

# دهم هندسه پایا

(ریاضی فیزیک)



- ▲ درس نامه کامل
- ▲ پرسش های چهارگزینه ای (تألیفی و کنکور و مسابقات)
- ▲ پاسخ نامه تشریحی با نکته های کلیدی
- ▲ برای داوطلبان رشته های برتر دانشگاه های مشهور

حمیدرضا بیات  
مرتضی خمایی ابدی  
کیان کریمی خراسانی

---



## پیشگفتار

### دانش آموزان گرامی

ورود شما را به دوره دوم متوسطه تبریک می‌گوییم. این دوره شما را برای زندگی و کار در جامعه و تحصیل در دوره‌های بالاتر آماده می‌کند. اگر بگوییم آینده شغلی شما بستگی به موفقیت تحصیلی شما در این دوره سه‌ساله دارد، اغراق نکرده‌ایم. شما برای موفقیت در این دوره باید تلاش کنید و از مشاوران و معلمان و کتاب‌های مناسب برخوردار شوید.

ما در انتشارات مبتکران، بسیار خرسندیم که کتاب هندسه دهم را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب که از مجموعه کتاب‌های «اقیانوس تست و نکته» به حساب می‌آید، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کنند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی به رشته تحریر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های مهندسی یا علوم پایه دانشگاه‌های به‌نام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. این کتاب شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها آماده می‌کند.

مؤلفان، پس از ارائه درسنامه مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه‌های آزمایشی ریاضی و تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفاده طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند. مطالعه پاسخ‌نامه تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

گفتنی است در این کتاب از آیکون‌های زیر استفاده شده است:

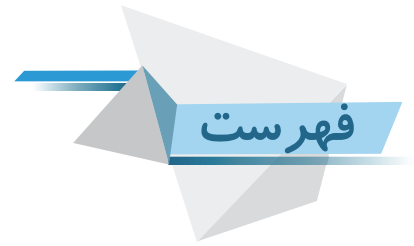
★ - به معنی اینکه سؤال دشوار است.

✉ - به معنی اینکه پاسخ سؤال دارای نکته‌ای کلیدی است.

VIT - به معنی اینکه سؤال مهم و پرتکرار است.

در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه، آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم. همچنین از خانم‌ها حمیده نوروزی و سمیه آهنگر که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب، و خانم رضیه صفریان که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدایی که زحمت طراحی جلد را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران



۷	فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
۸	ترسیم‌های هندسی
۱۰	رسم مثلث
۱۳	رسم چندضلعی
۱۴	استدلال
۱۷	برهان خلف
۱۹	مثال نقض
۲۰	عمودمنصف و هم‌مرسی عمودمنصف‌ها
۲۲	ارتفاع و هم‌مرسی ارتفاع‌ها
۲۴	نیمساز و هم‌مرسی نیمسازها
۲۷	نابرابری هندسی
۲۹	هم‌نهشتی مثلث‌ها
۳۱	مثلث متساوی‌الساقین
۳۶	پاسخنامه فصل اول
۶۷	فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
۶۸	نسبت و تناسب
۷۰	قضیه تالس و عکس قضیه تالس
۷۷	مساحت و قضیه تالس
۸۰	نیمسازها و تالس
۸۲	حالت‌های تشابه دو مثلث
۸۹	تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه
۹۱	مسائل تشابه
۹۵	نسبت محیط و اجزاء متناظر مثلث‌های متشابه
۹۷	نسبت مساحت مثلث‌های متشابه
۱۰۱	تشابه چندضلعی‌ها
۱۰۴	پاسخنامه فصل دوم
۱۴۵	فصل سوم: چندضلعی‌ها
۱۴۶	چندضلعی‌ها
۱۴۷	متوازی‌الاضلاع

عنوان	صفحه
مستطیل	۱۵۰
لوزی	۱۵۳
مربع	۱۵۵
ذوزنقه و کایت	۱۵۷
چهارضلعی‌های نامشخص	۱۶۰
پاره‌خط‌های میانگین در مثلث، ذوزنقه و دیگر چهارضلعی‌ها	۱۶۳
میانه در مثلث قائم‌الزاویه	۱۶۸
به‌دست آوردن مساحت مثلث به کمک قضیه فیثاغورس	۱۶۹
نسبت ارتفاع‌ها به نسبت عکس اضلاع	۱۷۳
قضیه هرون	۱۷۴
نسبت طول‌ها و مساحت	۱۷۵
مساحت در مثلث متساوی‌الاضلاع	۱۷۸
همرسی میانه‌ها	۱۸۰
میانه و مساحت	۱۸۲
مساحت در متوازی‌الاضلاع	۱۸۵
مساحت در مستطیل	۱۸۸
مساحت در مربع	۱۹۳
مسئله‌های ترکیبی از مربع و مثلث در مساحت	۱۹۶
مساحت در لوزی	۲۰۰
مساحت در ذوزنقه	۲۰۱
مساحت در کایت و چهارضلعی نامشخص	۲۰۸
مجموع فاصله‌های یک نقطه	۲۱۰
فرمول بیک	۲۱۴
پاسخنامه فصل سوم	۲۱۶
<b>فصل چهارم: تجسم فضایی</b>	<b>۲۷۹</b>
خط، نقطه و صفحه	۲۸۰
چندوجهی‌ها	۲۸۶
تفکر تجسمی	۲۹۰
سطح مقطع (برش یک حجم توسط یک صفحه)	۲۹۳
دوران حول محور	۲۹۶
پاسخنامه فصل چهارم	۲۹۸
<b>پاسخنامه کلیدی</b>	<b>۳۱۵</b>
<b>پرسش‌های آزمون سراسری سال ۹۸</b>	<b>۳۲۱</b>
<b>پرسش‌های آزمون سراسری سال ۹۹</b>	<b>۳۲۵</b>

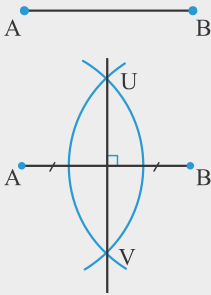


# فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

## ترسیم‌های هندسی

**مثال** عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  را رسم کنید.



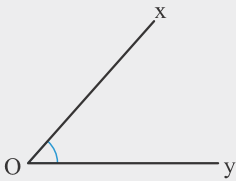
**پاسخ** - دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف  $AB$  باز می‌کنیم.

- یک بار از نقطه  $A$  و یک بار از نقطه  $B$  کمان می‌زنیم.

- این دو کمان یکدیگر را در نقطه‌های  $U$  و  $V$  قطع می‌کنند.

- خطی که از  $U$  و  $V$  عبور کند، عمودمنصف  $AB$  است.

**مثال** نیمساز زاویه  $xOy$  را رسم کنید.



**پاسخ** - دهانه‌ی پرگار را کمی باز می‌کنیم و به مرکز  $O$  کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط‌های

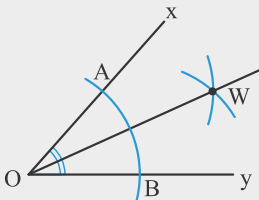
$Ox$  و  $Oy$  را به ترتیب در  $A$  و  $B$  قطع کند.

- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف  $AB$  باز می‌کنیم.

- یک بار به مرکز  $A$  و بار دیگر به مرکز  $B$  کمان بزنیم. دو کمان یکدیگر را در

نقطه‌ای مانند  $W$  قطع می‌کنند.

- نیم‌خط  $OW$  نیمساز  $xOy$  است.



**مثال** از نقطه  $M$  یک عمود بر خط  $d$  رسم کنید.



**پاسخ** - به مرکز  $M$  کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند.

- نقطه  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  است.

- عمودمنصف  $AB$  را رسم می‌کنیم.

- عمودمنصف  $AB$  از  $M$  می‌گذرد و بر  $d$  عمود است.

T

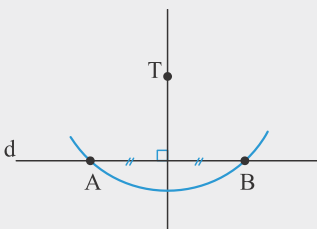
**مثال** از نقطه  $T$  یک عمود بر خط  $d$  رسم کنید.



**پاسخ** - به مرکز  $T$  کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند.

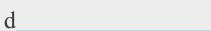
- عمودمنصف  $AB$  را رسم می‌کنیم.

- عمودمنصف  $AB$  از  $T$  می‌گذرد و بر خط  $d$  عمود است.

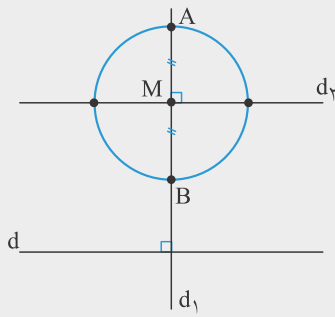


M

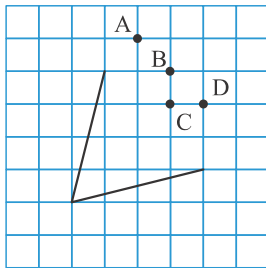
**مثال** خطی موازی با  $d$  رسم کنید که از نقطه  $M$  عبور کند.





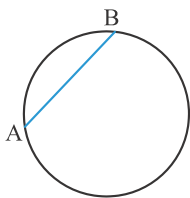


**پاسخ** - از  $M$  خطی عمود بر  $d$  رسم می‌کنیم. این خط را  $d_1$  می‌نامیم.  
 - از  $M$  خطی عمود بر  $d_1$  رسم می‌کنیم. این خط را  $d_2$  می‌نامیم.  
 -  $d_1$  با  $d$  موازی است و از نقطه  $M$  عبور می‌کند.



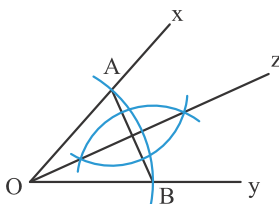
۱. اگر نیمساز زاویه روبه‌رو را رسم کنیم، نیمساز از کدام نقطه می‌گذرد؟

- A (۱)
- B (۲)
- C (۳)
- D (۴)



۲.  $AB$  وتری از یک دایره است. عمودمنصف  $AB$ :

- (۱) کمان  $\widehat{AB}$  را نصف می‌کند.
- (۲) از مرکز دایره عبور می‌کند.
- (۳) هر دو مورد درست است.
- (۴) هیچ‌کدام درست نیستند.



۳. **VIT** مرکز کمان‌ها در شکل روبه‌رو نقاط  $O$ ،  $A$  و  $B$  هستند. در این صورت

- کدام عبارت درست است؟
- الف)  $Oz$  نیمساز  $\widehat{xOy}$  است.
- ب)  $Oz$  عمودمنصف  $AB$  است.
- (۱) الف درست و ب نادرست است.
- (۲) الف نادرست و ب درست است.
- (۳) هر دو درست هستند.
- (۴) هر دو نادرست هستند.

(کنگور)



۴. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط  $AB$ ، نیاز به زدن چند کمان دایره‌ای هست؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۶



۵. می‌خواهیم به کمک رسم عمودمنصف، پاره‌خط روبه‌رو را به ۴ قسمت برابر

تقسیم کنیم. حداقل چند کمان باید ترسیم کنیم؟

- (۱) ۵
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۶. **★** باید یک زاویه  $80^\circ$  درجه را تنها به کمک خط‌کش و پرگار به زاویه‌های  $10^\circ$  درجه تقسیم کنیم. حداقل باید چند بار از پرگار

(کنگور)

استفاده کرد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۸
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۲

۷. نقطه P بیرون از خط  $l$  است. این کارها را انجام می‌دهیم:

- دایره  $C_1$  را به مرکز P رسم می‌کنیم تا خط  $l$  را در نقاط Q و R قطع کند.
- دایره‌های  $C_2$  و  $C_3$  که شعاع‌های برابر دارند و مرکزشان Q و R است، را رسم می‌کنیم تا در نقطه S یکدیگر را قطع کنند.
- P را به S وصل می‌کنیم تا خط  $l'$  به وجود آید.
- دایره  $C_4$  به مرکز P خط  $l'$  را در نقاط M و N قطع می‌کند.
- دایره‌های  $C_5$  و  $C_6$  که شعاع‌های برابر دارند و مرکزشان M و N است، را رسم می‌کنیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند.
- O و P را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا خط  $l''$  به دست آید.

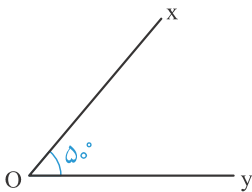
با انجام این مراحل، چه کاری انجام داده‌ایم؟

- (۱) از P خطی عمود بر  $l$  رسم کرده‌ایم.
- (۲) عمود منصف PM را رسم کرده‌ایم.
- (۳) از P خطی موازی  $l$  رسم کرده‌ایم.
- (۴) مثلث متساوی‌الاضلاع PMN را رسم کرده‌ایم.

۸. به کمک خط‌کش و پرگار، چند تا از زاویه‌های  $30^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $90^\circ$  را می‌توان رسم کرد؟

- (۱) ۱ (۱) (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

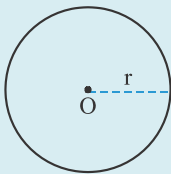
۹. در شکل روبه‌رو،  $\widehat{xOy} = 50^\circ$  است. به کمک این زاویه و خط‌کش و پرگار، چند تا از زاویه‌های  $25^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $100^\circ$  و  $5^\circ$  را می‌توان رسم کرد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

### رسم مثلث

مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه فاصله ثابتی دارند، یک دایره به مرکز آن نقطه است.



**مثال** مثالی رسم کنید که اضلاع آن به ترتیب  $AB = 3$ ،  $BC = 5$  و  $AC = 4$  هستند.

**پاسخ** - ضلع AB را رسم می‌کنیم.

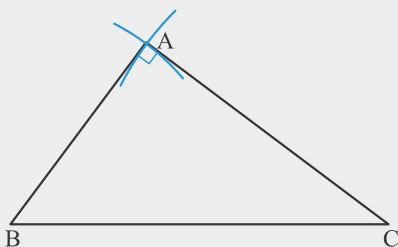
- یک دایره به شعاع ۳ به مرکز B رسم می‌کنیم.

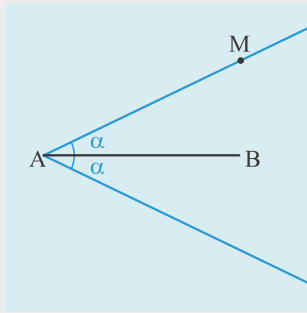
- یک دایره به شعاع ۴ به مرکز C رسم می‌کنیم.

- محل برخورد دو دایره رأس A است.

- محل برخورد دو دایره، دو نقطه است که نسبت به BC متقارن هستند. به این ترتیب

دو مثلث هم‌نهشت رسم می‌شود.





مجموعه نقاطی مانند M که اگر به نقطه‌ای مانند A وصل شود زاویه بین MA و AB عدد مشخصی باشد، دو نیم خط در دو طرف پاره خط هستند.

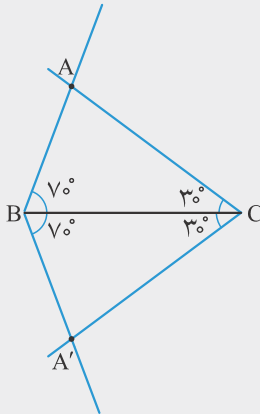
**مثال** مثلثی رسم کنید که در آن  $BC=4$ ،  $\hat{B}=70^\circ$  و  $\hat{C}=30^\circ$  باشد.

**پاسخ** - ضلع BC را رسم می‌کنیم.

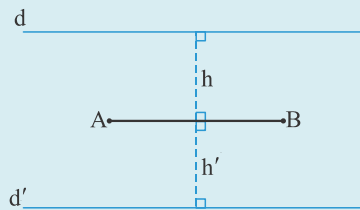
- با توجه به زاویه‌های داده شده نیم خط‌های BA، BA'، CA و CA' را رسم می‌کنیم.

- محل برخورد نیم خط‌های رسم شده، محل رأس دیگر مثلث (A) است.

- محل برخورد نیم خط‌ها دو نقطه است که نسبت به BC متقارن هستند. به این ترتیب دو مثلث هم‌نهشت رسم می‌شود.



مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط یا پاره خط فاصله ثابتی دارند، دو خط موازی در دو طرف خط یا پاره خط است.



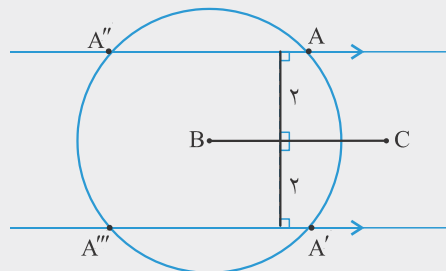
**مثال** با معلومات  $BC=4$ ،  $AB=3$  و  $h_a=2$  (ارتفاع وارد بر BC) مثلث ABC را رسم کنید.

**پاسخ** - ضلع BC را رسم می‌کنیم.

- با توجه به  $h_a=2$  متوجه می‌شویم رأس A روی دو خط موازی با BC و به فاصله ۲ از BC است.

- با توجه به  $AB=3$ ، از رأس B دایره‌ای به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. هر جا که این دایره دو خط موازی را قطع کند، مکان رأس A است.

- چهار نقطه A، A'، A'' و A''' به دست می‌آید که A و A' و همچنین A'' و A''' نسبت به BC متقارن هستند.



در مثلث ABC:

ضلع $a = BC$	ضلع $b = AC$	ضلع $c = AB$
میانه وارد از رأس $m_a = A$	میانه وارد از رأس $m_b = B$	میانه وارد از رأس $m_c = C$
ارتفاع وارد از رأس $h_a = A$	ارتفاع وارد از رأس $h_b = B$	ارتفاع وارد از رأس $h_c = C$
نیمساز وارد از رأس $d_a = A$	نیمساز وارد از رأس $d_b = B$	نیمساز وارد از رأس $d_c = C$

۱۰. می‌خواهیم مثلث ABC را با معلومات  $\widehat{B} = 45^\circ$  و  $h_c = 6$  و  $h_b = 4$  رسم کنیم. تعداد جواب‌های متمایز (غیرهم‌نهشت) کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۱. با معلومات  $a = 4$ ،  $\widehat{C} = 30^\circ$  و  $m_a = 3$  چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

(کنکور)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بیش از دو (۴) نمی‌توان رسم کرد.

۱۲. با داشتن معلومات  $\widehat{B} = 30^\circ$ ،  $AC = 4$  و  $AB = 3$ ، چند مثلث غیرهم‌نهشت ABC می‌توان رسم کرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ

۱۳. در کدام حالت مثلث ABC قابل ترسیم است؟

- (۱)  $a = 8$ ،  $m_a = 7$  و  $b = 3$  (۲)  $a = 6$ ،  $m_a = 3$  و  $b = 7$   
 (۳)  $a = 8$ ،  $m_a = 4$  و  $b = 5$  (۴)  $a = 10$ ،  $m_a = 2$  و  $b = 2$

۱۴. [VIT] در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع  $b = 7$  و  $c = 5$  و میانه  $m_a = 4$  با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

(کنکور)

- (۱) غیرقابل رسم (۲) جواب منحصر به فرد (۳) دو جواب متمایز (۴) فاقد جواب

۱۵. مثلثی با طول سه ضلع  $b$ ،  $c$  و  $2m_a$  (طول میانه مثلث ABC است) رسم کرده‌ایم. طول میانه وارد بر ضلع  $2m_a$  کدام است؟

(کنکور)

- (۱)  $a$  (۲)  $2a$  (۳)  $\frac{a}{2}$  (۴)  $\frac{b+c}{2}$

۱۶. [VIT] در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازه کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم نیست؟

(کنکور)

- (۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم (۳) میانه وارد بر وتر (۴) میانه وارد بر ضلع قائم

۱۷. با معلومات  $h_a = 1$ ،  $b = 2$  و  $c = 3$  (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم) چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟

(کنکور)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴) ۰

۱۸. [VIT] در مثلث ABC می‌دانیم،  $AB = 8$  و  $\widehat{A} = 30^\circ$ . در کدام حالت، نمی‌توان مثلث را رسم کرد؟

- (۱)  $BC < 4$  (۲)  $BC \leq 4$  (۳)  $BC > 4$  (۴)  $BC \geq 4$

۱۹. در مثلث ABC می‌دانیم،  $AB = 10$  و  $\widehat{A} = 30^\circ$ . در کدام حالت، اگر مثلث را رسم کنیم، یک جواب خواهیم داشت؟

- (۱)  $BC > 5$  (۲)  $BC = 5$  (۳)  $BC = 5$  یا  $BC > 10$  (۴)  $BC < 5$

### رسم چندضلعی

**مثال** لوزی را طوری رسم کنید که قطرهای آن ۶ و ۴ باشد.

**پاسخ** - لوزی یک چهارضلعی است که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر هستند.

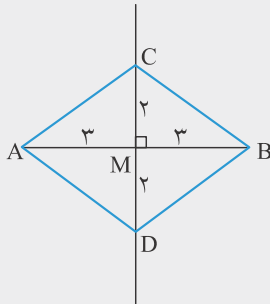
- پاره‌خط  $AB$  به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

- عمودمنصف  $AB$  را رسم می‌کنیم.

- یک دایره به شعاع نصف ۴ یعنی ۲ و به مرکز  $M$  رسم می‌کنیم.

- محل برخورد دایره و عمودمنصف  $AB$  را  $C$  و  $D$  می‌نامیم.

-  $ACBD$  لوزی به قطرهای ۶ و ۴ است.



**مثال** مربعی رسم کنید که قطر آن ۴ باشد.

**پاسخ** - مربع یک لوزی است که قطرهایش برابر باشند.

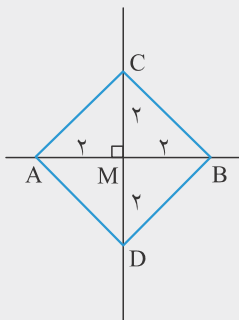
- پاره‌خط  $AB$  به طول ۴ را رسم می‌کنیم.

- عمودمنصف  $AB$  را رسم می‌کنیم.

- یک دایره به شعاع نصف  $AB$  و به مرکز  $M$  رسم می‌کنیم.

- محل برخورد دایره و عمودمنصف  $AB$  را  $C$  و  $D$  می‌نامیم.

-  $ACBD$  مربعی به قطر ۴ است.



**مثال** چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که قطرهای آن ۶ و ۴ باشند؟

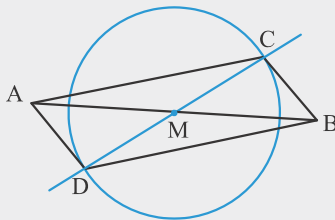
**پاسخ** - متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند.

- پاره‌خط  $AB$  به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

- یک دایره به شعاع نصف ۴ یعنی ۲ و به مرکز  $M$  رسم می‌کنیم.

- محل برخورد هر خط که از  $M$  می‌گذرد با دایره دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است.

- به این ترتیب بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این اطلاعات وجود دارد.



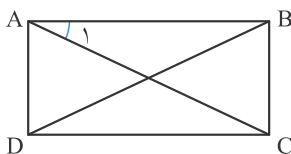
۲۰. برای رسم مستطیل  $ABCD$  داشتن موارد کدام گزینه کافی نیست؟

(۱)  $AB$  و  $BC$

(۲)  $AB$  و  $AC$

(۳)  $\hat{A}_1$  و  $AB$

(۴)  $AC$  و  $BD$



(کتاب درسی)

۲۱. [VIT] برای رسم یک متوازی‌الاضلاع داشتن موارد کدام گزینه کافی نیست؟

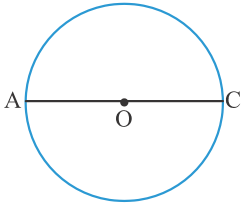
(۱) طول چهار ضلع

(۲) طول دو قطر و اندازه زاویه بین آنها

(۳) طول دو ضلع مجاور و یکی از زاویه‌ها

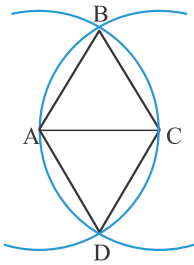
(۴) طول دو ضلع مجاور و یکی از قطرها

۲۲. دایره‌ای با قطر AC و مرکز O مفروض است. نقطه دلخواه B را روی محیط دایره انتخاب می‌کنیم، آن را به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در D قطع کند. چهارضلعی ABCD:



- (۱) دوزنقه است.
- (۲) مستطیل است.
- (۳) دوزنقه است.
- (۴) مربع است.

۲۳. پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم. دو دایره به شعاع AC و به مرکزهای A و C رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در B و D قطع کنند. چهارضلعی ABCD:



- (۱) لوزی است و زاویه‌های  $45^\circ$  و  $135^\circ$  هستند.
- (۲) لوزی است و زاویه‌های  $60^\circ$  و  $120^\circ$  هستند.
- (۳) مستطیل است و زاویه بین دو قطرش  $60^\circ$  است.
- (۴) مستطیل است و زاویه بین دو قطرش  $45^\circ$  است.

## استدلال

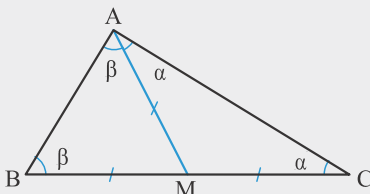
**استدلال استقرایی:** اگر بر مبنای چند مثال یا مشاهده، یک نتیجه کلی بگیریم از «استدلال استقرایی» استفاده کرده‌ایم.

برای مثال اگر با بررسی و مشاهده مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع به این نتیجه کلی برسیم که مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی  $360^\circ$  است، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

**استدلال استنتاجی:** اگر نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم باشد، به آن «استدلال استنتاجی» می‌گوییم.

اگر قطر یک چهارضلعی را رسم کنیم دو مثلث به وجود می‌آید. مجموع زاویه‌های یک مثلث  $180^\circ$  است پس مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی دو برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث یعنی  $360^\circ$  است. این مثال نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

**مثال** با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر در یک مثلث میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.



$$AM = MC \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} = \alpha$$

$$AM = MB \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \beta$$

$$\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \beta + (\beta + \alpha) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

پاسخ

**استدلال تمثیلی:** اگر با آوردن یک مثال از درست بودن یک حکم، درستی آن حکم برای موردی دیگر را نتیجه بگیریم، از «استدلال تمثیلی» استفاده کرده‌ایم.

برای مثال، مجموع زاویه‌های داخلی مستطیل که یک چهارضلعی است،  $360^\circ$  است. پس مجموع زاویه‌های داخلی یک لوزی هم  $360^\circ$  است.

**قضیه:** نتایج مهم و پرکاربردی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، «قضیه» نامیده می‌شوند.

مثلاً دو مورد زیر قضیه هستند:

- در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

- در هر مثلث سه ارتفاع هم‌رس هستند.

**عکس قضیه:** اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» گفته می‌شود. البته عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

برای مثال، اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه زاویه‌های مجاور به آن‌ها نیز برابرند. (قضیه)

اگر در یک مثلث دو زاویه مجاور به دو ضلع برابر باشند، آنگاه آن دو ضلع نیز برابرند. (عکس قضیه)

۲۴. روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات کدام نوع استدلال است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

- (۱) قیاسی (۲) شهودی (۳) استقرایی (۴) استنتاجی

۲۵. هرگاه گزاره «بعضی از  $x$  ها  $y$  نیستند» درست باشد، و گزاره «همه  $z$  ها  $y$  هستند» نیز درست باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که:

- (۱) بعضی از  $x$  ها  $z$  نیستند. (۲) بعضی از  $x$  ها  $z$  هستند.  
(۳) بعضی از  $z$  ها  $x$  نیستند. (۴) هیچ  $z$  نیست که  $x$  باشد.

۲۶. در مورد مدرسه‌ای دو فرض زیر صادق است: (مسابقات ریاضی آمریکا)

الف) بعضی از دانش‌آموزان درستکار نیستند. ب) همه عضوهای انجمن برادری درستکار هستند.

کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) بعضی از دانش‌آموزان عضو انجمن برادری هستند.  
(۲) بعضی از عضوهای انجمن برادری دانش‌آموز نیستند.  
(۳) بعضی از دانش‌آموزان عضو انجمن برادری نیستند.  
(۴) هیچ عضو انجمن برادری دانش‌آموز نیست.

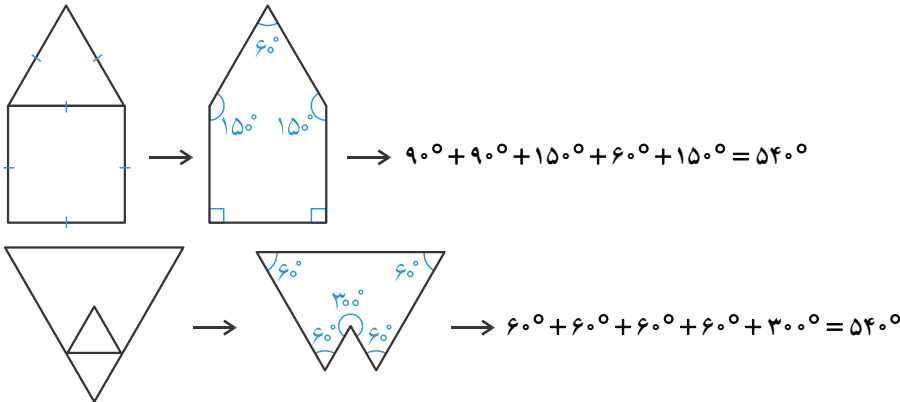
۲۷. چند مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن‌ها بر رأس‌هایی از یک شش‌ضلعی منتظم واقع باشند؟ (مسابقات ریاضی بلژیک)

- (۱) ۱ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۲۸. اندازه‌های زاویه‌های مثلث بر حسب درجه  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است. هرگاه  $\beta - \alpha = \gamma - \beta$  و  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ، آنگاه لازم می‌آید که این مثلث:

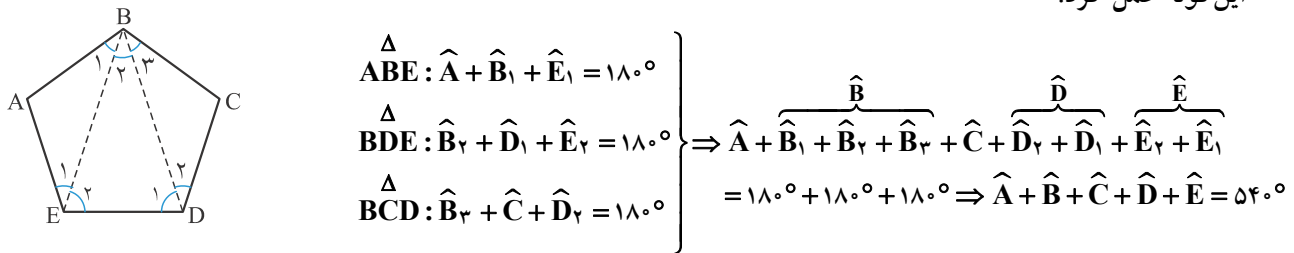
- (۱) در یک زاویه قائمه باشد. (۲) متساوی‌الاضلاع باشد.  
(۳) متساوی‌الساقین غیرمتساوی‌الاضلاع باشد. (۴) دارای یک زاویه  $60^\circ$  باشد.

۲۹. رضا می‌خواهد مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی را پیدا کند. او از شکل‌هایی نظیر مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع زیر استفاده کرد:



او نتیجه گرفت که مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی برابر است با  $540^\circ$ . او از چه استدلالی استفاده کرده است؟ (کتاب درسی)  
 (۱) استقرایی (۲) مثال نقض (۳) استنتاج (۴) برهان خلف

۳۰. حسین می‌خواهد مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی را پیدا کند. او می‌داند که مجموع زوایای یک مثلث  $180^\circ$  است. او این‌گونه عمل کرد:



او نتیجه گرفت که مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی برابر است با  $540^\circ$ . او از چه استدلالی استفاده کرده است؟ (کتاب درسی)  
 (۱) استقرایی (۲) مثال نقض (۳) استنتاج (۴) برهان خلف

۳۱. اگر در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{B} = 40^\circ$  و  $\hat{C} = 80^\circ$ ، آنگاه زاویه بین ارتفاع و نیمساز نظیر رأس  $A$  چقدر است؟ (کنکور)  
 (۱)  $10^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $30^\circ$

۳۲. اگر در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 50^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$ ، آنگاه زاویه بین نیمساز زاویه  $B$  و عمود منصف ضلع  $BC$  چقدر است؟  
 (۱)  $10^\circ$  (۲)  $75^\circ$  (۳)  $5^\circ$  (۴)  $45^\circ$

۳۳. **VIT** در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟ (کتاب درسی)

الف) در مثلث  $ABC$ ، اگر  $\hat{B} = \hat{C}$  باشد، آنگاه  $AB = AC$ .

ب) اگر در مثلث  $ABC$ ، رابطه  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  برقرار باشد، آنگاه  $\hat{A} = 90^\circ$ .

(۱) الف (۲) ب (۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۳۴. در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟ (کتاب درسی)

الف) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحتشان با هم برابر است.

ب) اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر سه زاویه‌اش  $60^\circ$  هستند.

(۱) الف (۲) ب (۳) الف و ب (۴) هیچ‌کدام



## برهان خلف

**گزاره:** به یک جمله خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد، «گزاره» گفته می‌شود.

برای مثال « $\sqrt{2}$  گنگ است» و «مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث  $360^\circ$  است» گزاره هستند.

گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن «گزاره ساده» می‌گویند و یا می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن «گزاره مرکب» گفته می‌شود.

مثلاً گزاره‌های «مجموع زاویه‌های داخلی لوزی  $360^\circ$  است» و «مجموع زاویه‌های خارجی هر لوزی  $360^\circ$  است»، هرکدام گزاره ساده هستند. ولی «مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی یک لوزی  $360^\circ$  است» یک گزاره مرکب است.

**نقیض یک گزاره:** گزاره‌ای است که برعکس آن گزاره را درست فرض می‌کند.

مثال: گزاره: «قطرهای هر لوزی عمودمنصف یکدیگراند».

نقیض گزاره: «لوزی وجود دارد که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر نیستند».

### برهان خلف:

- فرض می‌کنیم حکم غلط است (نقیض حکم درست است).

- به تناقض می‌رسیم.

- پس حکم درست بوده است.

**مثال** با استفاده از روش برهان خلف نشان دهید  $\sqrt{2}+1$  گنگ است. (می‌دانیم  $\sqrt{2}$  گنگ است).

**پاسخ** فرض می‌کنیم  $\sqrt{2}+1$  گنگ نیست پس عضو  $\mathbb{Q}$  است.

$$\sqrt{2}+1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}+1-1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

به این نتیجه رسیدیم که  $\sqrt{2}$  گویا است که این تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده است. یعنی  $\sqrt{2}+1$  گنگ است.

**۳۵. نقیض گزاره «دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند» کدام گزاره است؟**

- (۱) دو خط که همدیگر را قطع می‌کنند موازی نیستند.
- (۲) دو خط موازی همدیگر را قطع می‌کنند.
- (۳) دو خط که همدیگر را قطع نمی‌کنند موازی هستند.
- (۴) همه خط‌ها موازی هستند.

**۳۶. نقیض گزاره «عدد حقیقی  $a$  گنگ است» کدام گزاره است؟**

- (۱) عدد حقیقی  $a$  گویا است.
- (۲) عدد  $a$  حقیقی نیست.
- (۳) عدد حقیقی  $a$  زوج است.
- (۴) عدد حقیقی  $a$  طبیعی است.

**۳۷. نقیض گزاره «این هفته، من هر روز ورزش کردم» کدام گزاره است؟**

- (۱) این هفته، من کلاً ورزش نکردم.
- (۲) این هفته، من یک روز در میان ورزش کردم.
- (۳) حداقل یک روز در این هفته ورزش نکردم.
- (۴) این هفته، من هیچ روزی ورزش نکردم.

۳۸. نقیض گزاره «همه مغازه‌ها هر روز باز هستند» کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱) روزی هست که همه مغازه‌ها بسته هستند.

(۲) حداقل یک روز هست که در آن حداقل یک مغازه بسته است.

(۳) همه مغازه‌ها هر روز بسته هستند.

(۴) هر مغازه حداقل یک روز بسته است.

۳۹. [VIT] در اثبات یک قضیه به کمک برهان خلف ..... .

(۱) فرض می‌کنیم حکم درست باشد و برای درستی آن چند مثال ارائه می‌دهیم.

(۲) نقیض حکم قضیه را به عنوان فرض می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

(۳) نقیض فرض را به عنوان حکم می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

(۴) فرض می‌کنیم حکم درست نباشد و برای نادرستی آن دلیل ارائه می‌کنیم.

۴۰. بهار می‌خواهد گزاره زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند:

«اگر حاصل ضرب دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  زوج باشد، آنگاه حداقل یکی از آن دو عدد، زوج است.»

فرض او باید کدام باشد؟

(۱)  $a$  و  $b$  زوج هستند.

(۲)  $a$  و  $b$  طبیعی نیستند.

(۳)  $a$  و  $b$  فرد هستند.

(۴)  $a \times b$  فرد است.

(کتاب درسی)

۴۱. [VIT] پویا می‌خواهد گزاره زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند:

«اگر خط‌های  $d_1$  و  $d_2$  بر خط  $l$  عمود باشند، آنگاه  $d_1$  و  $d_2$  موازی هستند.»

در مورد استدلال او کدام درست است؟

(۱) فرض او باید این باشد که  $d_1$  و  $d_2$  همدیگر را قطع می‌کنند.

(۲) در پایان به مثلثی می‌رسد که دو زاویه  $90^\circ$  دارد، که تناقض است.

(۳) هر دو.

(۴) هیچ کدام.

(سراسری ریاضی ۸۶)

۴۲. اثبات کدام قضیه احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

(۱) عدد  $\sqrt{5}$  گنگ است.

(۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان فرض کرد.

(۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

(۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیش تر است.

### مثال نقض

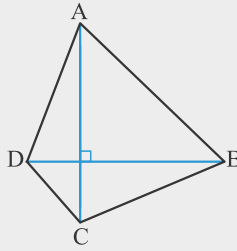
**مثال نقض:** به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، «مثال نقض» گفته می‌شود.

حکم کلی: حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال نقض:  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  ←  $-\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$

حکم کلی: هر چهارضلعی که قطرهای عمود بر هم و برابری داشته باشند، مربع است.

مثال نقض:



**مثال** گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

«در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.»

**پاسخ** مثال نقض:



→  $AH > BC$

(کنگور)

۴۳. کدام گزینه زیر، مثال نقض دارد؟

- (۱) هر مربع یک لوزی است. (۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ فرد است.  
(۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است. (۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

(کنگور)

۴۴. اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

- (۱)  $\sqrt{216}$  و  $\sqrt{6}$  (۲)  $\sqrt{12}$  و  $\sqrt{6}$  (۳)  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{216}$  (۴)  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{12}$

(کنگور)

۴۵. کدام عدد کلیت حکم «توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از خود آن است» را نقض می‌کند؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $1 - \sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2} - 1$  (۴)  $\sqrt{2} + 1$

(کنگور)

۴۶. کدام عدد کلیت حکم «برای هر عدد طبیعی زوج  $n$ ،  $2^n + 1$  عددی اول است» را نقض می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۴۷. کدام عدد کلیت حکم «رقم سمت راست هر عددی که بر ۵ و ۳ قابل قسمت باشد، برابر صفر است» را نقض می‌کند؟

(کنگور)

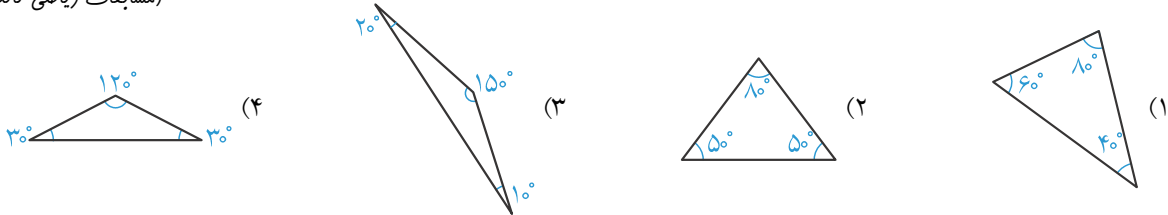
- (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۵

۴۸. کدام قضیه درست است؟

- (۱) هر چهارضلعی که قطرهايش بر هم عمود باشند، لوزی است.
- (۲) هر لوزی یک مربع است.
- (۳) هیچ ذوزنقه‌ای محور تقارن ندارد.
- (۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

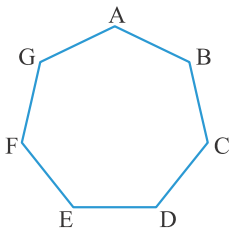
۴۹. بابک فکر می‌کند که زاویه‌های هر مثلث متساوی‌الساقین تند است. کدام مثال زیر نشان می‌دهد که او اشتباه می‌کند؟

(مسابقات ریاضی کانگورو ۲۰۰۸)



۵۰. شکل زیر یک هفت‌ضلعی منتظم است. با وصل کردن کدام سه رأس مثال نقضی برای حکم زیر پیدا می‌شود؟ (کتاب درسی)

«با وصل کردن هر سه رأس از یک هفت‌ضلعی منتظم یک مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود.»



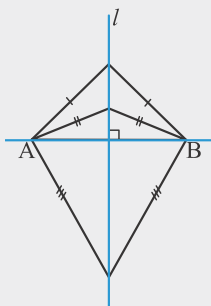
ADE (۲)

BDF (۱)

ABD (۴)

CDE (۳)

### عمودمنصف و هم‌رسی عمودمنصف‌ها



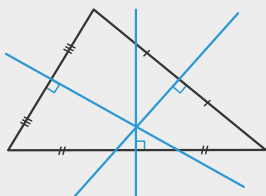
- هر خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند، عمودمنصف آن پاره‌خط نامیده می‌شود.

- خاصیت عمودمنصف: فاصله هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

- عکس خاصیت عمودمنصف: اگر فاصله یک نقطه تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

- عمودمنصف‌های هر مثلث هم‌رسند.

- اگر زاویه‌های مثلث تند باشند، محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها داخل مثلث است.



- اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها روی محیط و وسط وتر است.

