یکتا

کتاب آموزش

حسابان دوازدهم

(رشته ریاضی‌فیزیک)

از مجموعه رشادت

مجتبی سعیدی - رضا عابدی - علی محمدیوسف

- درس‌نامه و تحلیل سؤالات کنکور
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی)
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای با نکته‌های کلیدی
- سؤالات کنکور سراسری داخل و خارج از کشور
- پاسخ پرسش‌های کنکور با نکته‌های کلیدی

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد　　　　کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب حسابان دوازدهم از مجموعه رشادت را تقدیم دانش‌آموزان گرامی می‌کنیم. در ابتدا لازم است توضیحاتی درباره چگونگی استفاده از این کتاب و آشنایی با چیدمان تست‌های آن در اختیار شما قرار دهیم.

در این کتاب در هر فصل به «آموزش» درس به درس مطالب کتاب درسی با ارائه مثال‌های تستی و تشریحی فراوان و همچنین نکته‌های کلیدی و مهم می‌پردازیم.

همچنین برای موفقیت دانش‌آموزان در امتحانات نهایی، مشابه سؤالات مهم کتاب درسی را در درسنامه پوشش داده‌ایم.

در نهایت برای آمادگی دانش‌آموزان در آزمون‌های آزمایشی و کنکور به تحلیل و بررسی بیش از ۱۰۰۰ تست تألیفی و کنکور پرداخته‌ایم. این تست‌ها از سطح مقدماتی به پیشرفته با تنوع فراوان طبقه‌بندی شده و در نهایت پاسخنامه کاملاً تشریحی به همراه نکات تستی برای تمامی تست‌ها ارائه شده است.

همچنین لازم به ذکر است که تمامی سؤالات مرتبط با سال دوازدهم کنکور سراسری داخل و خارج کشور به همراه سؤالات کنکور آزاد، در قسمت تست‌های هر فصل گنجاده شده است.

در این جا لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم آقایان مجتبی سعیدی، رضا عابدی و علی محمدیوسف که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه جناب آقای مهندس هادی عزیززاده تأیف کرده‌اند تشکر کنیم. همچنین از خانم‌ها مریم ابراهیمی، ستاره عرب، زهرا عابدی، زهرا سعیدی و آقایان محمدصدرا سعیدی و محمد عابدی که بنابر گزارش مؤلفان در ویرایش کتاب همکاری داشته‌اند سپاسگزاریم.

همچنین از خانم‌ها ساینا صلح‌جو و فرزانه سلطانی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشته‌اند و فرزانه مسروری و بهاره خدامی (گرافیست) و سپیده رشیدی و زهرا گودرز (طراح جلد) بسیار ممنونیم.

خواهشمند است برای ارتباط با مؤلفین و ارائه انتقادات و پیشنهادات به کانال تلگرام زیر مراجعه نمایید:

@HesabanYekta

انتشارات مبتکران

فهرست

عنوان **صفحه**

۱

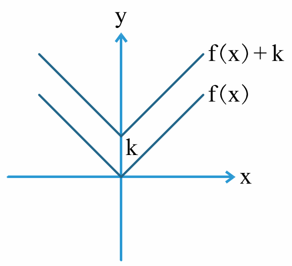
فصل اول:
تابع

درس ۱: تبدیل نمودار توابع

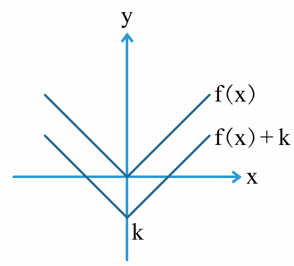
انتقال عمودی

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > ۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < ۰$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

مثلاً به انتقال‌های زیر توجه کنید:



$k > ۰$



$k < ۰$

نکته اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[a,b]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $f(x)+k$ هم بازهٔ $[a,b]$ خواهد بود (انتقال عمودی روی دامنه تأثیر ندارد) ولی اگر برد تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $f(x)+k$ برابر بازهٔ $[c+k , d+k]$ خواهد بود.

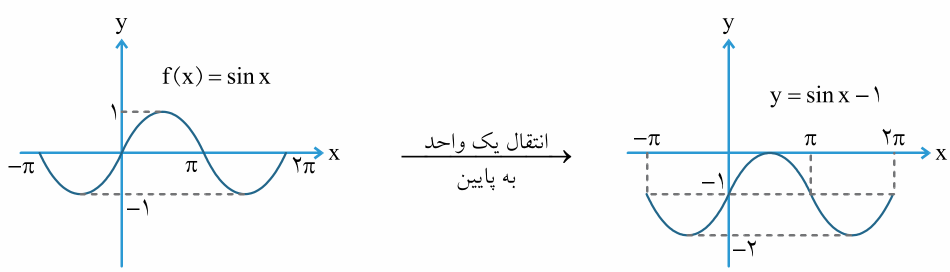
مثال ۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه و برد هر تابع را بیابید.

الف $y = \sin x - ۱ \quad ; \quad x \in [-\pi, ۲\pi]$

ب $y = \sqrt{x} + ۳$

حل:

الف)



$D_f = [-\pi, ۲\pi] \Rightarrow D_y = [-\pi, ۲\pi]$

$-۱ \le \sin x \le ۱ \xrightarrow{-۱} -۲ \le \sin x - ۱ \le ۰ \Rightarrow -۲ \le y \le ۰ \Rightarrow R_y = [-۲, ۰]$

ب)

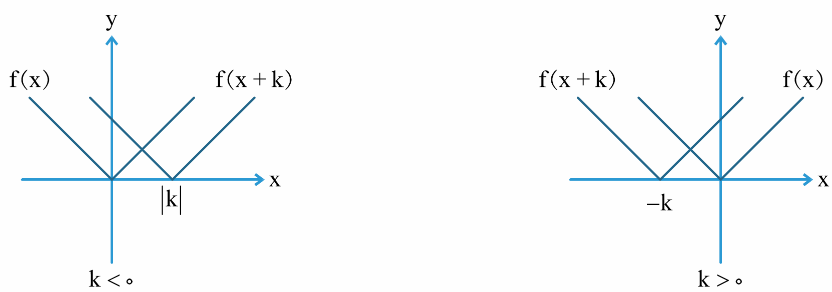
$D_f = [\circ, +\infty) \Rightarrow D_y = [\circ, +\infty)$

$R_f = [\circ, +\infty) \Rightarrow R_y = [۳, +\infty)$

انتقال افقی

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > \circ$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < \circ$، این انتقال به اندازه‌ی $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

مثلاً به انتقال‌های زیر توجه کنید:



نکته اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[a,b]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $f(x+k)$ برابر بازهٔ $[a-k, b-k]$ خواهد بود ولی اگر برد تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن برد تابع $f(x+k)$ هم برابر بازهٔ $[c,d]$ خواهد بود. (انتقال افقی روی برد تأثیر ندارد)

مثال۲: نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{۲}) - ۱ \; ; \; x \in [-\frac{\pi}{۲}, \pi]$

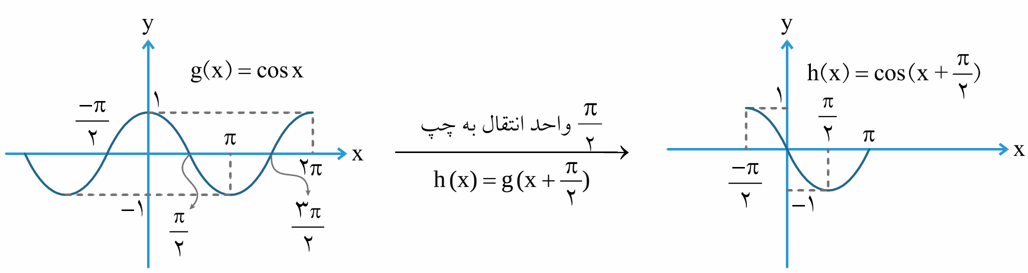
ب) $f(x) = \log(x - ۲) + ۱$

پ) $f(x) = ۲^{x+۱} - ۲$

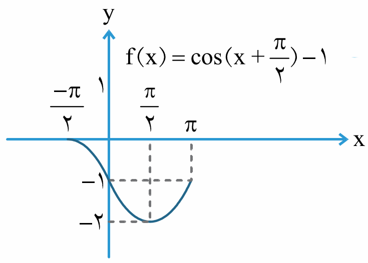
ت) $f(x) = \sqrt{x-۱} + ۱$

حل:

الف)

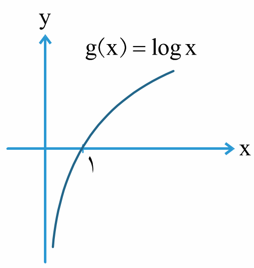


$$\xrightarrow[f(x)=h(x)-۱]{\text{یک واحد انتقال به پایین}}$$

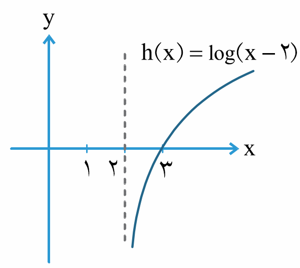


$D_f=[-\frac{\pi}{۲},\pi]$, $R_f=[-۲,۰]$

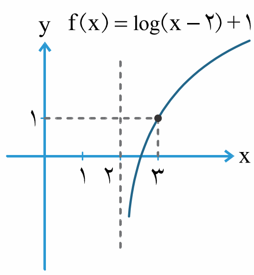
ب)



$$\xrightarrow[h(x)=g(x-۲)]{\text{دو واحد انتقال به راست}}$$

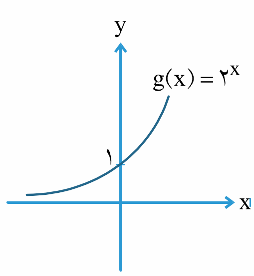


$$\xrightarrow[f(x)=h(x)+۱]{\text{یک واحد انتقال به بالا}}$$

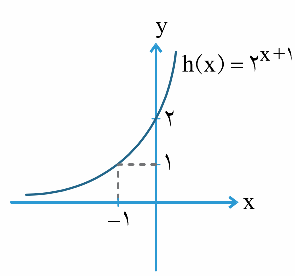


$D_f=(۲,+\infty)$, $R_f=\mathbb{R}$

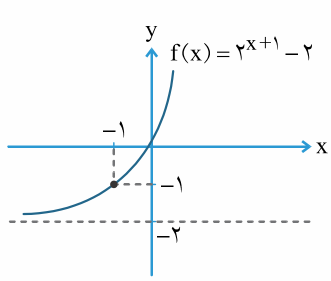
پ)



$$\xrightarrow[h(x)=g(x+۱)]{\text{یک واحد انتقال به چپ}}$$

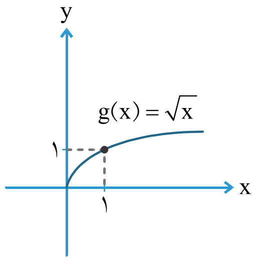


$$\xrightarrow[f(x)=h(x)-۲]{\text{دو واحد انتقال به پایین}}$$

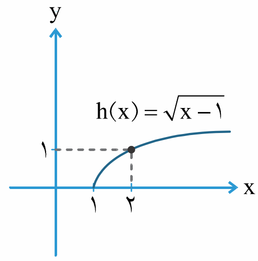


$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=(-۲,+\infty)$

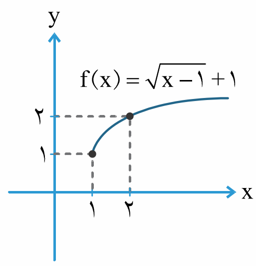
ت)



$\xrightarrow[h(x)=g(x-1)]{\text{یک واحد انتقال به راست}}$

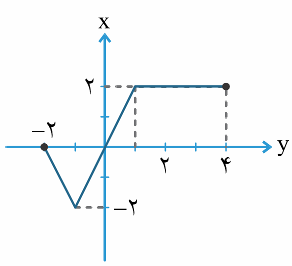


$\xrightarrow[f(x)=h(x)+1]{\text{یک واحد انتقال به بالا}}$



$D_f=[1,+\infty)$, $R_f=[1,+\infty)$

تست ۱: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنه و برد تابع $y=f(x-2)+1$ کدام است؟



۱) $R_y=[-1,3]$, $D_y=[-4,2]$

۲) $R_y=[-3,1]$, $D_y=[-4,2]$

۳) $R_y=[-1,3]$, $D_y=[0,6]$

۴) $R_y=[-3,1]$, $D_y=[0,6]$

پاسخ: گزینه ۳

$y=f(x)\xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به بالا}]{\text{دو واحد انتقال به راست}}y=f(x-2)+1$

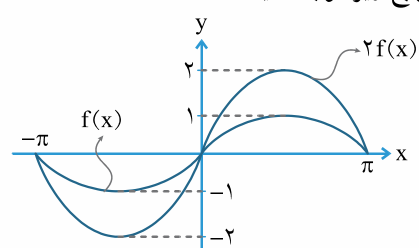
$D_f=[-2,4]\xrightarrow{+2}D_y=[0,6]$

$R_f=[-2,2]\xrightarrow{+1}R_y=[-1,3]$

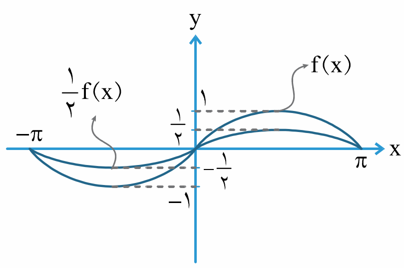
انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

مثلاً به نمودارتوابع زیر توجه کنید:



$k=2>1$



$0<k=\frac{1}{2}<1$

توجه: اگر عدد k منفی باشد، آن‌گاه نمودار علاوه بر اعمال بالا، نسبت به محور xها هم‌قرینه می‌شود.

نکته اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[a,b]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=k\,f(x)$ هم برابر بازهٔ $[a,b]$خواهد بود ولی اگر برد تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن‌گاه برای به‌دست آوردن برد تابع $y=k\,f(x)$ ، اعداد c و d را در عدد k ضرب می‌کنیم، سپس عدد کوچک‌تر را در ابتدای بازه و عدد بزرگ‌تر را در انتهای بازه قرار می‌دهیم.

نکته اگر $k=-1$ باشد $(y=-f(x))$، آن‌گاه باید نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

مثال۳: نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

الف) $f(x)=-2\sin x+1 \quad ; \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

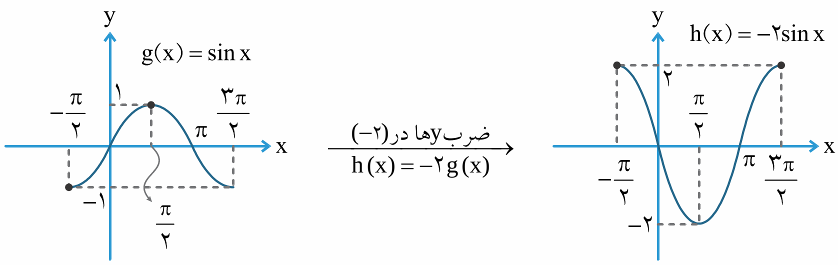
ب) $f(x)=2x^2+1$

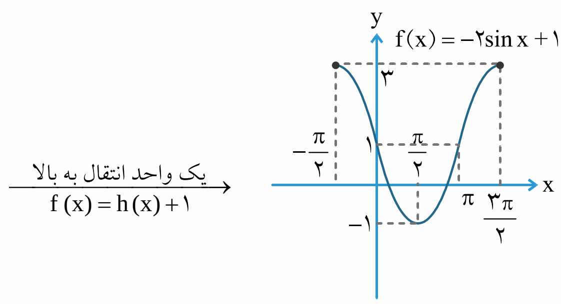
پ) $f(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-1$

ت) $f(x)=\frac{3x-1}{2}-1$

حل:

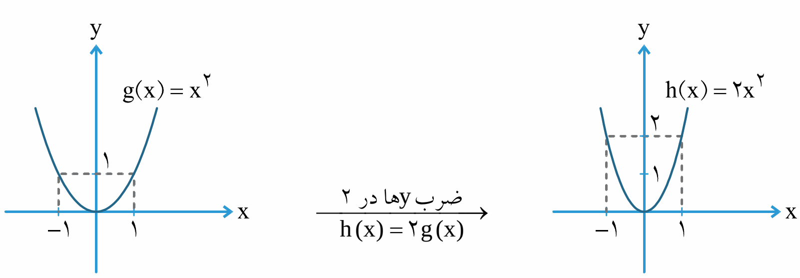
الف)





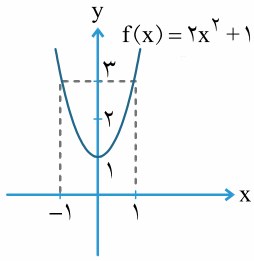
$D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \quad , \quad R_f=[-1,3]$

ب)



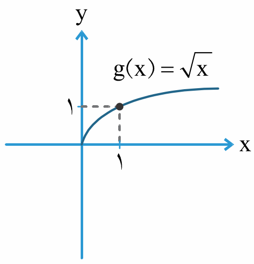
یک واحد انتقال به بالا

$f(x)=h(x)+۱$



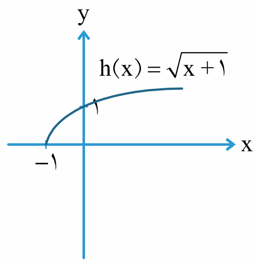
$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad R_f=[۱,+\infty)$

پ)



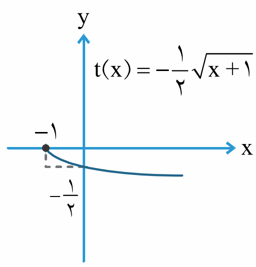
یک واحد انتقال به چپ

$h(x)=g(x+۱)$



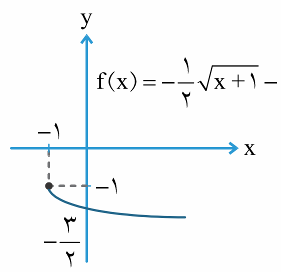
ضرب yها در عدد $(-\frac{۱}{۲})$

$t(x)=-\frac{۱}{۲}h(x)$



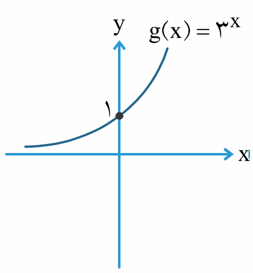
یک واحد انتقال به پایین

$f(x)=t(x)-۱$



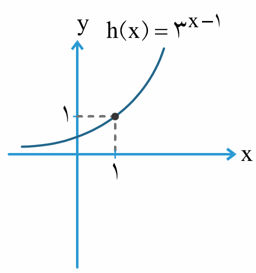
$D_f=[-۱,+\infty)\quad,\quad R_f=(-\infty,-۱]$

ت)



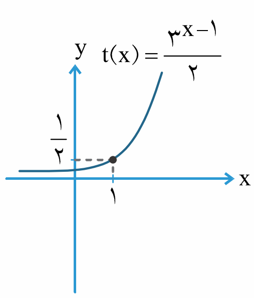
یک واحد انتقال به راست

$h(x)=g(x-۱)$



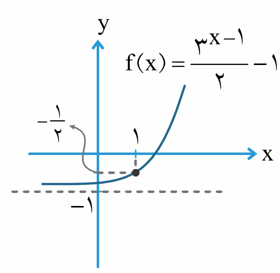
ضرب yها در $\frac{۱}{۲}$

$t(x)=\frac{۱}{۲}h(x)$



یک واحد انتقال به پایین

$f(x)=t(x)-۱$



$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad R_f=(-۱,+\infty)$

تست۲: نمودار تابع $f(x)=x^2+4x+5$ با چه انتقالی بر نمودار تابع $g(x)=x^2$ منطبق می‌شود؟

۱) چهار واحد انتقال به چپ و سپس پنج واحد انتقال به بالا

۲) دو واحد انتقال به راست و سپس یک واحد انتقال به پایین

۳) دو واحد انتقال به چپ و سپس یک واحد انتقال به پایین

۴) دو واحد انتقال به چپ و سپس یک واحد انتقال به بالا

پاسخ: گزینه۲

$$f(x)=x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$$

برای تبدیل نمودار تابع $g(x)=x^2$ به نمودار تابع $f(x)$ باید مراحل زیر را طی کنیم:

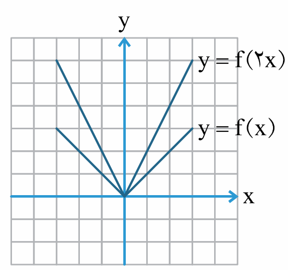
$$g(x)=x^2 \xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به چپ}} (x+2)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به بالا}} (x+2)^2+1=f(x)$$

پس برای تبدیل نمودار تابع $f(x)$ به نمودار تابع $g(x)$ باید عکس مراحل فوق را انجام دهیم (یعنی یک واحد انتقال به پایین و سپس دو واحد انتقال به راست)

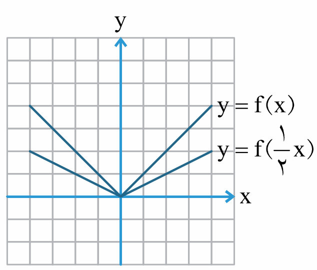
انبساط و انقباض افقی

برای رسم تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نموداراز انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

مثلاً به نمودارتوابع زیر توجه کنید:



$k=2>1$



$0<k=\frac{1}{2}<1$

توجه: اگر عدد k منفی باشد، آن‌گاه نمودار علاوه بر اعمال بالا، نسبت به محور yها هم‌قرینه می‌شود.

نکته اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[a,b]$ باشد، آن‌گاه برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ ، اعداد a و b را در عدد $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم، سپس عدد کوچک‌تر را در ابتدای بازه و عدد بزرگ‌تر را در انتهای بازه قرار می‌دهیم ولی اگر برد تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[c,d]$باشد، آن‌گاه برد تابع $y=f(kx)$ هم برابر بازهٔ $[c,d]$ خواهد بود.

نکته اگر $k=-1$ باشد $(y=f(-x))$، آن‌گاه باید نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

نکته برای رسم نمودار $y=kf(ax+b)+c$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

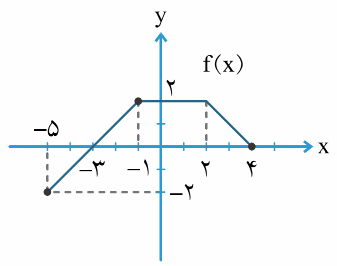
۱) نمودار $y=f(x)$ را b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم: $g(x)=f(x+b)$

۲) طول نقاط را در عدد $\frac{1}{a}$ ضرب می‌کنیم: $h(x)=g(ax)=f(ax+b)$

۳) عرض نقاط را در عدد k ضرب می‌کنیم: $t(x)=kh(x)=kf(ax+b)$

۴) نمودار را c واحد در راستای عمودی جابه‌جا می‌کنیم: $t(x)+c=kf(ax+b)+c$

مثال۴: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(-x)$

ب) $y=-2f(x-1)$

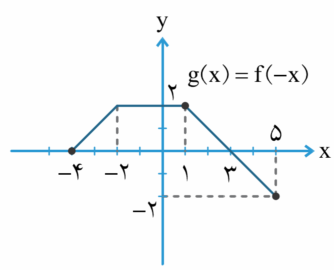
پ) $y=-f(2x-1)+1$

ت) $y=-2f(1-\frac{x}{2})-1$

حل:

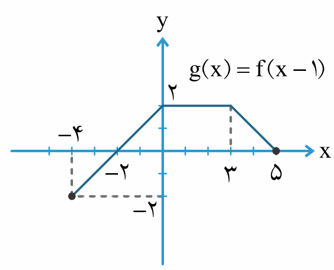
الف)

ضرب xها در ۱-
$g(x)=f(-x)$

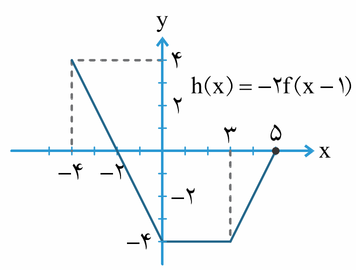


ب)

یک واحد انتقال به راست
$g(x)=f(x-1)$

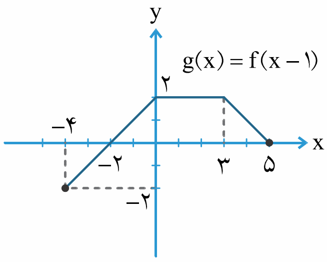


ضرب yها در (۲-)
$h(x)=-2g(x)=-2f(x-1)$

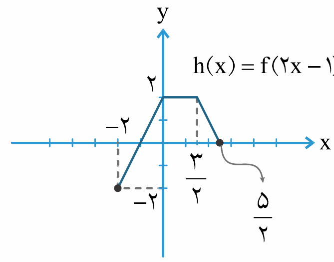


پ)

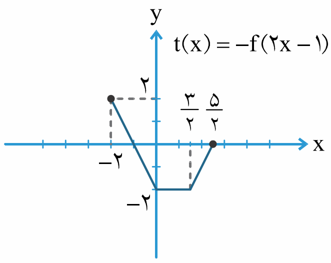
یک واحد انتقال به راست
$\xrightarrow{}$
$g(x)=f(x-1)$



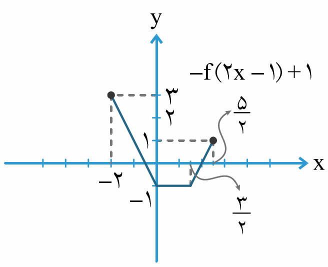
ضرب xها در عدد $\frac{۱}{۲}$
$\xrightarrow{}$
$h(x)=g(۲x)=f(۲x-۱)$



ضرب yها درعدد(۱−)
$\xrightarrow{}$
$t(x)=-h(x)=-f(۲x-۱)$

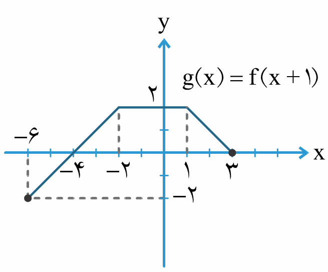


یک واحد انتقال به بالا
$\xrightarrow{}$
$t(x)+۱=-f(۲x-۱)+۱$

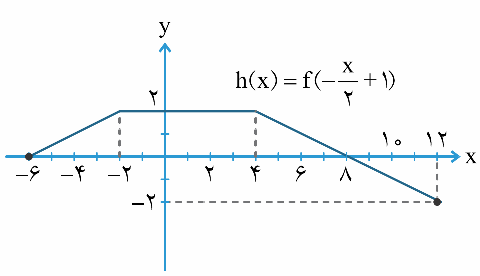


ت)

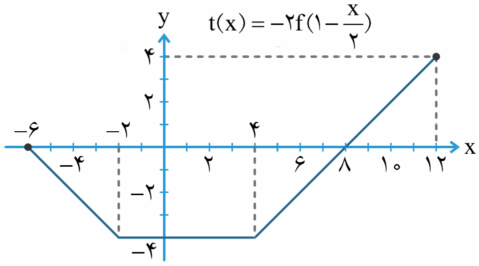
یک واحد انتقال به چپ
$\xrightarrow{}$
$g(x)=f(x+۱)$



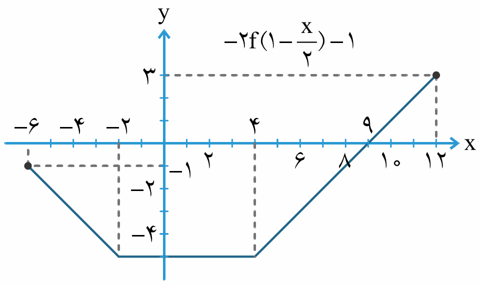
ضرب xها در(۲−)
$\xrightarrow{}$
$h(x)=g(-\frac{x}{۲})=f(-\frac{x}{۲}+۱)$



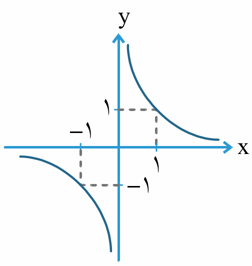
$\xrightarrow{\text{ضرب yها در عدد }(-۲)}$ $t(x)=-۲h(x)=-۲f\left(-\frac{x}{۲}+۱\right)$



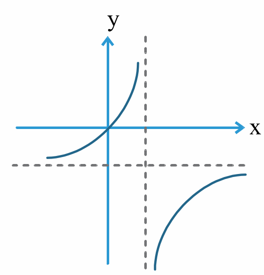
$\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}}$ $t(x)-۱=-۲f\left(۱-\frac{x}{۲}\right)-۱$

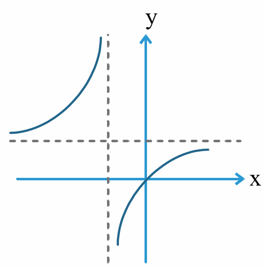


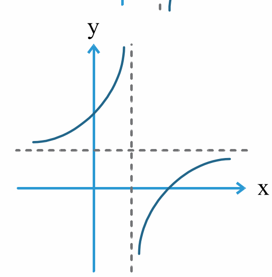
یادآوری: سال قبل آموختیم که نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ به صورت روبه‌رو است:

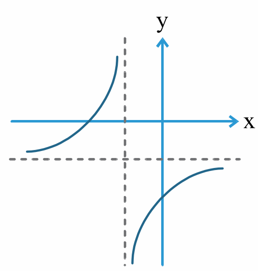


تست۳: نمودار تابع $f(x)=\frac{-x-۲}{x+۱}$ کدام است؟

۱) 

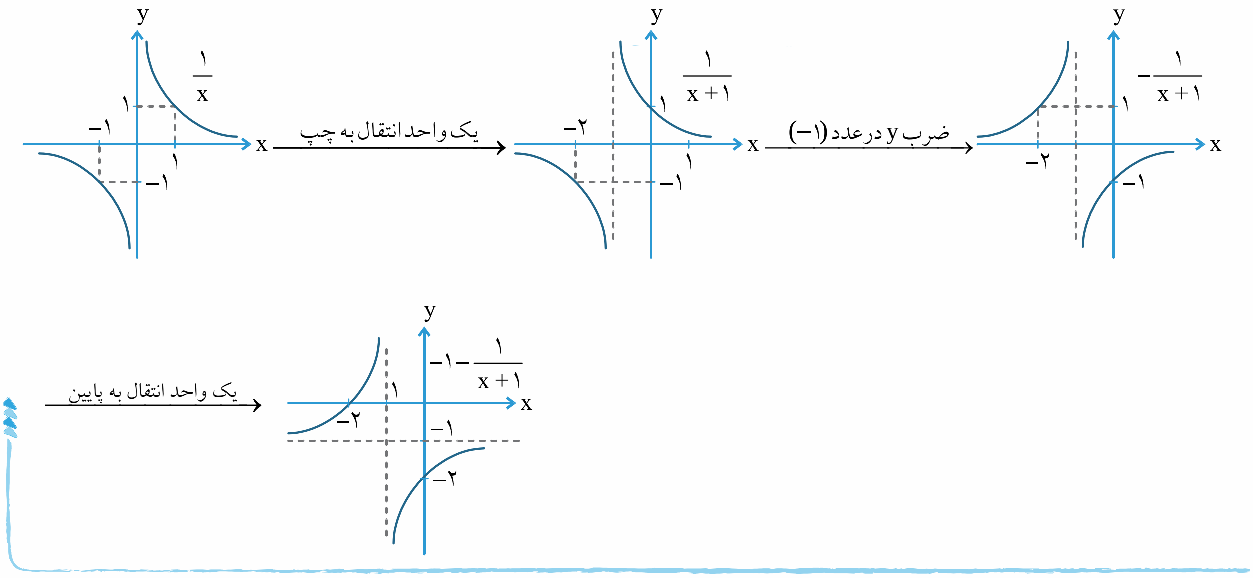
۲) 

۳) 

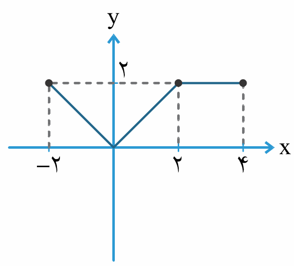
۴) 

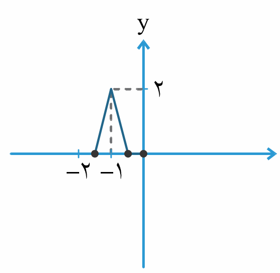
پاسخ: گزینه ۴

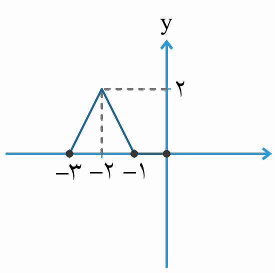
$$f(x)=\frac{-x-۲}{x+۱}=\frac{-x-۱-۱}{x+۱}=\frac{-(x+۱)}{x+۱}-\frac{۱}{x+۱}=-۱-\frac{۱}{x+۱}$$

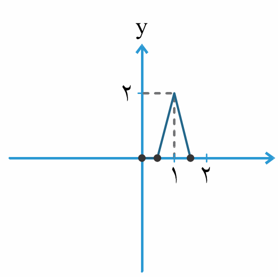


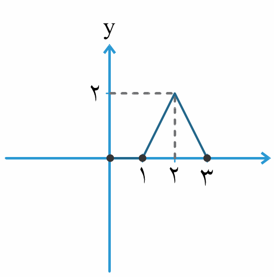
تست۴: اگــر نمــودار تــابع $y_1=1-f(\frac{1}{2}x-1)$ بــه صــورت مقابــل باشــد، نمــودار تابع $y_2=1+f(2x+1)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

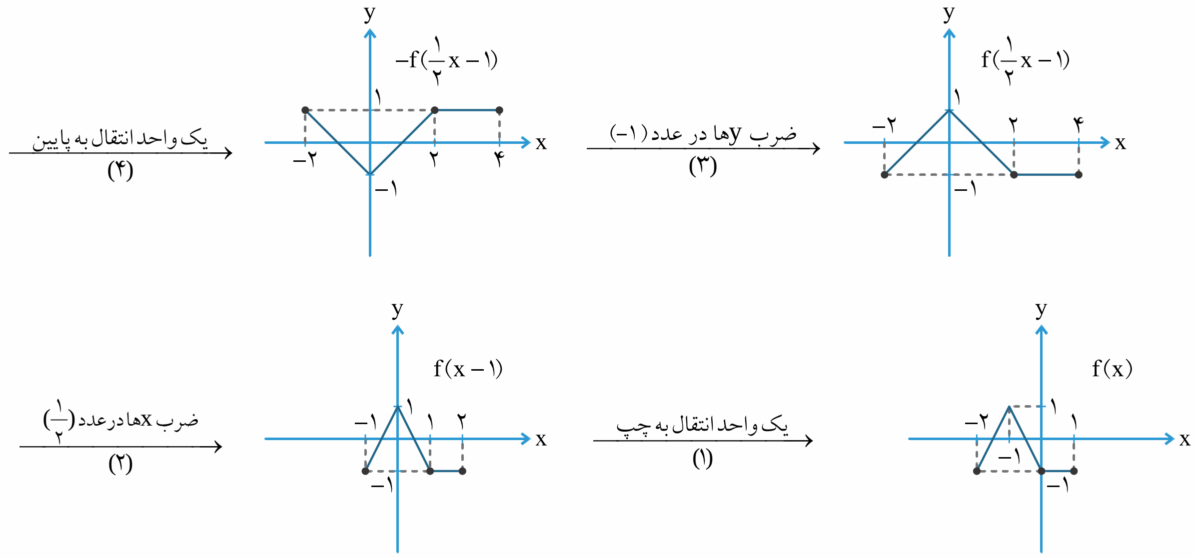
پاسخ: گزینه۳

برای تبدیل نمودار تابع $y=f(x)$ به نمودار تابع $y_1=1-f(\frac{1}{2}x-1)$ به ترتیب مراحل زیر انجام شده است:

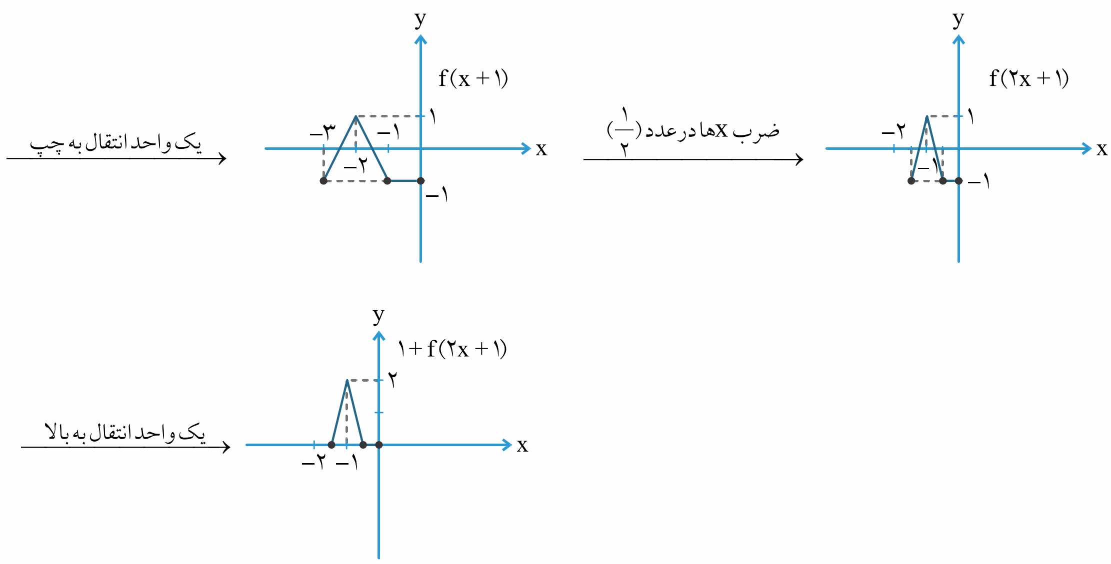
$$\xrightarrow[(1)]{\text{یک واحد انتقال به راست}} y=f(x-1) \xrightarrow[(2)]{\text{ضرب xها در عدد ۲}} y=f(\frac{1}{2}x-1) \xrightarrow[(3)]{\text{ضرب yها در عدد (۱−)}} y=-f(\frac{1}{2}x-1)$$

$$\xrightarrow[(4)]{\text{یک واحد انتقال به بالا}} y_1=1-f(\frac{1}{2}x-1)$$

پس برای تبدیل نمودار تابع $y_1=1-f(\frac{1}{2}x-1)$ به تابع $y=f(x)$ عکس مراحل فوق را (از مرحله ۴ به مرحله ۱) انجام می‌دهیم:



اکنون به رسم تابع $y_2=1+f(2x+1)$ می‌پردازیم:



تست ۵: **اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را ابتدا با ضریب ۳ انبساط افقی و سپس ۳ واحد به راست انتقال دهیم، نمودار کدام تابع حاصل می‌شود؟**

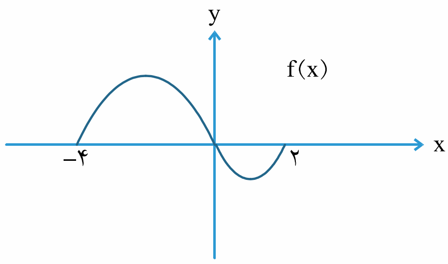
۱) $y=f(\frac{1}{3}x-1)$ ۲) $y=f(3x-9)$

۳) $y=f(\frac{1}{3}x-3)$ ۴) $y=f(3x-3)$

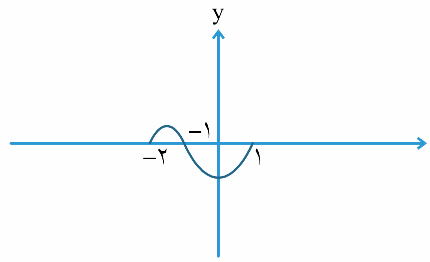
پاسخ: گزینه ۱

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to\frac{1}{3}x]{\text{انبساط افقی با ضریب ۳}}y=f(\frac{1}{3}x)\xrightarrow[x\to x-3]{\text{۳ واحد انتقال به راست}}y=f(\frac{1}{3}(x-3))=f(\frac{1}{3}x-1)$$

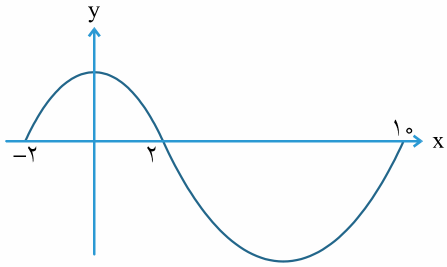
تست ۶: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -f(1-2x)$ کدام است؟



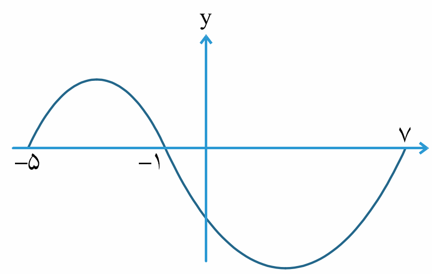
۱)



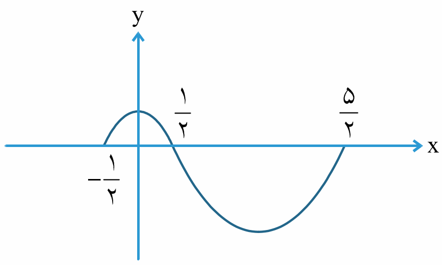
۲)



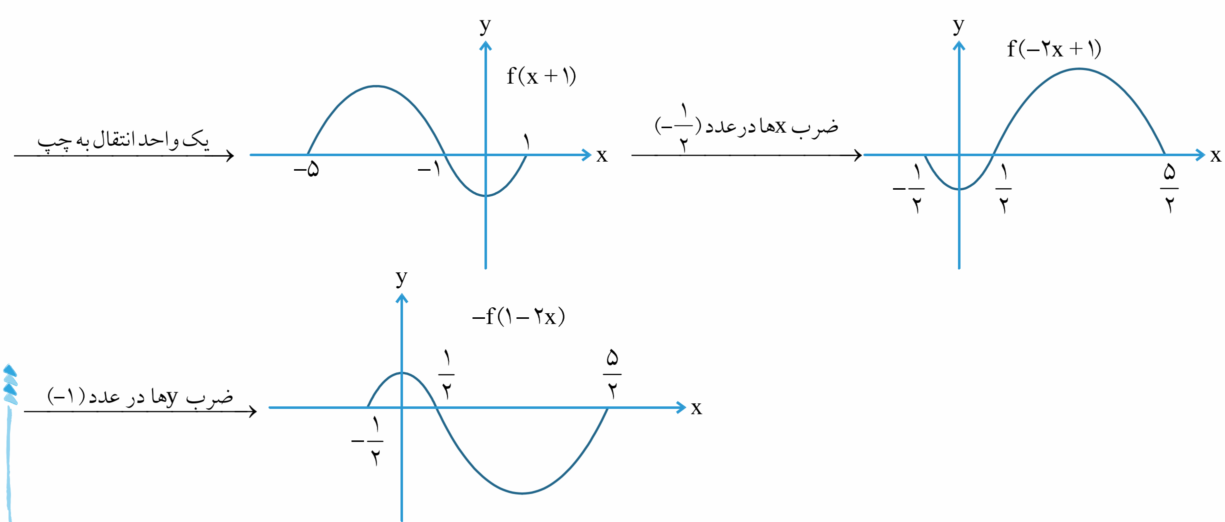
۳)



۴)



پاسخ: گزینهٔ ۴



تست ۷: برای رسم نمودار $y = \sqrt{-\frac{1}{4}x + 2}$ از روی نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) ابتدا نمودار تابع f را دو واحد به سمت چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم و در نهایت در امتداد محور xها با ضریب ۴ انبساط می‌دهیم.