گزرنامه

ورود به آینده شگفت انگیز

آمار و احتمال یازدهم

کتاب آموزش کامل مفاهیم و آزمون

احسان خیراللهی

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

من به سرچشمهٔ خورشید نه خود بردم راه	ذره‌ای بودم و مهر تو مرا بالا برد
من خسی بی سر و پایم که به سیل افتادم	او که میرفت مرا هم به دل دریا برد
خودت آموختی‌ام مهر و خودت سوختی‌ام	با برافروخته رویی که قرار از ما برد

سپاس فراوان خداوند منان که ما را آموخت و آموختن فرمود. هدف از تألیف کتاب «**آمار و احتمال یازدهم**» از مجموعه «**گذرنامه**»، فراهم آوردن منبعی مناسب و جامع برای آزمون‌های تشریحی، آزمون‌های چهارگزینه‌ای آزمایشی و از همه مهم‌تر کنکور بود. در این کتاب کلیهٔ مفاهیم درس آمار و احتمال یازدهم به‌صورت پیشرفته آموزش داده شده و مطالب پیش‌نیاز از پایهٔ دهم نیز یادآوری شده است.

دانش‌آموز در هر فصل، قبل از پاسخ به سؤالات تشریحی و تستی باید درسنامه را به‌طور کامل مطالعه کند تا درک عمیقی از مفاهیم آن پیدا کند. سعی شده با ذکر سؤال و تست‌های تألیفی و کنکور، توانایی دانش‌آموز افزایش یابد. در بین سؤالات تستی، بعضی با متمایز شده‌اند. آن‌ها سؤالاتی نکته‌دار یا دشوار هستند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموز و توانایی او در حل مسائل پیچیده طرح شده‌اند. در پایان هر فصل آزمون‌های تستی برای سنجش میزان تسلط دانش‌آموز به مباحث فصل در نظر گرفته شده است، که پاسخنامه آنها در پایان کتاب آمده است. امید است کتاب حاضر پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان برای موفقیت در آزمون‌های ورودی دانشگاه‌های برتر باشد.

از مدیرعامل محترم انتشارات مبتکران جناب آقای یحیی دهقانی که امکان چاپ این کتاب را فراهم کردند، قدردانی می‌کنم. هم‌چنین از دبیر محترم مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تشکر می‌کنم که این کتاب مولود فکر خلاق و مدیریت استثنایی ایشان است. از آقای شهرام صدر که با مشاوره‌های دلسوزانه تأثیر بسزایی در فراهم آوردن این مجموعه داشتند سپاسگزاری می‌کنم.

همچنین از خانم سپیده خداوردی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشته است و خانم بهاره خدامی (گرافیست و طراح جلد)، بسیار ممنونم و برای همهٔ عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنم.

در آخر، کتاب را تقدیم می‌کنم به استاد عزیزم جناب آقای **مهدی پابست** که در گذشته با صبر و حوصله و به بهترین وجه مبانی دروس ریاضی را به بنده آموختند.

از دبیران محترم و دانش‌آموزان ساعی خواهشمندم نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود را دربارهٔ این کتاب، برای بنده ارسال نمایند.

احسان خیراللهی

@math_edu96

فهرست

فصل اول
۱ مبانی ریاضی

درس اول

درس دوم

فصل دوم
۲ احتمال

درس اول

درس دوم

درس سوم

درس چهارم

فصل سوم
آمار توصیفی ۳

درس اول

درس دوم

درس سوم

فصل چهارم
آمار استنباطی ۴

درس اول

درس دوم

پاسخ‌نامه آزمون‌ها

سؤالات کنکور
همراه با پاسخنامه

فصل اول

۱ مبانی ریاضی

درس اول: منطق ریاضی

درس دوم: مجموعه، زیرمجموعه و جبر مجموعه‌ها

درس اول
منطق ریاضی

مقدمه

فکر انسان پیوسته در معرض خطا و لغزش است و ممکن است در مسیر تفکر و استدلال و استنتاج که پایه فلسفی قواعد ذهنی آدمی است، به اشتباه بیفتد. پس انسان برای کشف حقیقت و مصون ماندن از خطا در تفکر، نیازمند و محتاج به یک سلسله اصول و قواعد عام و فراگیر است که او را در همه جا راهنمایی کند و مانع از گمراهی وی در تفکر گردد که مجموع این اصول و قواعد منطق نام دارد.
منطق ریاضی دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود و به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

نخستین گردآورنده صریح و ثبت شده منطق صوری در تاریخ، ارسطو است. ارسطو اولین کسی بود که به‌طور نظام‌مند روی استدلال منطقی کارکرد بعد از آن لایبنیتس بسط منطق عادی را به‌عنوان زبان علمی جهانی بررسی نمود. در سدهٔ اخیر بزرگانی چون برتراند راسل، استنت، مک آلیستر، راس و رایت روی منطق کار کردند و نتایج فلسفی آن را بررسی نمودند. در منطق، برهان از اهمیت خاصی برخوردار است. درواقع برهان مرجعیت بخش چیزی است که اگر آن چیز به عنوان یک عقیده محض (یعنی بدون برهان) بیان شود ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. مفهوم برهان با مفهوم قضیه به‌کار می‌رود.

به عبارت بهتر منطق به مطالعه و بررسی استدلال و استنتاج گفته می‌شود و به ویژه به این مسئله می‌پردازد که آیا یک استدلال معتبر است یا خیر و هم‌چنین روی رابطهٔ بین جملات تأکید دارد که در تضاد با محتوای هیچ جمله‌ای نباشد. به‌عنوان مثال جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

- تمام دانش‌آموزان عینکی هستند.
- هرکس عینکی است در رشتهٔ تجربی تحصیل می‌کند.
- بنابراین تمام دانش‌آموزان در رشتهٔ تجربی تحصیل می‌کنند.

از دیدگاه علمی، منطق هیچ تلاشی برای تعیین ممکن یا غیرممکن بودن جمله‌ها انجام نمی‌دهد اما اگر دو جملهٔ اول درست باشد منطق حکم می‌کند جملهٔ سوم نیز صحیح است. در منطق ریاضی به دو جملهٔ نخست، مقدمه‌های استدلال و به جملهٔ سوم نتیجهٔ استدلال گفته می‌شود. این استدلال‌ها از جمله‌های خبری تشکیل شده است.

گزاره

به جمله‌ای خبری که یا درست یا نادرست باشد هرچند که درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد، **گزاره** گفته می‌شود.
معمولاً گزاره ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند. اگر گزاره‌ای درست باشد ارزش آن را با «د» یا « T » و اگر گزاره‌ای نادرست باشد ارزش آن را با حرف «ن» یا « F » نمایش می‌دهند.

توجه

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. به‌طور مثال « $\sqrt{۲}$ عدد گنگ است.» گزاره است در حالی‌که «عجب نقاشی زیبایی!» گزاره نیست یا «بلیط تئاتر خریدم» گزاره است ولی «برایم بلیط تئاتر بخر» گزاره نیست. هم‌چنین جملهٔ «تعداد تارهای موی سر دوستم هشت میلیارد و دویست است» یک گزاره است هرچند درستی یا نادرستی آن را به سادگی نمی‌توان تشخیص داد ولی اگر درست نباشد قطعاً نادرست است.

گزاره ساده

گزاره‌ای که اجزای تشکیل دهندهٔ آن فقط یک جملهٔ خبری باشد را **گزارهٔ ساده** گویند. به‌طور مثال «۶ عدد زوجی است» یا «امروز هوا ابری است» یا « $۱۴=۲\times۷$ » هر سه گزاره‌های ساده محسوب می‌شوند.

گزاره مرکب

هرگاه چند گزارهٔ ساده را به همراه ادات ربط «و» و «یا» باهم ترکیب کنیم گزاره مرکب ساخته می‌شود. به‌طور مثال «علی ۱۶ ساله است و محمود فارغ‌التحصیل شد.» و «هوا برفی است یا خورشید در آسمان دیده می‌شود.» گزاره‌های مرکب می‌باشند که از دو گزارهٔ ساده تشکیل شده‌اند.

جدول ارزش گزاره‌ها

جدول ارزش گزاره مرکب p که از گزاره‌های $p_1, p_2, ..., p_n$ تشکیل شده است شامل لیستی از تمام ترکیب‌های ممکن ارزش گزاره‌ها می‌باشد. اگر گزاره مرکب از n گزاره تشکیل شده باشد آن‌گاه جدول ارزشی آن دارای 2^n سطر خواهد بود.

سه گزاره

p_1	p_2	p_3
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۸ حالت

دو گزاره

p_1	p_2
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

۴ حالت

یک گزاره

p_1
د
ن

۲ حالت

گزاره‌نما

هر جمله یا عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر آن به یک گزاره تبدیل شود **گزاره‌نما** نامیده می‌شود به بیان دیگر گزاره‌نما عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به‌کار رفته در آن مشخص شود و به جای آن متغیر قرار داده شود به گزاره تبدیل می‌شود. به‌عنوان مثال عبارت $-1 \le x \le 2$ یک گزاره‌نما است ولی $-1 \le -5 \le 2$ یک گزاره نادرست است.

توجه

گزاره‌نماها برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم. $P(x)$ ، $G(x)$ و... که با یک متغیر نمایش داده می‌شود گزاره‌نمای یک متغیر نام دارند. $P(x,y)$ گزاره‌نمای دو متغیره و $G(x,y,z)$ گزاره‌نمای سه متغیره می‌باشند.

نکته ۱

باتوجه به آن‌چه درباره گزاره‌نما بیان شد دو تعریف زیر در مورد آن بسیار حائز اهمیت است:

الف) مجموعه مقادیری که اگر اعضای آن را به جای متغیر گزاره‌نما قرار دهیم، گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل کند دامنهٔ متغیر گزاره‌نما و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

ب) مجموعه عضوهایی از دامنهٔ متغیر گزاره‌نما که به ازای آن‌ها گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای درست شود را مجموعه جواب گزاره‌نما گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند. S زیرمجموعهٔ D است $(S \subseteq D)$.

سؤال ۱

مجموعه جواب و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای $\sqrt{x+1} = 5$ را به‌دست آورید.

حل

گزاره‌نمای $\sqrt{x+1}$ هنگامی تعریف شده است که زیر رادیکال نامنفی باشد، پس دامنه متغیر، مجموعه مقادیری است که به ازای هر عضو آن عبارت $x+1$ منفی نباشد. بنابراین داریم: $x+1 \ge 0 \to x \ge -1 \quad , \quad D=[-1, +\infty)$

بنابراین دامنهٔ متغیر، اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی -1 می‌باشند.

برای به‌دست آوردن مجموعهٔ جواب کافی است جواب معادلهٔ فوق را بیابیم:

$$\sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow x+1 = 25 \Rightarrow x = 24$$

چون $x = 24$ گزاره‌نما را تبدیل به گزاره‌ای درست می‌کند پس مجموعه جواب برابر $S=\{24\}$ است.

توجه داشته باشید باید برای به‌دست آوردن دامنهٔ متغیر گزاره‌نما به مقادیری توجه داشت که اگر به جای متغیر گزاره‌نما قرار گیرد گزاره‌نما را بی‌معنی نسازد. به‌عنوان مثال دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌باشند زیرا اعداد اول اعدادی مثبت هستند و هیچ عدد اول منفی وجود ندارد. یا دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « x مضرب ۹ است» مجموعه اعداد صحیح می‌باشند زیرا مضارب یک عدد هم منفی و هم مثبت می‌تواند باشد ولی اعشاری نمی‌تواند باشد.

تست ۱ **گزاره‌نمای $\sqrt{x+۳}\geq ۱$ برای کدام‌یک از اعضای مجموعهٔ زیر معتبر است؟**

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) همه موارد

گزینهٔ ۱ درست است.

کسانی که گزینهٔ ۴ را انتخاب کرده‌اند یک اشتباه کوچک مرتکب شده‌اند در $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ اعدادی وجود دارند که نامعادلهٔ $\sqrt{x+۳}\geq ۱$ را بی‌معنی می‌سازد. به‌طور مثال $\sqrt{-۵+۳}\geq ۱$ یک نامعادلهٔ بی‌معنی است زیرا زیر رادیکال مقدار منفی نمی‌توانند باشند بنابراین نمی‌توان درخصوص آن بحث کرد زیرا غیرممکن است. پس مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ برای گزارهٔ بالا معتبر نیستند.

نقیض یک گزاره

اگر p گزاره‌ای باشد آن‌گاه «چنین نیست که p» را نقیض p گوئیم و با علامت $\sim p$ نمایش داده می‌شود. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و برعکس.

هنگامی‌که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. علامت « $\sim$ » را علامت ناقض می‌گویند.

تذکر توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره از این علامت برای منفی ساختن فعل جمله استفاده می‌شود مثلاً اگر علامت نقیض روی گزاره «من الان غذا می‌خورم» عمل کند حاصل جمله «من الان غذا نمی‌خورم» خواهد بود.

جدول ارزش نقیض یک گزاره که تمام حالات ممکن را در نظر می‌گیرد به‌صورت روبه‌رو است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نکته ۲

اگر دو گزاره p و q چنان باشند که اگر یکی از آن‌ها درست است دیگری هم درست باشد و بالعکس. یعنی اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست ارزیابی شود، دو گزاره هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند و به‌صورت $p\equiv q$ نمایش داده می‌شوند. به‌عنوان مثال دو گزاره «۲ زوج است» و «۲ فرد نیست» دو گزاره هم‌ارز منطقی می‌باشند.

نقیض دوگانه (نقیض مضاعف)

نقیض نقیض یک گزاره هم‌ارز خود آن گزاره است و جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ به صورت مقابل می‌باشد.

$\sim(\sim p)\equiv p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
ن	د	ن
د	ن	د

باتوجه به جدول ملاحظه می‌شود که همواره ارزش $\sim(\sim p)$ با ارزش p یکسان است بنابراین این دو هم ارز منطقی هستند.

مثال گزاره q به صورت "$۲\in\{۱,۴,۵\}$" یک گزاره نادرست است اما گزاره $\sim q$ که نقیض آن است، به‌صورت "$۲\notin\{۱,۴,۵\}$" نوشته می‌شود یک گزاره درست است یا گزاره p به‌صورت "$۲۰=۴\times۵$" یک گزاره درست است اما گزاره $\sim p$ که نقیض آن است، به‌صورت "$۲۰\neq۴\times۵$"، نوشته می‌شود یک گزاره نادرست است. حال اگر برای بار دوم از نقیض گزاره‌های فوق دوباره نقیض بگیریم حاصل خود گزاره ابتدایی خواهد بود.

ترکیب عطفی دو گزاره

گزارهٔ «عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول است.» را در نظر بگیرید. این گزارهٔ مرکب از دو گزارهٔ ساده «عدد ۳ فرد است» و «عدد ۳ اول است» تشکیل شده است که به وسیلهٔ واژهٔ ربط «و» باهم ترکیب شده‌اند و آن‌ها را با هم ترکیب عطفی می‌کند. ترکیب عطفی دو گزاره p و q به‌صورت « $p\wedge q$ » نمایش داده می‌شود که به رابط منطقی « $\wedge$ » **عاطف** گفته می‌شود.

حال سؤال اینجاست که چه زمانی ترکیب عطفی دو یا چند گزاره درست می‌باشد؟

برمی‌گردیم به گزارهٔ مرکب «عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول است.» این گزاره از **ترکیب عطفی** دو گزارهٔ سادهٔ درست تشکیل شده است بنابراین ترکیب آن‌ها نیز درست می‌باشد اما حالت‌های دیگر همین گزاره مرکب را در نظر بگیرید:

- «عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول نیست.» یک گزارهٔ نادرست است.
- «عدد ۳ زوج است و عدد ۳ اول است.» یک گزارهٔ نادرست است.
- «عدد ۳ زوج است و عدد ۳ اول نیست.» یک گزارهٔ نادرست است.

نکته ۳

ارزش ترکیب عطفی دو یا چند گزاره وقتی درست است که ارزش همهٔ آن‌ها درست باشند.

برای دو گزاره p و q جدول ارزش ترکیب عطفی $p \wedge q$ به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
ن	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
د	د	د

توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره برای ترکیب عطفی دو جمله از واژه ربط «و» استفاده می‌کنیم. مثلاً گزاره مرکب «امروز یکشنبه است و امروز هوا آفتابی است.» تنها در صورتی درست می‌باشد که هر دو گزارهٔ ساده با هم رُخ دهد و هر دو درست باشند.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزارهٔ مرکب « $\sqrt{2}$ گنگ است یا ۳ عددی فرد است.» را در نظر بگیرید. هر دو گزارهٔ سادهٔ « $\sqrt{2}$ گنگ است» و «۳ عددی فرد است» گزاره‌های درستی می‌باشند که به وسیلهٔ واژهٔ ربط «یا» با هم ترکیب شده‌اند و آن‌ها را با هم ترکیب فصلی می‌کند. ترکیب فصلی دو گزاره p و q به‌صورت « $p \vee q$ » نمایش داده می‌شود که به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود.

حال سؤال اینجاست که چه زمانی ترکیب فصلی دو یا چند گزاره درست است؟

برمی‌گردیم به گزارهٔ مرکب « $\sqrt{2}$ گنگ است یا ۳ عددی فرد است». این گزارهٔ مرکب از دو گزارهٔ سادهٔ درست تشکیل شده است بنابراین ترکیب آن‌ها درست است. اما حالت‌های دیگر همین گزاره را در نظر بگیرید:

- « $\sqrt{2}$ گنگ است یا ۳ عددی زوج است.» چون گزارهٔ اول درست است بنابراین این گزاره درست می‌باشد.
- « $\sqrt{2}$ گنگ نیست یا ۳ عددی فرد است.» چون گزارهٔ دوم درست است بنابراین این گزاره درست می‌باشد.
- « $\sqrt{2}$ گنگ نیست یا ۳ عددی زوج است.» چون هر دو گزاره نادرست است بنابراین این گزاره نادرست می‌باشد.

نکته ۴

ارزش ترکیب فصلی دو یا چند گزاره وقتی نادرست است که ارزش همهٔ آن‌ها نادرست باشند.

برای دو گزارهٔ p و q جدول ارزش ترکیب فصلی $p \vee q$ به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
ن	ن	ن
ن	د	د
د	ن	د
د	د	د

توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره برای ترکیب فصلی دو جمله‌ای واژه ربط «یا» استفاده می‌کنیم. مثلاً گزاره مرکب «امروز علی را خواهم دید یا امروز به کتابخانه می‌روم.» تنها در صورتی نادرست است که هر دو نادرست باشند و هیچ‌کدام رُخ ندهند.

سؤال ۲ **مقادیر x و y را بیابید به گونه‌ای که داشته باشیم:** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف $(x-y)^2+|2y-1|=0$ **ب** $(2x-y)(-y-4)=0$

حل **الف** هر دو عبارت داده شده نامنفی می‌باشند و وقتی مجموع آنها برابر صفر است که هر دو برابر صفر باشند.

$$\begin{cases} 2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ \text{و} \\ x-y=0 \Rightarrow x=y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x=\frac{1}{2}) \wedge (y=\frac{1}{2})$$

ب اگر حاصل‌ضرب چند عبارت برابر با صفر باشد حداقل یکی از آنها برابر با صفر می‌باشد.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \Rightarrow x = -2 \\ -y - 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \end{cases} \Rightarrow (x = -2) \vee (y = -4)$$

سؤال ۳ **جدول زیر را تکمیل کنید.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

ردیف	گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$
۱	....	....	....	....	....	ن
۲	....	۳ عددی طبیعی است.	د	....	....	....
۳	۷ مقسوم‌علیه ۴۹ است.	....	....	ن	....	....
۴	....	....	ن	د	....	....

حل در ردیف اول چون ارزش ترکیب فصلی نادرست می‌باشد بنابراین ارزش دو گزاره p و q باید نادرست باشد بنابراین دو گزاره نادرست را جایگزین آن‌ها می‌کنیم. به‌طور مثال می‌نویسیم:

ردیف	گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$
۱	$\sqrt{13}$ گنگ نیست	۱۲ عددی اول است	ن	ن	ن	ن

در ردیف دوم چون ارزش p درست است باید گزاره‌ای درست جایگزین آن شود. هم‌چنین می‌دانیم ۳ عددی طبیعی است بنابراین ارزش گزاره q درست است. به‌طور مثال می‌نویسیم:

ردیف	گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$
۲	در سال کبیسه، ماه اسفند ۳۰ روزه است	۳ عددی طبیعی است	د	د	د	د

در ردیف سوم می‌دانیم ۷ مقسوم‌علیه ۴۹ است بنابراین ارزش گزاره p درست است و باید گزاره‌ای نادرست جایگزین گزاره q گردد. به‌طورمثال می‌نویسیم:

ردیف	گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$
۳	۷ مقسوم‌علیه ۴۹ است	$2 \times 3 = 7$	د	ن	ن	د

در ردیف چهارم باید گزاره‌های نادرست و درست به‌ترتیب جایگزین گزاره‌های p و q گردد. به‌طور مثال می‌نویسیم:

ردیف	گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$
۴	لندن پایتخت فرانسه است	۵ بزرگ‌تر از ۲ است	ن	د	ن	د

قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها

۱ قانون جابه‌جایی: ترکیب‌های عطفی و فصلی دارای خاصیت جابه‌جایی هستند، بدین‌صورت که می‌توان جای گزاره‌ها را با هم عوض کرد.

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۲ قانون شرکت‌پذیری: ترکیب‌های عطفی و فصلی دارای خاصیت شرکت‌پذیری هستند.

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۳ قانون توزیع‌پذیری (پخشی): به‌این صورت که رابط فاصل خاصیت پخش شدن بر روی رابط عاطفی دارد و بالعکس.

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

۴ قانون دمورگان: این قانون بدین معناست که نقیض ترکیب فصلی دو گزاره با ترکیب عطفی نقیض آن دو گزاره هم ارز است و نقیض ترکیب عطفی دو گزاره با ترکیب فصلی نقیض آن دو گزاره هم‌ارز است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p)\wedge(\sim q)$
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

۵ قانون همانی: بدین معنا که ترکیب فصلی هر گزاره با یک گزاره همواره نادرست (F) هم‌ارز خودش می‌شود و همچنین ترکیب عطفی هر گزاره با یک گزاره همواره درست (T) همواره هم‌ارز خودش می‌شود.

p	F	T	$p \vee F$	$p \wedge T$
ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	د

$$\begin{cases} p \vee F \equiv p \\ p \wedge T \equiv p \end{cases}$$

۶ قانون غلبه: گزاره درست (T) همیشه در ترکیب فصلی و گزارهٔ نادرست (F) همیشه در ترکیب عطفی غلبه دارند.

p	T	F	$p \vee T$	$p \wedge F$
ن	د	ن	د	ن
د	د	ن	د	ن

$$\begin{cases} p \vee T \equiv T \\ p \wedge F \equiv F \end{cases}$$

نکته ۵

الف) یک ترکیب را همواره درست می‌گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره درست باشد. به‌عنوان مثال ترکیب $\sim p \vee p$ را در نظر بگیرید.

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
ن	د	د
د	ن	د

ب) یک ترکیب را همواره نادرست می‌گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره نادرست باشد. به‌عنوان مثال ترکیب $\sim p \wedge p$ را در نظر بگیرید.

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
ن	د	ن
د	ن	ن

۷ قانون جذب: این قانون یکی از پرکاربردترین قوانین در هم‌ارزی گزاره‌هاست.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \vee (p \wedge q)$
ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
د	د	د	د	د	د

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

سؤال ۴ آیا عبارت زیر یک گزاره است؟

p: «این جمله نادرست است.»

حل در این‌جا منظور از این جمله همان جملهٔ p است که از دو حالت خارج نیست.

۱ اگر p درست باشد آن‌گاه طبق خودش p نادرست است بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۲ اگر p نادرست باشد آن‌گاه طبق گفته آن نادرست خواهد بود بنابراین p نادرست نیست که این نیز یک تناقض است.

باتوجه به دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم که p نه درست است و نه نادرست. بنابراین p گزاره نیست.

تست ۲ اگر گزارهٔ $p \wedge (\sim p \vee q)$ درست باشد، کدام گزاره همواره درست است؟ *(کنکور سراسری ـ مرحله دوم)*

۱) $\sim p \wedge \sim q$ ۲) $\sim p \wedge q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $p \wedge q$

گزینهٔ ۴ درست است.

پاسخ از قوانین هم‌ارزی داریم:

$(\sim p \vee q) \wedge p \equiv (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$

$\equiv F \vee (q \wedge p)$ طبق نکته ۵

$\equiv q \wedge p$ طبق قانون همانی

$\equiv p \wedge q$ طبق قانون جابه‌جایی

پاسخ چون گزاره مرکب $(\sim p \vee q) \wedge p$ دارای ارزش درست است پس $p \equiv T$ و $(\sim p \vee q) \equiv T$، از آن‌جا که p درست است، برای این‌که $\sim p \vee q$ درست باشد، باید $q \equiv T$، درنتیجه تنها گزینه‌ای که ارزش درست دارد گزینه ۴ یعنی $p \wedge q$ است.

تست ۳ نقیض گزارهٔ $[\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge (p \vee r)$ کدام است؟

۱) $p \vee r$ ۲) $\sim p \vee \sim r$ ۳) $q \vee r$ ۴) $\sim p \wedge \sim r$

گزینهٔ ۴ درست است.

از قوانین هم‌ارزی داریم:

$[\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge (p \vee r) \equiv [(p \vee q) \vee r] \wedge (p \vee r)$ طبق قانون دمورگان

$\equiv [q \vee (p \vee r)] \wedge (p \vee r)$ طبق قانون شرکت‌پذیری

$\equiv p \vee r$ طبق قانون جذب

اکنون نقیض گزارهٔ ساده شده را به‌دست می‌آوریم: $\sim (p \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim r$

سؤال ۵ **گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

p: اولین جایزه نوبل در سال ۱۹۰۱ میلادی به ویلهلم رونتگن برای کشف اشعه ایکس اعطا شد.

q: جوان‌ترین برنده نوبل فیزیک لارنس براگ در ۲۵ سالگی بود.

r: محمد عبدالسلام نیز تنها مسلمانی است که در سال ۱۹۶۱ از کشور پاکستان موفق به دریافت نوبل فیزیک شده است.

گزاره‌های فوق را می‌توان به‌صورت مرکب زیر در نظر گرفت.

اولین جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۰۱ میلادی به ویلهلم رونتگن برای کشف اشعه ایکس اعطا شد و چنین نیست که جوان‌ترین برنده نوبل فیزیک لارنس براگ در ۲۵ سالگی بود یا محمدعبدالسلام نیز تنها مسلمانی که در سال ۱۹۶۱ از کشور پاکستان موفق به دریافت نوبل فیزیک شده است.

درباره ارزش گزارهٔ مرکب فوق باتوجه به اینکه گزاره‌های p و q درست و گزاره r نادرست می‌باشند چه می‌توان گفت؟

حل گزاره مرکب بیان شده به‌صورت $(p \wedge \sim q) \vee r$ نمایش داده می‌شود و باتوجه به جدول ارزش درستی یا نادرستی آن‌را مشخص می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	r	$(p \wedge \sim q) \vee r$
د	د	ن	ن	ن	ن

بنابراین این گزاره نادرست است.

ترکیب شرطی

گزاره‌های شرطی در زندگی روزمرهٔ به‌طور فراوان به‌کار برده می‌شود. به‌عنوان مثال گزاره‌های «اگر امروز شنبه باشد، فردا یکشنبه است.» و «اگر فردا هوا مساعد باشد، آن‌گاه فردا بیرون خواهیم رفت.» هر دو شرطی هستند. اگر p و q دو گزاره باشند گزاره «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم و به‌صورت «$p \Rightarrow q$» نمایش داده می‌شود.

نکته ۶

گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ به‌صورت‌های مقابل خوانده می‌شود:

۱ p نتیجه می‌دهد q را.

۲ q شرط لازم برای p است.

۳ p شرط کافی برای q است.

تذکر در ترکیب شرطی «$p \Rightarrow q$»، p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

نکته ۷

در جدول ارزش‌گذاری شرطی $p \Rightarrow q$ نکتهٔ حائز اهمیت این است که هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ درست است که در این حالت گفته می‌شود ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است و همواره $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ برقرار می‌باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

به جای گزاره $p \Rightarrow q$ می‌توان هم‌ارز منطقی آن یعنی $\sim p \vee q$ را نوشت، یعنی باتوجه به جدول مقابل داریم:

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نکته ۸

اگر $p \Rightarrow q$ گزاره شرطی باشد:

الف) گزاره $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (q \vee \sim p) \equiv p \wedge \sim q$ را نقیض آن می‌گویند.

ب) گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس آن می‌گویند.

ج) گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض آن می‌گویند که هم‌ارز منطقی $p \Rightarrow q$ نیز هست.

سؤال ۶

نشان دهید $p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ برقرار می‌باشد. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

حل جدول ارزش درستی $p \Rightarrow q$ و $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم.
ملاحظه می‌شود که این گزاره‌ها با یکدیگر هم‌ارز منطقی می‌باشند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q \Rightarrow \sim p)$
ن	د	د	ن	د	د
د	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن

تست ۴

عکس نقیض ترکیب شرطی « $(p \wedge \sim r)$ شرط کافی است برای $(p \vee r)$» کدام است؟

۱) $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow p \vee r$
۲) $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (r \vee \sim p)$
۳) $(\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
۴) $(\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

پاسخ گزینهٔ ۲ درست است.

طبق نکته ۶ ترکیب شرطی به‌صورت $(p \wedge \sim r) \Rightarrow p \vee r$ می‌باشد که طبق نکته ۸ و تعریف عکس نقیض داریم:

$$(p \wedge \sim r) \Rightarrow p \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (\sim p \vee r)$$

تست ۵

گزارهٔ «اگر a زوج باشد، b اول است» هم‌ارز منطقی کدام گزینه است؟

۱) اگر a فرد باشد، b اول نیست.
۲) اگر a زوج نباشد، b اول است.
۳) اگر b اول نباشد، a زوج نیست.
۴) اگر b اول باشد، a زوج است.

پاسخ گزینهٔ ۳ درست است.

می‌دانیم هر گزاره با عکس نقیض خود هم‌ارز منطقی می‌باشد بنابراین گزینهٔ ۳ عکس نقیض گزارهٔ صورت سؤال است.

سؤال ۷ **با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید قوانین زیر همواره درست می‌باشند.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) قانون جمع (ادخال فاصل) $p \Rightarrow (p \vee q)$

ب) قانون اختصار (حذف عاطف) $p \wedge q \Rightarrow p$

ج) رفع مؤلفه $(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$

حل ابتدا جدول ارزش گزاره‌ها در حالت‌های مختلف p و q را می‌نویسیم و سپس همواره درست بودن آن‌ها را در حالت‌ها گوناگون مورد بررسی قرار می‌دهیم.

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	$p \wedge q$	p	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge (\sim p)$	q	$(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$
د	ن	د	د	ن	د	د	د	ن	ن	ن	د
د	د	د	د	د	د	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن	ن	د	د	د	د	د	د

تست ۶ **کدام‌یک از گزاره‌های شرطی زیر همواره درست نیست؟**

۱) $p \Rightarrow p \vee q$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ ۳) $q \Rightarrow p \vee q$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

پاسخ گزینهٔ **۲** درست است.

گزینه ۲ همواره درست نیست زیرا طبق جدول ارزش، در دو حالت ارزش آن نادرست می‌باشد. بقیه گزینه‌ها در هر چهار حالت دارای ارزش درست می‌باشند.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \Rightarrow p \wedge q$
ن	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن
د	د	د	د	د

تست ۷ **اگر گزاره‌های p و q و r به‌ترتیب درست، نادرست و درست باشند کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟**

۱) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ ۲) $p \wedge (\sim q \vee r)$ ۳) $p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim r)$ ۴) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim r)$

پاسخ گزینهٔ **۲** درست است.

هر چهار گزینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و جدول ارزش هر گزینه را می‌نویسیم.

۱

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
د	ن	د	ن	د	ن

۲

p	q	r	$\sim q$	$(\sim q) \vee r$	$p \wedge ((\sim q) \vee r)$
د	ن	د	د	د	د

۳

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim r)$	$p \Rightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim r))$
د	ن	د	د	ن	ن	ن

۴

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim r$	$p \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim r)$
د	ن	د	د	د	ن	ن

تست ۸ **گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ با کدام‌یک از گزینه‌های زیر هم‌ارز منطقی است؟**

۱) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow r$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow (\sim r)$ ۳) $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim r)$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

پاسخ گزینهٔ **۴** درست است.

کافیست برای رد گزینه‌های دیگر یک حالت را بیابیم که دو گزاره هم‌ارز نمی‌باشند.

رد گزینه **۱** حالت $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv F \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۱ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	r	$(\sim p) \vee (\sim q) \Rightarrow r$
د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	د

رد گزینه ۲ حالت $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv T \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۲ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$\sim r$	$(p \vee q) \Rightarrow (\sim r)$
د	د	د	د	د	د	ن	ن

رد گزینه ۳ حالت $\begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۳ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim r$	$(\sim p) \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim r)$
ن	ن	د	د	د	د	د	د	ن	ن

گزینهٔ ۴ هم‌ارز منطقی گزارهٔ سؤال می‌باشد که در هر ۸ حالت ممکن با هم هم‌ارز می‌باشند.

نکته ۹

« p مگر آن‌که q » به‌صورت $(\sim q) \Rightarrow p$ نوشته می‌شود.

به‌عنوان مثال «او را کمک نمی‌کنم مگر آن‌که اظهار پشیمانی کند.» یعنی «اگر اظهار پشیمانی نکند، او را کمک نمی‌کنم.»

ترکیب دوشرطی

گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع مقابلش موازی است.» را در نظر بگیرید، عکس این گزاره شرطی به‌صورت «اگر اضلاع یک چهارضلعی موازی باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.» خواهد بود اکنون ترکیب عطفی این دو گزاره، یک گزاره دو شرطی است و به‌صورت «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع مقابلش موازی است و برعکس» نوشته می‌شود. اگر p و q دو گزاره باشند آن‌گاه گزاره «اگر p آن‌گاه q و برعکس» که ترکیب عطفی دو گزارهٔ شرطی $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ می‌باشد را ترکیب دو شرطی دو گزارهٔ p و q می‌نامیم و به‌صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نمایش داده می‌شود.

نکته ۱۰

گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » به‌صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

۱ اگر p آن‌گاه q و برعکس

۲ p اگر و فقط اگر q (q اگر و فقط اگر p)

۳ p شرط لازم و کافی برای q است. (q شرط لازم و کافی برای p است.)

توجه

برای مثال گزاره‌های « $۴x = ۱۲ \Leftrightarrow x = ۳$ » و « $۳x + ۴ > ۱ \Leftrightarrow x > -۱$ » و «دو صفحه با هم موازی هستند اگر و تنها اگر هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.» همگی گزاره‌های دوشرطی هستند.

نکته ۱۱

همان‌گونه که بیان شد ترکیب دو شرطی p و q ترکیب عطفی دو گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ می‌باشد. بنابراین $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ همیشه برقرار است.

باتوجه به جدول ارزش گزاره‌ها به‌راحتی می‌توان نشان داد که در حالت‌های مختلف $p \Leftrightarrow q$ چه ارزشی دارد:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

از نکته ۱۱ و جدول صفحه قبل، جدول ارزش گزاره دو شرطی را نتیجه می‌گیریم:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته ۱۲

ترکیب دو شرطی دو گزاره p و q تنها در صورتی دارای ارزش درست است که p و q هر دو دارای ارزش یکسانی باشند. اصطلاحاً به ترکیب دو شرطی، هم‌ارز منطقی نیز گفته می‌شود.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

سؤال ۸ **ارزش گزاره‌های دو شرطی زیر را تعیین کنید.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $۴<۶ \Leftrightarrow ۴+۳<۶+۳$ **ب)** $۴>۶ \Leftrightarrow -۴>-۶$ **ج)** $۴<۶ \Leftrightarrow \frac{۴}{۵}>\frac{۶}{۵}$ **د)** $۴>۶ \Leftrightarrow ۴\times۲>۶\times۲$

حل طبق نکتهٔ ۱۲ هرگاه ارزش دو گزاره یکسان باشد ارزش ترکیب دوشرطی آن دو گزاره درست است. در گزارهٔ «الف» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش هر دو گزاره درست می‌باشد بنابراین ترکیب دوشرطی آن دو درست است. دو گزاره‌های «ب» و «ج» چون در ترکیب دو شرطی ارزش یکی درست و دیگری نادرست می‌باشد بنابراین ارزش آن‌ها نادرست است. گزارهٔ «د» نیز چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، بنابراین ارزش ترکیب دوشرطی آن دو درست است.

تست ۹ **اگر گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست باشد و $p \Rightarrow q$ درست باشد ارزش گزارهٔ $۳(۳p \wedge ۳r) \wedge (q \Rightarrow r)$ کدام است؟**

۱) همواره نادرست است. ۲) همواره درست است.

۳) نادرست است اگر و تنها اگر r درست باشد. ۴) درست است اگر و تنها اگر r درست باشد.

پاسخ گزینهٔ ۴ درست است.

$$۳(\sim p \wedge ۳r) \equiv p \vee r$$

$p \Leftrightarrow q$ نادرست است اگر p درست و q نادرست باشد یا بالعکس. حال چون $p \Rightarrow q$ درست است باید p نادرست و q درست باشد. داریم:

$$\Rightarrow (p \vee r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (F \vee r) \wedge (T \Rightarrow r) \equiv r \wedge r \equiv r$$

تست ۹ **در کدام‌یک از زوج گزاره‌های A و B داریم $A \Leftrightarrow B$، در صورتی‌که بدانیم گزاره r درست است؟**

۱) $\begin{cases} A: p \vee (q \wedge \sim r) \\ B: (p \vee q) \Rightarrow \sim r \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} A: p \wedge (\sim q \vee r) \\ B: p \vee (q \wedge \sim r) \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} A: (p \wedge q) \Rightarrow r \\ B: p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r) \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} A: (p \Rightarrow \sim q) \wedge r \\ B: \sim p \Rightarrow (q \vee \sim r) \end{cases}$

پاسخ گزینهٔ ۲ درست است.

اگر ارزش گزاره‌های A و B یکسان باشد، آن‌گاه $A \Leftrightarrow B$ برقرار خواهد بود. حالت‌های رد گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم.

رد گزینه ۱ حالت $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم $A \equiv T$ و $B \equiv F$ است پس هم‌ارز نیستند.

رد گزینه ۳ حالت $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv T \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم $A \equiv T$ و $B \equiv F$ است پس هم‌ارز نیستند.

رد گزینه ۴ حالت $\begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم $A \equiv T$ و $B \equiv F$ است پس هم‌ارز نیستند.

جدول ارزش گزینه ۲ به‌صورت مقابل است.
مشاهده می‌گردد در هر چهار حالت ارزش یکسانی دارند و هم‌ارز می‌باشند.

p	q	r	$p\wedge(\sim q\vee r)$	$p\vee(q\wedge\sim r)$
ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
د	ن	د	د	د
د	د	د	د	د

سؤال ۹ **با استفاده از جدول ارزش و بدون جدول ارزش ثابت کنید $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$ برقرار است.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

حل با استفاده از جدول ارزش داریم:

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow r$
ن	ن	ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	د	د	د	د	د	د

طبق آنچه در نکته ۷ در مورد ترکیب شرطی بیان شد « $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$ »، بنابراین داریم:

$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(\sim p)\vee(q\Rightarrow r)$ طبق نکته ۷

$\equiv(\sim p)\vee(\sim q\vee r)$ طبق نکته ۷

$\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee r$ طبق قانون شرکت‌پذیری

$\equiv(\sim(p\wedge q))\vee r$ طبق قانون دمورگان

$\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$ طبق نکته ۷

که به آن قانون **عطف مقدمات** نیز گفته می‌شود.

نکته ۱۳

برای دو گزاره p و q:

الف) گزارهٔ « $\sim q\Leftrightarrow\sim p$ » را عکس نقیض گزاره $p\Leftrightarrow q$ می‌نامند.

ب) ترکیب دوشرطی p و q هم‌ارز است با ترکیب شرطی که مقدم آن ترکیب فصلی p و q و تالی آن ترکیب عطفی p و q است.

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$$

ج) نقیض ترکیب دو شرطی p و q هم‌ارز است با ترکیب دو شرطی یکی از مولفه‌ها با نقیض مولفهٔ دیگر است.

$$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim p\Leftrightarrow q$$

اثبات «ب»:

$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

$\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge p)\vee(q\wedge\sim q)\vee(q\wedge p)$ قانون پخشی

طبق نکته ۵، ارزش $p\wedge\sim p$ و $q\wedge\sim q$ همیشه نادرست است و طبق قانون همانی می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. بنابراین داریم:

$p\Leftrightarrow q\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)\equiv\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$ طبق نکته ۷

اثبات قسمت «ج»:

$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim[(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)]$

$\equiv\sim[\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)]\equiv(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ طبق قانون دمورگان

$\equiv(\sim q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow\sim q)$ طبق نکته ۷

$\equiv\sim q\Leftrightarrow p$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)]$$

$$\equiv \sim[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$ طبق قانون دمورگان

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$ طبق قانون جابه‌جایی

$$\equiv (q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$$ طبق قانون نکته ۷

$$\equiv q \Leftrightarrow \sim p$$

توجه داشته باشید که $(q \Leftrightarrow \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$ و $(\sim q \Leftrightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$ می‌باشند.

تست ۱۰ **گزارهٔ $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟**

۱) $p \Leftrightarrow \sim q$ ۲) $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ ۳) $p \Leftrightarrow q$ ۴) $\sim p \vee \sim q$

پاسخ گزینهٔ ۱ درست است.

طبق نکته ۷ می‌دانیم که $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ بنابراین داریم:

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)$$

طبق نکتهٔ ۵ می‌دانیم ارزش $p \vee \sim p$ و $q \vee \sim q$ همواره درست است و طبق قانون همانی می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. پس داریم:

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

$$\equiv (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$$ طبق نکته ۷

$$\equiv \sim q \Leftrightarrow p \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$ طبق نکته ۱۱

چند هم‌ارزی مهم

۱ ترکیب شرطی از چپ در همهٔ ترکیب‌ها توزیع‌پذیر است.

الف) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ ب) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ د) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

۲ ترکیب فصلی از چپ در ترکیب‌های شرطی و دو شرطی توزیع‌پذیر است.

الف) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$ ب) $p \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۳ هرگاه ترکیب شرطی از راست روی ترکیب‌های فصلی یا عطفی توزیع شود، فاصل را به عاطف و عاطف را به فاصل تبدیل می‌کند.

الف) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ب) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

اثبات مستقیم

گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید، چنانچه بتوانیم با توجه به درستی p، درستی q را ثابت کنیم در این‌صورت یک اثبات مستقیم انجام داده‌ایم: به‌عنوان مثال اثباتی که بعد از نکته ۱۳ نشان دادیم از همین راه اثبات مستقیم بود.

اثبات به روش غیرمستقیم

می‌دانیم یک گزاره شرطی با عکس نقیض آن هم‌ارز است. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

بنابراین به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

سؤال ۱۰ **ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n مضرب ۳ است.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

حل اثبات روش غیرمستقیم: به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. $p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

(n^2 مضرب ۳ نیست $\Rightarrow$ n مضرب ۳ نباشد) $\equiv$ (n مضرب ۳ است $\Rightarrow$ n^2 مضرب ۳ باشد)

چنانچه n مضرب ۳ نباشد چون $n \in Z$، پس $n = 3k+1$ یا $n = 3k+2$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3k' + 1 \quad , \quad n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3k'' + 1$$

درنتیجه n^2 مضرب ۳ نیست و بنابراین حکم صورت سؤال کاملاً درست است.