فصل دوم

مثلثات

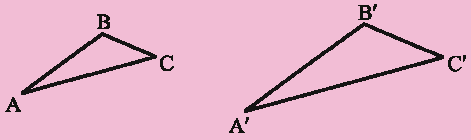
درس اول- نسبت‌های مثلثاتی

تشابه مثلث‌ها: اگر زاویه‌های نظیر دو مثلث با هم برابر باشند و اضلاع نظیر آن‌ها با هم متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند. نسبت اضلاع نظیر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه گویند. در شکل زیر، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند.

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

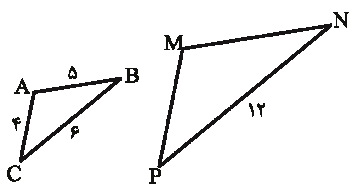
$$\hat{A} = \hat{A}' \quad , \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad , \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



▼**مثال ۱)** طول اضلاع مثلث ABC ، $۴cm$، $۵cm$ و $۶cm$ بوده و مثلث MNP با آن متشابه است. اگر طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث MNP برابر $۱۲cm$ باشد، محیط و بقیه اضلاع مثلث MNP را بیابید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس صفحه‌ی ۳۰- بابلسر-موسی‌بن‌جعفر ۸۸)

☑**پاسخ:** *مثلث‌های متشابه ABC و MNP را مطابق شکل زیر فرض می‌کنیم و نسبت تشابه را برای اضلاع متناظر آن‌ها می‌نویسیم.*



$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{MNP}$$

$$\Rightarrow \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۶} = \frac{MP}{۴} = \frac{MN}{۵} \Rightarrow \begin{cases} MP = ۸cm \\ MN = ۱۰cm \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{MNP} \text{ محیط} = NP + MP + MN = ۱۲ + ۸ + ۱۰ = ۳۰cm$$

۱۷- گزینه‌ی «۳»

طبق روابط توانی و با استفاده از رابطه‌ی $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ داریم:

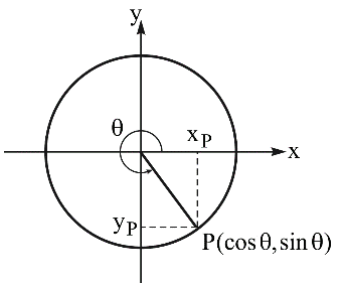
$$۸۱^{\sin^۲ x}+۸۱^{\cos^۲ x}=۸۱^{\sin^۲ x}+۸۱^{۱-\sin^۲ x}=۳۰\Rightarrow ۸۱^{\sin^۲ x}+\frac{۸۱}{۸۱^{\sin^۲ x}}=۳۰\Rightarrow (۸۱^{\sin^۲ x})^۲+۸۱=۳۰(۸۱^{\sin^۲ x})\xrightarrow{y=۸۱^{\sin^۲ x}\ \text{با فرض}}$$

$$y^۲-۳۰y+۸۱=۰\Rightarrow\begin{cases}(y-۳)=۰\Rightarrow y=۳\Rightarrow ۸۱^{\sin^۲ x}=۳\Rightarrow ۳^{۴\sin^۲ x}=۳\\(y-۲۷)=۰\Rightarrow y=۲۷\Rightarrow ۸۱^{\sin^۲ x}=۲۷\Rightarrow ۳^{۴\sin^۲ x}=۳^۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴\sin^۲ x=۱\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۴}\\۴\sin^۲ x=۳\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۳}{۴}\end{cases}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱$$

۱۸- گزینه‌ی «۴»

مطابق دایره مثلثاتی زیر $x_P=\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است، داریم:



$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow \sin^۲\theta+(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲=۱\Rightarrow \sin^۲\theta=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

چون انتهای کمان θ در ربع چهارم است، پس $\sin\theta<۰$ است یعنی $\sin\theta=-\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{-\sqrt{\frac{۲}{۳}}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۹- گزینه‌ی «۲»

با استفاده از رابطه‌ی $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ داریم:

$$۱+\cot^۲ ۴۰^\circ=\frac{۱}{\sin^۲ ۴۰^\circ}\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه‌ی A}}A=\tan ۴۰^\circ(۱-(۱+\cot^۲ ۴۰^\circ))\Rightarrow A=\tan ۴۰^\circ(-\cot^۲ ۴۰^\circ)$$

$$\xrightarrow{\cot ۴۰^\circ=\frac{۱}{\tan ۴۰^\circ}}A=\tan ۴۰^\circ\times(\frac{-۱}{\tan^۲ ۴۰^\circ})=-\frac{۱}{\tan ۴۰^\circ}$$

۲۰- گزینه‌ی «۲»

با استفاده از رابطه‌ی $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ داریم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}-۱$$

با جایگذاری در رابطه A داریم:

$$A=(\frac{۱}{\cos^۲\theta}-۱)\sin^۲\theta=(\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}-\sin^۲\theta)=\tan^۲\theta-\sin^۲\theta$$