# هندسه

# آزمون

**۶۷** هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)

**۶۸** هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)

**۶۹** هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)

**۷۰** هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)

**۷۱** هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)

**۷۲** هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)

**۷۳** هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)

**۷۴** تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)

**۷۵** تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)

**۷۶** تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)

**۷۷** دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)

**۷۸** دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)

**۷۹** دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)

**۸۰** دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)

**۸۱** جامع

### سخن مؤلف با شما

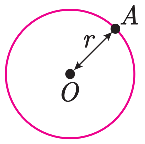
آزمونای این فصل مربوط به مباحث هندسه در کتاب ریاضی (۲) و ریاضی (۳) می‌شه. احتمالاً ۶ سؤال از این فصل در کنکور خواهید دید. احتمالاً ۳ سؤال از فصل دوم ریاضی (۲)، ۱ سؤال از هندسه تحلیلی و ۲ سؤال از تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی و دایره. این ۶ سؤال را تشکیل خواهند داد. هندسه یکی از مباحثیه که می‌تونه سرنوشت شما رو تو کنکور خیلی عوض کنه. با قدرت بخونید . . .

# فصل دهم

## هندسه

### ترسیم‌های هندسی

#### فاصله‌های مشخص در صفحه

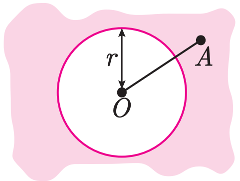



$A$ روی دایره $\Leftrightarrow OA = r$

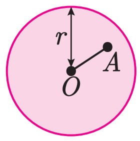
**فاصلهٔ مشخص از نقطه:** نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت $O$ به فاصلهٔ معلوم $r$ هستند روی دایره‌ای به مرکز $O$ و شعاع $r$ قرار دارند و هر نقطه که روی دایره به مرکز $O$ و شعاع $r$ باشد از نقطهٔ $O$ به فاصلهٔ $r$ است.

**توجه:** دایرهٔ $C$ به مرکز $O$ و شعاع $r$ را با $C(O,r)$ نشان می‌دهند.

**نتیجه:** نقاط درون دایرهٔ $C(O,r)$ فاصله‌شان از $O$ کم‌تر از $r$ و نقاط بیرون دایرهٔ $C(O,r)$، فاصله‌شان از $O$ بیش‌تر از $r$ است.

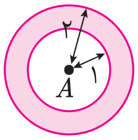



$A$ بیرون دایره $\Leftrightarrow OA > r$



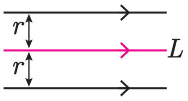

$A$ درون دایره $\Leftrightarrow OA < r$

**مثلاً** نقطهٔ ثابت $A$ در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از $A$ بیش‌تر از ۱ و کم‌تر از ۲ می‌باشند، در ناحیه‌ای به مساحت $۳\pi$ قرار دارند. زیرا:




نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از $A$ بیش‌تر از ۱ اســت، خارج دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع ۱ قرار دارند. هم‌چنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از $A$ کم‌تر از ۲ است درون دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع ۲ قرار دارند که اشتراک این دو ناحیه به صورت ناحیهٔ رنگی شکل مقابل است که مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۲)^۲ - \pi(۱)^۲ = ۴\pi - \pi = ۳\pi$$

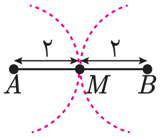



**فاصلهٔ مشخص از خط:** بـرای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط $L$ به فاصلهٔ معلوم $r$ هســتند، کافی است دو خط به موازات $L$ و به فاصلهٔ $r$ در طرفین $L$ رسم کنیم.

**نکته** اگر در مسأله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی هستند، باید نقاط هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها در صورت وجود، جواب مسأله است.

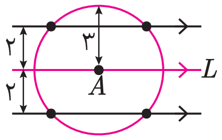
به مثال‌های صفحهٔ بعد دقت کنید.

**مثلاً** فـرض کنید دو نقطهٔ $A$ و $B$ به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. یـک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط $A$ و $B$ است. زیرا:

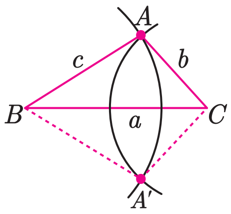



کافی اسـت یک بار به مرکز $A$ و شعاع ۲ و بار دیگر به مرکز $B$ و شعاع ۲ دایره رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ $M$ روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.

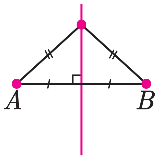
**مثلاً** فرض کنید نقطهٔ $A$ روی خط $L$ مفروض اسـت. چهار نقطه در صفحه وجود دارند کـه به فاصلهٔ ۲ از خط $L$ و به فاصله ۳ از نقطهٔ $A$ قرار دارند. زیرا:




نقاطـی که به فاصلهٔ ۲ از خط $L$ قرار دارنـد، روی دو خط به موازات $L$ و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌باشـند. هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ $A$ هسـتند روی دایره‌ای به مرکز $A$ و شـعاع ۳ قرار دارند. واضح اسـت دو خط و دایره هم‌دیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. پس ۴ نقطه در صفحه وجود دارد.



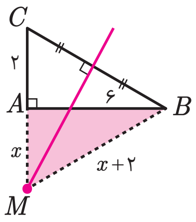

**رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع:** اگر $a$، $b$ و $c$ طول سـه ضلع مثلث $ABC$ باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط $BC$ را به اندازهٔ $a$ رسـم می‌کنیم. سـپس یک بار به مرکز $C$ و شـعاع $b$ و بار دیگر به مرکز $B$ و شـعاع $c$ دایره‌ای رسـم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره، رأس $A$ از مثلث $ABC$ است. توجه کنید که دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ $A$ و $A'$ قطع می‌کنند اما مثلث $ABC$ با مثلث $A'BC$ هیچ فرقی ندارد.




**عمودمنصف پاره‌خط:** عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است.

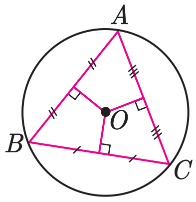
**ویژگی عمودمنصف:** هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$ باشد، از نقاط $A$ و $B$ به یک فاصله است و هم‌چنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط $AB$ به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف $AB$ قرار دارد.

**مثلاً** فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ $M$ قطع کرده است. می‌خواهیم فاصلهٔ $M$ از نزدیک‌ترین رأس مثلث را به دست آوریم:



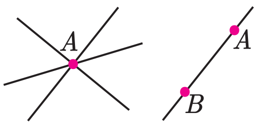

به شـکل مقابل توجه کنید. طول $MA$ مد نظر سـؤال است. با فرض $MA = x$، چون $M$ روی عمودمنصف $BC$ اسـت، پس $MB = MC$ می‌باشـد. بنابراین $MB = x + ۲$ خواهد بود. در مثلـث قائم‌الزاویهٔ $MAB$ به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MB^۲ = MA^۲ + AB^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲ = x^۲ + ۳۶ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۳۶ \Rightarrow ۴x = ۳۲ \Rightarrow x = ۸$$



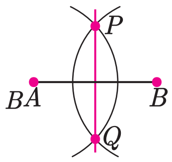

**نتیجه:** چون هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$، از نقاط $A$ و $B$ به یک فاصله است، پس محل تلاقی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است. از طرفی چون هر نقطه روی دایره از مرکز دایره به یک فاصله است، پس دایره‌ای وجود دارد که مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است و از سه رأس مثلث می‌گذرد.

## ترسیم‌های معروف



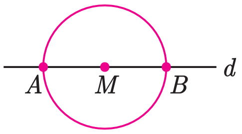

قبل از شروع ترسـیم‌های هندسی باید بدانیم که از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطه در یک صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد.

### ۱ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



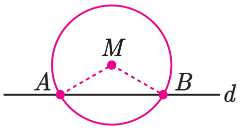

بـرای رسـم عمودمنصـف پاره‌خـط $AB$، دهانـهٔ پـرگار را بیـش از نصـف طـول $AB$ بـاز کـرده و بـه مراکـز $A$ و $B$ دو کمـان رسـم می‌کنیـم. ایـن دو کمـان یکدیگـر را در نقـاط $P$ و $Q$ قطـع می‌کننـد. چـون $P$ و $Q$ فاصلـهٔ یکسـانی از $A$ و $B$ دارند، پس روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$ هستند. خط گذرا از $P$ و $Q$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است.

### ❷ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M روی آن



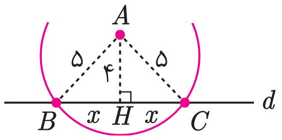

به مرکز $M$ و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع کند. $M$ وسط پاره‌خط $AB$ است. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط $AB$ را رسم کنیم، بر خط $d$ عمود بوده و از نقطهٔ $M$ می‌گذرد.

### ❸ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن




به مرکز $M$ و شعاع مناسب، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع کند. $MA = MB$ خواهد بود. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط $AB$ را رسم کنیم، بر خط $d$ عمود بوده و از نقطهٔ $M$ می‌گذرد.

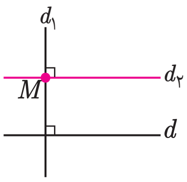
**مثلاً** فرض کنید نقطهٔ $A$ به فاصلهٔ ۴ از خط $d$ قرار دارد. به مرکز $A$ و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقاط $B$ و $C$ قطع کند. در مورد مثلث $ABC$ می‌توان گفت مثلث $ABC$ یک مثلث متساوی‌الساقین با مساحت ۱۲ است، زیرا:



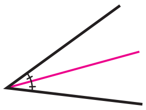

با توجه به شکل مقابل $ABC$ مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۵ و ارتفاع ۴ است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABH$ داریم:

$$x^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۹ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴ = ۱۲$$

### ❹ رسم خط موازی با خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن

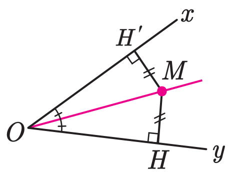



خط $d_۱$ را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از $M$ بگذرد و بر خط $d$ عمود باشد. حال خط $d_۲$ را عمود بر $d_۱$ و گذرا از $M$ رسم می‌کنیم. خط $d_۲$ با خط $d$ موازی است.



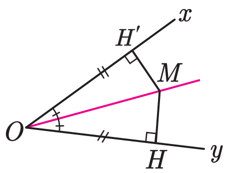
**نیمساز زاویه:** نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

### ویژگی‌های نیمساز



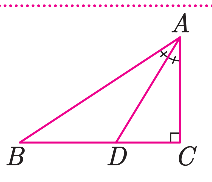

۱ـ هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

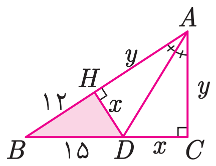
$M$ روی نیمساز $\widehat{xOy}$ است. $\Leftrightarrow MH = MH'$




۲ـ اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند با هم برابرند.

**مثلاً** در شکل مقابل، $AD$ نیمساز زاویهٔ $A$ می‌باشد. اگر $BD = ۱۵$ و $AB - AC = ۱۲$ باشد، می‌خواهیم طول پاره‌خط $DC$ را به دست آوریم:

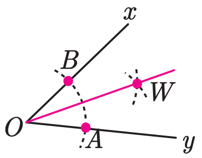


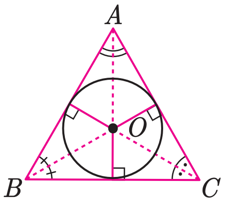

فرض می‌کنیم $DC = x$ و $AC = y$ باشد، از $D$ بر $AB$ عمود می‌کنیم. چون $D$ روی نیمساز $\widehat{A}$ می‌باشد، پس $DC = DH = x$ و $AH = AC = y$ است. از طرفی $AB - AC = ۱۲$ می‌باشد، پس طول $AB$ برابر $y + ۱۲$ به دست می‌آید، بنابراین $BH = ۱۲$ خواهد بود. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $BHD$ داریم:

$$BD^{۲} = HD^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۱۵^{۲} = x^{۲} + ۱۲^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۸۱ \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow DC = ۹$$

### ۵ رسم نیمساز یک زاویه




برای رسم نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$، به مرکز $O$ و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در $A$ و $B$ قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول $AB$ باز کرده و به مراکز $A$ و $B$ دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در $W$ قطع کنند، از $W$ به $O$ وصل می‌کنیم، $OW$ نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$ است.




**نتیجه:** محل تلاقی نیمسازهای مثلث $ABC$ مرکز دایره‌ای است که اضلاع مثلث بر آن دایره مماس می‌باشند.

## استدلال و قضیهٔ تالس

**استدلال استقرایی:** اگر از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته شود، آن‌گاه به این استدلال، استدلال استقرایی می‌گویند.

**نکته** در این نوع استدلال از جزء به کل می‌رسیم.

**استدلال استنتاجی:** روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم استدلال استنتاجی گفته می‌شود.

**قضیه:** به نتایجی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه می‌گویند.

**فرض و حکم قضیه:** در یک قضیه گزاره یا گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبول داریم «فرض قضیه» و گزاره یا گزاره‌هایی که می‌خواهیم درستی آن‌ها را از روی فرض نتیجه بگیریم «حکم قضیه» می‌باشند.

**عکس قضیه:** اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن‌چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است که ممکن است درست یا نادرست باشد.

**مثلاً** عکس قضیهٔ «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند» به صورت «اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است» می‌باشد.

**قضیهٔ دوشرطی:** اگر عکس یک قضیه درست باشد، یعنی عکس قضیه خود یک قضیه باشد، آن‌گاه می‌توان این دو قضیه را در قالب یک قضیهٔ دو شرطی بیان کرد. قضیهٔ دو شرطی را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهند و به شکل «$p$ اگر و تنها اگر $q$» می‌خوانند.

**مثلاً** قضیهٔ «در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها با هم برابر باشند.» یک قضیهٔ دو شرطی می‌باشد.

### روش‌های اثبات قضایا

۱ **اثبات مستقیم:** در این روش از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم.

۲ **برهان خلف (اثبات غیر مستقیم):** در این روش به جای آن که نشان دهیم حکم درست است نشان می‌دهیم حکم نادرست نیست، به این صورت که فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف)، سپس به کمک استدلال، منطق و حقایق به یک تناقض می‌رسیم.

۳ **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند. مثلاً مثال نقض حکم «همهٔ اعداد اول فردند» عدد ۲ می‌باشد، زیرا ۲ عددی اول است در حالی که فرد نمی‌باشد.

### نسبت و تناسب

**نسبت:** اگر واحد اندازه‌گیری کمیت‌های $a$ و $b$ یکسان باشد، آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم که همواره $b \neq 0$ می‌باشد.

**تناسب:** تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b, d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم.

**توجه:** در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ به $a$ و $d$ طرفین و به $b$ و $c$ وسطین گفته می‌شود.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \underbrace{a\div \overbrace{b=c}^{\text{وسطین}}\div d}_{\text{طرفین}}$$

## ویژگی‌های تناسب

| | |
|---|---|
| ۱. طرفین وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ | ۲. تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ |
| ۳. معکوس کردن تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ | ٤. تعویض جای طرفین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ |
| ۵. تعویض جای وسطین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ | ٦. ترکیب نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ |
| ۷. ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ | ۸. تفضیل نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ |
| ۸. تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ | ۹. در حالت کلی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ax\pm cy}{bx\pm dy}$ |

**نکته** در تســت‌هایی که یک نسبت داده شــده و نسبت دیگری را می‌خواهد، می‌توان صورت کســرها را با هم و مخرج کسرها را نیز با هم برابر در نظر گرفت.

**مثلاً** اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۰-a}{۱۵-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ را به دو روش زیر می‌توان به دست آورد:

**روش اول:** با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b}\Rightarrow \frac{۲۰-a+a}{۱۵-b+b}=\frac{a}{b}\Rightarrow \frac{۲۰}{۱۵}=\frac{a}{b}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$$

حال به کمک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$ می‌توان گفت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{۴-۳}{۴+۳}=\frac{۱}{۷}$$

**روش دوم:** با توجه نکتهٔ گفته شده داریم:

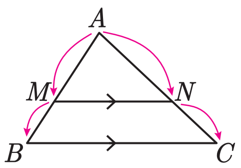
$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b}\Rightarrow \begin{cases} ۲۰-a=a\Rightarrow a=۱۰ \\ ۱۵-b=b\Rightarrow b=۷/۵ \end{cases}$$

حال مقادیر $a=۱۰$ و $b=۷/۵$ را در نسبت $\frac{a-b}{a+b}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{۱۰-۷/۵}{۱۰+۷/۵}=\frac{۲/۵}{۱۷/۵}=\frac{۱}{۷}$$

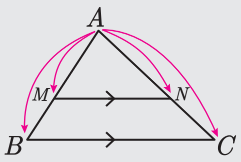
## تالس

**قضیهٔ تالس:** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند.




$$MN\parallel BC\Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

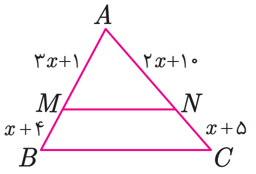
**نکته** به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به صورت‌های زیر نیز بیان کرد:




$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow \frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow \boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow \frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow \frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$

**مثلاً** در شکل مقابل $MN \parallel BC$ می‌باشد. می‌خواهیم مقدار $x$ را به دست آوریم:

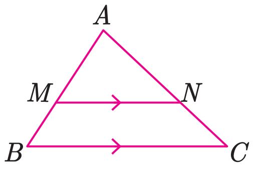



چون $MN \parallel BC$ است به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۳x+۱}{x+۴}=\frac{۲x+۱۰}{x+۵}\Rightarrow(۳x+۱)(x+۵)=(x+۴)(۲x+۱۰)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۱۶x+۵=۲x^۲+۱۸x+۴۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳۵=۰\Rightarrow(x-۷)(x+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۷\\x=-۵\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

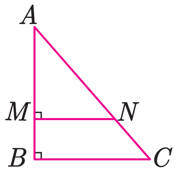
**تعمیم قضیهٔ تالس:** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است.




$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

**نکته** اگر طول پاره‌خط $MN$ جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

**مثلاً** در شکل مقابل، $AM=۱۲$ ، $MB=۴$ و $MN=۹$ است. فرض کنید می‌خواهیم مجموع طول‌های دو پاره‌خط $BC$ و $NC$ را به دست آوریم:




چون $MN$ و $BC$ هر دو بر $AB$ عمودند، پس با هم موازی‌اند. از طرفی چون $MN$ جزء داده‌های سؤال است از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

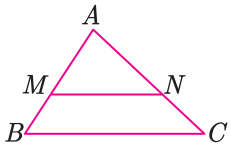
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{AN}{AC}=\frac{۹}{BC}\Rightarrow ۱۲BC=۹\times۱۶\Rightarrow BC=۱۲$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{cases}AN^۲=AM^۲+MN^۲\Rightarrow AN^۲=۱۴۴+۸۱=۲۲۵\Rightarrow AN=۱۵\\AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow AC^۲=۲۵۶+۱۴۴=۴۰۰\Rightarrow AC=۲۰\end{cases}\Rightarrow NC=۲۰-۱۵=۵$$

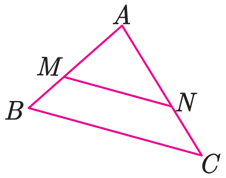
بنابراین $BC+NC=۱۲+۵=۱۷$ است.

**عکس قضیهٔ تالس:** اگر در یک مثلث، خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.




$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow MN\parallel BC$$

**مثلاً** در شکل مقابل، اگر $AB=۱۴$ ، $AM=۶$ ، $AC=۷$ و $AN=۳$ باشند، آن‌گاه $MN \parallel BC$ است.

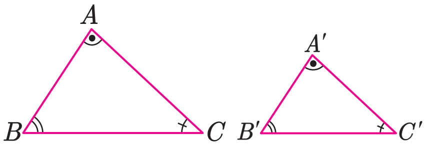



زیرا می‌دانیم طبق عکس قضیهٔ تالس، وقتی $MN \parallel BC$ است که پاره‌خط‌های ایجاد شده روی اضلاع مثلث متناسب باشند که این‌طور هست:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۷}=\frac{۶}{۱۴}$$

## تشابه

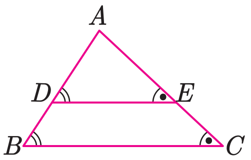
**دو مثلث متشابه:** دو مثلث را متشابه می‌نامند، هرگاه زاویه‌ها برابر و اضلاع، نظیر به نظیر متناسب باشند.




$$(\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\ \hat{C}=\hat{C}'),(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'})\Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

**نکته** اضلاع متناظر دو مثلث، روبه‌روی زاویه‌های برابر قرار دارند.

**نسبت تشابه:** به نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه می‌گویند. واضح است که اگر $k$ نسبت تشابه باشد، $\frac{1}{k}$ نیز نسبت تشابه است.



**قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها:** اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی به وجود می‌آید که با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

**حالات تشابه دو مثلث:** دو مثلث متشابه، زاویه‌های برابر و اضلاع متناظر متناسب دارند. برای اثبات تشابه دو مثلث می‌توان از اطلاعات کم‌تری استفاده کرد که عبارتند از:

❶ **تساوی دو زاویه:** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

$$\hat{A}=\hat{A'} \quad , \quad \hat{B}=\hat{B'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

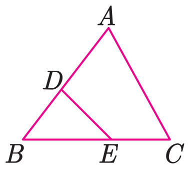
❷ **تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین:** اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}) \text{ و } \hat{A}=\hat{A'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

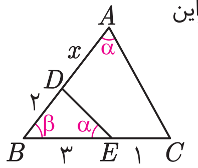
❸ **تناسب سه ضلع:** هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

**مثلاً** در شکل مقابل، $B\hat{A}C = D\hat{E}B$ است. اگر $EC=۱$ ، $DB=۲$ و $BE=۳$ باشند، طول پاره‌خط $AD$ برابر است با:



چون $B\hat{A}C = D\hat{E}B$ و زاویهٔ $B$ در دو مثلث مشترک است، پس دو مثلث دو زاویهٔ برابر دارند و متشابه‌اند. بنابراین اضلاع متناظر آن‌ها متناسب‌اند. با فرض $AD=x$ داریم:

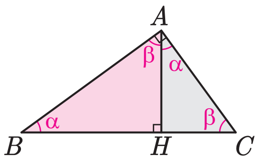


$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{۳}{x+۲} \Rightarrow ۲(x+۲)=۱۲ \Rightarrow x+۲=۶ \Rightarrow x=۴$$

**مشابه‌ها در مثلث قائم‌الزاویه:** در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه

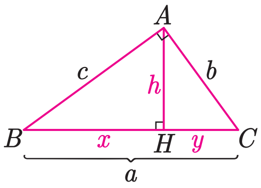
$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



**روابط طولی در مثلث:** به کمک مثلث‌های متشابهی که توسط ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می‌شوند می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

**نتیجه ۱:** یک بار نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه $ABH$ و $ABC$ و بار دیگر نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه $ACH$ و $ABC$ می‌نویسیم:

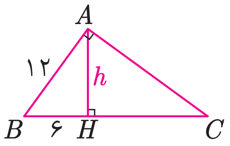


$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{x}{c} \Rightarrow \boxed{c^۲=ax}$$

$$\overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{b^۲=ay}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر.

**مثلاً** با توجه به شکل مقابل، طول ضلع $AC$ برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است، زیرا:

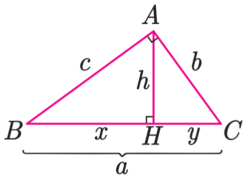



فرض می‌کنیم طول وتر $BC$ برابر $a$ باشد، پس: $۱۲^۲ = ۶\times a \Rightarrow a = ۲۴$

واضح است که طول پاره‌خط $HC$ برابر $۲۴-۶=۱۸$ خواهد بود و داریم:

$$AC^۲ = CH\times a \Rightarrow AC^۲ = ۱۸\times ۲۴ \Rightarrow AC=\sqrt{۳\times۶\times۶\times۴}=۶\sqrt{۱۲}=۱۲\sqrt{۳}$$

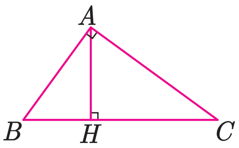
**نتیجه ۲:** نسبت اضلاع متناسب را در دو مثلث متشابه $ABH$ و $ACH$ می‌نویسیم:




$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{x}{h}=\frac{h}{y} \Rightarrow \boxed{h^۲=xy}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب قطعاتی که روی وتر جدا می‌کند.

**مثلاً** در مثلث شکل مقابل، $HC=۲AH$ و $BH=۲$ می‌باشد. می‌خواهیم طول ضلع $AC$ را به دست آوریم:




فرض می‌کنیم $AH=h$ باشد، پس $HC=۲h$ است. داریم:

$$AH^۲=BH\times HC \Rightarrow h^۲=۲\times۲h\Rightarrow h=۴$$

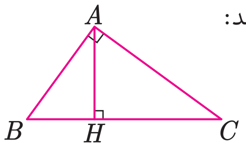
از طرفی داریم:

$$AC^۲=HC\times BC\Rightarrow AC^۲=۲h\times(۲h+۲)\xRightarrow{h=۴}AC^۲=۸\times۱۰\Rightarrow AC=\sqrt{۸۰}=\sqrt{۱۶\times۵}=۴\sqrt{۵}$$

**نتیجه:** با توجه به روابطی که از نتیجهٔ ۱ به دست آمد، داریم:

$$\begin{cases}c^۲=ax\\b^۲=ay\end{cases}\Rightarrow c^۲+b^۲=ax+ay\Rightarrow c^۲+b^۲=a\underbrace{(x+y)}_{a}\Rightarrow \boxed{c^۲+b^۲=a^۲ \qquad \text{قضیهٔ فیثاغورس}}$$

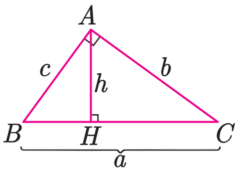
**مثلاً** در شکل مقابل، $AB=۲$، $AC=۳$ و $BC=۴$ است. نحوهٔ به دست آوردن طول پاره‌خط $BH$ را ببینید:




فرض می‌کنیم $AH=h$ و $BH=x$ باشد، در نتیجه $CH=۴-x$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های $AHB$ و $AHC$ داریم:

$$\begin{cases}AB^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow ۴=h^۲+x^۲\\ AC^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow ۹=h^۲+(۴-x)^۲\Rightarrow ۹=h^۲+۱۶-۸x+x^۲\end{cases}\Rightarrow ۹-۴=۱۶-۸x\Rightarrow ۸x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۸}$$

**ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه:** مثلث قائم‌الزاویه یک ارتفاع واقعی دارد و دو ارتفاع دیگر همان اضلاع قائم مثلث هستند. این ارتفاع وارد بر وتر به کمک دو بار محاسبهٔ مساحت مثلث به دست می‌آید:




$$\begin{cases}S=\frac{۱}{۲}b.c\\ S=\frac{۱}{۲}a.h\end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{۲}b.c=\frac{۱}{۲}a.h\Rightarrow b.c=a.h\Rightarrow \boxed{h=\frac{b.c}{a}}$$

**مثلاً** در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۱۵ و ۲۰، طول ارتفاع وارد بر وتر به صورت زیر به دست می‌آید:

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول وتر را به دست می‌آوریم: $a^۲=۱۵^۲+۲۰^۲\Rightarrow a^۲=۶۲۵\Rightarrow a=۲۵$

حال ارتفاع وارد بر وتر برابر است با: $h=\frac{bc}{a}\Rightarrow h=\frac{۱۵\times۲۰}{۲۵}=۱۲$

**همه چیز در مورد نسبت تشابه:** در دو مثلث متشابه $ABC$ و $A'B'C'$، اگر نسبت اضلاع یا همان نسبت تشابه $k$ باشد، آن‌گاه تمامی اجزای طولی مثلث $ABC$ (اجزایی که با واحد طول سنجیده می‌شوند) با اجزای نظیرشان در مثلث $A'B'C'$ با همان نسبت $k$ متناسب هستند. اجزای طولی شامل میانه، ارتفاع و محیط مثلث می‌باشند. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه یعنی $k^۲$ برابر است.