزینهٔ ۱** با توجه به این‌که $a>۱$ است، جدول تعیین علامت عبارت $\frac{x-a}{ax-۱}$ به صورت زیر است:

| x | | $\frac{۱}{a}$ | | a | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x-a}{ax-۱}$ | + | ت ن | − | ∘ | + |

در نتیجه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-a}{ax-۱}<۰$ به صورت بازهٔ $(\frac{۱}{a},a)$ است.

---

**۷۸۴- گزینهٔ ۲** **روش ۱** چون $|۳x-۴|<x$ در نتیجه x حتماً مثبت است و می‌توان دو طرف نامعادله را به توان ۲ رساند.

$$۹x^۲-۲۴x+۱۶<x^۲ \Rightarrow ۸x^۲-۲۴x+۱۶<۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲<۰ \Rightarrow ۱<x<۲$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۲$ است و داریم: $\frac{a+b}{۲}=\frac{۳}{۲}$

**روش ۲** چون $|۳x-۴|<x$ است، مقدار x حتماً مثبت است.

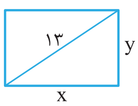
پس داریم: $-x<۳x-۴<x \Rightarrow ۳x-۴<x$

$$\begin{cases}\xrightarrow{(۱)} ۲x<۴ \Rightarrow x<۲\\ \xrightarrow{(۲)} ۳x-۴>-x \Rightarrow ۴x>۴ \Rightarrow x>۱\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow ۱<x<۲ \Rightarrow \begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

---

**۷۸۵- گزینهٔ ۲** **روش ۱**




$$x+y=۱۷ \Rightarrow y=۱۷-x$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲+y^۲=۱۳^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+(۱۷-x)^۲=۱۶۹ \Rightarrow ۲x^۲-۳۴x+۱۲۰=۰$$

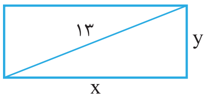
$$\Rightarrow x^۲-۱۷x+۶۰=۰ \Rightarrow x=۵ \text{ یا } ۱۲$$

بنابراین دو ضلع مستطیل ۵ و ۱۲ هستند و مساحت آن برابر $۵\times۱۲=۶۰$ است. در نتیجه: مساحت − محیط = ۶۰ − ۳۴ = ۲۶

**روش ۲** $۲(x+y)=۳۴ \Rightarrow x+y=۱۷$

$$x^۲+y^۲=(۱۳)^۲$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:




$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲-۲xy$$

$$\Rightarrow ۱۶۹=(۱۷)^۲-۲xy$$

$$\Rightarrow xy=۶۰$$

مساحت − محیط = ۶۰ − ۳۴ = ۲۶

---

**۷۸۶- گزینهٔ ۲** **روش ۱** با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ در تابع $y=x^۲-ax+b$ برابر یک است با دو انتقال در راستای محور x و y می‌توان از $y=x^۲$ به این تابع رسید. اول باید ۴ واحد به سمت پایین منتقل شود که معادلهٔ آن به صورت $y=x^۲-۴$ درمی‌آید که دارای دو ریشهٔ $\pm۲$ است. حالا برای این‌که ریشهٔ مثبت ۳ باشد x را به $x-۱$ تبدیل می‌کنیم: $y=(x-۱)^۲-۴$

در نتیجه ریشهٔ کوچک‌تر برابر ۱- است.

**روش ۲** البته می‌توانستید در این سؤال برای a و b دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید.

---

**۷۸۷- گزینهٔ ۴** اگر معادلهٔ سهمی $y=-x^۲+۶x$ باشد، مختصات A، (رأس سهمی) به صورت زیر است:

$$x_A=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲(-۱)}=۳ \Rightarrow y_A=-۳^۲+۶\times۳=۹$$

از طرفی طول نقطهٔ B یکی از صفرهای تابع است:

$$-x^۲+۶x=۰ \Rightarrow -x(x-۶)=۰ \Rightarrow x=۰,۶$$

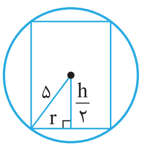
در نتیجه مختصات B به صورت $(۶,۰)$ است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AO=\sqrt{۳^۲+۹^۲}=\sqrt{۳^۲(۱+۳^۲)}=۳\sqrt{۱۰}\\ AB=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۰-۹)^۲}=۳\sqrt{۱۰}\\ OB=\sqrt{(۶-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۶\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{محیط}=۶\sqrt{۱۰}+۶$$

---

**۷۸۸- گزینهٔ ۴** شکل مقابل برشی از شکل اصلی است.




$\frac{h}{۲}$ نصف ارتفاع استوانه و r شعاع استوانه است.

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$r^۲+(\frac{h}{۲})^۲=۵^۲ \Rightarrow r^۲=۲۵-\frac{h^۲}{۴}$$

در نتیجه حجم استوانه برابر است با:

$$V=\pi r^۲h=\pi(۲۵-\frac{h^۲}{۴})h=\pi(۲۵h-\frac{h^۳}{۴})$$

$$=\frac{\pi}{۴}(۱۰۰h-h^۳)$$

**۷۸۹- گزینهٔ ۴** در (۱) داریم:

$$f(x)=\frac{۴-۶x}{۳x-۲}=\frac{۲(۲-۳x)}{-(۲-۳x)}=-۲$$

در (۲) چون همواره $\sin x\le ۱$ است: $\sin x-۱\le ۰$

پس تابع فقط در نقاطی که $\sin x=۱$ باشد، تعریف شده است و در این نقاط هم مقدار ثابت صفر را دارد. پس ثابت است.

در (۳) داریم:

$$f(x)=\frac{۲^x}{۲^x+۳\times ۲^x}=\frac{۲^x}{۲^x(۱+۳)}=\frac{۲^x}{۲^۲\times ۲^x}=\frac{۱}{۴}$$

اما (۴) ثابت نیست و برابر است با:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

**۷۹۰- گزینهٔ ۳** چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در نتیجه:

$$\begin{cases}f(۲)=۴ \Rightarrow ۲a+b=۴\\ f(-۱)=-۵ \Rightarrow -a+b=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\ b=-۲\end{cases}$$

بنابراین: $f(x)=۳x-۲$

با توجه به گزینه‌ها، (۳) تابعی ثابت است.

$$۳x-f(x)=۳x-(۳x-۲)=۲$$