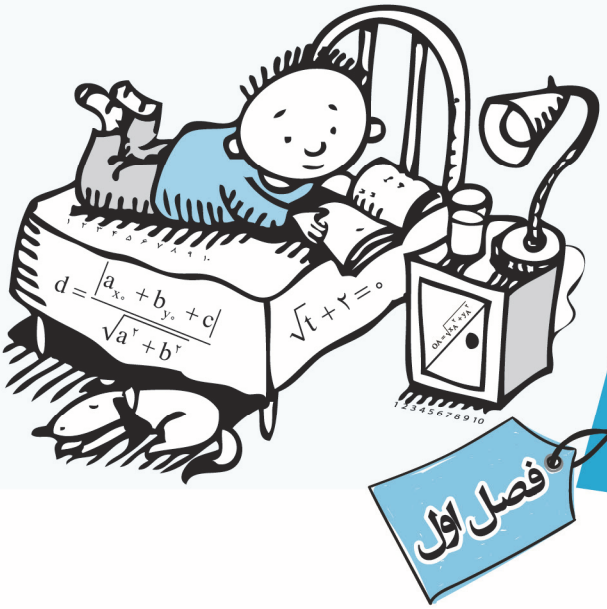


هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی
درس دوم: تابع درجه ۲ و معادله‌ی درجه دوم
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

بخش اول: معادله خط

خُب خدارو شکر مؤلفین محترم بالاخره به این نتیجه رسیدند که باید از خط شروع کرد! و اولین قسمت از ریاضی ۲ رو با یادآوری و تکمیل معادله خط آغاز کردند. البته من صرفاً براساس سرفصل‌های این عزیزان حرکت می‌کنم ولی سعی کردم خط رو خیلی قشنگ‌تر و بهتر به دانش‌آموزان عزیز کشورم معرفی می‌کنم و یاد بدم:

$$y = \underset{\text{شیب}}{a}\, x + \underset{\text{عرض از مبدأ}}{b}$$

البته تو کتاب دهم هم توضیح داده بودم!

همونطور که بالا نوشتم b عرض از مبدأ یعنی فاصله عرضی تا مبدأ مختصاته و a شیب خط. شیب خط یعنی همون تغییرات عرضی نسبت به تغییرات طولی ولی اگه تغییرات طولی یعنی Δx رو یک در نظر بگیریم شیب میشه همون Δy. پس داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\text{if } \Delta x = 1} m = \Delta y$$

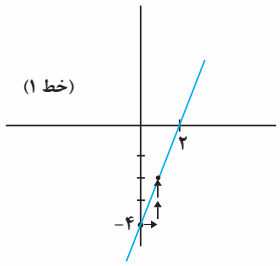
تذکر در کتب قدیمی و نسخه‌های خطی!!! به شیب خط، ضریب زاویه هم می‌گفتند.

پس اگر شیب خطی یک باشه یعنی به ازای $\Delta x = 1$ یعنی یک واحد که به سمت راست محور xها (همون جلوی خودمون!) حرکت کنیم خط هم یک واحد بالا میاد. شیب ۲ یعنی به ازای هر یک واحد که جلو بریم خط دو واحد بالا میاد. شیب (-2) یعنی هر یک واحد که جلو بریم خط ۲ واحد پایین میاد. حالا بیاین به صورت عملی خط‌کشی کنیم!

مثلاً می‌خوایم اولین مثال کتابتون یعنی خط $y = 2x - 4$ رو بکشیم.

گام اول: می‌شینیم تو عرض از مبدأ یعنی نقطه $(0, -4)$

گام دوم: $m = 2$، پس به ازای یک واحد که جلو بریم خط دو واحد بالا میاد.



تذکر مهم ۱ محل برخورد خط با محور xها مهم‌ترین نقطه‌ی اون خطه که بهش می‌گن ریشه!

این نقطه از طریق حل معادله $y = 0$ بدست میاد. مثلاً در اینجا:

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

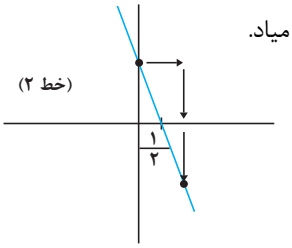
تذکر مهم ۲ خطوطی که شیب مثبت دارند اکیداً صعودی و خطوطی که شیب منفی دارند اکیداً نزولی هستند.

تذکر مهم ۳ هر ریشه‌ای که از طریق عامل درجه اول تولید بشه یک ریشه ساده است و ویژگی اصلیش اینه که قبل و بعد از ریشه تغییر علامت داریم. علامت هم یعنی همون علامت y؛ که خروجی تابع است. مثلاً تو خطی که الان کشیدیم و اکیداً صعودیه قبل از $x=۲$ علامت منفی و بعد از $x=۲$ علامت مثبته چون خط بعد از ۲ بالای محور xهاست.

حالا بریم یه خط با شیب منفی بکشیم که مؤلفین عزیز و با سلیقمون هیچ اشاره‌ای بهش نکردن! $y=-۲x+۱$

گام اول: تو نقطه $(۰,۱)$ می‌شینیم (عرض از مبدأ).

گام دوم: اینجا $m=-۲$، پس به ازای یک واحد که از نقطه $(۰,۱)$ به سمت جلو حرکت کنیم خط ۲ واحد پایین میاد.



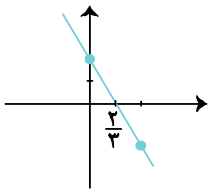
اینجا بعد از حل معادله‌ی $-۲x+۱=۰$ می‌رسیم به $x=\frac{۱}{۲}$ که ریشه‌ی معادلست؛

قبل از $\frac{۱}{۲}$ علامت مثبت و بعد از $\frac{۱}{۲}$ علامت منفیه چون این خط اکیداً نزولیه و بعد از ریشه، افتاده زیر محور xها!

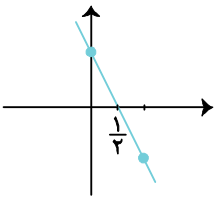
حالا چند تا مثال خوب هم با هم ببینیم:

پس طریقه‌ی خط‌کشی! ابتدا روی محور عرض‌ها در عرض از مبدا می‌نشینیم! و سپس یک واحد به سمت جلو یعنی xهای مثبت حرکت می‌کنیم. اگر شیب $+a$ بود، a واحد به بالا و اگر $-a$ بود، a واحد به سمت پایین می‌ریم.

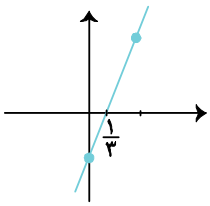
$y=-۳x+۲$ (خط ۶)



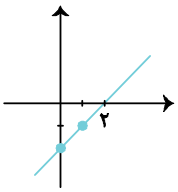
$y=-۲x+۱$ (خط ۵)



$y=۳x-۱$ (خط ۴)



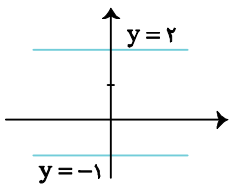
$y=x-۲$ (خط ۳)



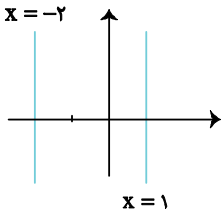
تا الان ۶ تا خط با هم کشیدیم. خط‌های ۱ و ۳ و ۴ صعودی، خط‌های ۲ و ۵ و ۶ نزولی‌اند. خط‌های صعودی قبل از ریشه منفی و بعد از ریشه مثبت و خط‌های نزولی برعکس یعنی قبل از ریشه علامتشون مثبت و بعد از ریشه منفیه. ۲ مدل خط دیگه هم داریم که در موردش صحبت نکردیم هنوز. اگه گفتی؟!

خطوط $x=k$ و خطوط $y=k$. خطوط $y=k$ خطوط افقی هستن که تو رسم توابع براکتی ازشون خیلی استفاده می‌کنیم. در تشخیص یک به یک بودن تابع هم لازم می‌شن. خطوط $x=k$ هم خطوط عمودین که برای تشخیص تابع بودن از روی نمودار ازشون استفاده می‌کنیم. مثل اینا:

(خط ۸)



(خط ۷)



علامتشون هم که عوض نمی‌شه.

حالا که فهمیدیم خط چیه بریم سراغ روش‌های نوشتن معادله خط:

۱) با داشتن دو نقطه $B(x_۲,y_۲),A(x_۱,y_۱)$

اول شیب AB رو پیدا می‌کنیم.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

در گام دوم با استفاده از یکی از نقطه‌ها (مثلاً A) و m معادله خط رو می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

مثال ۱ معادله خط گذرنده از دو نقطه با مختصات $A(۱,۴)$ و $B(۳,۸)$ را بنویسید:

پاسخ:

گام اول: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۸-۴}{۳-۱}=\frac{۴}{۲}=۲$

گام دوم: $\left.\begin{matrix}A(۱,۴)\\ m=۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow y-۴=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x+۲$

۲) با داشتن یک نقطه و شیب

$$\left.\begin{matrix}A(x_۱,y_۱)\\ \text{شیب }=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱)$$

مثال ۲ معادله خطی بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده و موازی با نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

پاسخ:

تذکر ۱ محل تلاقی با محور xها؛ $y=۰$ و محل تلاقی با محور yها؛ $x=۰$، پس اینجا نقطه $(۳,۰)$ رو داریم:

تذکر ۲ نیمساز ناحیه اول و سوم هم که خط $y=x$ است و شیب آن برابر یک.

البته اگر می‌گفت نیمساز ناحیه دوم و چهارم خط $y=-x$ بود و شیبش می‌شد (-۱).

حالا بریم معادله خط رو بنویسیم: $\left.\begin{matrix}A(۳,۰)\\ m=۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow y-۰=۱(x-۳)\Rightarrow y=x-۳$

مثال ۳ معادله خطی را بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع کند.

پاسخ: طبق تذکر شماره ۱ در مثال قبلی داریم: $\left.\begin{matrix}A(\frac{۱}{۲},۰)\\ B(۰,-۲)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۲-۰}{۰-\frac{۱}{۲}}=\frac{-۲}{-\frac{۱}{۲}}=۴$

حالا قطعاً از نقطه B که راحت‌تره استفاده می‌کنیم: $\left.\begin{matrix}B(۰,-۲)\\ m=۴\end{matrix}\right\}y-(-۲)=۴(x-۰)\Rightarrow y=۴x-۲$

در دوران دیرینگ دیرینگ نوشتن معادله خط با روش زیر رونق فراوان داشت.

اگر خط از نقاط $(P,۰)$ و $(۰,q)$ بگذرد P را طول از مبدأ و q را عرض از مبدأ گوییم. شایسته است از فرمول $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ برای نوشتن معادله این خط استفاده کنیم. پس مثال بالا را با این فرمول حل می‌کنیم:

حالا برای رهایی از این مخمصه طرفین را در (۲-) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}A(\frac{۱}{۲},۰)\Rightarrow P=\frac{۱}{۲}\\ B(۰,-۲)\Rightarrow q=-۲\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{\frac{۱}{۲}}+\frac{y}{-۲}=۱\Rightarrow ۲x+\frac{y}{-۲}=۱$$

$$-۴x+y=-۲\Rightarrow y=۴x-۲$$

سپس نزد وی رفتند و وی ایشان را گفت:
نصیحت امروز
مورچه چیه که کلّه پاچش باشه!!!

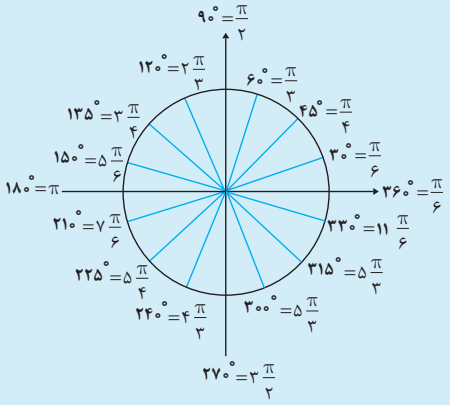
تذکر ۳ بجای اینکه بگیم شیب همون تانژانته می‌گیم تانژانت همون شیبه! شیب خط رو می تونیم از طریق تانژانت زاویه‌ای که با جهت مثبت محور xها می‌سازه هم بدست بیاریم.

البته لازمه‌ی این کار، اینه که تانژانت‌ها رو بلد باشیم. پس مجبورم دایره تانژانت رو بهتون یاد بدم که البته تو کتاب دهم هم داشتیم. شیب خط افقی صفره. پس تو صفر و π؛ تانژانت می‌شه صفر. شیب خط عمودی یا قائم بی‌نهایته که البته بعضی از دوستان نزد وی رفتند و گفتند تعریف نشده!!! که الان موضوع بحث ما نیست! پس در $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تانژانت می‌شه ∞. روی خط $y=x$ یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم شیب یکه پس تانژانت

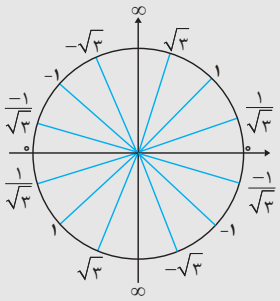
در زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ یک میشه. برعکس روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم شیب (-1) میشه پس در زوایای $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$، $\tan\alpha=-1$. بین ۰ و $\frac{\pi}{4}$ شیب کمتر از یکه که بعداً تو فصل ۴ ثابت می‌کنیم می‌شه $\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ شیب بیشتر از یکه و بعداً ثابت می‌کنیم می‌شه $\sqrt{3}$!

اینجا لازمه زاویه‌ها رو هم، در کنار دایره تانژانت ببینید. البته دوستان عزیزمون در کتاب دهم به طرز شگفت‌انگیزی ابتکار زدند و زاویه‌ها رو برحسب رادیان به شما یاد ندادند؛ مبادا شما ظرفیت نداشته باشید. 😊

۱۶ زاویه‌ی اصلی برحسب رادیان و درجه:



دایره تانژانت:



مثال ۴ **معادله خطی را بنویسید که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده و با جهت مثبت محور xها زاویه ۶۰° می‌سازد.**

پاسخ: عرض از مبدأ (-1) و شیب هم $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{3}$. می‌دونیم $y=ax+b$ پس داریم: $y=\sqrt{3}x-1$

از هیچ نکته‌ای هم استفاده نکردیم. 😊

بخش دوم: وضعیت دو خط نسبت به هم (در صفحه)

قبل از اینکه بخوام وضعیت دو خط رو نسبت به هم بررسی کنم لازمه بهتون بگم که خط دو تا فرم داره:

۱) فرم استاندارد: $y=ax+b$، شیب $=a$

۲) فرم گسترده: $ax+by+c=0$

حالا تو فرم گسترده شیب رو چه جوری پیدا کنیم؟!

عشق فرمول‌ها حفظ می‌کنند که در فرم گسترده شیب برابر است با: $-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$ یعنی همون $-\frac{a}{b}$.

ما می‌گیم اگه یادت رفت هم موردی نداره. استانداردش کن. چه جوری؟ اینجوری:

$$by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Rightarrow m=-\frac{a}{b}$$

حالا می‌رسیم به وضعیت دو خط. اگر شیب‌هاشون برابر بود دو حالت پیش میاد یا موازی هستند و یا منطبق. مثلاً دو خط $y=2x-3$ و $y=2x+1$ موازی هستند ولی دو خط $y=2x-3$ و $2y=4x-6$ به هم منطبقند چون اگر طرفین معادله دوم رو به ۲ تقسیم کنیم همون خط اول میشه.

اگر شیب‌ها یکی نبود دو خط متقاطع هستند که در حالت خاص $m'=-\frac{1}{m}$ دو خط بر هم عمودند. البته بعضی‌ها این رو به شکل سخت‌تری بیان می‌کنن و می‌گن حاصلضرب شیب‌هاشون میشه (-1).

مثال ۱ **معادله خطی را بنویسید که خط $y=2x+1$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده و بر خط $y=-\frac{1}{4}x+3$ عمود باشد.**

پاسخ: وقتی خط $y=2x-1$ رو در نقطه به سه یک قطع می‌کنه داریم:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow y=2(3)-1=5 \Rightarrow A(3,5)$$

و چون بر خط $y=-\frac{۱}{۴}x+۳$ عموده، شیب می‌شه قرینه و معکوس $-\frac{۱}{۴}$ یعنی ۴.

$$\begin{cases}A(۳,۵)\\ m=۴\end{cases} \Rightarrow y-۵=۴(x-۳) \Rightarrow y=۴x-۷$$

تقاطع دو خط

دو حالت وجود داره:

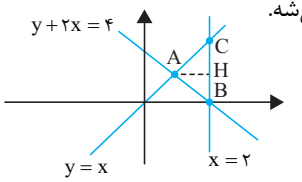
حالت ۱: این $y=$ ، اون $y=$ ⇐ این = اون

حالت ۲: $y=ax+b$ ، $x=k$ ⇐ $y=ak+b$ (مثال بالا)

مثال ۲ **معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $y+۲x=۴$ و $x=۲$ و نیمساز ناحیه‌ی اول است معادله‌ی خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟**

۱) $y=\frac{۴}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y=\frac{۳}{۲}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

پاسخ: کافیه سه ضلع مثلث رو رسم کنیم تا معلوم بشه کدومشون از همه بزرگتره چون کوچکترین ارتفاع به بزرگترین ضلع وارد میشه. از روی شکل کاملاً واضحه که AH کوتاه‌ترین ارتفاعه، چون روی یک خط افقی قرار می‌گیره به صورت $y=k$ می‌شه.



حالا بریم محل تلاقی $y=x$ و $y+۲x=۴$ را پیدا کنیم تا ارتفاع مشخص شود.

$$\text{تلاقی} \rightarrow -۲x+۴=x \rightarrow ۳x=۴ \rightarrow x=\frac{۴}{۳} \rightarrow y=\frac{۴}{۳}$$

پس جواب گزینه ۱

مثال ۳ **به ازای کدام مقادیر m خط Δ به معادله $۳y-۲x=۷$ و خط d به معادله $y=mx+۴$ ...**

الف) با هم موازیند؟ **ب) بر هم عمودند؟**

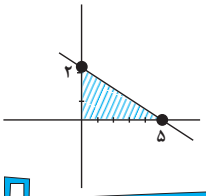
پاسخ: اگه بخوایم موازی باشن باید شیب‌هاشون برابر باشه. پس لازمه اول شیب خط Δ رو تعیین کنیم:

$$۳y=۲x+۷ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۷}{۳}$$

حالا اگه $m=\frac{۲}{۳}$ باشه دو خط موازین و اگه $m=-\frac{۳}{۲}$ باشه بر هم عمودند!

مثال ۴ **خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند با محورهای مختصات چه مساحتی می‌سازد؟**

پاسخ: بهترین راه برای حل چنین مسائلی رسم شکل است.



$$S_{\Delta}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{۵\times۲}{۲}=۵$$

در دوران دیرینگ‌دیرینگ می‌گفتند مساحت مثلثی که خط با طول از مبدأ P و عرض از مبدأ q می‌سازد برابر است با: $\frac{۱}{۲}|p\times q|$. نزد وی رفتند و گفتند ما را نصیحتی ده که آن به، و وی آنان را نصیحت فرمود.

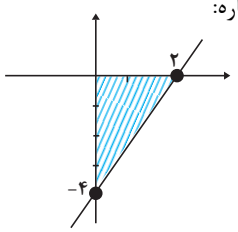
این روش‌ها زشت است.

ریاضیات یعنی دیدن و فهمیدن

و نه حفظ کردن فرمول‌های بدرد نخور و ویترینی!

مثال ۵ **خط به معادله $y=۲x-۴$ با محورهای مختصات چه مساحتی ایجاد می‌کند؟**

پاسخ: این هم مثل مثال قبلیه فقط باید یک صلیب بکشیم و تلاقی با محورها رو پیدا کنیم. شکل هم که بهترین کاره:



x	y
۰	-۴
۲	۰

$$S_{\Delta}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

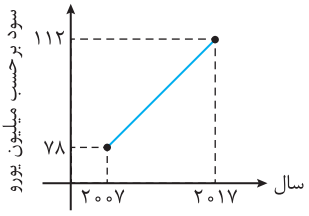
چند مثال تشریحی

مثال ۱ **سود سالانه یک شرکت بیمه در حد فاصل سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۷، برطبق نموداری است که توسط حسابداران این شرکت بیمه تهیه شده است. با استفاده از نقطهٔ میانی پاره‌خط موارد زیر را مشخص کنید.**

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در طی ۱۰ سال مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در چه سالی، مقدار سود سالانه با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

ج) اگر سود سالانه برای دههٔ آتی بر طبق همین روند افزایش یابد، میزان سود سالانهٔ شرکت در سال ۲۰۲۷ به چه میزان خواهد رسید؟



پاسخ: الف) میانگین سود سالانه شرکت برابر با شیب نموداره: پس داریم:

$$m=\frac{۱۱۲-۷۸}{۲۰۱۷-۲۰۰۷}=\frac{۳۴}{۱۰}=۳/۴$$

ب) چون این تابع خطیه و شیب ثابته، عرض نقاط تشکیل تصاعد عددی میده و همیشه وسطیش میانگین میشه. پس سود در سال ۲۰۱۲ با میانگین برابره.

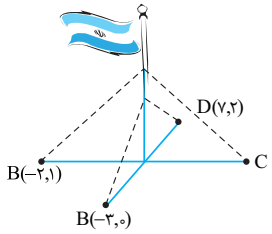
ج)

$$m=۳/۴ \qquad (۲۰۰۷,۷۸)$$

$$y-۷۸=۳/۴(x-۲۰۰۷) \Rightarrow y=۳/۴x-۶۸۲۳/۸+۷۸ \Rightarrow y=۳/۴(۲۰۲۷)-۶۸۲۳/۸+۷۸=۱۴۶$$

البته در مورد قسمت ج؛ اینجوری هم می‌تونستیم بگیم که چون میانگین سود سالانه ۳/۴ بود و در طی ۱۰ سال این عدد به ۳۴ میلیون یورو می‌رسد و به لحاظ اینکه شیب خط ثابته، پس در طی ۱۰ سال آینده هم همین میزان سود (یعنی ۳۴ میلیون یورو) به عدد سال دوازدهم یعنی ۱۱۲ اضافه میشه و سود سالانه شرکت در سال ۲۰۲۷ ؛ به ۱۴۶ میلیون یورو می‌رسه.

مثال ۲ **در یک پادگان نظامی، یک میلهٔ پرچم توسط کابل‌هایی مطابق شکل زیر در ۴ نقطه A، B ، C ، D به زمین محکم شده است. این ۴ نقطه به گونه‌ای انتخاب شده که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله است. مختصات نقطهٔ C را به دست آورید.**



پاسخ: چون گفته فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر فاصلهٔ نقطهٔ مقابلش تا میله هست پس مختصات محلی که میلهٔ پرچم قرار گرفته به عنوان مختصات وسط محسوب میشه. کافیه مختصات نقطهٔ وسط B و D رو به دست بیاریم:

$$\left(\frac{x_B+x_D}{۲},\frac{y_B+y_D}{۲}\right)=\left(\frac{-۳+۷}{۲},\frac{۰+۲}{۲}\right)=(۲,۱)$$

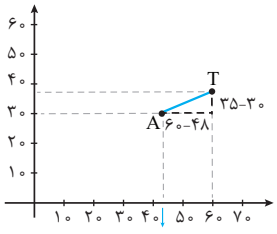
پس مختصات وسط AC هم برابره با (۲,۱):

$$\left(\frac{x_A+x_C}{۲},\frac{y_A+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{-۲+x_C}{۲},\frac{۱+y_C}{۲}\right)=(۲,۱)$$

$$\frac{-۲+x_C}{۲}=۲ \Rightarrow x_C=۶ \quad , \quad \frac{۱+y_C}{۲}=۱ \Rightarrow y_C=۱ \Rightarrow C(۶,۱)$$

مثال ۳ **بر اساس اطلاعات منتشر شده از سوی سامانه اطلاعات جغرافیایی (GIS)، مختصات طول و عرض جغرافیای شهر آبادان به صورت تقریبی برابر با (۴۸,۳۰) می‌باشد. توسط همین سامانه، مختصات جغرافیایی شهر تایباد (۶۰,۳۵) اعلام شده است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی برابر با مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی باشد و این مقدار به صورت تقریبی برابر با ۱۱۱ کیلومتر باشد فاصلهٔ مستقیم میان این دو شهر چقدر است؟**

پاسخ: اگه بخوام مختصات دو تا شهر رو روی دستگاه مختصات دکارتی نشون بدم، اونوقت واسه محاسبه فاصله بین دو تا شهر، کافیه از رابطهٔ فیثاغورث فاصله بین دو شهر رو به دست بیارم.



آبادان $\rightarrow A(۴۸,۳۰)$

تایباد $\rightarrow T(۶۰,۳۵)$

$$(AT)^۲=(۱۲)^۲+(۵)^۲ \Rightarrow (AT)^۲=۱۴۴+۲۵=۱۶۹ \Rightarrow AT=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

مسافت فیزیکی دو شهر $۱۳\times۱۱۱(km)=۱۴۴۳$ کیلومتر

فصل اول — سؤالات کنکور

۱. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۲. معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟ (تجربی ۸۴)

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۳. دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y=x-۱$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقطه‌ها از خط به معادله‌ی $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) ۹ و ۱۵− ۲) ۱۱ و ۱۵− ۳) ۱۵ و ۱۱− ۴) ۹− و ۱۱

۴. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (تجربی ۹۰ خارج)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۵. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۶. نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

فصل اول — مرحله‌ی تثبیت

۷. نقاط $A(۴,۱)$ و $B(۸,-۲)$ و $C(۰,۰)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول پاره‌خطی که وسط AC را به وسط BC وصل می‌کند کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) ۳

۸. به ازای چه مقدار m نقطه‌ی $A(۲m+۵,m+۱)$ از دو محور مختصات به یک فاصله است؟

۱) ۱ و ۴− ۲) ۲− و ۴− ۳) ۱− و ۳ ۴) ۲ و ۲−

۹. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $۲y+x=۱$ و $۳y-۴x=۱۸$ از خط به معادله‌ی $x=۱$ چقدر است؟ (سنجش ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰. فاصله‌ی نقطه‌ی $(۲,-۱)$ از خط به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۲}x+۳$ کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۱. دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y=x-۱$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقطه‌ها از خط به معادله‌ی $۳x-۲y=۶$ برابر $\sqrt{۵۲}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۲۵− و ۲۰ ۲) ۳۰− و ۲۲ ۳) ۲۲− و ۳۰ ۴) ۲۵− و ۲۰−

۱۲. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $۲y+m=mx+۴$ برابر ۲ است. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۳. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $y = ax + b$ برابر ۱ واحد است. اگر این خط از نقطه‌ی $(۱,۲)$ گذشته باشد، a کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۴. فاصله‌ی خطی که دو نقطه‌ی $A(۰,۰)$ و $B(۱,۱)$ را به هم وصل می‌کند از خطی که دو نقطه‌ی $C(۱,۳)$ و $D(۲,۴)$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۲۰ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۵. خطی که از نقاط $(-۱,۱)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد با محورهای مختصات چه مساحتی می‌سازد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۶. خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{-۳}{۲}$ قطع کند و از نقطه‌ی $(۱,۵)$ بگذرد محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سنجش ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷. خطی که از نقاط $(-۱,۰)$ و $(۰,۲)$ می‌گذرد، خط $y = x$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(۲,۲)$ ۲) $(-۲,-۲)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(-۳,-۳)$

۱۸. به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $y = x\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}(y+a)+x=۰$ بر هم عمودند؟ (سنجش ۹۱)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۱۹. به ازای کدام مقدار m دو خط به معادلات $(m+۱)x+my=۳$ و $(۱+۳m)y=۵-۳mx$ موازی‌اند؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{-۱}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۰. نقطه‌ی $(۲,-۱)$ مرکز مربع و معادله‌ی یک ضلع آن به صورت $۴x-۳y=a$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار a مساحت مربع ۱۶ واحد است؟ (سنجش ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱. نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل‌اند مساحت مستطیل چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۲۲. سه خط به معادله‌های $x+y=۲$ ، $x-y=۰$ و $y=-۱$ مثلثی ساخته‌اند. مساحت آن کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۲۳. نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(-۵,۲)$ و $C(-۲,۵)$ سه رأس مربع‌اند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۲۴. دو نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ و $B(-۳,۰)$ دو سر قطری از یک مربع‌اند. مساحت مربع کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۵. اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $۲y+x=۸$ و $۳y+x=۴$ و $y=۲x-۱$ هستند. نوع مثلث کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین
۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع

۲۶. نقاط $A(۶,۵), B(-۱,۴)$ و $C(۵,۲)$ سه رأس مثلثی هستند. فاصله نقطه M وسط BC از ارتفاع AH کدام است؟ (سنجش ۹۴)

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۷. طول قطر مربعی که یک ضلع آن منطبق بر خط $۲y-x=۵$ و یک رأس آن نقطه $(-۱,۷)$ باشد، کدام است؟ (سنجش ۹۴)

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۸. نقطه $O(۲,۳)$ مرکز مربعی که نقطه $A(۵,-۱)$ یک راس آن است. مساحت این مربع کدام است؟ (سنجش ۹۳)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۰

۲۹. سه نقطه‌ی $(۰,۴),(۰,۲)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه‌ی وارد بر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟ (کانون ۹۲)

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

۳۰. اگر فاصله‌ی دو خط موازی $y=2x+a$ و $2y=4x+1$ برابر $\sqrt{5}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ (گزینه دو ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱ ۴) ۱۱

۳۱. به ازای کدام مقدار k سه خط به معادلات $x+2y=5$، $x-y=1$ و $2y-3x=\frac{k}{3}$ همرس هستند؟ (گزینه دو ۹۳)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۸ ۴) -۱۳

۳۲. اگر نقاط $A(1,2)$، $B(3,7)$، $C(4,5)$ و $D(m+1,n-1)$ مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل mn کدام است؟ (گزینه دو ۹۵)

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۳۳. معادله‌ی سه ضلع مثلثی به صورت $AB: x+2y=3$، $AC: y=2x-1$ و $BC: x+y=4$ است. طول ارتفاع AH کدام است؟ (گزینه دو ۹۱)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۳۴. یک ضلع مربعی بر خط $3y-4x=a$ قرار دارد و محل برخورد قطرهای آن $O(1,1)$ است. اگر مساحت این مربع ۴ باشد، مقدار منفی a کدام است؟ (گزینه دو ۹۳)

۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۶ ۴) -۷

۳۵. در مثلثی با رئوس $A(2,3)$، $B(0,-1)$ و $C(-2,1)$ طول میانه‌ی وارد بر ضلع AB کدام است؟ (گزینه دو ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶. نقاط $A(1,-2)$، $B(0,1)$ و $C(4,7)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ ۴) $\frac{9}{\sqrt{13}}$

۳۷. نقطه‌ی $A(0,-2)$ رأس مربعی است که معادله‌ی یک ضلع آن $y+\sqrt{3}x=4$ است. محیط مربع کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۳۸. خطوط $2x-y=5$ و $3x+6y=1$ دو ضلع یک مستطیل و مبدأ مختصات یک رأس آن است، محل برخورد دو قطر این مستطیل کدام است؟

۱) $(\frac{5}{13},\frac{-3}{13})$ ۲) $(\frac{31}{30},\frac{-13}{30})$ ۳) $(\frac{31}{15},\frac{-13}{15})$ ۴) $(\frac{31}{45},\frac{-15}{45})$

۳۹. مساحت مثلثی با سه رأس $A(3,4)$، $B(4,-1)$ و $C(1,1)$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۵)

۱) $\frac{13}{2}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) ۶

فصل اول — سؤالات چالشی و سخت

۴۰. فاصله‌ی نقطه‌ای که روی محور طول‌ها قرار داشته و از دو نقطه‌ی $A(1,2)$ و $B(-1,3)$ به یک فاصله باشد تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۱. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به‌معادله‌ی $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۳

۴۲. چند خط از نقطه‌ی $(-3,0)$ می‌گذرند و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۱۵ واحد می‌سازند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۳. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(-1,4)$ و $B(1,-2)$ به یک فاصله باشد کدام است؟

۱) $x+2y=-1$ ۲) $3x+2y=5$ ۳) $-y+2x=4$ ۴) $3y-x=3$

۴۴. معادله‌ی اقطار یک دایره به صورت $mx-y-m+2=0$ است. اگر خط $3x+4y+14=0$ بر این دایره مماس باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) 9π ۲) 2π ۳) 25π ۴) 36π

۴۵. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی $(۱,۲)$ بگذرد و با محورهای مختصات، در ناحیه‌ی اول، مثلثی به مساحت $\frac{۹}{۲}$ بسازد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۶. نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث با سه رأس $(۰,۳)$ ، $(۳,۰)$ و $(۴,۳)$ کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۳,۲)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۷. خط به معادله‌ی $۲y-۳x+۶=۰$ محورهای x و y را به ترتیب در A و B قطع کرده است. نقطه‌ی P امتداد AB با شرط $PB=۲PA$ انتخاب شده است. فاصله‌ی P تا مبدأ مختصات کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸. معادله‌ی چهار ضلع یک مستطیل به صورت $۲x+y=۵$ ، $۲x+y=۳$ ، $x-۲y=۱۴$ و $x+ay=۶$ می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟ (گزینه دو ۹۵)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۱۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۸\sqrt{۵}$

۴۹. فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادله‌های $y=x\sqrt{۳}+۱$ و $ax+by=۶$، برابر ۰/۵ واحد است، a کدام است؟ (کانون ۹۱)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $-۳\sqrt{۳}$

درس اول
هندسه تحلیلی

۵۰. دو ضلع یک مربع روی دو خط به معادله‌های $y=\frac{x}{۲}-\frac{۵}{۴}$ و $۸y-۴x=K$ قرار دارند. اگر مساحت این مربع ۱/۸ واحد مربع باشد، آنگاه مقدار مثبت K کدام است؟ (کانون ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

۵۱. خطی که از نقاط متمایز $A(m,-۱)$ و $B(۱,۱-۲m)$ می‌گذرد، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است. این خط محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟ (کانون ۹۴)

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) $-۱/۵$ ۴) $-۲/۵$

درس دوم
تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجهٔ دوم

۵۲. مساحت مستطیلی که دو ضلع مشترک در یک رأس آن روی خطوط به معادله‌ی $۳x-y=۵$ و $x-ay=۴$ واقع‌اند و نقطه‌ی $A(-۳,۴)$ یک رأس آن است، کدام است؟ (کانون ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۳. اگر معادله‌ی یکی از قطرهای مربعی به صورت $y=۲x-۱$ و نقطه‌ی $(۵,-۱)$ یک رأس این مربع باشد، آن‌گاه مجموع طول و عرض مرکز این مربع کدام است؟ (کانون ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۵۴. ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادله‌ی $۲y+x=۳$ واقع و یک راس آن نقطه‌ی $(-۱,۰)$ است. اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور x ها منطبق باشد، طول میانه‌ی وارد بر این ضلع چه قدر است؟ (کانون ۹۵)

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۵

درس سوم
معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۵۵. دو خط به معادلات $۳x+۲y=۵$ ، $۳y-۲x+۱=۰$ قرینه نسبت به خطی با کدام معادله‌اند؟ (سنجش ۹۵)

۱) $۲x+y=۲$ ۲) $۲x-y=۲$ ۳) $x+۵y=۴$ ۴) $x+۳y=۳$

فصل اول — پاسخنامه

۱. **گزینه ۲** **روش اول:** ابتدا طول هر سه ضلع را به دست می‌آوریم:

یادآوری: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از یکدیگر برابر است با: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \quad , \quad AC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \quad , \quad BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

به وضوح مشخص است که مثلث ABC، متساوی‌الساقین $(BC = AC = \sqrt{13})$ و در رأس C قاعده است زیرا طول سه ضلع در رابطه‌ی فیثاغورث صدق می‌کنند: $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$

پس مساحت مثلث برابر است با: $S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6/5$

روش دوم: مختصات سه راس را بر روی دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌کنیم:

از روش متمم‌گیری استفاده می‌کنیم. ابتدا مساحت مستطیل بزرگ را می‌یابیم و سپس به اندازه‌ی $(S_1 + S_2 + S_3)$ از آن کم کنیم تا S به دست آید:

مساحت مستطیل = طول × عرض $= 3 \times 5 = 15$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \\ S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 \\ S_3 = \frac{1}{2} \times 1 \times 5 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{17}{2} \Rightarrow S = 15 - \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6/5$$

روش سوم: S را مستقیماً حساب کنیم: $S_3 = \frac{1}{2}$ قاعده × اارتفاع $= \frac{1}{2} BC \times AH$

BC را از فرمول فاصله‌ی دو نقطه از هم به دست می‌آوریم و AH را از فرمول فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

یادآوری: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط D به معادله‌ی $D: ax + by + c = 0$ از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\begin{cases} B = (3,0) \\ C = (0,2) \end{cases} \Rightarrow BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ حالا معادله‌ی خط BC را به دست می‌آوریم:

معادله‌ی خط BC: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6$

نکته معادله‌ی خطی که محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی $(x_0, 0)$ و $(0, y_0)$ قطع می‌کند به صورت $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$ است.

حالا فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2,5)$ از خط $2x + 3y - 6 = 0$ را به دست می‌آوریم: $AH = \frac{|4 + 15 - 6|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$

وقت محاسبه‌ی S است: $S = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13}{2} = 6/5$

روش چهارم: برای محاسبه‌ی مساحت مثلث ABC که مختصات سه راس آن به صورت مقابل می‌باشند: $A\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$

روش مقابل وجود دارد:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \oplus A & \oplus B & \oplus C & A \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \\ \ominus & \ominus & \ominus & \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_1 y_3 + x_3 y_2 + x_2 y_1) \right|$$

در این مثال:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \oplus B & \oplus C & \oplus A & B \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ \ominus & \ominus & \ominus & \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (6 + 0 + 0) - (15 + 4 + 0) \right| = \frac{1}{2} |6 - 19| = \frac{1}{2} \times 13 = \frac{13}{2} = 6/5$$

۲. **گزینه ۱** اول از همه سه تا رأس رو به دست میاریم:

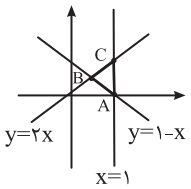
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,0)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$\begin{cases} y = ۲x \\ x = ۱ \end{cases} \Rightarrow C(۱,۲)$

باید بدونیم که کوتاه‌ترین ارتفاع به ضلعی وارد می‌شه که بیشترین طول‌رو داره:

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(۱-\frac{۱}{۳})^۲ + (۰-\frac{۲}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \\ AC = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۴} = ۲ \\ BC = \sqrt{(۱-\frac{۱}{۳})^۲ + (۲-\frac{۲}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۱۶}{۹}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۳} \end{cases} \Rightarrow AB < BC < AC$$



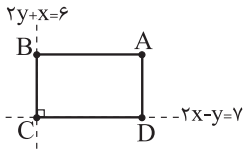
و اما AC ضلعه که روی خط قائم قرار داره، پس ارتفاعی که بهش وارد میشه باید افقی باشه، حالا به گزینه‌ها نگاه کن فقط $y = \frac{۲}{۳}$ افقیه. $BH = \frac{۲}{۳}$

۳. **گزینه ۲** نقطه‌هایی که روی خط $y = x - ۱$ قرار دارن، همگی یه خصوصیت دارن. این‌که اگه طولشون x باشه، عرضشون $x - ۱$ می‌شه، این نقطه‌هایی هم که ما دنبالشون می‌گردیم همین مختصات رو دارن: $A(x, x-۱)$

$$d = \frac{|(۲)(x)+(-۳)(x-۱)-۵|}{\sqrt{۴+۹}} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow |-x-۲| = ۱۳ \Rightarrow |x+۲| = ۱۳ \Rightarrow \begin{cases} x+۲ = ۱۳ \\ x+۲ = -۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۱ \\ x = -۱۵ \end{cases}$$

یعنی گزینه‌ی ۲

۴. **گزینه ۲** چون مختصات رأس $A(۸,۵)$ تو معادلات اضلاع داده شده صدق نمی‌کنه، پس نقطه‌ی A روی هیچ‌کدوم از این اضلاع نیست. پس طول ضلع AD با فاصله‌ی A از خط $۲x - y = ۷$ و طول ضلع AB با فاصله‌ی A از خط $۲y + x = ۶$ به‌دست میاد.



$$AD = \frac{|۲x_۰ - y_۰ - ۷|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} \overset{A(۸,۵)}{=\!=} \frac{|۱۶-۵-۷|}{\sqrt{۵}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$AB = \frac{|۲y_۰ + x_۰ - ۶|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} \overset{A(۸,۵)}{=\!=} \frac{|۱۰+۸-۶|}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

مساحت مستطیل رو هم که بلدی دیگه: $S = AD \times AB = \frac{۴}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$ پس جواب میشه گزینه‌ی ۲.

۵. **گزینه ۳** خب اولاً بدون چک کردن شیب‌ها مطمئن باش که دو خط، موازی هستن، چون در غیر این صورت به هیچ عنوان مساحت مربع قابل محاسبه نبود. فاصله‌ی بین دو خط موازی میشه طول یک ضلع مربع. پس برای اینکه بتونیم از رابطه فاصله‌ی دو خط موازی استفاده کنیم باید ضرایب x, y یکی باشن و همه به یک طرف تساوی منتقل شده باشن:

$$\begin{matrix} ۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow ۲x - ۲y - ۳ = ۰ \\ y = x + ۱ \Rightarrow ۲x - ۲y + ۲ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{|-۳-۲|}{\sqrt{(۲)^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۸}}$$

مساحت مربع رو هم که از کودکی به یاد داری که یک ضلع ضربدر خودش:

$$S = \frac{۵}{\sqrt{۸}} \times \frac{۵}{\sqrt{۸}} = \frac{۲۵}{۸}$$

پس جواب تستمون می‌شه گزینه‌ی «۳».

۶. **گزینه ۴** $A(۳,-۱)$

نقطه‌ی A، مرکز مربع است. فاصله‌ی نقطه‌ی A از هر ضلع برابر $\frac{a}{۲}$ است: $\frac{a}{۲} =$ فاصله‌ی A از هر ضلع

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{|۳+۲+۵|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = ۴\sqrt{۵} \Rightarrow S = a^۲ = (۴\sqrt{۵})^۲ = ۸۰$$

۷. **گزینه ۱** نقطه‌ی وسط یه پاره‌خطرو که یادتونه چه جوری به دست میومد؟ طولش می‌شد میانگین طول‌ها، عرضش هم می‌شد میانگین عرض‌ها:

$$M_{AC} = (\frac{x_A + x_C}{۲}, \frac{y_A + y_C}{۲}) = (\frac{۴+۰}{۲}, \frac{۱+۰}{۲}) = (۲, \frac{۱}{۲})$$

$$M_{BC} = (\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}) = (\frac{۸+۰}{۲}, \frac{-۲+۰}{۲}) = (۴, -۱)$$

حالا باید فاصله‌ی بین دو تا نقطه به دست بیاد.

$$d = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲} \Rightarrow d = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۱-\frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{۴+\frac{۹}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}$$

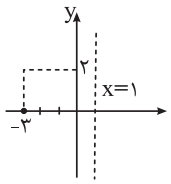
۸. **گزینه ۲** هر نقطه‌ای که از محور x و y فاصله‌ی برابر داشته باشه، حتماً حتماً باید روی خط $y = x$ یا $y = -x$ باشه پس:

$$\begin{cases} y = x \Rightarrow ۲m + ۵ = m + ۱ \Rightarrow m = -۴ \\ y = -x \Rightarrow m + ۱ = -۲m - ۵ \Rightarrow ۳m = -۶ \Rightarrow m = -۲ \end{cases}$$

۹. **گزینه ۳**

$$\begin{cases} ۲y = -x + ۱ \Rightarrow y = \frac{-x}{۲} + \frac{۱}{۲} \\ ۳y = ۴x + ۱۸ \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x + ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{قطع می دیم}} \frac{-x}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۳}x + ۶ \Rightarrow \frac{۱۱}{۶}x = \frac{-۱۱}{۲} \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow y = ۲$$

از روی شکل فاصله‌ی نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۳\\۲\end{bmatrix}$ تا خط $x=۱$ کاملاً معلومه.



۱۰. **گزینه ۲**

$$۲y=x+۶\Rightarrow ۲y-x-۶=۰$$

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|(-۱)(۲)+(۲)(-۱)-۶|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

۱۱. **گزینه ۳** نقطه‌هایی که روی خط $y=x-۱$ قرار دارن، همگی یه خصوصیت دارن. این‌که اگه طولشون x باشه، عرضشون $x-۱$ می‌شه، این نقطه‌هایی هم که ما دنبالشون می‌گردیم همین مختصات رو دارن: $A(x,x-۱)$

$$d=\frac{|(۳)(x)+(-۲)(x-۱)-۶|}{\sqrt{۴+۹}}=۲\sqrt{۱۳}\Rightarrow |x-۴|=۲۶\Rightarrow \begin{cases}x-۴=۲۶\\x-۴=-۲۶\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=۳۰\\x=-۲۲\end{cases}$$

۱۲. **گزینه ۳** $O(۰,۰)\quad -mx+۲y+m-۴=۰$

$$d=\frac{|(-m)(۰)+(۲)(۰)+m-۴|}{\sqrt{m^۲+۴}}=۲$$

$$|m-۴|=۲\sqrt{m^۲+۴}\Rightarrow m^۲-۸m+\cancel{۱۶}=۴m^۲+\cancel{۱۶}\Rightarrow ۳m^۲+۸m=۰\Rightarrow m(۳m+۸)=۰\Rightarrow \begin{cases}m=۰\\m=\frac{-۸}{۳}\end{cases}$$

$$y=۰\Rightarrow -mx+۰+m-۴=۰\Rightarrow x=\frac{m-۴}{m}\Rightarrow \begin{cases}\xrightarrow{m=\frac{-۸}{۳}} x=\frac{۵}{۲}\\ \xrightarrow{m=۰}\text{خط موازی محور } y\text{ها}\Rightarrow\text{محور } x\text{ها رو قطع نمی‌کنه}\end{cases}$$

۱۳. **گزینه ۲**

$$ax-y+b=۰\xrightarrow{x=۱,y=۲} a-۲+b=۰\Rightarrow b=۲-a$$

$$d=\frac{|b|}{\sqrt{a^۲+۱}}=۱\Rightarrow |b|=\sqrt{a^۲+۱}\Rightarrow b^۲=a^۲+۱\Rightarrow (۲-a)^۲=a^۲+۱\Rightarrow \cancel{a^۲}-۴a+۴=\cancel{a^۲}+۱\Rightarrow -۴a=-۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۴. **گزینه ۳** با این دو نقطه که بهمون داده اول معادله‌ی خط رو می‌نویسیم:

$$m_{AB}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$$

شیب خط AB که ۱شد، از مبدأ هم می‌گذره پس می‌شه همون نیمساز ربع اول و سوم خودمون: $AB: y=x$ معادله‌ی

$$m_{CD}=\frac{۴-۳}{۲-۱}=۱$$

CD معادله‌ی: $y-۳=x-۱\Rightarrow y=x+۲$

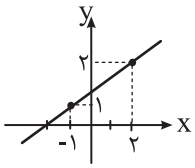
حالا باید فاصله‌ی این دو تا خط موازی (۱) و (۲)رو به دست بیاریم:

$$y-x=۰\ (۱)\qquad y-x-۲=۰\ (۲)$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰-(-۲)|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

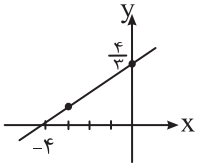
۱۵. **گزینه ۴** وقتی صحبت از مساحت حاصل با محورهای مختصات می‌شه اول باید ببینیم کجا محورها رو قطع می‌کنه، پس باید معادله‌ی خط رو داشته باشی:

این از معادله‌ی خط!



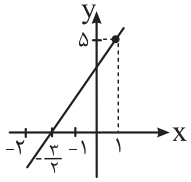
$$m=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۳}(x-(-۱))\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۳}(x+۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$$

حالا محل برخورد با محورهای مختصات:



$$\begin{cases}y=۰\Rightarrow \frac{۱}{۳}x=\frac{-۴}{۳}\Rightarrow x=-۴\\ x=۰\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}\end{cases}\Rightarrow S_{\triangle}=\frac{|ab|}{۲}=\frac{۴(\frac{۴}{۳})}{۲}=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

۱۶. **گزینه ۳** اول معادله‌ی خط رو به دست میاریم:



$$A(\frac{-۳}{۲},۰)\ ,\ B(۱,۵)$$

$$m_{AB}=\frac{۵-۰}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{۵}{\frac{۵}{۲}}=۲$$

حالا باید محل برخورد با محور y ها رو به دست بیاریم، یعنی جایی که $x=0$ باشه:

$$y-5=2(x-1)\Rightarrow y=2x+3 \xrightarrow{x=0} y=3$$

۱۷. **گزینه ۲** اول معادله‌ی خط رو به دست میاریم. بعد با خط $y=x$ تقاطع می‌دیم یعنی باید این دو تا رو تو یه دستگاه بذاریم، جواب حاصل از دستگاه می‌شه محل تقاطع این دو تا خط:

$$m=\frac{0-2}{-1-0}=2\Rightarrow y-0=2(x+1)\Rightarrow \begin{cases} y=2x+2 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow 2x+2=x\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$$

۱۸. **گزینه ۴** شرط این‌که دو تا خط نسبت به هم عمود باشن چی بود؟ $mm'=-1$

اول از همه باید معادله‌ی خط به صورت استاندارد باشه یعنی: $y=mx+h$

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}x\Rightarrow m=\sqrt{3} \\ y+a=-\frac{1}{\sqrt{3}}x\Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-a\Rightarrow m'=\frac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$mm'=-1\Rightarrow \sqrt{3}(\frac{-1}{\sqrt{3}})=-1\Rightarrow -1=-1$$

حاصل‌ضرب شیب‌های این دو تا خط بدون این‌که توجهی به a داشته باشن همیشه -1 می‌شه، پس یعنی a هر مقداری که داشته باشه این دو خط به هم عمود می‌شن.

۱۹. **گزینه ۱** وقتی دو خط موازی می‌شن، حتماً شیب‌هاشون با هم برابره:

$$\begin{cases} (m+1)x+my-3=0\Rightarrow my=-(m+1)x+3 \\ 3mx+(1+3m)y-5=0\Rightarrow (1+3m)y=-3mx+5 \end{cases}\Rightarrow \frac{-m-1}{m}=\frac{-3m}{1+3m}$$

$$\Rightarrow -(m+1)(1+3m)=-3m^2\Rightarrow (3m^2+4m+1)=3m^2\Rightarrow 4m+1=0\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

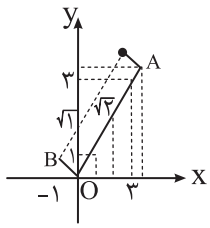
۲۰. **گزینه ۱** ضلع مربع رو از مساحت داده شده به دست میاریم: $S=16\Rightarrow$ اندازه‌ی ضلع $=4$

(فاصله‌ی مرکز مربع از ضلع مربع نصف ضلعش می‌شه.) نصف ضلع $=$

$$4x-3y-a=0\Rightarrow d=\frac{|4(2)-3(-1)-a|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|11-a|}{5}$$

$$\frac{|11-a|}{5}=2\Rightarrow |11-a|=10\Rightarrow 11-a=\pm 10\Rightarrow \begin{cases} a=21 \\ a=1 \end{cases}$$

۲۱. **گزینه ۲** از روی شکل کاملاً مشخصه باید فاصله‌ی OA و OB رو به دست بیاری:

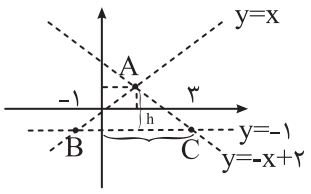


$$|OB|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$|OA|=\sqrt{3^3+3^3}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$S=|OA|\times|OB|=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$$

۲۲. **گزینه ۳** باید اول از همه محل تقاطع هر دو تا خط رو به دست بیاری چون هر رأس مثلث با برخورد دو تا از این خط‌ها به وجود اومده:



$$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=x \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2=x\Rightarrow 2x=2\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}\Rightarrow A(1,1) \\ -x+2=-1\Rightarrow x=3\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}\Rightarrow C(3,-1) \\ x=-1\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}\Rightarrow B(-1,-1) \end{cases}$$

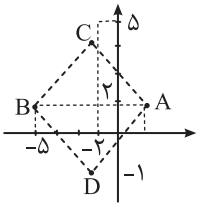
ارتفاع هم که تو این سؤال خیلی راحت به دست میاد فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط $y=-1$ می‌شه ارتفاع ما، یعنی: $h=2$

$$BC=4$$

$$S=\frac{BC\times h}{2}=\frac{4\times 2}{2}=4$$

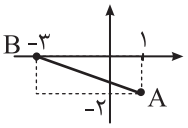
۲۳. **گزینه ۱** اولاً که رأس چهارم یا D با رأس C طول‌هاشون یکیه. پس باید $x_D=-2$ باشه. فاصله‌ی A تا B چند واحده؟ ۶ واحد. پس باید C تا D هم ۶ واحد فاصله داشته باشن یعنی $y_D=-1$.

$$O(2,-1)\Rightarrow D=(-2,-1)\Rightarrow -2-1=-3$$



۲۴. **گزینه ۲**

طول قطر مربع رو به دست بیاریم که همون AB می‌شه:



$$d = |AB| = \sqrt{(-۳-۱)^۲ (۰+۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰}$$

$$S = \frac{d^۲}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

یا یه جور دیگه: حالا رابطه‌ی قطر با طول ضلع تو مربع چی بود؟

$$\left.\begin{matrix} a = \text{طول ضلع} \\ d = \text{قطر} \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = a\sqrt{۲} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{۲}}$$

$$S = a^۲ \Rightarrow S = (\frac{d}{\sqrt{۲}})^۲ = (\frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۲}})^۲ = ۱۰$$

۲۵. **گزینه ۱** با توجه به گزینه‌ها باید دو تا چیز بررسی بشه. یکی این‌که ببینیم طول اضلاع با هم برابرن یا نه، یکی دیگه هم این‌که از روی شیب ضلع‌ها بفهمیم زاویه‌ی قائمه داریم یا نه، یعنی تو حاصل‌ضرب دو به دو شیب‌ها ببینیم -۱ به دست میاد یا نه؟ پس:

$$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \\ ۳y + x = ۴ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۱)$$

$$\begin{cases} ۳y + x = ۴ \\ ۲y + x = ۸ \end{cases} \Rightarrow B(۱۶,-۴)$$

$$\begin{cases} ۲y + x = ۸ \\ ۲x - y = ۱ \end{cases} \Rightarrow C(۲,۳)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |AB| = \sqrt{(۱۵)^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۲۵۰} \\ |AC| = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵} \\ |BC| = \sqrt{(۱۴)^۲ + (-۷)^۲} = \sqrt{۲۴۵} \end{cases} \xrightarrow{\text{اندازه ی ضلع ها یکی نیست}}$$

پس نه متساوی‌الساقین میشه و نه متساوی الاضلاع

$$\begin{cases} L_۱ : ۲y + x = ۸ \Rightarrow m_{L_۱} = \frac{-۱}{۲} \\ L_۲ : ۳y + x = ۴ \Rightarrow m_{L_۲} = \frac{-۱}{۳} \\ L_۳ : y = ۲x - ۱ \Rightarrow m_{L_۳} = ۲ \end{cases} \Rightarrow m_{L_۱} . m_{L_۳} = -۱ \Rightarrow$$ ضلع قائم وجود داره

۲۶. **گزینه ۱** وسط BC به مختصات $(\frac{-۱+۵}{۲}, \frac{۴+۲}{۲}) \Rightarrow M(۲,۳)$ است. شیب خط BC برابر با $M_{BC} = \frac{۴-۲}{-۱-۵} = -\frac{۱}{۳}$ پس شیب ارتفاع AH برابر ۳ می‌باشد معادله ارتفاع AH چنین است.

$$y - ۵ = ۳(x-۶) \Rightarrow y - ۳x + ۱۳ = ۰$$

فاصله نقطه M از ارتفاع AH برابر است با:

$$\frac{۳ - ۶ + ۱۳}{\sqrt{۱+۹}} = \sqrt{۱۰}$$

۲۷. **گزینه ۱** ضلع مربع برابر فاصله نقطه $(-۱,۷)$ از خط به معادله $۲y - x - ۵ = ۰$ است.

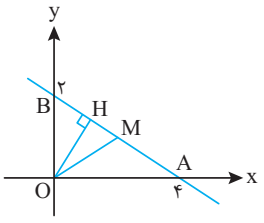
$$a = \frac{۱۴+۱-۵}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵}$$ قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر ضلع آن است پس اندازه قطر مربع برابر $۲\sqrt{۵} \times \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۱۰}$ می‌باشد.

۲۸. **گزینه ۴** نصف قطر مربع $AO = \sqrt{(۵-۲)^۲ + (۳+۱)^۲}$ یا $AO = ۵$ در نتیجه قطر مربع ۱۰ واحد است و مساحت مربع $۱۰ \times ۵ = ۵۰$ است.

۲۹. **گزینه ۲** (میثم حمزه‌لویی)

نکته معادله‌ی خطی که محور xها را با طول $p \neq ۰$ و محور yها را با عرض $q \neq ۰$ قطع می‌کند به صورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$ است.

با توجه به این نکته و شکل مسأله، داریم:



$$AB : \frac{x}{۴} + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow m_{AB} = -\frac{۱}{۲}$$

$$OH \perp AB \Rightarrow m_{OH} = \frac{-۱}{m_{AB}} = ۲ \xrightarrow{(۰,۰) \in OH} OH : y = ۲x$$

$$\begin{cases} AB : \frac{x}{۴} + \frac{y}{۲} = ۱ \\ OH : y = ۲x \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} H(\frac{۴}{۵}, \frac{۸}{۵})$$

$$AB \text{ وسط } \Rightarrow M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}) = (\frac{۴+۰}{۲}, \frac{۰+۲}{۲}) \Rightarrow M(۲,۱)$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{(۲ - \frac{۴}{۵})^۲ + (۱ - \frac{۸}{۵})^۲} = \sqrt{\frac{۳۶}{۲۵} + \frac{۹}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۵}} = \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳}{۵}\sqrt{۵} = ۰/۶\sqrt{۵}$$

۳۰. **گزینه ۳** فاصله‌ی دو خط موازی $y = ax + b$ و $y = ax + b'$ برابر است با:

$$\frac{|b - b'|}{\sqrt{۱ + a^۲}}$$