



انجمن نشر آسان
بین المللی
گاج

آسان

مجموعه کتاب‌های آموزش ساده

سرشناسه: موسوی، سید شجاع‌الدین
عنوان و نام پدیدآور: ریاضی یازدهم تجربی / سید شجاع‌الدین موسوی
علیرضا شعبانی نصر
مشخصات نشر: تهران: انتشارات بین‌المللی گاج؛ ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری: ۴۰۰ ص. مصور.
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های آسان گاج می‌باشد.
بها: ۴۵۰۰۰ تومان
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۸۲۵-۶
وضعیت فهرست‌نویسی: فیبای مختصر.
شماره کتابشناسی ملی: ۵۱۳۰۲۹۶

توجه: به موجب ماده‌ی
۵ قانون حمایت از حقوق
مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب
۱۳۴۸/۱۰/۱۱ کلیه‌ی حقوق این کتاب برای
انتشارات بین‌المللی گاج محفوظ می‌باشد و هیچ
شخص حقیقی یا حقوقی مق استفاده از آن
را ندارد و متلفین به موجب این
قانون تمت پیگرد قانونی
قرار می‌گیرند.

[ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی: مهندس محمد جوکار]
[مدیر تألیف: علیرضا مزرعتی]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های: آسان]
[عنوان کتاب: ریاضی یازدهم تجربی]

[مؤلفان: سید شجاع‌الدین موسوی - علیرضا شعبانی نصر]
[برنامه‌ریزی و امور اجرایی: نیلوفر حاجیلو] + [ویرایش علمی: علی عیوضی - مینا پروین - محمدحسن دیندارلو]
[مدیر واحد فنی و گرافیک: صغری قربانی] + [نظارت بر تایپ و صفحه‌آرایی: محمد یوسفی]
[صفحه‌آرایی: ساناز عاشقی - مریم ناییب - فرزانه رجبی] + [اجرا: مهسا هوشیار - الناز دارانی - لیلا فرجی امین]
[طراح شکل: وحیده معینی - ملیکا فدایی] + [کارتون‌نویس: مجید باقرزادگان] + [طراح جلد: منصور سماواتی]
[مدیر چاپ: علی مزرعتی] + [لیتوگرافی، چاپ‌خانه و صحافی: گاج]
[نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)] + [شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهارراه ولیعصر (عج)
و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹] + [تلفن: ۰۲۱ - ۶۴۲۰]
[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵]
[صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی: www.gaj.ir]
[قیمت: ۴۵۰۰۰ تومان]

مقدمه مؤلفان

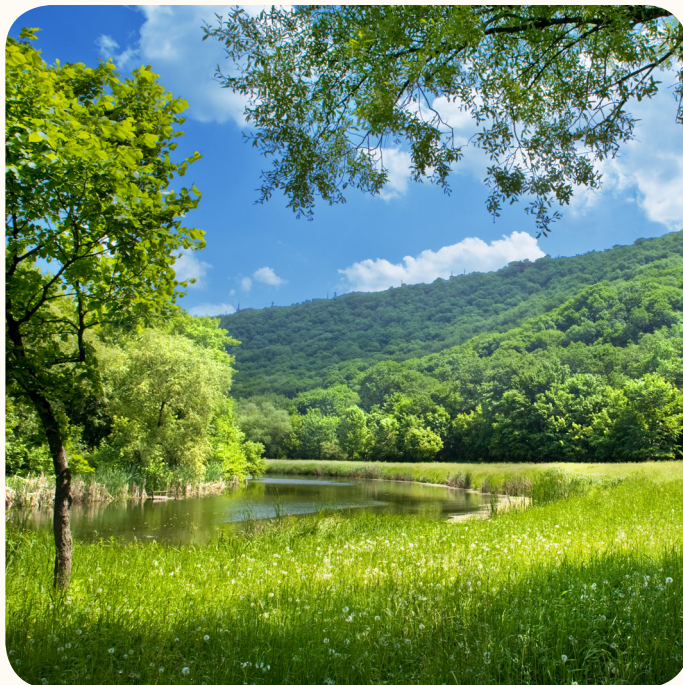
◆◆◆ سخن اول

جدید خیلی راضی هستند و بعضی هم نه! اما آن چیزی که از همه اینا مهمتره اینه که «اصلاً چرا باید درس بخوانیم؟! و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخورن؟» خصوصاً سؤال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی می‌خوره؟!». البته به نظر ما هر دانش‌آموزی که برای این سؤال‌ها جوابی داشته باشه، دیگه درس خواندن براش سخت نیست!

سلام بچه‌ها. از سال ۱۳۹۰ که تغییرات کتاب‌های درسی ابتدایی و بعد متوسطه شروع شد درباره این که کتب دبیرستان و آزمون کنکور بالاخره چه شکلی میشه، حرف‌های زیادی می‌شنیدیم. به‌خصوص شماها که از اولین نسل‌هایی بودین که هر سال با کتاب‌های درسی جدید برخورد می‌کردین! بعضی معلم‌ها از کتاب‌های

◆◆◆ ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتب درسی جدید، به کاربردهای علم در زندگی توجه ویژه‌ای شده، طوری که بر روش بیان و مراحل آموزش مفهومی هم تأثیر گذاشته است. اما متأسفانه اکثر کتاب‌های کمک درسی همچنان دارند با همان روش‌های قدیمی و برخلاف اهداف آموزش مفهومی در کتب درسی جدیدالتألیف پیش می‌روند، یعنی با سؤالات و مثال‌های تکراری بیش از حد و نکته‌های حفظی و کلیشه‌ای، به مباران ذهن خواننده می‌پردازند. در حالی که تحولات کتب درسی جدید همسو با پیشرفت‌های آموزشی جهان بوده و نباید در مقابلش ایستادگی کرد! بنابراین ما هم با توجه به خلأ موجود در کتب کمک درسی فعلی کشور و همچنین الگو برداری از روش‌های کارآمد کتب خودآموز



برتر جهان، بر آن شدیم تا نسل جدیدی از کتابهای کمک درسی را منطبق بر آخرین تغییرات محتوای کتب درسی جدید التالیف و رعایت روابط طولی و عرضی در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این سری کتابها، همان طور که می‌دانید، در واحد تالیف انتشارات بین المللی گاج، نام «آس» به خود گرفت که مخفف «آموزش ساده» است و تمام قابلیت‌های نسل‌های قبلی کتب کمک درسی چه برای مطالعه در منزل و چه برای تمرین در مدرسه، یکجا در آن‌ها گنجانده شده است. در سری کتاب‌های آس، سعی بر این بوده تا ضمن مطالعه مطالب درسی، شما بتوانید با کشف کاربردهای‌شان در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید. کتاب آموزش ساده «ریاضی یازدهم تجربی» که اکنون پیش روی شماست، هم از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی ریاضی (۲) رشته تجربی دارای هفت فصل و در هر فصل دارای تعدادی درس است. در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

CONTENTS

فهرست مطالب

آپس | ریاضی یازدهم تجربی

فصل اول
هندسه تحلیلی و جبر

۵۹



۲۴۳

فصل پنجم
توابع نمایی و لگاریتمی



فصل دوم

هندسه

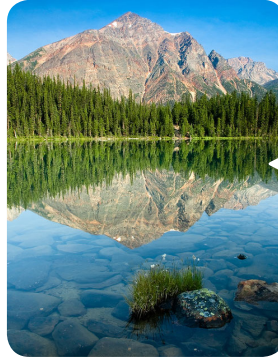
۸۵



فصل سوم

تابع

۱۳۵



فصل ششم
حد و پیوستگی

۲۹۱



فصل چهارم

مثلثات

۲۰۳



فصل هفتم
آمار و احتمال

۳۴۳





فصل اول Analytic Geometry and Algebra

هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۵۹ معادلات گویا

۶۴ معادلات رادیکالی

۶۷ یافتن نقاطی از خط با ویژگی خاص

۷۰ بخش سؤالات

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

۳۳ جواب معادله درجه ۲

۳۸ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های ...

۴۱ رأس، ماکزیمم و مینیمم سهمی

۴۵ درباره معادله و نمودار سهمی

۵۰ بخش سؤالات

درس اول: هندسه تحلیلی

۱۱ مختصات و معادله خط

۱۵ دوخط عمود برهم

۱۷ نقطه وسط و فاصله دونقطه

۲۰ فاصله نقطه از خط

۲۳ فاصله دو خط موازی

۲۵ بخش سؤالات

۷۶ خلاصه فصل

۷۷ تمرین دوره‌ای فصل



ماجرا چیه؟!

در این فصل به سه مطلب اساسی می‌پردازیم.
اول: یافتن معادل‌هایی برای مفاهیم هندسی در صفحهٔ مختصات.
 کی دو خط موازی‌اند؟ کی عمودند؟ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خطی که مختصات دو انتهای آن را می‌دانیم، چیست؟ فاصلهٔ دو نقطه در صفحه چه قدر است و ...
دوم: بحثی حول سهمی، برخی ویژگی‌های آن و مختصات رأس آن و نقاط تقاطع آن با محور x ها و بحثی حول این نکته که کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار یک معادلهٔ درجهٔ ۲ کجا رخ می‌دهد و حل چند مسئله با کمک این مطلب.
سوم: تبدیل برخی معادلات که نه معادلهٔ خطی‌اند و نه معادلهٔ درجهٔ ۲، به معادلات خطی یا درجهٔ ۲ و سپس حل آن‌ها.

سپهر و سامان، نوجوان ۱۳ و ۱۲ ساله هر روز صبح ساعت ۷ در مسیر یک جاده کوهستانی که بین قهرود و قمصر کشیده شده به دوچرخه‌سواری می‌پردازند. طول مسیر بین این دو روستا، ۲۷ کیلومتر است و چون مسیر شیب دارد، سرعت افراد در مسیر رفت و برگشت متفاوت است. سامان از قمصر شروع به دوچرخه‌سواری می‌کند و سپهر از قهرود و هر کدام سه بار این مسیر را به‌طور متوالی می‌روند و برمی‌گردند.



سرعت سپهر در رفت و برگشت به ترتیب ۲۰ و ۳۰ است و سرعت سامان در رفت و برگشت به ترتیب ۲۵ و ۱۵ است. سامان و سپهر طی دوچرخه‌سواری هر روزه، چندبار از کنار هدیگر عبور می‌کنند؟ کی و کجا؟ سعی کنید با رسم نمودار مکان-زمان این دو نفر، پاسخ را بررسی کنید.



۱. نام روستایی است که در ۴۵ کیلومتری شهرستان کاشان قرار دارد.
 ۲. قمصر از توابع شهرستان کاشان می‌باشد و گلاب آن معروف است.

درس اول: هندسه تحلیلی

مختصات و معادله خط



یکی از مهم‌ترین کارهای بشر در تاریخ ریاضیات ساختن صفحه مختصات و نمودار بوده است. این کار با تمام سادگی‌اش گام مهمی بود و زمینه را برای پیشرفت ریاضیات و سایر علوم فراهم کرد. این ایده با ارزش را دکارت مطرح کرد. شاید شنیده باشید که گرگ پیر، یک نویسنده سرخ‌پوست از داکوتای شمالی گفته:

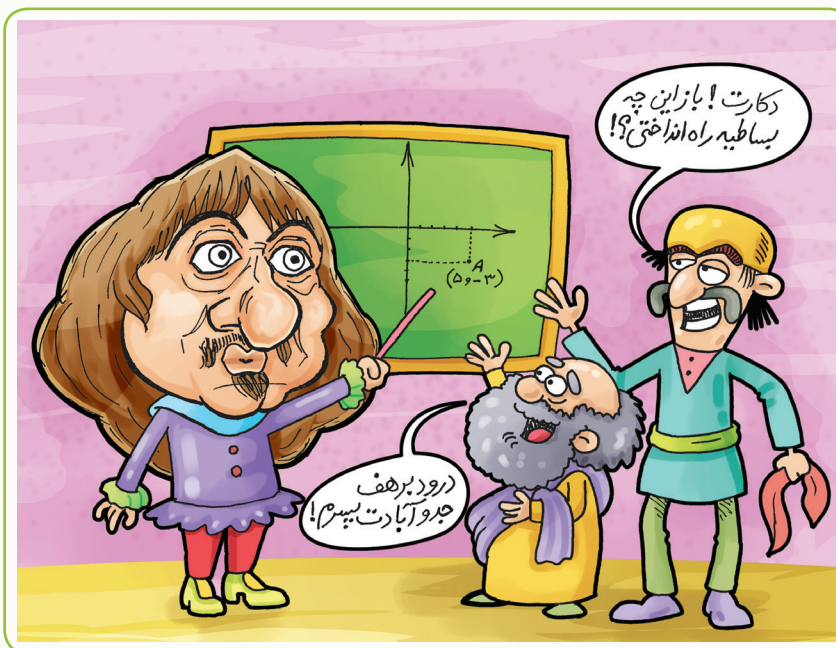
آله فیثاغورس زنده بود وقتی که دکارت ایده خود را مطرح کرد هتماً بلند می‌شد و به دکارت می‌گفت: «درود بر تو دکارت و بر هفت جد و آبارت».



رنه دکارت (۱۶۵۰ - ۱۶۹۶)



نویسنده سرخ‌پوست، گرگ پیر (... - ۱۹۸۱)

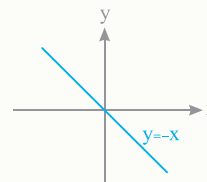
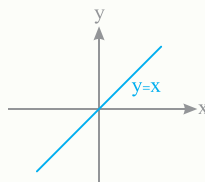
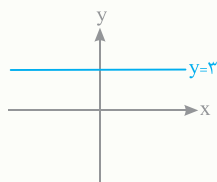
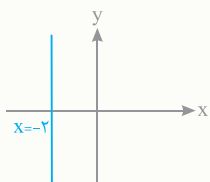
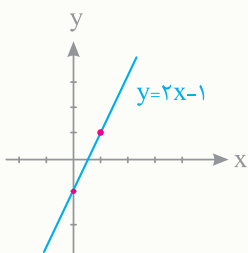


گذریم، کاری که دکارت کرد با حال بود. بالاخره یک صفحه مختصات ارائه کرد و برای هر نقطه در صفحه یک مختصات (درواقع یک

آدرس) ارائه کرد و این کمک کرد تا بتوانیم برای نمودارها معادله‌ای ارائه کنیم و برای معادله‌ها نموداری بسازیم.

دکارت بعد از این که صفحه مختصات را معرفی کرد، رو به حاضرین گفت: «حالا هر رابطه‌ای برحسب x و y که در نظر بگیرید، اگر مجموعه نقاطی از صفحه که مختصاتشان در آن رابطه صدق می‌کنند را در صفحه مختصات مشخص کنید تصویری به دست می‌آید که نمودار آن رابطه است.» بعد گفت: «مثلاً رابطه $y = 2x - 1$ را در نظر بگیرید، نقاط $(2, 3)$ ، $(1, 1)$ ، $(0, -1)$ ، $(-1, -3)$ و ... در این رابطه صدق می‌کنند پس اگر مجموعه همه نقاطی که در رابطه $y = 2x - 1$ صدق می‌کنند را مشخص کنیم به نمودار روبه‌رو می‌رسیم.»

دکارت چند نمونه دیگر را هم رسم کرد:



نکته: می‌بینیم که نمودار رابطه $x = a$ خطی موازی محور y است و نمودار رابطه $y = b$ خطی موازی محور x است.

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

جواب معادله درجه ۲

پایه نهم



در کتاب دهم معادله درجه ۲ رو حل کردیم. یعنی در حالت کلی بررسی کردیم که معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ در چه شرایطی جواب داره و جواباش به چه صورتی هستند؟ به این نتیجه رسیدیم که تعداد جواب‌های این معادله به علامت $b^2 - 4ac$ که اون رو Δ نامیدیم بستگی داره.

۱ اگر $\Delta > 0$ باشد. \Leftarrow معادله دو جواب دارد.

۲ اگر $\Delta = 0$ باشد. \Leftarrow معادله یک جواب مضاعف دارد.

۳ اگر $\Delta < 0$ باشد. \Leftarrow معادله جواب ندارد.

راه به دست آوردن جواب هم به صورت زیر بود:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad \text{حال اگر } \Delta > 0 \text{ باشد، عبارت بالا را می‌شود به شکل مقابل نوشت:}$$

و از آنجا که اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر می‌باشد. از صفر بودن عبارت فوق هم نتیجه می‌گیریم که $x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ یا $x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ است. حال در نهایت جوابهای معادله درجه دوم به دست می‌آیند.

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

یا $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

نکته: دو تا حالت خاص هم وجود دارد که در این حالت‌ها جواب معادله $ax^2 + bx + c = 0$ خیلی راحت به دست می‌آیند.

۱) در معادله درجه دوم وقتی $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x = 1$ است و دیگری $x = \frac{c}{a}$.

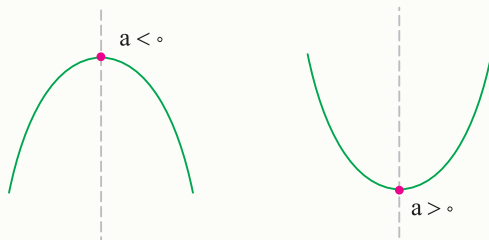
۲) در معادله درجه دوم وقتی $a + c = b$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x = -1$ است و دیگری $x = \frac{-c}{a}$.

دلیل دو نکته فوق را هم می‌توان به صورت زیر عنوان کرد:

۱) $ax^2 + bx + c$ به ازای $x = 1$ برابر $a + b + c$ است.

۲) $ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -1$ برابر $a - b + c$ است.

◆ در کتاب دهم دیدیم که نمودار منحنی $y = ax^2 + bx + c$ به شکل سهمی است که با توجه به علامت a ، سهمی رو به بالا یا سهمی رو به پایین می‌باشد.



با توجه به شکل‌ها معلوم است که نمودار هر منحنی درجه ۲ یا یک بالاترین نقطه دارد و یا یک پایین‌ترین نقطه که آن را رأس سهمی می‌نامیم و دیدیم که هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که در آن $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد و از آنجا که:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

معلوم می‌شود که مختصات رأس منحنی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ و خط تقارن این منحنی هم برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه دوم



۱

♦ در یک معادله درجه دوم بدون تعیین کردن ریشه‌های معادله درجه دوم می‌توانیم مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله را به دست آوریم، حال اگر α و β ریشه‌های عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشند مجموع این دو ریشه را $S = \alpha + \beta$ و حاصلضرب این دو ریشه را $P = \alpha \cdot \beta$ می‌نامیم.

چون α و β ریشه‌های چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ هستند پس می‌توانیم عبارت درجه دوم را به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ بنویسیم. حال اگر $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ را باز کنیم داریم:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$$

با توجه به معادله به دست آمده می‌توانیم به راحتی مقادیر S و P را بیابیم.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{اصل ضرب ریشه‌ها} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

بنابراین اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، می‌توانیم معادله درجه دوم را با استفاده از مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها نیز بازنویسی کنیم.

$$x^2 - \underbrace{(\alpha + \beta)}_S x + \underbrace{\alpha \cdot \beta}_P = x^2 - Sx + P$$

البته با استفاده از فرمول Δ و روش کلی حل معادله درجه دوم نیز می‌توانستیم به این نتیجه برسیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حال کافی است یک بار این دو را با هم جمع و بار دیگر این دو را در هم ضرب نماییم.

$$\text{جمع ریشه‌ها: } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها: } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

سؤال

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های چندجمله‌ای $5x^2 + 9x + 3$ را بیابید.

پاسخ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ به ترتیب برابر با $\frac{-b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ هستند. (البته به شرط اینکه معادله جواب داشته باشد) بنابراین چون $\Delta = 9^2 - (4 \times 3 \times 5) = 21 > 0$ است نتیجه می‌شود مجموع و حاصلضرب ریشه‌های چندجمله‌ای $5x^2 + 9x + 3$ به ترتیب برابرند با:
 $S = \frac{-9}{5}$, $P = \frac{3}{5}$

سؤال

مجموع و حاصلضرب جواب‌های معادله $3x^2 - x + 1 = 0$ را بیابید.

پاسخ باتوجه به اینکه $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 = -11 < 0$ معلوم می‌شود که اصلاً این معادله جواب ندارد تا مجموع و حاصلضرب جواب‌ها داشته باشد.

سؤال

چندجمله‌ای درجه دومی معرفی کنید که مجموع ریشه‌هایش برابر ۵ باشد و حاصلضرب ریشه‌هایش ۲ باشد.

پاسخ مجموع ریشه‌های چندجمله‌ای $x^2 - Sx + P$ برابر است با S و حاصلضرب ریشه‌های آن برابر است با P . (البته به شرط اینکه چندجمله‌ای ریشه داشته باشد یعنی $S^2 - 4P > 0$ باشد).
 پس چندجمله‌ای $x^2 - 5x + 2$ می‌تواند یک جواب برای این سؤال باشد (دقت کنید که $(5^2 - (4 \times 2)) > 0$ می‌باشد).

حال بررسی می‌کنیم کدام یک از این اعداد جواب معادله هستند؟

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{2-1} + \sqrt{4-3} = 2 \quad \checkmark$$

$$x = 26 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{25} + \sqrt{49} = 12 \quad \times$$

پس فقط $x = 2$ جواب این معادله است.

$$\text{و) } \sqrt{x-5} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-5} - 2\sqrt{x} = -\sqrt{x+7} \Rightarrow (\sqrt{x-5} - 2\sqrt{x})^2 = (-\sqrt{x+7})^2 \Rightarrow x-5+4x-4\sqrt{x(x-5)} = x+7$$

$$\Rightarrow -4\sqrt{x(x-5)} = -4x+12 \Rightarrow -\sqrt{x(x-5)} = -x+3 \Rightarrow x(x-5) = (-x+3)^2 \Rightarrow x^2-5x = x^2-6x+9 \Rightarrow x = 9$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا $x = 9$ جواب معادله است؟

$$\sqrt{9-5} - 2\sqrt{9} + \sqrt{9+7} = 2-6+4 = 0 \quad \checkmark$$

بنابراین، $x = 9$ جواب معادله است.

یافتن نقاطی از خط با ویژگی خاص



بعضی وقت‌ها مسأله از ما می‌خواهد نقاطی را روی یک خط خاص پیدا کنیم که فاصله‌شان از یک نقطه ثابت مقدار معینی باشد. پاسخ به این سؤال معمولاً به یک معادله رادیکالی می‌انجامد، که باید از مهارت‌هایی که تا الان در مورد حل معادلات رادیکالی آموختیم استفاده کنیم. شاید ظاهر سؤال‌های مطرح شده در این قسمت خیلی ارتباطی با حل معادلات رادیکالی نداشته باشد. اما وقتی به حل سؤال می‌پردازید با یک معادله رادیکالی مواجه خواهید شد.

سؤال

همه نقاط روی خط $y = -2x + 1$ را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه $(1, -1)$ برابر ۵ باشد.

پاسخ مختصات همه نقاطی که روی خط $y = -2x + 1$ قرار دارند به شکل $(x, -2x + 1)$ است، فاصله دو نقطه $(x, -2x + 1)$ و $(1, -1)$ برابر

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (-2x+1-(-1))^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (-2x+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4(x-1)^2} = \sqrt{5(x-1)^2} = \sqrt{5} |x-1|$$

است با:

اگر این فاصله برابر ۵ باشد، خواهیم داشت:

$$\sqrt{5} |x-1| = 5 \Rightarrow |x-1| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = -2x + 1 = -1 - 2\sqrt{5} \\ x-1 = -\sqrt{5} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = -2x + 1 = -1 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

پس نقاط خواسته شده عبارتند از $(1 + \sqrt{5}, -1 - 2\sqrt{5})$ و $(1 - \sqrt{5}, -1 + 2\sqrt{5})$.

در این مورد دیدیم که برخوردی با معادله رادیکالی صورت نگرفت. اما در سؤال بعد با معادله رادیکالی سرشاخ می‌شویم.

سؤال

همه نقاط روی خط $y = x - 1$ را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه $(3, 0)$ برابر ۴ واحد است.

پاسخ معلوم است که مختصات همه نقاطی که روی خط $y = x - 1$ قرار دارند به صورت $(x, x - 1)$ است. فاصله دو نقطه $(x, x - 1)$ و $(3, 0)$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2}$$

و اگر این فاصله برابر ۴ باشد، به معادله رادیکالی زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2} = 4 \xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 16$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \Rightarrow y = x - 1 = 1 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \Rightarrow y = x - 1 = 1 - \sqrt{7} \end{cases}$$

پس دو نقطه $(2 + \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7})$ و $(2 - \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7})$ جواب‌های این مسأله هستند.

حال شما سعی کنید به‌عنوان یک تمرین این مسأله را بدون برخورد با معادله رادیکالی و حتی بدون برخورد با حل معادله درجه ۲ حل کنید.



فصل دوم Geometry

۲

هندسه

درس سوم: تشابه مثلث		درس دوم: استدلال و قضیه تالس		درس اول: ترسیم‌های هندسی	
۱۱۲	قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها	۹۷	یادآوری نسبت و تناسب	۸۷	عمودمنصف
۱۱۶	روابط بین اجزا در مثلث قائم‌الزاویه	۹۹	نسبت‌های برابر	۸۷	ترسیم عمودمنصف یک پاره‌خط
۱۱۷	عکس قضیهٔ فیثاغورس	۱۰۱	یک ویژگی مهم از خطوط موازی	۸۸	همرسی عمودمنصف‌ها در مثلث
		۱۰۲	قضیهٔ تالس	۹۰	رسم نیمساز یک زاویه
		۱۰۵	عکس قضیهٔ تالس	۹۰	همرسی نیمسازها در مثلث
۱۱۹	بخش سؤالات	۱۰۷	بخش سؤالات	۹۱	بخش سؤالات

۱۲۵ خلاصه فصل

۱۲۶ تمرین دوره‌ای فصل

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه



◆ معروف‌ترین واحد اندازه‌گیری زاویه، درجه است. زاویه یک درجه با تقسیم محیط دایره به 360° قسمت مساوی به دست

می‌آید. شاید پرسید چرا 360° ؟

پاسخ این است که این فقط یک قرارداد است. همان‌طور که مثلاً یک روز ۲۴ ساعت است و می‌توانستیم از اول یک روز را به گونه‌ای

دیگری تقسیم کنیم.

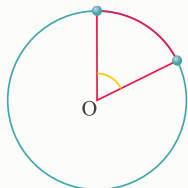
◆ واحدهای دیگری هم برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که از تقسیم محیط دایره به اعدادی دیگر به دست می‌آید.

اگر مانند شکل زیر دایره‌ای به شعاع ۱ را رسم کنید و کمائی با طول معلوم را روی آن مشخص کنید، می‌توانید با استفاده از آن یک واحد جدید برای زاویه معرفی کنید.

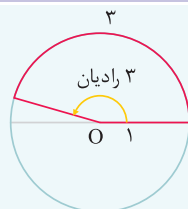
به عنوان مثال در شکل مقابل می‌توان زاویه مشخص شده را یک رادیان نامید و گفت:

تعریف یک رادیان اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمائی به طول ۱ در دایره‌ای به شعاع ۱ است.

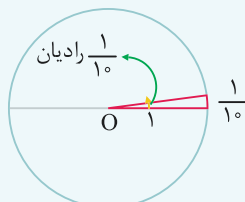
با این تعریف می‌توانیم بگوییم که:



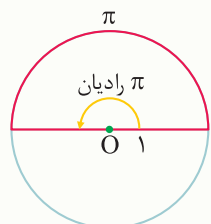
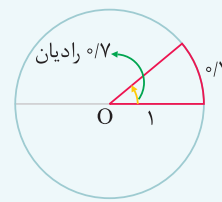
زاویه روبه‌رو به کمائی به طول ۳ واحد برابر ۳ رادیان است.



زاویه روبه‌رو به کمائی به طول $\frac{1}{10}$ واحد برابر $\frac{1}{10}$ رادیان است.



زاویه روبه‌رو به کمائی به طول $\frac{1}{7}$ واحد برابر $\frac{1}{7}$ رادیان است.



◆ با قدری دقت دیده می‌شود که با تعریفی که برای واحد «رادیان» داشتیم می‌توانیم بگوییم:

«اندازه هر زاویه برحسب رادیان برابر است با طول کمان روبه‌رو به آن در دایره‌ای به شعاع یک واحد.» چون محیط دایره‌ای به شعاع ۱ واحد برابر 2π است، معلوم است که طول کمان یک نیم‌دایره در دایره‌ای به شعاع واحد برابر π است. با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت:

π رادیان = 180° درجه

◆ رابطه فوق، ارتباط میان واحدهای درجه و رادیان را مشخص می‌کند و با استفاده از تناسب می‌توانیم، وقتی که اندازه زاویه را برحسب درجه داشتیم، آن را برحسب رادیان به دست آوریم و بالعکس. بعد از این هرگاه اندازه یک زاویه را بدون واحد اندازه‌گیری گفتیم، واحد اندازه‌گیری رادیان است.

به عنوان مثال اندازه زاویه A برابر $\frac{\pi}{4}$ است، یعنی $\frac{\pi}{4}$ رادیان است و اندازه زاویه B برابر ۲ است، یعنی ۲ رادیان است.

شاید پرسید چرا رادیان را معرفی کردید؟ واقعیت این است که معرفی واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه در ریاضیات بی‌دلیل نبوده است. دلیل آن مطلبی است مرتبط با حد و مشتق که با آن در سال دوازدهم آشنا خواهید شد.

سؤال

طول کمان مقابل به زاویه α رادیان در دایره‌ای به شعاع r را بیابید.

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times 2\pi r = \alpha r$$

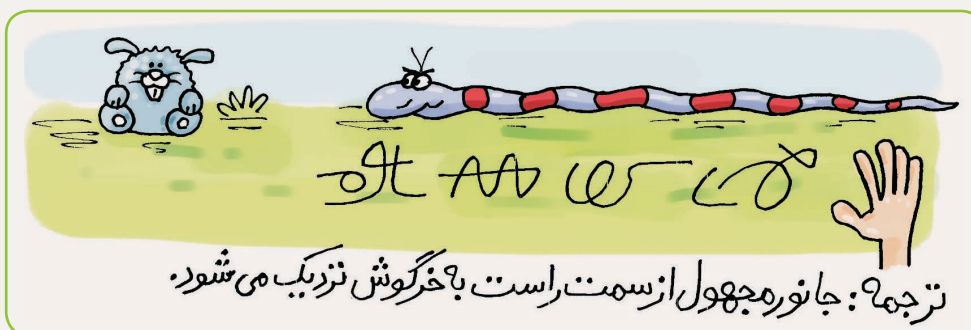
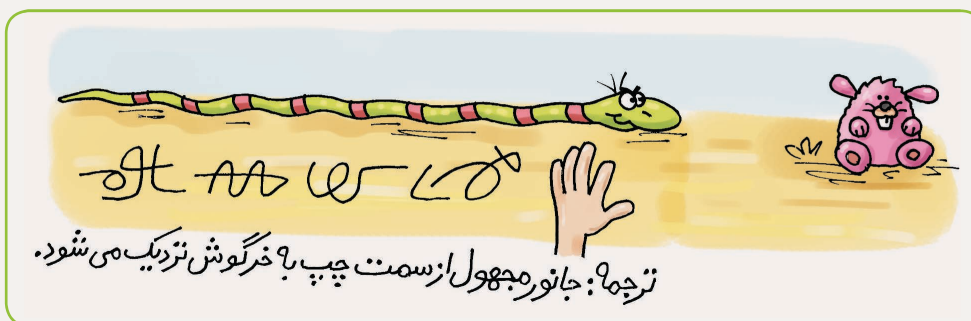
پاسخ این کمان در واقع $\frac{\alpha}{2\pi}$ قسمت از محیط دایره است. پس طول آن برابر خواهد بود با:



ماجرا چیه؟!

خیلی از تغییرات به صورت آرام، آرام و به طور پیوسته رخ می دهند.
 به عنوان مثال تغییرات قد شما یک فرایند پیوسته است، به این معنا که اگر زمانی قد شما ۱۴۵ سانتی متر بود و الان ۱۷۰ سانتی متر است؛ حتماً زمانی قدتان ۱۵۰ سانتی متر بوده، زمانی ۱۶۰ و ... و هر عددی که در بین ۱۴۵ و ۱۷۰ بگویید زمانی قد شما آن بوده.
 یعنی با یک تغییرات پیوسته قد شما ۱۷۰ سانتی متر شده است
 بعضی از تغییرات هم ناگهانی هستند و آن حالت پیوستگی را ندارند.
 مثل قیمت هر متر مکعب گاز که هزینه آن پلکانی محاسبه می شود و پیوسته نیست.
 ۴۵ تا ۴۶ متر مکعب ۱۰۸۱ ریال
 ۴۶ تا ۹۵ متر مکعب ۱۳۱۱ ریال
 ... و

و به طور مشابه هزینه یک کیلووات برق، برخی قوانین مالیاتی، قیمت بربری در طول تاریخ و ... نیز ساختاری ناپیوسته دارند. مباحث حد و پیوستگی شروع بحث درباره تفاوت های این دو گروه از مسائل است.
 ♦ تصاویر زیر در یک غار باستانی یافت شده است. باستان شناسان موفق شده اند زیر نویس های تصاویر را ترجمه کنند.



۳) مقدار واریانس و انحراف معیار را برای داده‌های زیر محاسبه کنید.

$-10, -10, -10, 0, 10, 10, 10$

پاسخ باز هم برای محاسبه واریانس ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه کرده و سپس میانگین را از داده‌ها کم کرده و به توان ۲ می‌رسانیم و در نهایت مجموع آنها را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{-10 - 10 - 10 + 0 + 10 + 10 + 10}{7} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-10 - 0)^2 + (-10 - 0)^2 + (-10 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (10 - 0)^2}{7} = \frac{6 \times 10^2}{7} = 85.71$$

حال کافی است از واریانس جذر گرفته و انحراف معیار را به دست بیاوریم. توجه داشته باشید که انحراف معیار شاخصی بهتر برای پراکندگی است.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{6 \times 10^2}{7}} \approx 9.25$$

درباره شاخص‌های پراکندگی



۷

♦ با دقت در مثال قبل به نظر می‌رسد که واریانس معیار خوبی برای پراکندگی نیست، زیرا درحالی‌که دامنه تغییرات برابر

$20 = 10 - (-10)$ است، واریانس تقریباً 85.71 است و مقدار آن خیلی بیشتر از دامنه تغییرات است در حالی که ما انتظار

نداریم که یک شاخص پراکندگی، مقدار پراکندگی را بیشتر از دامنه تغییرات نشان دهد.

البته انصافاً انحراف معیار اینگونه نبود و مقدار انحراف معیار کمتر از دامنه تغییرات بود. در حالت کلی هم وضعیت همین است و

انحراف معیار شاخصی بهتر از واریانس برای نشان دادن میزان پراکندگی است.

دقت کنید که واریانس به جمع و تفریق داده‌ها حساس نیست، یعنی اگر داده‌ها با عددی جمع شوند و یا عددی از داده‌ها کم شود هیچ تأثیری

در واریانس نخواهد داشت، اما به ضرب و تقسیم نسبت به داده‌ها حساس است، یعنی اگر داده‌های آماری در عدد a ضرب شود آنگاه واریانس

آن داده‌ها در a^2 ضرب می‌شود و اگر داده‌ها بر a تقسیم شوند، آنگاه واریانس بر a^2 تقسیم می‌شود.

نکته: اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر σ^2 باشد، آنگاه واریانس داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $a^2 \sigma^2$ می‌باشد.

♦ می‌خواهیم نکته فوق را اثبات کنیم:

می‌دانیم که اگر میانگین داده‌های x_1, \dots, x_n برابر \bar{x} باشد آنگاه میانگین داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $a\bar{x} + b$ است. بنابراین واریانس

داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ برابر است با:

$$\text{واریانس داده‌های جدید} = \frac{(ax_1 + b - (a\bar{x} + b))^2 + (ax_2 + b - (a\bar{x} + b))^2 + \dots + (ax_n + b - (a\bar{x} + b))^2}{n}$$

$$= \frac{(ax_1 - a\bar{x})^2 + (ax_2 - a\bar{x})^2 + \dots + (ax_n - a\bar{x})^2}{n} = \frac{a^2(x_1 - \bar{x})^2 + a^2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + a^2(x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$= a^2 \left(\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \right) = a^2 \sigma^2$$

♦ انحراف معیار هم مانند واریانس به جمع و تفریق داده‌ها حساس نیست و فقط به ضرب و تقسیم داده‌ها حساس است، اما با این تفاوت که اگر

داده‌های آماری a برابر شود، انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود و اگر داده‌ها بر a تقسیم شوند، انحراف معیار بر $|a|$ تقسیم می‌شود. دلیل

وجود قدر مطلق هم مشخص است و آن هم این است که چون انحراف معیار جذر واریانس است، نمی‌تواند عددی منفی باشد.

نکته: اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر σ باشد، آنگاه انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $|a| \sigma$ خواهد بود.

دیدیم که وقتی داده‌ها a برابر شدند، واریانس a^2 برابر شد و انحراف معیار نیز $|a|$ برابر می‌شود. همین مطلب تا حدودی نشان می‌دهد که

انحراف معیار، شاخصی بهتر از واریانس برای پراکندگی است. زیرا وقتی داده‌ها در یک عدد ضرب می‌شوند، به نظر ما طبیعی‌تر است که شاخص

پراکندگی آن‌ها هم در همان عدد ضرب شود.

کتاب‌های پرسمان

ویژه ارتقای معدل؛ برای ۲۰، پرسمان کافیت

کتاب‌های پرسمان شامل آموزش کامل، تمرین‌ها و نمونه سؤالات امتحانی با پاسخ‌های تشریحی برای مطالعه در طول سال تحصیلی و آمادگی برای شب امتحان است. در درسنامه‌های پرسمان از زیاده‌روی پرهیز شده و سعی شده است حجم کتاب‌ها به قدری باشد که دانش‌آموزان عزیز بتوانند تمام درسنامه‌ها و سؤالات را مطالعه کنند. این کتاب‌ها بر مبنای استاندارد امتحانات نهایی طراحی شده و در آنها مطلبی خارج از کتاب درسی آورده نشده است.



کتاب‌های کار و کارپوچینو

کتاب‌های کار انتشارات گاج

کتاب‌های کار انتشارات گاج از مقطع پیش دبستانی تا پایه‌ی نهم با عنوان «کارپوچینو» و در مقطع متوسطه دوم با عنوان کتاب‌های کار تولید و توزیع می‌گردند.

این کتاب‌ها شامل درسنامه‌های مختصر، کاربردی و مطابق با سرفصل‌های کتاب درسی است.

در این کتاب‌ها نمونه سؤالات متنوع با هدف آموزش، تکرار و تثبیت مطالب درسی به منظور کار در کلاس و کار در منزل تألیف شده‌اند.

چیدمان سؤالات در این کتاب‌ها کاملاً استاندارد و بر اساس زیربخش‌های کتاب درسی می‌باشد.

در ویرایش، بازنگری و تألیف این کتاب‌ها، از نظرات کارشناسان خبره در هر پایه استفاده شده است.



کتاب‌های دور دنیا در ۴ ساعت

مجموعه کتاب‌های دور دنیا در ۴ ساعت شامل کنکورهای سراسری سال‌های گذشته است. هدف اصلی این کتاب‌ها شبیه‌سازی جلسه کنکور برای دانش‌آموزان است تا بتوانند دانش و آموخته‌های خود را با این کنکورها محک بزنند تا برای جلسه اصلی کنکور خود را آماده کنند. پاسخ‌های تشریحی این کنکورها را نیز حتماً در جلد دوم این کتاب‌ها بررسی کنید تا بتوانید تحلیلی مناسب از این آزمون‌ها داشته باشید.



کتاب‌های زنبور

ما در کتاب‌های زنبور (واحد کودک و نوجوان انتشارات گاج): خوراک روح خردسالان، کودکان و نوجوانان شما را تأمین می‌کنیم. زنبور برای کودکان سرزمینمان، داستان، شعر و رمان‌هایی را ترجمه می‌کند که یا شاهکارهای ادبی جهان هستند یا جایزه‌های بین‌المللی گرفته‌اند. در بخش بین‌المللی، شاهکارهای ادبی کهن ایران، از جمله شاهنامه، کلیله و دمنه، بوستان، گلستان، مثنوی و... را از فارسی به زبان‌های دیگر ترجمه می‌کند، در حوزه تألیف، از بزرگان ادبیات کودک، آثاری با تصویرگری‌هایی جذاب و دلنشین منتشر می‌شود.



کتاب‌های سیرت‌پایز

کنکورت ۱۰۰ بزن - امتحان ۲۰ بگیر

کتاب‌های سیرت‌پایز شامل ۳ کتاب می‌باشد:

جلد ۱ (کتاب آموزش): شامل آموزش کامل به همراه نکات کنکوری و امتحانی است.

جلد ۲ (کتاب کنکور (تست)): شامل تمام تست‌های کنکور و تست‌های تألیفی است. تعداد تست‌ها به حدی است که دانش‌آموزان

را از هر کتاب تستی بی‌نیاز می‌کند.

جلد ۳ (کتاب امتحان): شامل سؤالات امتحانی و مشابه‌سازی تمرین کتاب درسی است.

