ترسیم‌های هندسی و استدلال
(فصل ۱)

۱

• موضوع: ترسیم‌های هندسی
• نوع آزمون: مبحثی
• صفحهٔ کتاب درسی: ۱۰ تا ۱۷ هندسهٔ دهم
• ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

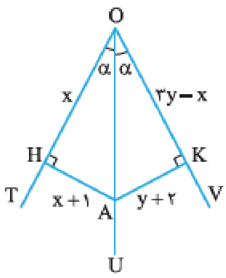
۱- نقطهٔ T به فاصلهٔ $(3x+1)$ از خط d قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی d به فاصلهٔ ۱۰ از نقطهٔ T وجود نداشته باشد، x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- فاصلهٔ بین دو خط موازی d و d' برابر با ۶ واحد است. نقاطی که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از این دو خط برابر با ۲ واحد است، تشکیل .... می‌دهند.

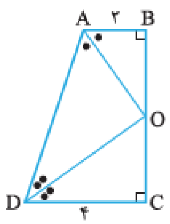
۱) دو خط موازی با d و d' در بین آن‌ها
۲) یک خط موازی با d و d' در بین آن‌ها
۳) دو خط موازی با d و d' خارج از ناحیهٔ بین آن‌ها
۴) دو خط موازی با d و d' یکی بین و دیگری خارج از ناحیهٔ بین آن‌ها

۳- در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط‌های OH، OK، AH و AK در کنار آن‌ها نوشته شده است. $x+y$ برابر با کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۴- در شکل روبه‌رو OA و OD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های BAD و ADC هستند. طول AD کدام است؟



۱) ۶
۲) $4\sqrt{2}$
۳) $4/5$
۴) $3\sqrt{3}$

۵- دو خط متقاطع و یک دایره را در نظر می‌گیریم. روی این دایره n نقطه وجود دارد که از هر دو خط به یک فاصله هستند. n چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- در مثلث ABC که $\hat{B}=\hat{C}=70^\circ$، عمودمنصف AB و نیمساز زاویهٔ داخلی B، همدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند. زاویهٔ A توسط AD به دو زاویه تقسیم می‌شود. نسبت اندازه‌های این دو زاویه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷- در مثلث ABC که $AB+2=AC+1=BC=5$، عمودمنصف BC، ضلع AC را در نقطهٔ M قطع کرده است. فاصلهٔ M از دورترین رأس مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{25}{8}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{14}{5}$

۸- چند لوزی متمایز به طول ضلع ۵ و طول قطر ۷ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ واحد از هم قرار دارند. کمانی به مرکز A و شعاع ۳ واحد و کمان دیگری به مرکز B و شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم و نقاط تقاطع این دو کمان را M و N می‌نامیم. چهار ضلعی AMBN کدام است؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) ذوزنقه ۴) هیچ‌کدام

۱۰- پاره‌خط $AB=۱۰$ را در نظر گرفته، به مرکز A کمانی به شعاع ۶ و به مرکز B کمانی به شعاع ۸ رسم کرده، نقطهٔ تقاطع دو کمان را M می‌نامیم، سپس به مرکز A کمانی به شعاع ۸ و به مرکز B کمانی به شعاع ۶ رسم کرده، نقطهٔ تقاطع دو کمان را N می‌نامیم. مساحت چهارضلعی AMBN کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

۲

- موضوع: استدلال
- نوع آزمون: مبحثی
- صفحهٔ کتاب درسی: ۱۸ تا ۲۸ هندسهٔ دهم
- ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۱- از تقاطع نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ غیرمجاور در یک پنج‌ضلعی منتظم، یک چهارضلعی ایجاد می‌شود. بزرگ‌ترین زاویهٔ این چهارضلعی چند درجه است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۱۲- در کدام چندضلعی محدب، مجموع زاویه‌های داخلی شش برابر مجموع زاویه‌های خارجی است؟

۱) ۱۰ضلعی ۲) ۱۲ضلعی ۳) ۱۴ضلعی ۴) ۱۶ضلعی

۱۳- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸ فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از ضلع بزرگ‌تر a است. فاصلهٔ این نقطه از ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) a ۲) $\sqrt{a^۲+۱۲}$ ۳) ۲a ۴) $\sqrt{a^۲+۱۶}$

۱۴- در مثلث ABC بین زاویه‌ها رابطهٔ $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$ برقرار است. نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث کجا است؟

۱) داخل مثلث ۲) رأس A ۳) روی ضلع BC ۴) بیرون مثلث

۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی از رأس‌های مثلث $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ است. طول ضلع کوچک‌تر این مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱+\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۶- اگر در مثلث ABC، بزرگ‌ترین ضلع AB باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $\hat{C}>۹۰^\circ$ ۲) $\hat{C}>۶۰^\circ$ ۳) $۹۰^\circ<\hat{C}<۱۲۰^\circ$ ۴) $۶۰^\circ<\hat{C}<۱۲۰^\circ$

۱۷- در مثلث ABC، نقطه‌ای مانند K روی ضلع BC وجود دارد، به طوری که $AK=AB$. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AC>AB$ ۲) $AC>BK$ ۳) $AC<AB$ ۴) $AC<BK$

۱۸- نقیض گزارهٔ «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۳۶۰° نیست.» کدام است؟

۱) یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۳۶۰° است.

۲) در هر چهارضلعی مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است.

۳) چهارضلعی‌ای وجود ندارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن‌ها ۳۶۰° باشد.

۴) حداقل یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۳۶۰° است.

۱۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، نقطهٔ X روی BC چنان واقع است که $C\hat{A}X\neq\hat{B}$. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\hat{B}>\hat{C}$ ۲) $\hat{B}<\hat{C}$ ۳) $A\hat{X}B\neq۹۰^\circ$ ۴) $A\hat{X}B=۹۰^\circ$

۲۰- کدام قضیهٔ دوشرطی نیست؟

۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
۲) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند.
۳) قضیهٔ فیثاغورس
۴) در مثلث دارای زاویهٔ منفرجه، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها داخل مثلث نیست.

۳

- موضوع: جامع فصل
- نوع آزمون: استاندارد
- صفحهٔ کتاب درسی: ۱۰ تا ۲۸ هندسهٔ دهم
- ۱۵ تست در ۲۳ دقیقه

۲۱- اگر دو نقطه یافت شود که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد، طول پاره‌خط AB کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد از خط L قرار دارد. دو نقطهٔ B و C روی L از A به فاصلهٔ ۱۰ واحد هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۲۳- روی ضلع‌های مثلث ABC یا امتدادهای آن‌ها، چند نقطه وجود دارد که از دو خط AB و AC به یک فاصلهٔ غیرصفر باشد؟

۱) دقیقاً یک ۲) دقیقاً دو ۳) صفر یا یک ۴) یک یا دو

۲۴- چند مثلث می‌توان رسم کرد که در آن طول یک ضلع و طول میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع به ترتیب ۳، ۴ و ۵ واحد باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۲۵- پاره‌خط $AB = ۱۰$ را در نظر گرفته و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز وسط AB و شعاع ۵، عمودمنصف را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی APBQ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) $۲۵\sqrt{۲}$ ۳) $۵۰\sqrt{۲}$ ۴) ۵۰

۲۶- مستطیل ABCD به طول اضلاع $AB = ۱۸$ و $BC = ۶$ مفروض است. دو کمان با شعاع‌های برابر، اولی به مرکز A و دومی به مرکز C رسم می‌کنیم: کمان اول CD را در M و کمان دوم AB را در N قطع می‌کند. اگر چهارضلعی AMCN لوزی باشد، شعاع کمان‌های رسم‌شده کدام بوده است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۷- برای رسم متوازی‌الاضلاع ABCD، از هر دو سر پاره‌خط $AC = ۸$، دایره‌هایی به شعاع‌های m و n رسم می‌کنیم. کدام مقادیر برای m و n قابل‌قبول‌اند؟

۱) $m = ۴$ و $n = ۳$ ۲) $m = ۵$ و $n = ۴$ ۳) $m = ۴$ و $n = ۴$ ۴) $m = ۹$ و $n = ۱$

۲۸- می‌دانیم محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر با مقدار معلوم ۲p است. اگر طول ساق این مثلث را a در نظر بگیریم، کدام گزینه حدود تغییرات a را نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{۱}{۳}p < a < p$ ۲) $\frac{۱}{۲}p < a < \frac{۳}{۲}p$ ۳) $\frac{۱}{۲}p < a < p$ ۴) $\frac{۱}{۳}p < a < \frac{۱}{۲}p$

۲۹- نقطهٔ P داخل مثلث ABC که $AB = ۳$ و $AC = ۴$ قرار دارد. حاصل $PB + PC$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۸

۳۰- یک ده‌ضلعی محدب حداکثر چند زاویهٔ حاده دارد؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۳

۳۱- در مثلثی طول دو ضلع بزرگ‌تر ۸ و ۹ است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از رأس روبه‌روی ضلع بزرگ $m - ۲$ و فاصلهٔ این نقطه از رأس روبه‌روی ضلع کوچک $۲m - ۹$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از وسط ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۲- در مثلث ABC، نقطهٔ H، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها است. از رأس‌های این مثلث، خط‌هایی به موازات ضلع‌های آن رسم می‌کنیم تا از تقاطع این خط‌ها مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود. نقطهٔ H برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

۱) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها ۲) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها ۳) نقطهٔ همرسی میانه‌ها ۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی

۳۳- در مثلث ABC که $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $\hat{C} = ۸۵^\circ$، عمودمنصف‌ها در نقطهٔ O همرس‌اند و I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی است. زاویهٔ BIC چند برابر زاویهٔ BOC است؟

۱) ۲ ۲) ۳/۵ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

۳۴- در مثلث ABC، زاویهٔ A از زاویهٔ C کوچک‌تر است و $\hat{A} + \hat{C} = ۲\hat{B}$. کدام گزینه درست است؟

۱) $BC < AB < AC$ ۲) $BC < AC < AB$ ۳) $AB < BC < AC$ ۴) $AB < AC < BC$

۳۵- کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱) نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث، داخل آن مثلث قرار دارد.

۲) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های هر مثلث داخل آن مثلث قرار دارد.

۳) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث داخل یا بیرون آن مثلث قرار دارد.

۴) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های یک مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله نیست.

۲۵

• موضوع: جامع ۱

• صفحهٔ کتاب درسی: ۹ تا ۹۶ هندسهٔ دهم ـ ۹ تا ۷۷ هندسهٔ یازدهم

• ۲۰ تست در ۳۰ دقیقه

۲۹۶- خط Δ و دو نقطهٔ P و Q را درنظر بگیرید. برای رسم مثلثی متساوی‌الساقین به قاعدهٔ PQ که رأس دیگر آن روی Δ واقع است، تعداد جواب‌ها کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۲۹۷- از نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مثلث، عمودهایی بر سه ضلع آن وارد می‌کنیم، با وصل کردن پای این سه عمود، یک مثلث جدید حاصل می‌شود. نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث اولیه، برای مثلث جدید چه نقطه‌ای است؟

۱) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها ۲) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها ۳) نقطهٔ همرسی میانه‌ها ۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی

۲۹۸- در مثلث ABC که $AC = 2AB = 12$، از نقطهٔ D واقع بر ضلع BC، خطوطی موازی AB و AC رسم کنیم تا آن‌ها را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. حاصل $DE+DF$ کدام نمی‌تواند باشد؟

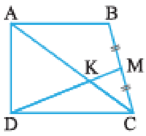
۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۷

۲۹۹- در مثلث ABC که $\hat{A} = 30^\circ$، دو ارتفاع BK و CL را رسم می‌کنیم. طول BC چند برابر طول KL است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

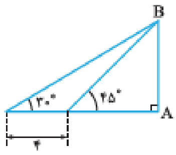
۳۰۰- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ مفروض است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از ضلع BC برابر با ۱/۵ واحد باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{9}$



۳۰۱- در شکل مقابل، ABCD یک ذوزنقه است. به طوری که $5AB = 4CD$ و M وسط BC است. مساحت مثلث MCK چند برابر مساحت مثلث CKD است؟

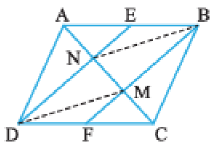
۱) ۰/۶ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۴



۳۰۲- با توجه به شکل، طول AB کدام است؟

۱) $2(1+\sqrt{6})$ ۲) $3+\sqrt{6}$

۳) $4+\sqrt{3}$ ۴) $2+2\sqrt{3}$



۳۰۳- در شکل مقابل، ABCD متوازی‌الاضلاع و نقاط E و F وسط ضلع‌های آن هستند. نسبت مساحت چهارضلعی BMNE به مساحت چهارضلعی BMDN کدام است؟

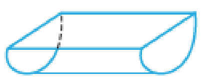
۱) ۰/۸۵ ۲) ۰/۸

۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۹

۳۰۴- در یک چندضلعی شبکه‌ای تعداد نقاط مرزی شش برابر تعداد نقاط درونی است. مساحت این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۳۰۵- یک نیم‌استوانه مطابق شکل مفروض است. سطح مقطع این نیم‌استوانه با صفحهٔ مایلی که از قاعده‌های آن عبور نکند کدام است؟



۱) سهمی ۲) قسمتی از یک دایره

۳) قستی از یک بیضی ۴) قسمتی از یک سهمی

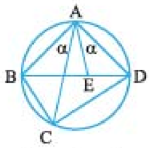
۳۰۶- از مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد، دایرهٔ محاطی داخلی آن را جدا کرده و قسمت باقی‌مانده را حول ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چند برابر π است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۷ ۳) ۶/۵ ۴) ۶

۳۰۷- دو دایرهٔ $C(O,5)$ و $C'(O',4)$ که $OO' = 9$ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ C' مماسی به موازات خط‌المرکزین بر آن رسم می‌کنیم تا این مماس دایرهٔ C را در B قطع کند. محیط مثلث بزرگ‌تر OAB بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

۱) ۱۹ و ۲۰ ۲) ۲۱ و ۲۲ ۳) ۲۴ و ۲۵ ۴) ۲۶ و ۲۷

۳۰۸- در شکل مقابل حاصل $AE \times AC$ با کدام گزینه برابر است؟



۱) $ED \times AB$
۲) $AB \times AD$
۳) $ED \times AC$
۴) $AD \times BC$

۳۰۹- در مثلثی به طول ضلع‌های ۵، ۵ و ۶ واحد، بیشترین فاصلهٔ نقاط واقع بر دایرهٔ محیطی، از نقاط واقع بر محیط مثلث، چند واحد است؟

۱) ۲/۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۳
۴) ۲/۳۵

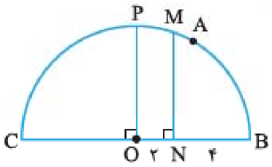
۳۱۰- ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی به مساحت ۴۵ واحد مربع مفروض است. اگر اندازهٔ ساق غیرقائم این ذوزنقه برابر ۹ واحد باشد، شعاع دایرهٔ محاطی آن چند واحد است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۴/۵

۳۱۱- تبدیل‌یافتهٔ یک خط را تحت تبدیل‌های انتقال، دوران، تجانس و بازتاب نسبت به خط پیدا می‌کنیم. در چه تعداد از آن‌ها ممکن است تبدیل‌یافتهٔ خط بر خود خط عمود باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۱۲- مطابق شکل، O وسط قطر نیم‌دایره است و $\widehat{AB} = ۶۰^{\circ}$. دو نقطهٔ متغیر D و E به ترتیب روی MN و OP طوری حرکت می‌کنند که DE بر MN و OP عمود است. طول کوتاه‌ترین مسیر ADEC کدام است؟

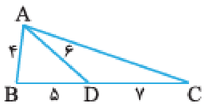


۱) ۱۱
۲) $۲+۳\sqrt{۶}$
۳) $۲(۱+\sqrt{۱۹})$
۴) $۳\sqrt{۲۱}$

۳۱۳- در مثلث ABC، نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{BD}{CD}$ برابر با کدام است؟

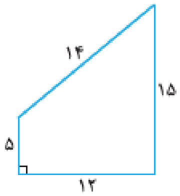
۱) $\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$
۲) $\frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$
۳) $\frac{\cos \hat{B}}{\cos \hat{C}}$
۴) $\frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}}$

۳۱۴- در شکل مقابل طول AC کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳۷}$
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) $۲\sqrt{۳۵}$

۳۱۵- مساحت چهارضلعی شکل مقابل کدام است؟



۱) ۱۱۴
۲) ۱۲۰
۳) ۱۰۸
۴) ۱۰۲

۲۶

- موضوع: جامع ۲
- صفحهٔ کتاب درسی: ۹ تا ۹۶ هندسهٔ دهم ـ ۹ تا ۷۷ هندسهٔ یازدهم
- ۲۰ تست در ۳۰ دقیقه

۳۱۶- نقطهٔ P به فاصلهٔ ۴ واحد از خط L مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از P به فاصلهٔ ۳ و از L به فاصلهٔ ۲ واحد باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۳۱۷- عمود منصف ساق AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، ساق AB را در نقطهٔ T قطع کرده است. اگر $T\hat{C}B = ۷/۵^{\circ}$، آن‌گاه زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۵۲/۵
۲) ۶۲/۵
۳) ۶۵
۴) ۵۵

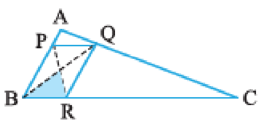
۳۱۸- در مثلثی به طول اضلاع ۱۰، ۲۴ و ۲۶، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها از نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۱۳
۴) $\frac{۱۲۰}{۱۳}$

۳۱۹- مساحت مثلثی به طول ارتفاع‌های ۲/۴، ۲ و ۲/۴ کدام است؟

۱) ۴/۸
۲) ۳/۲
۳) ۳
۴) ۴

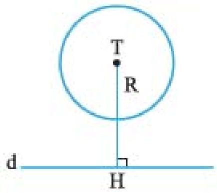
۳۲۰- در شکل مقابل $BP = ۴AP$ و چهارضلعی BPQR متوازی‌الاضلاع است. نسبت مساحت مثلث APQ به مساحت مثلث رنگی کدام است؟



۱) ۱
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۲۵

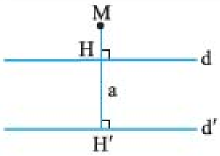
آزمون ۱

۱- گزینهٔ ۴ نقاطی که از T به فاصلهٔ R هستند، روی دایره‌ای به مرکز T و شعاع R واقع‌اند. با توجه به شکل اگر فاصلهٔ T از d بیشتر از R باشد، هیچ نقطه‌ای به فاصلهٔ R از T روی d وجود ندارد، پس با توجه به شکل داریم:



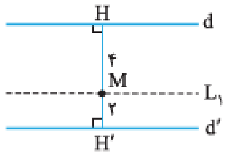
$$TH > R \xrightarrow[R=10]{TH=3x+1} 3x+1>10 \Rightarrow x>3$$

۲- گزینهٔ ۱ اول دقت کنید که اگر نقطه‌ای در خارج ناحیهٔ بین دو خط موازی باشد، تفاضل فاصله‌هایش از این دو خط، می‌شود فاصلهٔ بین این دو خط؛ مثلاً در شکل روبه‌رو $MH' - MH = a$.

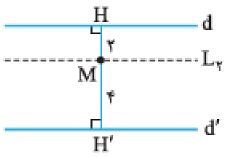


پس در این سؤال، اگر نقطه‌ای در خارج ناحیهٔ بین d و d′ واقع باشد، تفاضل فاصله‌هایش از d و d′ می‌شود ۶.

حالا اگر M نقطه‌ای در ناحیهٔ بین d و d′ باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:



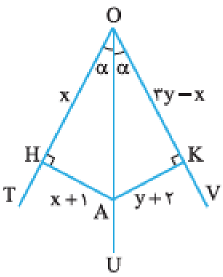
$$\begin{cases} MH+MH'=6 \\ MH-MH'=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH=4 \\ MH'=2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} MH+MH'=6 \\ MH'-MH=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH'=4 \\ MH=2 \end{cases}$$

دو خط L_1 و L_2 جواب‌های سؤال هستند، L_1 به فاصلهٔ ۴ از d و ۲ از d′ و L_2 به فاصلهٔ ۲ از d و ۴ از d′.

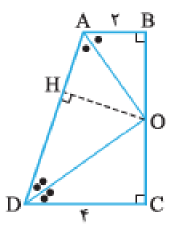
۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل OU نیمساز زاویهٔ TOV است؛ پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH و OAK بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند، داریم:



$$\begin{cases} AH=AK \\ OH=OK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=y+2 \\ x=3y-x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y=5$$

۴- گزینهٔ ۱ از نقطهٔ O، عمود OH را بر AD وارد می‌کنیم، داریم:



OA نیمساز $B\hat{A}D$ است.

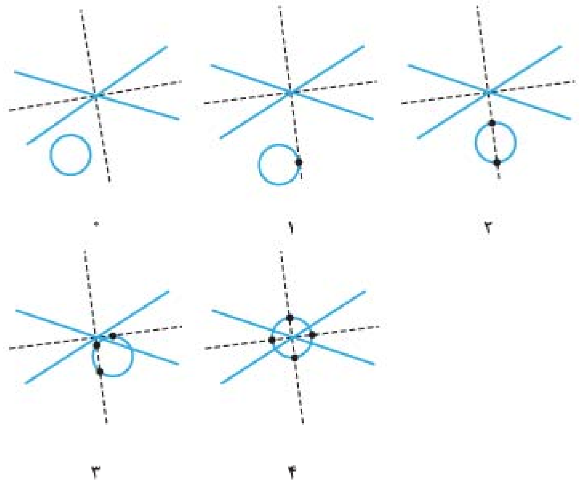
$$\Rightarrow AH=AB \Rightarrow AH=2$$

OD نیمساز $A\hat{D}C$ است.

$$\Rightarrow DH=CD \Rightarrow DH=4$$

$$\Rightarrow AD=AH+DH=2+4=6$$

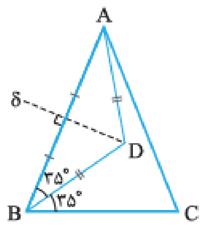
۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم نقطه‌ای که از دو خط متقاطع به یک فاصله است، روی نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها قرار دارد. شکل‌های زیر نشان می‌دهد که این دایره می‌تواند با نیمسازها ۰، ۱، ۲، ۳ و یا ۴ نقطهٔ مشترک داشته باشند، پس n می‌تواند پنج مقدار متفاوت داشته باشد.



۶- گزینهٔ ۴

$$\hat{B}=\hat{C}=70^\circ \Rightarrow \hat{A}=180^\circ-2\times 70^\circ=40^\circ$$

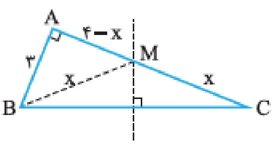
$$D\in\delta \Rightarrow DA=DB \Rightarrow B\hat{A}D=A\hat{B}D=35^\circ$$



$$\Rightarrow C\hat{A}D=40^\circ-35^\circ=5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A\hat{B}D}{C\hat{A}D}=\frac{35^\circ}{5^\circ}=7$$

۷- گزینهٔ ۳ از $AB+2=AC+1=BC=5$ نتیجه می‌گیریم $AB=3$، $AC=4$ و $BC=5$. از آن‌جا که $BC^2=AB^2+AC^2$، مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

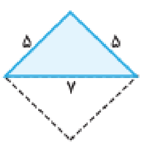


با توجه به شکل، از آن‌جا که M روی عمودمنصف BC واقع است، $MB=MC$، پس در نظر می‌گیریم $MB=x$؛ در این صورت $AM=AC-MC=4-x$. حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم:

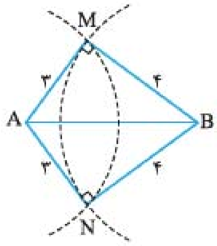
$$BM^2=AB^2+AM^2 \Rightarrow x^2=3^2+(4-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2=9+16-8x+x^2 \Rightarrow x=\frac{25}{8}$$

۸- گزینهٔ ۳ با اعداد ۵، ۵ و ۷ می‌توان تنها یک مثلث رسم کرد؛ زیرا $7<5+5$. حالا اگر دوتا از این مثلث‌ها را که در ضلع به طول ۷ مشترک‌اند رسم کنیم، لوزی موردنظر را رسم کرده‌ایم.



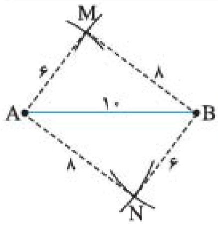
۹- گزینهٔ ۴ شکل مقابل نشان می‌دهد این چهارضلعی نه لوزی است، نه مستطیل و نه ذوزنقه. توضیح بیشتر آن‌که در این چهارضلعی:



- همهٔ ضلع‌ها با هم برابر نیستند، پس لوزی نیست.
- ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر نیستند، پس مستطیل نیست.

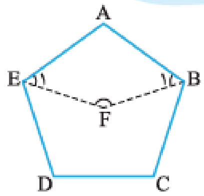
$\hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ$ (به دلیل برقراری رابطهٔ فیثاغورس در دو مثلث MAB و NAB)، یعنی دو زاویهٔ روبه‌رو با هم برابرند، پس ذوزنقه نیست.

۱۰- گزینهٔ ۳ در چهارضلعی $AMBN$ طول ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. از طرفی در مثلث MAB رابطهٔ فیثاغورس برقرار است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است. متوازی‌الاضلاعی که زاویهٔ قائمه داشته باشد، مستطیل است؛ پس مساحت $AMBN$ می‌شود: $AM.BM=۶\times۸=۴۸$



آزمون ۲

۱۱- گزینهٔ ۴ هر زاویهٔ داخلی پنج‌ضلعی منتظم برابر است با:



$$\frac{(۵-۲)\times۱۸۰^\circ}{۵}=۱۰۸^\circ$$

پس در چهارضلعی $ABFE$ داریم:

$$\hat{A}=۱۰۸^\circ \text{ و } \hat{B}_1=\hat{E}_1=\frac{۱۰۸^\circ}{۲}=۵۴^\circ$$

از طرفی:

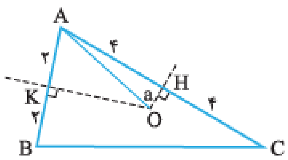
$$\hat{A}+\hat{B}_1+\hat{F}+\hat{E}_1=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰۸^\circ+۵۴^\circ+\hat{F}+۵۴^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{F}=۱۴۴^\circ$$

۱۲- گزینهٔ ۳ مجموع زاویه‌های داخلی هر n‌ضلعی محدب $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ و مجموع زاویه‌های خارجی آن ۳۶۰° است، پس:

$$(n-۲)\times۱۸۰^\circ=۶\times۳۶۰^\circ \Rightarrow n-۲=۶\times۲ \Rightarrow n=۱۴$$

۱۳- گزینهٔ ۲ شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض $OH=a$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



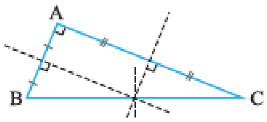
$$AO=\sqrt{a^۲+۱۶}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOK از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$OK=\sqrt{OA^۲-AK^۲}$$

$$\Rightarrow OK=\sqrt{(a^۲+۱۶)-۴}=\sqrt{a^۲+۱۲}$$

۱۴- گزینهٔ ۲ اگر $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$، آن‌گاه با افزودن $\hat{A}$ به دو طرف این معادله داریم:

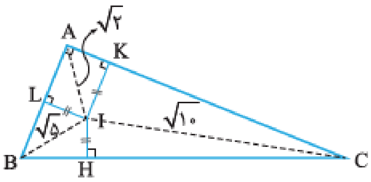


$$۲\hat{A}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow ۲\hat{A}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

یعنی مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و BC وتر آن است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، وسط ضلع وتر است.

۱۵- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل نقطهٔ I نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است.



می‌دانیم نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؛ یعنی $IH=IK=IL=x$. از طرفی چهارضلعی $AKIL$ یک مستطیل است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه‌اند، پس مربع است.

پس $IK=AK=x$. حالا در مثلث AKI داریم:

$$AI^۲=IK^۲+AK^۲ \Rightarrow (\sqrt{۲})^۲=x^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow x=۱ \Rightarrow LI=AL=x=۱$$

در مثلث BIL داریم:

$$BL^۲+LI^۲=BI^۲ \Rightarrow BL^۲+x^۲=(\sqrt{۵})^۲$$

$$\Rightarrow BL^۲+۱=۵ \Rightarrow BL=۲$$

$$\Rightarrow AB=AL+BL=۱+۲=۳$$

۱۶- گزینهٔ ۲ از آن‌جا که AB بزرگ‌ترین ضلع است، داریم:

$$AB>AC \Rightarrow \hat{C}>\hat{B}$$

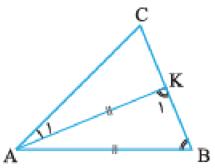
$$AB>BC \Rightarrow \hat{C}>\hat{A}$$

با جمع طرفین دو نامعادله داریم:

$$۲\hat{C}>\hat{B}+\hat{A} \xrightarrow{+\hat{C}} ۳\hat{C}>\hat{B}+\hat{A}+\hat{C}$$

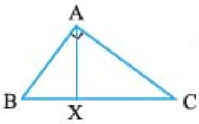
$$\Rightarrow ۳\hat{C}>۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}>۶۰^\circ$$

۱۷- گزینهٔ ۱ شکل مناسب را رسم می‌کنیم. مثلث ABK متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B}=\hat{K}_1$. از طرفی K_1 برای مثلث ACK یک زاویهٔ خارجی است، پس $\hat{K}_1>\hat{C}$؛ بنابراین $\hat{B}>\hat{C}$ و در نتیجه $AC>AB$.



۱۸- گزینهٔ ۲ نقیض گزارهٔ «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۳۶۰° نیست.» می‌شود: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۳۶۰° نیست.» یا به بیان دیگر «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است.»

۱۹- گزینهٔ ۳ فرض کنیم $A\hat{X}B=90^\circ$، در این صورت:



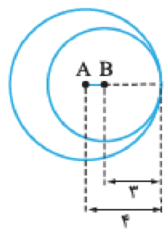
$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \hat{B}+\hat{C}=90^\circ \\ \overset{\Delta}{AXC} \xrightarrow{\hat{X}=90^\circ} C\hat{A}X+\hat{C}=90^\circ\end{cases} \Rightarrow C\hat{A}X=\hat{B} \quad (*)$$

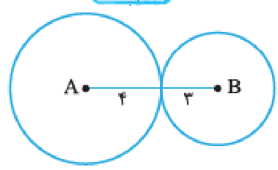
که (*) با فرض مسئله در تناقض است، پس $A\hat{X}B=90^\circ$ باطل است یا $A\hat{X}B\neq 90^\circ$. در مورد (۱) و (۲) هم دقت کنید که $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر وضعیتی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند و لزومی ندارد $\hat{B}$ بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $\hat{C}$ باشد.

۲۰- گزینهٔ ۴ در (۴) عکس قضیه به این صورت است: «اگر نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های یک مثلث داخل آن نباشد، آن مثلث دارای زاویهٔ منفرجه است». برای رد این حکم می‌توان مثلث قائم‌الزاویه را به عنوان مثال نقض در نظر گرفت که نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های آن داخل مثلث نیست (روی محیط آن است یا به بیان دقیق‌تر رأس قائمهٔ مثلث است) ولی مثلث دارای زاویهٔ منفرجه نیست.

آزمون ۳

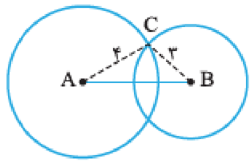
۲۱- گزینهٔ ۲ روش ۱ دو شکل زیر را ببینید:





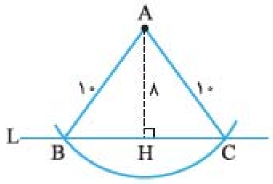
اگر $AB=1$ یا $AB=7$، دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۳ با دایرهٔ به مرکز B و شعاع ۴ تنها یک نقطهٔ مشترک دارند، پس اگر $1<AB<7$ این دو دایره در دو نقطه متقاطع هستند، به عبارت دیگر دو نقطه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ و از B به فاصلهٔ ۴ است.

روش ۲ نقاطی که از A به فاصلهٔ ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ قرار دارند و نقاطی که از B به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ قرار دارند. حالا اگر این دو دایره در دو نقطه متقاطع باشند، با توجه به شکل می‌توان گفت که $AC=4$ و $BC=3$ دو ضلع از مثلث ABC هستند، در این صورت:



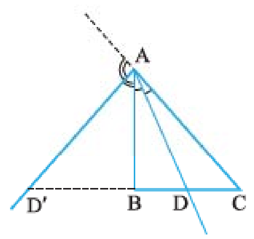
$$|AC-BC|<AB<AC+BC \Rightarrow 1<AB<7$$

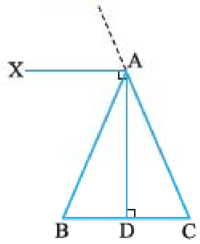
۲۲- گزینهٔ ۳ دو نقطهٔ B و C از تقاطع دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۰ با خط L به دست می‌آیند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $AB=2\times5$ وتر و $AH=2\times4$، یک ضلع زاویهٔ قائمه است؛ پس ضلع دیگر زاویهٔ قائمه می‌شود $BH=2\times3=6$؛ بنابراین $BC=2BH=12$. حالا داریم:



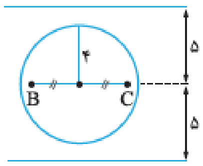
$$S(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}\times8\times12=48$$

۲۳- گزینهٔ ۴ نقاطی که از AB و AC به یک فاصله هستند، در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A هستند. با توجه به شکل، D و D′ نقاط موردنظر هستند، اما اگر در مثلث ABC، $AB=AC$، آن‌گاه نیمساز خارجی زاویهٔ A با BC موازی است و امتداد آن را قطع نمی‌کند. (دقت کنید AX و BC هر دو بر AD عمودند، پس با هم موازی‌اند.)

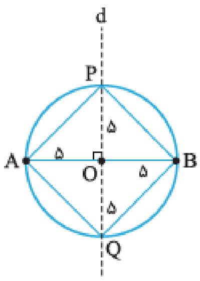




۲۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید در مثلث ABC داریم $BC=3$، $AM=4$ و $AH=5$. ابتدا پاره‌خط $BC=3$ را رسم می‌کنیم. از $AM=4$ نتیجه می‌شود رأس A روی دایره‌ای به مرکز وسط BC و شعاع ۴ قرار دارد. از $AH=5$ نتیجه می‌شود A روی دو خط موازی با BC و فاصلهٔ ۵ از آن قرار دارد. با توجه به شکل، این دایره با این دو خط نقطهٔ مشترک ندارد، پس چنین مثلثی وجود ندارد.



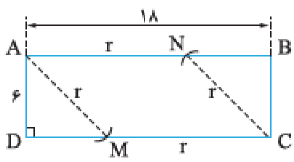
۲۵- گزینهٔ ۴ با توجه به صورت سؤال، شکل را رسم می‌کنیم.



در چهارضلعی APBQ قطرها با هم برابر و عمودمنصف هم هستند. پس این چهارضلعی مربعی به قطر ۱۰ است و مساحت آن می‌شود:

$$S=\frac{AB^2}{2}=\frac{10^2}{2}=\frac{100}{2}=50$$

۲۶- گزینهٔ ۱ طول ضلع لوزی که همان شعاع کمان‌های رسم‌شده است را r در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل اگر $AM=r$ و AMCN لوزی باشد، از $CD=18$ نتیجه می‌گیریم $DM=18-r$، پس در مثلث ADM داریم:

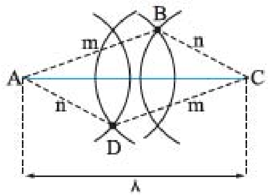


$$\hat{D}=90^\circ \Rightarrow AM^2=AD^2+DM^2 \Rightarrow r^2=6^2+(18-r)^2$$

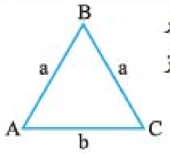
$$\Rightarrow r^2-(18-r)^2=36 \Rightarrow (r-18+r)(r+18-r)=36$$

$$\Rightarrow 18(2r-18)=36 \Rightarrow r=10$$

۲۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را m و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را n در نظر می‌گیریم. برای آن‌که متوازی‌الاضلاع قابل رسم باشد، باید کمانی که از A به شعاع m رسم می‌شود با کمانی که از C به شعاع n رسم می‌شود متقاطع باشد؛ یا به عبارت دیگر مثلث ABC به طول ضلع‌های m، n و ۸ قابل رسم باشد، یعنی باید: $n+۸>m$ و $m+۸>n$ و $m+n>۸$ که مقادیر (۲) در هر سه نامساوی صدق می‌کند.



۲۸- گزینهٔ ۳ قاعدهٔ مثلث را b در نظر می‌گیریم، با توجه به فرض $۲a+b=۲p$. از طرفی داریم:



$$AB+BC>AC \Rightarrow a+a>b$$

$$\Rightarrow b-a<a \xrightarrow{+۲a} b-a+۲a<a+۲a$$

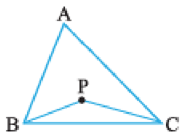
$$\Rightarrow ۲p<۴a \Rightarrow \frac{۱}{۲}p<a \quad (*)$$

$$AB+AC>BC \Rightarrow a+b>a \xrightarrow{+a} a+b+a>a+a$$

$$\Rightarrow ۲p>۲a \Rightarrow a<p \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \frac{۱}{۲}p<a<p$$

۲۹- گزینهٔ ۳ اگر از نقطهٔ P درون مثلث ABC به دو رأس B و C وصل کنیم، آن‌گاه $BC<PB+PC<AB+AC$.



با توجه به این نکته، در این سؤال $\underbrace{BC<PB+PC<۷}_{(*)}$. از طرف در مثلث ABC داریم:

$|AC-AB|<BC<AB+AC$ ، یعنی $\underbrace{۱<BC<۷}_{(**)}$ اگر هر دو رابطهٔ (*) و (**) را در نظر بگیریم، برای نقطهٔ P داریم:

$$۱<PB+PC<۷$$

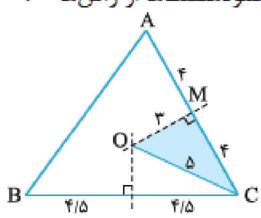
۳۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی هر nضلعی محدب ۳۶۰° است، پس هر nضلعی محدب حداکثر می‌تواند سه زاویهٔ منفرجهٔ خارجی داشته باشد (اگر سه بشود چهار، مجموع چهار زاویهٔ بیشتر از ۹۰°، بیشتر از ۳۶۰° می‌شود). زاویهٔ منفرجهٔ خارجی یعنی زاویهٔ حادهٔ داخلی (مجموع زاویهٔ داخلی و زاویهٔ خارجی ۱۸۰° است)، پس هر nضلعی محدب، حداکثر سه زاویهٔ حادهٔ داخلی دارد.

۳۱- گزینهٔ ۱ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس:

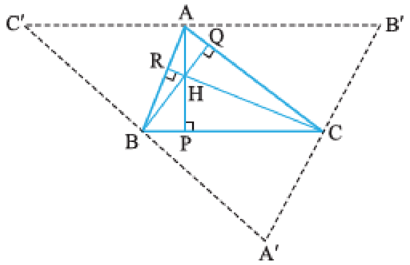
$$m-۲=۲m-۹ \Rightarrow m=۷$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از رأس‌ها} = m-۲=۵$$

حالا با توجه به شکل، بنا به قضیهٔ فیثاغورس می‌توان گفت در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCM داریم $OM=۳$، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از وسط ضلع متوسط ۳ است.



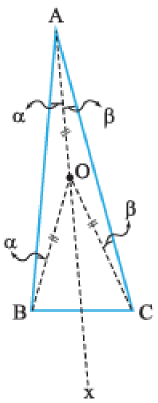
۳۲- گزینهٔ ۲



مطابق شکل چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس $AB'=BC$. چهارضلعی $ACBC'$ هم متوازی‌الاضلاع است، پس $AC'=BC$. نتیجه آن‌که $AB'=AC'$؛ به عبارت دیگر A وسط $B'C'$ است. از طرفی BC با $B'C'$ موازی است و AP بر BC عمود است، پس AP در نقطهٔ A که وسط $B'C'$ است، بر آن عمود است. به عبارت دیگر AP عمودمنصف $B'C'$ است.

با نظیر همین استدلال می‌توان ثابت کرد BQ عمودمنصف $A'C'$ و CR عمودمنصف $A'B'$ است. پس H می‌شود نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث $A'B'C'$.

۳۳- گزینهٔ ۴ اگر $\hat{A}=۲۰^\circ$ و $\hat{C}=۸۵^\circ$، آن‌گاه $\hat{B}=۷۵^\circ$. با توجه به شکل اگر O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها باشد، از سه رأس مثلث به یک فاصله است و داریم:



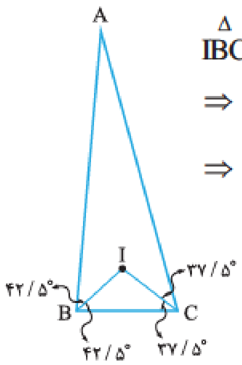
$B\hat{O}x=۲\alpha$: زاویهٔ خارجی

$C\hat{O}x=۲\beta$: زاویهٔ خارجی

$$\Rightarrow B\hat{O}C=B\hat{O}x+C\hat{O}x=۲\alpha+۲\beta$$

$$=۲(\alpha+\beta)=۲\hat{A}=۴۰^\circ$$

اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی باشد، داریم:



$$\overset{\triangle}{IBC}: B\hat{I}C+۴۲/۵^\circ+۳۷/۵^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{I}C=۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{B\hat{I}C}{B\hat{O}C}=\frac{۱۰۰^\circ}{۴۰^\circ}=۲/۵$$

۳۴- گزینهٔ ۲ از $\hat{A}+\hat{C}=۲\hat{B}$ نتیجه می‌شود $\hat{B}=\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}$، یعنی $\hat{B}$ میانگین $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است؛ پس بین $\hat{A}$ و $\hat{C}$ قرار دارد، یعنی با در نظر گرفتن $\hat{A}<\hat{C}$ داریم:

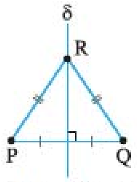
$$\hat{A}<\hat{B}<\hat{C} \quad (*)$$

از آن‌جا که ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر، از (*) نتیجه می‌گیریم: $BC<AC<AB$

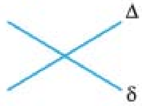
۳۵- گزینهٔ ۱ نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث، داخل آن مثلث قرار می‌گیرند، پس نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی هم همیشه داخل مثلث است، پس ۱ همیشه درست است.
به عنوان مثال نقض برای ۲ مثلثی با زاویهٔ منفرجه را در نظر بگیرید که نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های آن بیرون مثلث است.
به عنوان مثال نقض برای ۳ مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید که نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های آن وسط وتر مثلث است.
به عنوان مثال نقض برای ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که ارتفاع‌های آن همان نیمسازهای زاویه‌های مثلث هستند، لذا نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، همان نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌ها است که از هر سه ضلع به یک فاصله است.

آزمون ۲۵

۲۹۶- گزینهٔ ۳ اگر PQ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین PQR باشد، در این صورت R روی عمودمنصف PQ قرار دارد. (شکل را نگاه کنید.)



پس با توجه به صورت سؤال، می‌توان گفت که رأس دیگر مثلث، نقطهٔ مشترک Δ و عمودمنصف PQ است، سه حالت امکان‌پذیر است:



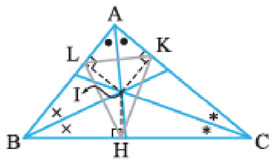
عمودمنصف PQ با Δ متقاطع باشد.
(۱)

عمودمنصف PQ با Δ موازی باشد.
(۲)

عمودمنصف PQ همان Δ باشد.
(۳)

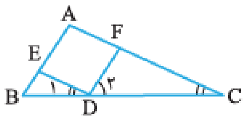
در حالت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب یک، صفر و بی‌شمار جواب برای مسئله به دست می‌آید.

۲۹۷- گزینهٔ ۱ مطابق شکل، نقطهٔ I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است، بنابراین از سه ضلع آن به یک فاصله است، یعنی اگر از I عمودهای IH، IK و IL را به ترتیب بر BC، AC و AB وارد کنیم، آن‌گاه $IH = IK = IL$ و این نشان‌دهندهٔ آن است که نقطهٔ I از سه رأس مثلث HKL به یک فاصله است، بنابراین I نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث HKL است.



۲۹۸- گزینهٔ ۱ $AC = 2AB = 12 \Rightarrow AC = 12,\ AB = 6$

$AB < AC$، پس: $\hat{B} > \hat{C}$.



همچنین بنا بر فرض نتیجه می‌گیریم که در شکل روبه‌رو، چهارضلعی AEDF، متوازی‌الاضلاع است و طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{D}_1 = \hat{C}$ و $\hat{D}_2 = \hat{B}$.

بنابراین:

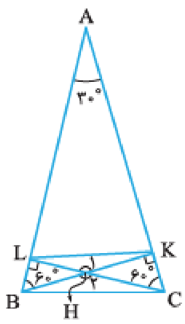
$$\begin{cases} AE = DF \ ,\ AF = DE \\ \overset{\Delta}{BDE}: \hat{D}_1 < \hat{B} \Rightarrow BE < DE \end{cases}$$

لذا داریم: $BE + AE < DE + DF \Rightarrow AB < DE + DF$

به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که: $DE + DF < AC$

پس: $AB < DE + DF < AC \Rightarrow 6 < DE + DF < 12$

۲۹۹- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABK و ACL، یکی از زاویه‌های حاده ۳۰° است، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر ۶۰° است، یعنی $A\hat{B}K = A\hat{C}L = 60^\circ$. داریم:

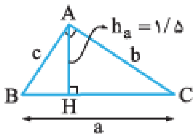


$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BHL}: \sin 60^\circ = \dfrac{HL}{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \overset{\Delta}{CHK}: \sin 60^\circ = \dfrac{HK}{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{HL}{BH} = \frac{HK}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\hat{H}_1 = \hat{H}_2} \overset{\Delta}{HKL} \sim \overset{\Delta}{HCB}$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BC}{KL} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت خواسته‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:



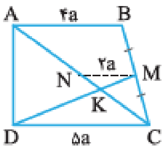
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{(bc)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(b.c)^2} = (\frac{a}{b.c})^2$$

از طرفی می‌دانیم $a.h_a = b.c = 2S$، بنابراین:

$$(\frac{a}{b.c})^2 = (\frac{a}{a.h_a})^2 = \frac{1}{h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = (\frac{1}{1/5})^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

۳۰۱- گزینهٔ ۴ از نقطهٔ M خطی به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم کنیم تا AC را در نقطهٔ N قطع کند.



$MN \parallel AB$

$$\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{قضیهٔ}} \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{BC} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$5AB = 4CD \Rightarrow \begin{cases} AB = 4a \\ CD = 5a \end{cases} \xrightarrow{(*)} MN = 2a$$

همچنین: $\overset{\Delta}{MKN} \sim \overset{\Delta}{CKD} \ ,\ \dfrac{MN}{CD} = \dfrac{NK}{CK} = \dfrac{2}{5}$

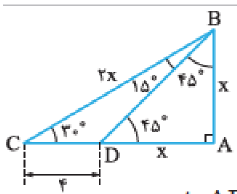
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MKN}}}{S_{\overset{\Delta}{CKD}}} = (\frac{2}{5})^2 \quad (**)$$

از طرفی داریم: $\dfrac{S_{\overset{\Delta}{MKN}}}{S_{\overset{\Delta}{MKC}}} = \dfrac{NK}{CK} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MKN}} = \dfrac{2}{5} S_{\overset{\Delta}{MKC}}$

حال با توجه به رابطهٔ (**) داریم:

$$\frac{\frac{2}{5} S_{\overset{\Delta}{MKC}}}{S_{\overset{\Delta}{CKD}}} = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MKC}}}{S_{\overset{\Delta}{CKD}}} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{25} = \frac{2}{5} = 0/4$$

۳۰۲- گزینهٔ ۴ درنظر می‌گیریم $AB = x$، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $\hat{C} = 30^\circ$



$$\Rightarrow BC = 2AB \Rightarrow BC = 2x$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABD داریم:

$$AD = AB \Rightarrow AD = x$$

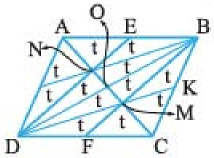
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$A\hat{B}C = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow x + 4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x)$$

$$\Rightarrow x + 4 = \sqrt{3}x \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = 2(\sqrt{3} + 1)$$

۳۰۳- گزینهٔ ۳ قطر BD را رسم می‌کنیم:



از آن‌جا که AO و DE به ترتیب BD و AB را نصف می‌کنند، نقطهٔ N همرسی میانه‌های مثلث ABD بوده و در نتیجه BN نیز AD را نصف می‌کند. به طریق مشابه نقطهٔ M نیز نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث BCD است. لذا مساحت تمامی ۱۲ مثلث ایجادشده با یکدیگر برابر است. حال اگر مساحت هر کدام از آن‌ها را t درنظر بگیریم، داریم:

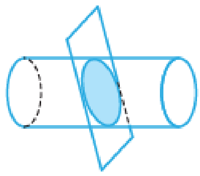
$$\begin{cases} S_{BMNE}=۳t \\ S_{BMDN}=۴t \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{BMNE}}{S_{BMDN}}=\frac{۳t}{۴t}=۰/۷۵$$

۳۰۴- گزینهٔ ۴ داریم $S=\frac{b}{۲}+i-۱$. از طرفی طبق فرض $b=۶i$. پس:

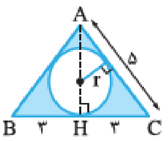
$$S=\frac{۶i}{۲}+i-۱ \Rightarrow S=۴i-۱ \Rightarrow i=\frac{S+۱}{۴}$$

از آن‌جا که i عددی صحیح است، تنها ۴، یعنی $S=۷$ می‌تواند قابل‌قبول باشد.

۳۰۵- گزینهٔ ۳ مقطع یک استوانهٔ کامل با صفحهٔ مایلی که از قاعده‌های آن عبور نکند، یک بیضی است، پس اگر استوانه به نیم‌استوانه تبدیل شود، مقطع حاصل یک نیم‌بیضی، یعنی قسمتی از یک بیضی خواهد بود.



۳۰۶- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، طول AH برابر با ۴ خواهد بود و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر است با:



$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AB+AC+BC}{۲}}=\frac{۴\times۶}{۵+۵+۶}=\frac{۳}{۲}$$

حجم شکل حاصل از دوران $\overset{\Delta}{ABC}$ حول AH برابر است با:

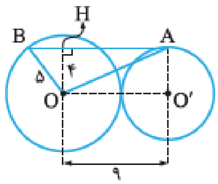
$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi.CH^۲.AH=\frac{۱}{۳}\pi\times۹\times۴=۱۲\pi$$

حجم شکل حاصل از دوران دایرهٔ حول AH برابر است با:

$$V_۲=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳=\frac{۹}{۲}\pi=۴/۵\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم شکل موردنظر}: V=V_۱-V_۲$$
$$=۱۲\pi-۴/۵\pi=۷/۵\pi$$

۳۰۷- گزینهٔ ۴ از آن‌جا که $OO'=R+R'$ دو دایرهٔ مماس خارج هستند. با توجه به شکل، داریم:



$$\overset{\Delta}{BOH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH=۳$$

$$\overset{\Delta}{OAO'} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA=\sqrt{۸۱+۱۶}=\sqrt{۹۷}$$

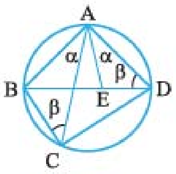
پس اضلاع مثلث OAB عبارت‌اند از:

$$OA=\sqrt{۹۷}\ ,\ OB=۵\ ,\ AB=AH+BH=۱۲$$

$$\Rightarrow \text{محیط}\ \overset{\Delta}{OAB}=۱۲+۵+\sqrt{۹۷}=۱۷+\sqrt{۹۷}$$

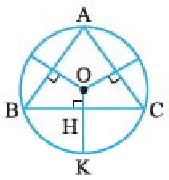
$$\xrightarrow{۹<\sqrt{۹۷}<۱۰} ۲۶<\text{محیط}\ \overset{\Delta}{OAB}<۲۷$$

۳۰۸- گزینهٔ ۲ مطابق شکل دو زاویهٔ محاطی ACB و ADB هر دو روبه‌روی کمان AB هستند، پس با هم برابرند. از آن‌جا که دو مثلث ABC و AED یک جفت زاویهٔ برابر دارند، با هم متشابه‌اند و داریم:

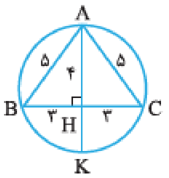


$$\underbrace{\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}}_{AB.AD=AE.AC}=\frac{BC}{ED}$$

۳۰۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل اگر از مرکز دایرهٔ محیطی به ضلع بزرگ‌تر این مثلث عمود کنیم و امتداد دهیم تا این عمود دایرهٔ محیطی را قطع کند، فاصلهٔ بین پای این عمود و نقطهٔ تقاطع آن با دایرهٔ محیطی، جواب سؤال است (یعنی طول پاره‌خط HK).



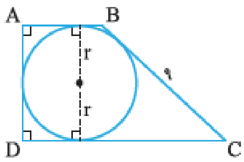
برای محاسبهٔ HK ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث متساوی‌الساقین را رسم می‌کنیم بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، طول AH می‌شود ۴. برای دو وتر AK و BC داریم:



$$AH.HK=BH.HC$$

$$\Rightarrow ۴HK=۳\times۳ \Rightarrow HK=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۳۱۰- گزینهٔ ۳ می‌دانیم مساحت یک چندضلعی محیطی با طول شعاع دایرهٔ محاطی r و محیط ۲P برابر است با:



$$S=r.P \qquad (*)$$

از طرفی در چهارضلعی محیطی، مجموع طول اضلاع مقابل با هم برابر است، در نتیجه:

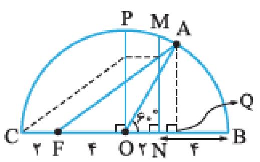
$$۲P=۲(AD+BC)=۲(۲r+۹) \Rightarrow P=۲r+۹$$

حال بنا بر رابطهٔ (*) نتیجه می‌شود:

$$۴۵=r(۹+۲r) \Rightarrow ۲r^۲+۹r-۴۵=۰$$
$$\Rightarrow (r-۳)(۲r+۱۵)=۰ \Rightarrow r=۳$$

۳۱۱- گزینهٔ ۲ تصویر هر خط تحت هر یک از تبدیل‌های انتقال و تجانس، با خود آن خط موازی است و نمی‌تواند بر آن عمود باشد. اما تصویر خط d تحت یک دوران ۹۰° یا بازتاب نسبت به محوری که با d زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، بر d عمود است.

۳۱۲- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، C را در راستای برداری به طول ۲، عمود بر MN و OP منتقل می‌کنیم تا F به دست آید. طول کوتاه‌ترین مسیر موردنظر برابر با مجموع طول AF و CF است.



$$OA=OB=۲+۴=۶ \ \ (\text{شعاع نیم‌دایره})$$

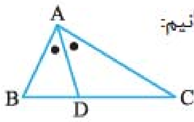
$$\overset{\triangle}{AOQ}: \begin{cases} AQ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \Rightarrow AQ = ۳\sqrt{۳} \\ OQ = \frac{۱}{۲}OA \Rightarrow OQ = ۳ \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{AFQ}: AF = \sqrt{AQ^۲ + FQ^۲}$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{۲۷+۴۹} = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$\Rightarrow AF + CF = ۲\sqrt{۱۹} + ۲ = ۲(\sqrt{۱۹}+۱)$$

۳۱۳- گزینهٔ ۱ از قضیهٔ نیمساز داخلی می‌دانیم:



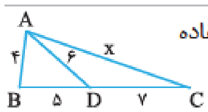
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (*)$$

و از قضیهٔ سینوس‌ها می‌دانیم:

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{BD}{CD} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}$$

۳۱۴- گزینهٔ ۱ از قضیهٔ استوارت استفاده می‌کنیم:



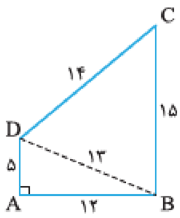
$$BD.AC^۲ + CD.AB^۲ = BC.BD.CD + BC.AD^۲$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + ۷\times۱۶ = ۱۲\times۵\times۷ + ۱۲\times۶^۲$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ = ۴(۱۰۵+۱۰۸-۲۸) \Rightarrow ۵x^۲ = ۴\times۱۸۵$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴\times۳۷ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳۷}$$

۳۱۵- گزینهٔ ۱ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD نتیجه می‌گیریم که: $BD = ۱۳$



با استفاده از قضیهٔ هرون در مثلث BCD، داریم:

$$P = \frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲} = ۲۱$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \sqrt{۲۱\times(۲۱-۱۳)+(۲۱-۱۴)\times(۲۱-۱۵)} = ۸۴$$

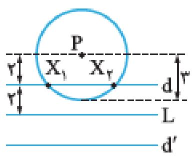
از طرفی:

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲}AB.AD = \frac{۱}{۲}\times۱۲\times۵ = ۳۰$$

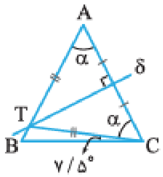
$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} + S_{\overset{\triangle}{BCD}} = ۳۰+۸۴ = ۱۱۴$$

آزمون ۲۶

۳۱۶- گزینهٔ ۳ نقاطی که از P به فاصلهٔ ۳ واحد هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳ قرار دارند و نقاطی که از L به فاصلهٔ ۲ هستند، تشکیل دو خط موازی با L و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌دهند که با توجه به شکل، دو نقطهٔ $X_۱$ و $X_۲$ شرایط مسئله را دارا هستند.



۳۱۷- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، T روی عمودمنصف AC واقع است، پس $TA = TC$ و $\hat{A} = A\hat{C}T$.

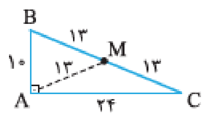


از طرفی: $\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$

$$\xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{A} + ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + ۲(\alpha + ۷/۵^\circ) = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\alpha + ۱۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۱۶۵ \Rightarrow \alpha = ۵۵^\circ$$

۳۱۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل و اندازهٔ اضلاع داریم:



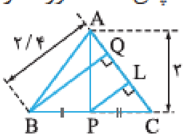
$$۲۶^۲ = ۲۴^۲ + ۱۰^۲ \Rightarrow BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، محل تلاقی ارتفاع‌ها، رأس قائمه (نقطهٔ A) و محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع، وسط وتر (نقطهٔ M) است. هم‌چنین می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است؛ بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A تا M برابر است با:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}\times۲۶ = ۱۳$$

۳۱۹- گزینهٔ ۳ طول دو ارتفاع با هم برابر است، پس مثلث موردنظر متساوی‌الساقین است. از پای ارتفاع وارد بر قاعده، عمودی بر یکی از ساق‌ها وارد می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$\overset{\triangle}{BCQ} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PL}{BQ} = \frac{PC}{BC} \Rightarrow \frac{PL}{۲/۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow PL = ۱/۲$$

$$\overset{\triangle}{ALP} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AL = \sqrt{AP^۲ - PL^۲} = \sqrt{۲^۲ - (\frac{۶}{۵})^۲}$$

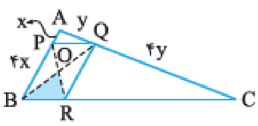
$$= \sqrt{\frac{۶۴}{۲۵}} = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

$$\overset{\triangle}{APC}: PL^۲ = AL.CL \Rightarrow (\frac{۶}{۵})^۲ = (\frac{۸}{۵}).CL \Rightarrow CL = ۰/۹$$

$$\Rightarrow AC = AL + CL = ۲/۵$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BQ.AC = \frac{۱}{۲}\times۲/۴\times۲/۵ = ۳$$

۳۲۰- گزینهٔ ۳ مثلث‌های APQ و CQR به ترتیب با نسبت‌های $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ با مثلث ABC متشابه‌اند، پس داریم:



$$S_{BPQR} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{APQ}} - S_{\overset{\triangle}{CQR}}$$

$$= S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (\frac{۱}{۵})^۲ S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (\frac{۴}{۵})^۲ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۸}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OBR}} = \frac{۱}{۴} S_{BPQR} = \frac{۲}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{APQ}}}{S_{\overset{\triangle}{OBR}}} = \frac{\frac{۱}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۲}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱}{۲}$$