جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشر الگو

فهرست

فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ دست‌گرمی‌ها ۲

فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

پاسخ آزمون‌های فصل اول ۳۴
پاسخ آزمون‌های فصل دوم ۶۷
پاسخ آزمون‌های فصل سوم ۹۸
پاسخ آزمون‌های فصل چهارم ۱۱۲
پاسخ آزمون‌های فصل پنجم ۱۳۰
پاسخ آزمون‌های فصل ششم ۱۴۶
پاسخ آزمون‌های فصل هفتم ۱۶۰
پاسخ آزمون‌های فصل هشتم ۱۸۲
پاسخ آزمون‌های فصل نهم ۱۸۵
پاسخ آزمون‌های فصل دهم ۱۹۱
پاسخ آزمون‌های فصل یازدهم ۲۰۱
پاسخ آزمون‌های فصل دوازدهم ۲۱۴
پاسخ آزمون‌های فصل سیزدهم ۲۲۵
پاسخ آزمون‌های فصل چهاردهم ۲۳۸
پاسخ آزمون‌های فصل پانزدهم ۲۵۲

فصل اول

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

۱- گزینهٔ ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+2b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینهٔ ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=2$ و $a-b=6$ که نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-2$. بنابراین $ab=-8$.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(3,4)$ و $(3,m^2)$ نتیجه می‌شود $m^2=4$، پس $m=\pm 2$. با توجه به زوج‌های مرتب $(4,m+n)$ و $(4,2n+1)$ نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$، پس $n=m-1$. اگر $m=2$، آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3,4),(3,2),(4,3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(3,4)$ و $(3,2)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$، آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3,4),(-9,-2),(4,-5)\}$. بنابراین رابطهٔ f، تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد 6، $3m$ و $2m+n$ یکسان باشند:

$$3m=6 \Rightarrow m=2, \quad 2m+n=6 \xrightarrow{m=2} 4+n=6 \Rightarrow n=2$$

بنابراین $mn=4$.

۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4 \\ f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4 \end{cases}$$

بنابراین $f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x$.

۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$، آن‌گاه $t\neq 0$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$، پس $x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=t+1$$

بنابراین اگر $x\neq 0$، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینهٔ ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$4\geq 4 \Rightarrow f(4)=\frac{2}{5}\times 4=\frac{8}{5}, \quad 2<4 \Rightarrow f(2)=k\times 2+4=2k+4$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس $2k=-2$، یعنی $k=-1$.

۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(1)=2$، پس $\begin{cases} a-b=2 \\ 3a-7b=2 \end{cases}$. بنابراین $a=3$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=4$.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-4)=x-4$. بنابراین

$$(2a-7)x+b+1=x-4 \Rightarrow \begin{cases} 2a-7=1 \Rightarrow a=4 \\ b+1=-4 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{7}{2})=(2a-7)\times\frac{1}{2}+b+1 \Rightarrow -\frac{7}{2}=a-\frac{7}{2}+b+1 \Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$$

در نتیجه $f(1)=3-b+b=3$.

۱۱- گزینهٔ ۲ مقادیر $x=3$، $x=2$ و $x=0$ را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینهٔ ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x\times f(x)-12$ می‌نویسیم. در نتیجه $(4x-1)\times f(x)=2x+12$، پس $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$.

۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، $x=-\frac{b}{2a}$ است. بنابراین طبق معادلهٔ داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس $\frac{-2}{2a}=1$ و در نتیجه $a=-1$. مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس

$$-1=a+2+b \xrightarrow{a=-1} -1=-1+2+b \Rightarrow b=-2$$

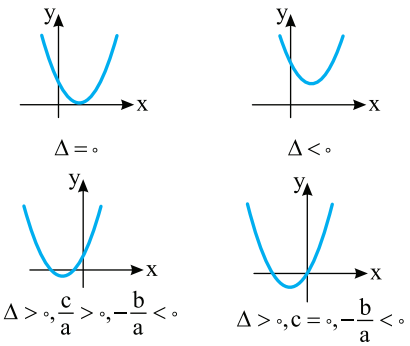
بنابراین $ab=2$.

۱۴- گزینهٔ ۱ چون سهمی در نقاطی به طول -1 و 5 محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادلهٔ محور تقارن به‌صورت $x=\frac{5-1}{2}=2$ است که نقاط $(-1,0)$ و $(5,0)$ نسبت به آن قرینهٔ یکدیگرند.

۱۵- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2}$ است، پس $-\frac{b}{2}=-2$. بنابراین $b=4$، در نتیجه $b-c=-1$.

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=-\frac{b}{2a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{2a}>0$ و در نتیجه محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=0$، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به‌صورت گزینهٔ (۳) باشد.

۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد:



بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=m^۲-۴(۴-m^۲)=۵m^۲-۱۶$. اکنون توجه کنید که

حالت‌های اول و دوم: $\Delta\le ۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶\le ۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le \frac{۴}{\sqrt{۵}}$

حالت‌های سوم و چهارم:
$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m<-\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } m>\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\ge ۰\Rightarrow ۴-m^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le m\le ۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -m<۰\Rightarrow m>۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}} \frac{۴}{\sqrt{۵}}<m\le ۲$$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در همهٔ حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le ۲$$

۱۸- گزینهٔ ۲ محیط شکل برابر است با

$$۴x+۴y=۴۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S=۲xy+xy=۳xy=۳x(۱۰-x)=-۳x^۲+۳۰x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجهٔ دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. بنابراین

$$S_{max}=-\frac{۹۰۰}{۴(-۳)}=۷۵$$

۱۹- گزینهٔ ۳ اعدادی که جواب معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S=-\frac{b}{a}=۳$ است.

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^۲+kx+۱=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\Delta=k^۲-۴<۰$$

$$k^۲<۴\Rightarrow |k|<۲\Rightarrow -۲<k<۲$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\{x|۹-x^۲\ge ۰, x^۲-۱>۰\}$$

$$۹-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۹\Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

$$x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f=[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$. پس عددهای صحیح ± ۳ و ± ۲ در دامنهٔ تابع هستند.

۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از $-۴\le x\le ۴$ نتیجه می‌گیریم $-۸\le -۲x\le ۸$، پس $-۵=۳-۸\le ۳-۲x\le ۳+۸=۱۱$. بنابراین برد تابع f بازهٔ $[-۵,۱۱]$ است.

راه‌حل دوم چون $f(x)=-۲x+۳$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(۴),f(-۴)]$ است که برابر $[-۵,۱۱]$ می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^۲+۲x-۲=(x+۱)^۲-۳$.

از طرف دیگر، اگر $x\in[-۴,۵]$، آن‌گاه

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۳\le x+۱\le ۶\Rightarrow ۰\le (x+۱)^۲\le ۳۶\Rightarrow -۳\le (x+۱)^۲-۳\le ۳۳$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینهٔ ۴ در مورد گزینهٔ (۴)، $D_f=D_g=[۰,۱]$ و اگر $x\in[۰,۱]$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x)\ne g(x)$.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=\mathbb{R}, \quad f(x)=|x|, g(x)=x\Rightarrow f(x)\ne g(x)$

گزینهٔ (۳) $D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty), D_g=[۱,+\infty)\Rightarrow D_f\ne D_g$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S=\pi r^۲$ و در نتیجه $r=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$. بنابراین

$$P=۲\pi r=۲\pi\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right)\Rightarrow P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}=۲\sqrt{\pi S}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ و محیط مربع برابر $۴a$ می‌شود. بنابراین

$$P=۴a\Rightarrow a=\frac{P}{۴}, \quad \text{مساحت مربع}=a^۲, \quad \text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^۲}{۴}$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^۲-\frac{\pi a^۲}{۴}=a^۲\left(\frac{۴-\pi}{۴}\right)$$

$$=\frac{P^۲}{۱۶}\left(\frac{۴-\pi}{۴}\right)=\left(\frac{۴-\pi}{۶۴}\right)P^۲$$

۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\xrightarrow{y\ge ۰} y=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنابراین طول مستطیل $۲x$ و عرض آن $\sqrt{۱-x^۲}$ می‌شود و محیط آن برابر است با $P(x)=۲(۲x+\sqrt{۱-x^۲})=۴x+۲\sqrt{۱-x^۲}$.

۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{matrix}(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=-۱-۲=-۳\\ (f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-(-۱)=۳\end{matrix}\Rightarrow\frac{(f+g)(۲)}{(f-g)(۱)}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x|x\in D_f\cap D_g, g(x)\ne ۰\}=\{۱,۲,۳\}$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۶}{-۱}=-۶, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۰}{۹}=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر -۳ است.

۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲+۳x+۲)-(x^۲+۲x+۱)=x+۱$$

بنابراین $(f-g)(x-۱)=x-۱+۱=x$.

راه‌حل دوم چون $f(۱)=۶$ و $g(۱)=۴$، پس $(f-g)(۱)=۶-۴=۲$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-۱)$ به‌جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(۱)$ به‌دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینهٔ (۱)، با قرار دادن $x=۲$، حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} ۸-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۸ \\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳ \end{cases} \Rightarrow ۳<x\leq ۸\Rightarrow D_f=(۳,۸]$$

دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

x	$-\infty$		۳		۵		$+\infty$
$\frac{x-۳}{۵-x}$		−	۰	+	ت ن	−	

$\Rightarrow D_g=[۳,۵)$

بنابراین دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۳,۸]\cap[۳,۵)=(۳,۵)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنهٔ تابع $f\times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=۶$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=۶$ در دامنهٔ تابع g نیست و در نتیجه در دامنهٔ $f\times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=|x-۱|=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} ۲x-۱-(x-۱) & x\geq ۱ \\ ۳x+۱-(-x+۱) & x<۱ \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ ۴x & x<۱ \end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$
$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۳۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^۲+۴=۱۳\,,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(a)=f(g(a))=f(۳a-۲)=۲(۳a-۲)+۳=۶a-۱$$
$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۲a+۳)=۳(۲a+۳)-۲=۶a+۷$$

بنابراین معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۶a-۱+۶a+۷=۲a\Rightarrow ۱۰a=-۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۲x)=a(x^۲+۲x)+۱=ax^۲+۲ax+۱$$

بنابراین باید مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+۲ax+۱=۲$ دوعضوی باشد. یعنی باید Δ ی معادلهٔ $ax^۲+۲ax-۱=۰$ مثبت باشد:

$$\Delta=(۲a)^۲-۴a(-۱)=۴a^۲+۴a>۰\Rightarrow ۴a(a+۱)>۰\Rightarrow a>۰ \text{ یا } a<-۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$
$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳)\ \text{تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),(-۲,۲),(-۱,\sqrt{۳})\}$.

۳۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۲,-۱\leq ۵-۲x\leq ۳\}$$

از نامعادلهٔ $-۱\leq ۵-۲x\leq ۳$ نتیجه می‌شود $-۶\leq -۲x\leq -۲$ پس $۱\leq x\leq ۳$.

بنابراین $D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۲,۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۲]$.

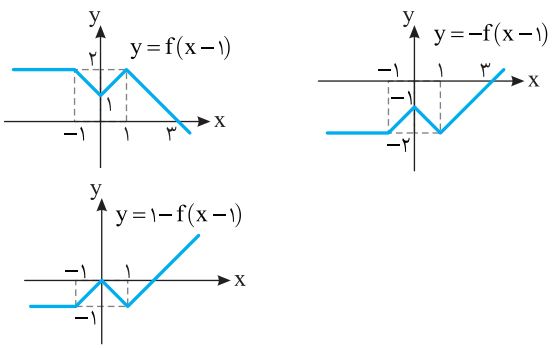
۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌ترتیب $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. بنابراین

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x|\ x\geq ۱\,,-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}\}$$

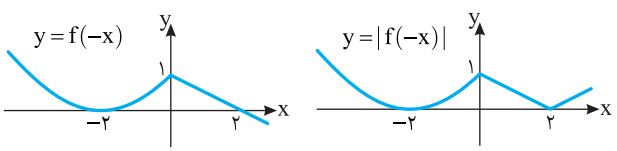
از نامعادلهٔ $-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}$ نتیجه می‌شود $x-۱\leq ۳$ پس $x\leq ۴$.

بنابراین $D_{gof}=\{x|x\geq ۱\,,\ x\leq ۴\}=[۱,۴]$.

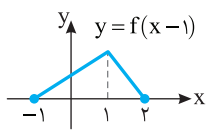
۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۱-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.

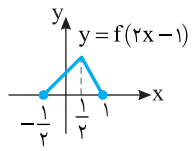


۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



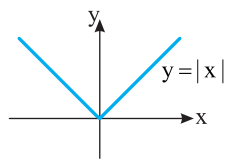
۴۲- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.

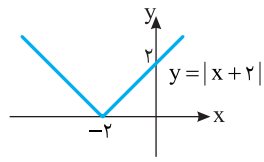


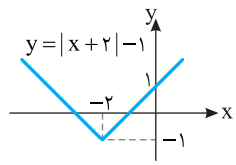


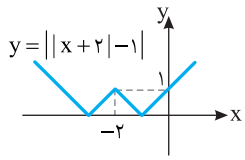
۴۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(2(x-1))-1$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2(2x-1))-1=f(4x-2)-1$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(f(4x-2)-1)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=2f(4x-2)-2$ است.

۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|$ به‌دست آید. این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|-1$ رسم شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=||x+2|-1|$ رسم شود.









۴۵- گزینهٔ ۳ در تابع $\{(1,3),(2,4),(5,7),(6,1)\}$ هر مؤلفهٔ دوم متناظر دقیقاً یک مؤلفهٔ اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ دوم یکسان ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینهٔ ۲ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(a,1)$ و $(4-a,1)$ یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند،

$$4-a=a\Rightarrow a=2$$

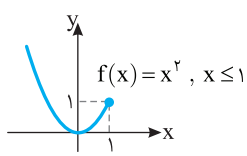
به همین ترتیب باید مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب $(3,10)$ و $(3,1+b)$ برابر باشند،

$$10=1+b\Rightarrow b=9$$

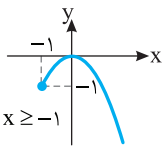
بنابراین $a+b=11$.

۴۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع $f(x)=1-x^2, x\le 0$ یک‌به‌یک است.

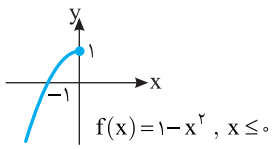
گزینهٔ (۱)



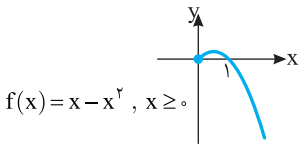
گزینهٔ (۲)



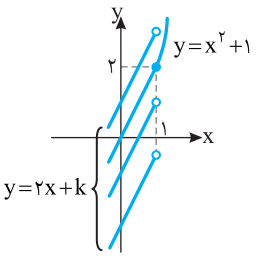
گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=2x+k$ به ازای $x<1$ نباید از ۲ بیشتر باشد، پس

$$2+k\le 2\Rightarrow k\le 0$$

راه‌حل دوم اگر $x\ge 1$، آن‌گاه تابع $g(x)=x^2+1$ یک‌به‌یک است و $R_g=[2,+\infty)$ و اگر $x<1$، آن‌گاه تابع $h(x)=2x+k$ یک‌به‌یک است و $R_h=(-\infty,2+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید $R_g\cap R_h=\varnothing$، پس

$$2+k\le 2\Rightarrow k\le 0$$

۴۹- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-1<-3$، اما $f(-3)<f(-1)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $0<1$، اما $f(0)=f(1)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-3<-1<1$ و $f(-3)>f(-1)>f(1)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-2<-1$، اما $f(-2)=f(-1)$.

۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $1<2<3$، پس

$$f(1)\ge f(2)\ge f(3)\Rightarrow 2a+1\ge a-2\ge 2-a$$

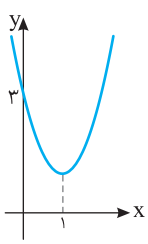
اکنون توجه کنید که

$$2a+1\ge a-2\Rightarrow a\ge -3 \quad (1)$$

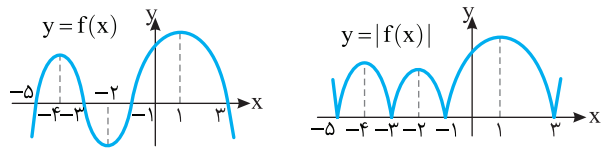
$$a-2\ge 2-a\Rightarrow a\ge 2 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge 2$.

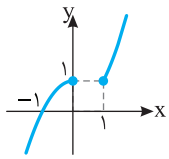
۵۱- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=2x^2-4x+3$ برابر است با $-\frac{b}{2a}=1$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[1,+\infty)$ و هر زیر مجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(1,2)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[1,+\infty)$ است.



۵۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-2,-1)$ اکیداً نزولی است.

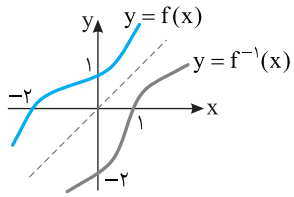


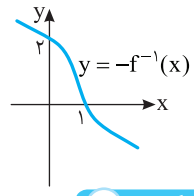
۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



۵۴- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد. تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1)=f(3)=2$. تابع گزینهٔ (۲) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(2)=f(5)=3$. تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، زیرا $f(1)=-1$، $f(2)=-2$، $f(3)=-4$ و $f(4)=-5$، بنابراین مقادیر تابع f متمایزند. تابع گزینهٔ (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1)=f(3)=0$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-1}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور x رسم کنیم.





۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f^{-1}og)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)=4$$
$$(g^{-1}of)(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(4)=3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(1)=2$، پس $f^{-1}(2)=1$. به این ترتیب، $f(1)+f^{-1}(2)=3$.

۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(x-2)^2-4$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-2)^2=y+4\Rightarrow|x-2|=\sqrt{y+4}\xrightarrow{x<2}$$
$$2-x=\sqrt{y+4}\Rightarrow x=2-\sqrt{y+4}\Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+4}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-3,21)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(21,-3)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

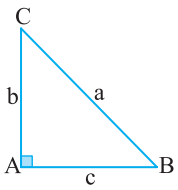
گزینهٔ (۱) $f^{-1}(21)=2-\sqrt{25}=-3$

گزینهٔ (۲) $f^{-1}(21)=-2+\sqrt{25}=3$

گزینهٔ (۳) $f^{-1}(21)=2-\sqrt{17}$

گزینهٔ (۴) $f^{-1}(21)=2+\sqrt{17}$

۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل،

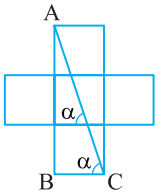


$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{2\sqrt{6}}{7}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{2\sqrt{6}}{7}a$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

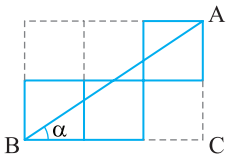
$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=25+(\frac{2\sqrt{6}}{7}a)^2\Rightarrow a^2=25+\frac{24}{49}a^2$$
$$\frac{25}{49}a^2=25\Rightarrow a^2=49\Rightarrow a=7$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه،



$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{1}=3$$

۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل را به صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AB^2=AC^2+BC^2=2^2+3^2=13\Rightarrow AB=\sqrt{13}$$

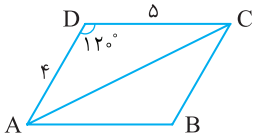
در نتیجه، $\triangle ABC:\ \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

۶۲- گزینهٔ ۴ صورت کسر برابر است با

$$4(\frac{\sqrt{3}}{2})^3-3(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$$

بنابراین $A=0$.

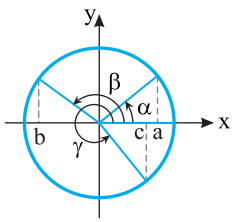
۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



$$S_{ABCD}=2S_{ADC}$$
$$=2(\frac{1}{2}DC\times AD\times\sin\hat{D})$$
$$=5\times4\times\sin120^\circ=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ اگر $180^\circ<\alpha<270^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<0$ و $a>c$. بنابراین $a>c>b$.



۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha>0$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha<0$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha<0,\quad \cos\alpha<0,\quad \cot\alpha>0$$

۶۷- گزینهٔ ۱ چون $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$، پس $0\le\sin\alpha\le1$ و در نتیجه

$$0\le\frac{m}{2}-1\le1\Rightarrow1\le\frac{m}{2}\le2\Rightarrow2\le m\le4$$

۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-۱\le\sin x\le ۱$، بنابراین $۰\le\sin^۲ x\le ۱$، پس $۰\le ۳\sin^۲ x\le ۳$ و در نتیجه $۲\le ۲+۳\sin^۲ x\le ۵$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویهٔ مثلثاتی ۳۰° تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan ۳۰^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.

پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(۶,\sqrt{۳})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۶+b\Rightarrow b=-\sqrt{۳}$$

پس معادلهٔ خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\sqrt{۳}$ یا همان $x-\sqrt{۳}y-۳=۰$ است.

۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{۱-\tan x}{\tan x}=۲\Rightarrow ۱-\tan x=۲\tan x\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $\cot x=\frac{۱}{\tan x}=۳$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x-۱}=\frac{۳}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$.

۷۱- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$(\frac{۱}{۲m-۱})(m+۲)=۱\Rightarrow ۲m-۱=m+۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac{۱}{۵}$ و $\cot\alpha=۵$ و در نتیجه

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{۲۵}+۲۵=\frac{۶۲۶}{۲۵}$$

۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$(\frac{۳}{۵})^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$$

با توجه به اینکه $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، مقدار $\cos\alpha$ باید منفی باشد، پس $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$. با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، به‌دست می‌آید $\tan\alpha=\frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴}$. بنابراین $\tan\alpha-\cos\alpha=-\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۲۰}$.

۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\tan^۲ x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}+\frac{\cot^۲ x}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}=\tan^۲ x\cos^۲ x+\cot^۲ x\sin^۲ x$$
$$=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}\times\cos^۲ x+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}\times\sin^۲ x=\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$
$$=\frac{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\cot^۲\theta$$

راه‌حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $۳=۹-۴-۱۶=\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۴}-۹$. اگر در گزینه‌ها به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، فقط $\cot^۲\theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲\tan\alpha\cot\alpha=۹$.

چون $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، پس

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲=۹\Rightarrow\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۷$$

۷۶- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۳+\frac{۲\cos x}{\sin x}=\frac{۳}{\sin x}\Rightarrow ۳+۲\cot x=\frac{۳}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

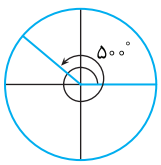
$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲ x=\frac{۹}{\sin^۲ x}=۹(۱+\cot^۲ x)$$
$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲ x=۹+۹\cot^۲ x\Rightarrow ۵\cot^۲ x-۱۲\cot x=۰$$
$$\cot x=۰\ ,\ \cot x=\frac{۱۲}{۵}$$

چون $\cos x\neq ۰$، پس $\cot x\neq ۰$ و در نتیجه $\cot x=\frac{۱۲}{۵}$.

۷۷- گزینهٔ ۴ در تساوی $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=۷۵^\circ$:

$$\frac{۷۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۷۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ۵۰۰° را می‌توان ۵ تا ۹۰° به علاوهٔ ۵۰° در نظر گرفت. ۵ تا ۹۰° یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.



راه‌حل دوم $۱۴۰^\circ+۳۶۰^\circ=۵۰۰^\circ$ و $۱۸۰^\circ\le ۱۴۰^\circ\le ۹۰^\circ$، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{۹}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l=r\times\theta\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۳۶۰۰۰\times\frac{\pi}{۹}=۴۰۰۰\pi\ \text{کیلومتر}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

بنابراین

$$A=\frac{-۲\sin\alpha-۴\sin\alpha}{-۳\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{-۶\sin\alpha}{-۲\cos\alpha}=۳\tan\alpha$$

۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\,,\qquad \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\,,\qquad \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{-۲\cos\alpha}{-۲\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin ۱۳۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۲۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos ۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{\sin ۱۳۵^\circ-\cos ۱۲۰^\circ}{\sin ۱۳۵^\circ+\cos ۱۲۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲-۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۴}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۴}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=-\frac{۱}{۲}\times-۱\times\frac{۱}{۲}=-۱$.

۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۸}=-\cos\frac{۷\pi}{۸}$$

$$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۸}=-\cos\frac{۵\pi}{۸}$$

بنابراین

$$\cos^۳\frac{\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}$$

$$=-\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}-\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}=۰$$

۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow۲\sin^۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\text{(غ.ق.ق)}$$

۸۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$. پس

$$\frac{۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin ۲x}{\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}=۲\sin x$$

۸۷- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{\sin^۲ ۱۵^\circ}+\frac{۱}{\cos^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ+\sin^۲ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ\cos^۲ ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{۱}{(\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ)^۲}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ)^۲}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۴})^۲}=۱۶$$

۸۸- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان، نصف $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان است.

در تساوی $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{۳\pi}{۸}$ و در نتیجه

$$\cos(۲\times\frac{۳\pi}{۸})=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۴}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos ۱۰۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

$$\sin ۱۰۵^\circ=\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ$$

بنابراین

$$۳\cos^۲ ۱۰۵^\circ+\sin^۲ ۱۰۵^\circ=۳\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ$$

$$=۲\sin^۲ ۱۵^\circ+(\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ)=۲\sin^۲ ۱۵^\circ+۱$$

$$=۱-\cos(۲\times۱۵^\circ)+۱=۲-\cos ۳۰^\circ=۲-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۴-\sqrt{۳}}{۲}$$

۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\frac{\sin ۲۲/۵^\circ}{\cos ۲۲/۵^\circ}-\frac{\cos ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ}=\frac{\sin^۲ ۲۲/۵^\circ-\cos^۲ ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ\times\cos ۲۲/۵^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(۲\times۲۲/۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times۲۲/۵^\circ)}=\frac{-\cos ۴۵^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۴۵^\circ}=-۲$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$، بنابراین

$$\tan ۲۲/۵^\circ-\cot ۲۲/۵^\circ=-(\cot ۲۲/۵^\circ-\tan ۲۲/۵^\circ)$$

$$=-۲\cot ۴۵^\circ=-۲$$

۹۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{۱}{\cos^۲ ۱۵^\circ}}=\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

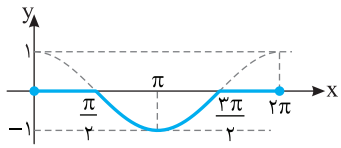
راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$، پس

$$\frac{\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۵^\circ}=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}$$

۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\cos x}{2} & \cos x\geq 0\\ \frac{\cos x+\cos x}{2} & \cos x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\ \text{یا}\ \frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\\ \cos x & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

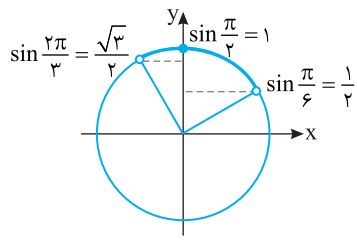
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

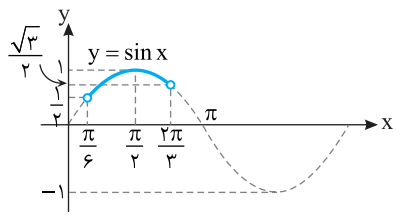


۹۳- گزینهٔ ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\sin x\leq 1$ و می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\leq 1\Rightarrow 2<m-1\leq 4\Rightarrow 3<m\leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.





۹۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و $T_g=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$. بنابراین

$$T_f=2T_g\Rightarrow 4=\frac{4\pi}{|a|}\Rightarrow|a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

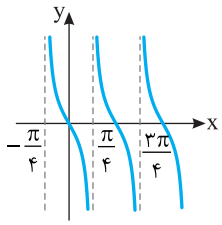
۹۵- گزینهٔ ۱ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\sin^2 x+12=\frac{1-\cos 2x}{2}+12=\frac{25-\cos 2x}{2}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$.

نکته دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^2(bx+c)$ و $y=a\cos^2(bx+c)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۹۶- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۹۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(-\frac{\pi}{4})<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<\tan x<1$$
$$-1<\frac{2m-3}{5}<1\Rightarrow -1<m<4$$

۹۸- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق)}$$
$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-x\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}-2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{6}-2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-k\pi-\frac{\pi}{12}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{(2k+1)}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y=-1$ را قطع می‌کند، $f(x)=-1$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}-2x=k\pi\Rightarrow 2x=-k\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$x=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ عبارت‌اند از

k	0	1	2	-1	-2
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

بنابراین نمودار تابع خط $y=-1$ را در پنج نقطه از بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ قطع می‌کند.

۱۰۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

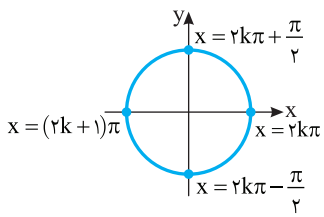
$$\sin^۳ x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sin^۲ x-۱)=۰$$

$$\sin x(\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نقـاط انتهایـی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشـخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sin^۲ x-۱)=۰\Rightarrow -\sin x\cos^۲ x=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به‌صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,k\in\mathbb{Z}$ نوشت.

۱۰۲- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^۲ x)+۵\cos x=۴\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۵\cos x+۲=۰$$

$$(\cos x-۲)(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow \cos x=۲,\cos x=\frac{۱}{۲}$$

معادلـهٔ $\cos x=۲$ جواب ندارد، پـس $\cos x=\frac{۱}{۲}$. جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow ۲\sin x\cos^۲ x=\sin x$$

$$\sin x(۲\cos^۲ x-۱)=۰\Rightarrow \sin x\cos ۲x=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌هـای واقـع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌انـد از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۰۴- گزینهٔ ۱ در یک همسـایگی محـذوف ۱، مقادیر f منفی هسـتند، بنابراین در این همسایگی $|f(x)|=-f(x)$، پس

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{-f(x)}=-۱$$

۱۰۵- گزینهٔ ۴ اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(f(x))=\lim_{t\to(-۱)^-} f(t)=۲$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۳+۲x)=۸+۴=۱۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۲-۳x)=۴-۶=-۲$$

بنابراین مقدار حد راسـت تابع در $x=۲$، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳x+a}{۲x-۳}=\frac{۳\times ۲+a}{۲\times ۲-۳}=۶+a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+ax+b)=۲^۲+a(۲)+b=۴+۲a+b$$

چون $\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases}۶+a=۴\\ ۴+۲a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۲$$

۱۰۸- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجه کنیـد که بنابر قضایـای حد، $\lim_{x\to -۱} f(x)$ وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۱}(x^۲-x+۱-xf(x))=۶\Rightarrow(-۱)^۲-(-۱)+۱-(-۱)\lim_{x\to -۱} f(x)=۶$$

پس $\lim_{x\to -۱} f(x)=۳$.

۱۰۹- گزینهٔ ۲ اگـر $x\to ۲^+$، آن‌گاه $\sqrt{۲x}\to ۲\sqrt{۲}^+$. در نتیجـه $[\sqrt{۲x}]=۲$. پس $\lim_{x\to ۲^+}(x[\sqrt{۲x}])=\lim_{x\to ۲^+}(۲x)=۴$.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ عامـل $x-۳$ را از صـورت و مخـرج حـذف می‌کنیـم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x}{x+۳}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۱۶}{x^۳-۶۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۴)}{(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x+۴}{x^۲+۴x+۱۶}=\frac{۴+۴}{۴^۲+۴\times ۴+۱۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۱ وقتی x از سـمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $۳x-۴$ از سـمت چپ به -۱ نزدیک می‌شود، پس $[۳x-۴]=-۲$، از طرف دیگر وقتی x از سـمت چپ به ۱ نزدیک می‌شـود، $|x-۱|=-(x-۱)$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۱^-}([۳x-۴]+\frac{|x-۱|}{x-۱})=\lim_{x\to ۱^-}(-۲+\frac{-(x-۱)}{x-۱})=-۲-۱=-۳$$

۱۱۳- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج، $x-9=(\sqrt{x})^2-3^2=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$. در نتیجه

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

۱۱۴- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}\times\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 7}\left(\frac{x+1-8}{(x-7)(x+7)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}=\frac{1}{14(4+4+4)}=\frac{1}{168}$$

۱۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(2)=1$ و

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-\frac{x-2}{x-2})=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+\frac{x-2}{x-2})=2+1=3$$

بنابراین تابع در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۱۶- گزینهٔ ۴ چون تابع در نقطهٔ ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(16-ax^2)=16-9a$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x+a)=6+a$$

بنابراین $16-9a=6+a$ و در نتیجه $a=1$. به این ترتیب

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 3\\ 16-x^2 & x<3\end{cases}$$

در نتیجه $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(16-x^2)=16-1^2=15$.

۱۱۷- گزینهٔ ۳ باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^2-2mx+m+6=0$ منفی باشد

$$\Delta=(-2m)^2-4(m+6)<0\Rightarrow 4m^2-4(m+6)<0$$

$$m^2-m-6<0\Rightarrow(m-3)(m+2)<0\Rightarrow -2<m<3$$

بنابراین تابع f به ازای چهار مقدار صحیح -1، ۰، ۱ و ۲ برای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۱۸- گزینهٔ ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{1}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{1}{x}]$ ناپیوسته است. این نقاط به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{x}=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{1}{k}$$

در بازهٔ $(\frac{1}{10},1)$،

$$\frac{1}{10}<\frac{1}{k}<1\Rightarrow 1<k<10\Rightarrow 2\leq k\leq 9$$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به -2 نزدیک می‌شود، $x+2$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$$

۱۲۰- گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^-}0=0$$

۱۲۱- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 3$، آن‌گاه $(x-3)^2\to 0^+$، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to 3}(ax^3+3)<0\Rightarrow 27a+3<0\Rightarrow a<-\frac{1}{9}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to 2^-$ و $x\to 2^+$، باید $f(x)\to-\infty$. فقط در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$$

۱۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to 1^+}x^2=1$ و اگر $x\to 1^+$، مقادیر $x-1$ مثبت‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$.

همین‌طور $\lim_{x\to 1^-}x^2=1$ و اگر $x\to 1^-$، مقادیر $x-1$ منفی‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$. به این ترتیب، نمودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=1$ به شکل گزینهٔ (۳) است.

۱۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 1^+$، پس

$$t=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\Rightarrow t\to 2^+$$

پس $\lim_{x\to 1^-}f(\frac{x+1}{x})=\lim_{t\to 2^+}f(t)=+\infty$.

۱۲۵- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$.

۱۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+}(fof)(x)=\lim_{x\to 1^+}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=2$$

۱۲۷- گزینهٔ ۴ بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ برابر x^3 است. پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

۱۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+1$ و $3-x$ به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-1)+3x-1}{3-x+ax-15}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+3)x-a-1}{(a-1)x-12}=\frac{3-a}{a-1}$$

در نتیجه $\frac{3-a}{a-1}=2$، بنابراین $a=\frac{5}{3}$.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 2a-b=0 \Rightarrow 2a=b \end{cases} \Rightarrow b=2$$

بنابراین $a+b=3$.

۱۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^- \Rightarrow [\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}]=[0^-]=-1$$

از طرف دیگر، اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$، پس $\lim_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to-\infty}(-1)=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۱۳۱- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر $f'(3)=2$ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس $f'(-1)=-\frac{1}{2}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطهٔ $x=b$ منفی و در نقطهٔ $x=d$ مثبت است.

۱۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+2}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(-2)=-1$$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))=4\times3\times2\times1=24$$

۱۳۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$. بنابراین

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{h}$$
$$=\frac{1}{3}(2-(-2))f'(2)=\frac{4}{3}f'(2)$$

۱۳۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x+1)}{x^2+1}=-1$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های -3، 1 و 5 پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های -1 و 3 مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های -2 و 4 مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۳۸- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

بنابراین $g(8)=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} f(x)=x^3+x-1 \\ f'(x)=3x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-3 \\ f'(-1)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x)=x^4+1 \\ g'(x)=4x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-1)=2 \\ g'(-1)=-4 \end{cases}$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{4\times2-(-4)(-3)}{(2)^2}=-1$.

۱۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x(x^4-1)(x^4+1)$$
$$=x(x^8-1)=x^9-x$$

بنابراین $f'(x)=9x^8-1$. پس $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8-1=0$.

۱۴۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x-x^2$ در اطراف نقطهٔ $x=-2$ منفی است و مقدار عبارت $x+1$ هم در اطراف $x=-2$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x-x-1=x^2-5x-1$$
$$f'(x)=2x-5 \Rightarrow f'(-2)=-9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$ مقدار عبارت‌های $4x-x^2$ و $x+1$ به‌ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x+x+1=x^2-3x+1 \Rightarrow f'(x)=2x-3 \Rightarrow f'(5)=7$$

در نتیجه $f'(5)+f'(-2)=-2$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4(2x^2+3)'(2x^2+3)^{4-1}=4(4x)(2x^2+3)^3=16x(2x^2+3)^3$$

بنابراین $f'(-1)=16(-1)(2(-1)^2+3)^3=-16\times5^3$.

۱۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{2\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \Rightarrow f'(2)=\frac{3\times4}{2\sqrt{9}}=2$$

۱۴۴- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

۱۴۵- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-۳x+۵)'f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴$$

$$-۳f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴ \xrightarrow{x=۱} -۳f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱۰}{۳}$$

۱۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲x)g'(f(۲x))=\frac{۱}{۲}(g(f(۲x)))'=(\frac{۱}{۲}g(f(۲x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))=\frac{۱}{۲}g(۸x^۳+۱)=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۱-(۸x^۳+۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{-۸x^۳}=-x$$

در نتیجه $y'=-۱$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\\ ۳x^۲+۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین $f'(-۱)+f'(۲)=-۳+۱۴=۱۱$.

۱۴۸- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

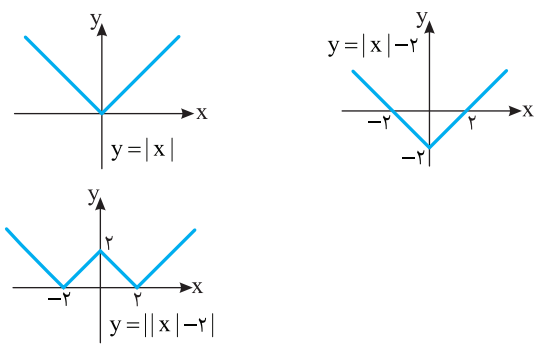
$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Rightarrow a+۲=۱+۲b\Rightarrow a-۲b=-۱$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۲ & x>۱\\ ۳x^۲+۲b & x<۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+۲=۳+۲b\Rightarrow ۲a-۲b=۱$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۱\\ ۲a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۷}{۲}$$

۱۴۹- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm ۲\}$.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است:

$$۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ -۲ علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۵۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۱)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۱$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۱)=-۱$.

۱۵۲- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-۲)$ است:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(-۲)=۲$$

از طرف دیگر $f(-۲)=۴$، پس خط مماس از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۴=۲(x+۲)\Rightarrow y=۲x+۸$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=x+۵$ است. بنابراین

$$y'=۴x-۴\Rightarrow ۴x_۰-۴=۱\Rightarrow x_۰=\frac{۵}{۴}$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی سهمی $y=۲x^۲-۴x+۶$ است، پس

$$y_۰=۲x_۰^۲-۴x_۰+۶=۲\times(\frac{۵}{۴})^۲-۴\times\frac{۵}{۴}+۶=\frac{۳۳}{۸}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{۵}{۴},\frac{۳۳}{۸})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به‌صورت $y-\frac{۳۳}{۸}=x-\frac{۵}{۴}$، یعنی $۸y-۸x-۲۳=۰$ است.

۱۵۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-\frac{۱}{\sqrt{a}}=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}(x-a)$ است.

نقطهٔ $(۳,۰)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۰-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\frac{-۱}{۲a\sqrt{a}}(۳-a)\Rightarrow ۲a=۳-a\Rightarrow a=۱$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۱,۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۳} = -\frac{۱}{۶} = A_۱$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۴,۴/۴۱] = \frac{f(۴/۴۱)-f(۴)}{۴/۴۱-۴}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲/۱}-\frac{۱}{۲}}{۰/۴۱} = \frac{\frac{۲-۲/۱}{۴/۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}} = \frac{-\frac{۱}{۴۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}} = -\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱} = A_۲$$

بنابراین $\frac{۲۸۷}{۱۰۰} = ۲/۸۷$ و $\frac{A_۱}{A_۲} = \frac{-\frac{۱}{۶}}{-\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱}} = \frac{۴۱\times۲۱}{۶\times۵۰} = \frac{۴۱\times۷}{۲\times۵۰}$.

۱۵۶- گزینهٔ ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[۱,۲]$ حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱} = \frac{۱-(-۱)}{۱} = ۲$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x) = ۱+\frac{۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{x^۲} = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = -\sqrt{۲} \text{ (غ.ق.ق.)}, x = \sqrt{۲}$$

۱۵۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x) = -۳x^۲ + ۶x - ۶$. بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c \ (a<۰)$ برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، پس بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با $-\frac{۳۶-۴(-۳)(-۶)}{۴(-۳)} = -۳$.

۱۵۸- گزینهٔ ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = ۲ax + b \Rightarrow f''(x) = ۲a$$

بنابراین

$$f''(۲) = -۲ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$f'(۲) = -۲ \Rightarrow ۴a + b = -۲ \Rightarrow b = ۲$$

در نتیجه $a - b = -۳$.

۱۵۹- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۲ \Rightarrow f''(x) = ۱۲x + ۶$$

بنابراین

$$f''(a) = ۰ \Rightarrow ۱۲a + ۶ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f''(x) = \frac{۲}{x^۳} \Rightarrow f''(-۱) = -۲$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۳ - ۳x^۲ + ۵}{x^۳ + ۳x^۲ - ۲} = \lim_{x\to -۱} \frac{۶x^۲ - ۶x}{۳x^۲ + ۶x} = \frac{۶+۶}{۳-۶} = -۴$$

۱۶۲- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{۳x} - x}{x^۲ - ۷x + ۱۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}} - ۱}{۲x - ۷} = \frac{\frac{۳}{۲\times ۳} - ۱}{۶ - ۷} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰^+} \frac{f'(۱+h)+f'(۱-h)}{۱} = f'_+(۱) + f'_-(۱)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ & x>۱ \\ ۴x^۳ & x<۱ \end{cases}$.

واضح است که $f'_+(۱) = ۳$ و $f'_-(۱) = ۴$، بنابراین $L = ۳+۴ = ۷$.

۱۶۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $f'(x) \geq ۰$ و نقاطی که $f'(x) = ۰$، تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازهٔ $[-\infty, ۳]$ نمودار تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطهٔ $x = ۱$ و $x = ۳$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازهٔ $[-\infty, ۳]$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۱۶۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x) = x^۲ - ۱$، پس

$$f'(x) \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۱ \quad \text{یا} \quad x \geq ۱$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -۱]$ و $[۱, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $(-۱, ۲)$ اکیداً صعودی نیست.

۱۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x) = -۳x^۲ + ۲x = x(-۳x+۲)$.

بنابراین

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

در نتیجه تابع f روی بازهٔ $(۰, \frac{۲}{۳})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱۶۷- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^۳ + mx^۲ - ۱۲x + ۱ \Rightarrow f'(x) = -۳x^۲ + ۲mx - ۱۲$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x) \leq ۰$، در نتیجه $-۳x^۲ + ۲mx - ۱۲ \leq ۰$.

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۱۴۴ \leq ۰ \Rightarrow m^۲ \leq ۳۶ \Rightarrow -۶ \leq m \leq ۶$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴, \pm۵, \pm۶\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۱$$

پس $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x+۴-x^۲ & x \geq -۲ \\ -۲x-۴-x^۲ & x < -۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲-۲x & x > -۲ \\ -۲-۲x & x < -۲ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x = -۲$ مشتق ندارد، پس نقطهٔ به طول -۲ نقطهٔ بحرانی تابع است.

از طرف دیگر،

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲-۲x=۰\Rightarrow x=۱\\ -۲-۲x=۰\Rightarrow x=-۱ \quad (غ.ق.ق.)\end{cases}$$

بنابرایـن نقطـهٔ به طول ۱ نقطـهٔ بحرانی تابع اسـت. مجمـوع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-۲)+f(۱)=-۴+۵=۱$.

۱۷۰- گزینهٔ ۳ ریشـه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{(x^۲-۴)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۶x^۲+x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۷x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند (دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[۱,۳]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}$$

تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}=\sqrt{۳-x}\Rightarrow x-۱=۳-x\Rightarrow x=۲$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{۱,۲,۳\}$ است که دارای سه عضو است.

۱۷۲- گزینهٔ ۲ تابـع f در نقطه‌هـای -۱ و ۲ مینیمـم نسـبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۱۷۳- گزینهٔ ۳ جـدول تعییـن علامـت $f'(x)$ به‌صـورت زیر اسـت. بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=-۲$ دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

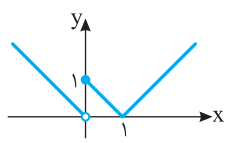
۱۷۴- گزینهٔ ۲ ابتداتوجه کنید که $f'(x)=۸x^۳-۳x^۲=x^۲(۸x-۳)$.

بنابراین جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۸}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↘	min نسبی	↗	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۷۵- گزینهٔ ۱ نمـودار تابـع f بـه شکل مقابل اسـت. این تابع در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمـم نسـبی و در نقطـهٔ $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.



۱۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۴x-۸$. بنابراین

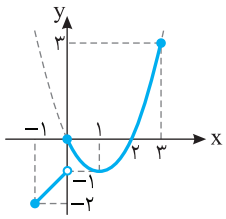
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

اکنون توجه کنید که چون

$$f(۰)=۱,\quad f(۲)=-۷,\quad f(۵)=۱۱$$

پـس مقدار ماکزیمم مطلـق و مینیمم مطلق تابـع f به‌ترتیب برابر ۱۱ و -۷ و اختلاف آن‌ها برابر $۱۱-(-۷)=۱۸$ است.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ نمـودار تابـع f به‌صورت مقابل اسـت. حداکثـر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۱۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲},\quad x>۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱ \ (غ.ق.ق.)$$

از طـرف دیگـر، $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=۰$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(۱)=\frac{۱}{۲}$.

۱۷۹- گزینهٔ ۳ چون $y=۲x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(۲x-a)=۲x^۲-ax$$

$$A'(x)=۰\Rightarrow ۴x-a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $۲(\frac{a}{۴})^۲-a\times\frac{a}{۴}=-\frac{a^۲}{۸}$.

۱۸۰- گزینهٔ ۱ طـول اضـلاع قائمـهٔ مثلـث را a و b فـرض می‌کنیـم. می‌خواهیم بیشـترین مقدار مسـاحت، یعنی $S=\frac{۱}{۲}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^۲+b^۲=۱۶$. پس $b=\sqrt{۱۶-a^۲}$، در نتیجه

$$S(a)=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۱۶-a^۲}$$

$$S'(a)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-a^۲}-\frac{a^۲}{۲\sqrt{۱۶-a^۲}}\Rightarrow S'(a)=۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})\sqrt{۸}=۴$.

۱۸۱- گزینهٔ ۴ نقطـهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظـر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. بنابراین

$$d(x)=AB=\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+۲x+۹}=\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}$$

$$d'(x)=\frac{۲x-۶}{۲\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}},\quad d'(x)=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

۱۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با $f(x)=(۳x-۱)(۱-۲x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $(۳x-۱)(۱-۲x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۳(۱-۲x)+(۳x-۱)(-۲)=-۱۲x+۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۱۲x+۵=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x=\frac{۵}{۱۲}$ به‌دسـت می‌آیـد، که برابر اسـت با $\frac{۱}{۲۴}$. در نتیجه بیشـترین مقدار مسـاحت مستطیل ABCD برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.

۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(a+1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(1-5)^2}$$

$$\sqrt{a^2+2a+1+0}=\sqrt{a^2-6a+9+16}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^2+2a+1=a^2-6a+25\Rightarrow 8a=24\Rightarrow a=3$$

۱۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2}=3$. بنابراین

$$AC=3\Rightarrow\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow a^2+b^2=9 \quad (1)$$

$$BC=3\Rightarrow\sqrt{(3-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow(3-a)^2+b^2=9$$

$$9-6a+a^2+b^2=9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9-6a=0$، پس $a=\frac{3}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^2=9-a^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$، بنابراین

$$|b|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۱ وسط ضلع BC نقطهٔ $(\frac{3+1}{2},\frac{-2+4}{2})$ یعنی نقطهٔ $(2,1)$ است. طول میانهٔ نظیر رأس A برابر با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با $\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$.

۱۸۶- گزینهٔ ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3,a)$ و $(2,7)$ می‌گذرد برابر است با $a-7$. $\frac{a-7}{3-2}=a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1,4)$ و $(1,8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-8}{-1-1}=2$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است، پس

$$(a-7)(2)=-1\Rightarrow a=\frac{13}{2}$$

۱۸۷- گزینهٔ ۳ طول عمود وارد از نقطهٔ $(3,1)$ بر خط $4x+3y+20=0$ فاصلهٔ این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4\times3+3\times1+20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{35}{5}=7$$

۱۸۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط $ax+by+c=0$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b}=-1$، در نتیجه $a=b$. از طرف دیگر، چون فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a\times0+a\times0+c|}{\sqrt{a^2+a^2}}=5\Rightarrow\frac{|c|}{\sqrt{2}|a|}=5\Rightarrow|c|=5\sqrt{2}|a|\Rightarrow c=\pm5\sqrt{2}\,a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax+ay+5\sqrt{2}\,a=0$ و $ax+ay-5\sqrt{2}\,a=0$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x+y+5\sqrt{2}=0$ و $x+y-5\sqrt{2}=0$ نوشت.

۱۸۹- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین $2a=PF+PF'=6+8=14$. اکنون دقت کنید که $AF=A'F'=5$. با توجه به شکل فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با

$$FF'=AA'-AF-A'F'\Rightarrow 2c=14-5-5=4$$

۱۹۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی بیضی به‌ترتیب $2a$، $2b$ و $2c$ است. بنابراین

$$2a=8\Rightarrow a=4\ ,\quad 2b=6\Rightarrow b=3$$

از طرف دیگر،

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 16=9+c^2\Rightarrow c^2=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $2c=2\sqrt{7}$.

راه‌حل دوم چون $a^2=b^2+c^2$، پس $4a^2=4b^2+4c^2$، در نتیجه $(2a)^2=(2b)^2+(2c)^2$، یعنی

$$8^2=6^2+(2c)^2\Rightarrow(2c)^2=28\Rightarrow 2c=2\sqrt{7}$$

۱۹۱- گزینهٔ ۱ چون مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است، یعنی BB' قطر کوچک بیضی است. اکنون توجه کنید که $a=OA'=17$ و $b=OB=15$. در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 17^2=15^2+c^2\Rightarrow c=8$$

بنابراین $AF'=a+c=25$. در نتیجه، مساحت مثلث ABF' برابر است با

$$\frac{1}{2}AF'\times OB=\frac{1}{2}\times25\times15=\frac{375}{2}$$

۱۹۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** بنابر فرض‌های مسئله، $b=OB'=6$ و $a=BF=8$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 8^2=6^2+c^2\Rightarrow c=2\sqrt{7}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

راه‌حل دوم چون $a=8$ و $b=6$، پس

$$e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱۹۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله،

$$2c=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}\ ,\quad 2a-2b=2\Rightarrow a-b=1 \quad (1)$$

بنابراین

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2-b^2=c^2\Rightarrow(a-b)(a+b)=5$$

$$\xrightarrow{(1)} a+b=5 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)، $a=3$ به‌دست می‌آید. در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن a، از تساوی (۱)، $b=a-1$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=(a-1)^2+c^2$$

$$a^2=a^2-2a+1+5\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$

۱۹۴- گزینهٔ ۲ مرکز دایره وسط دو سر قطر است، پس نقطهٔ $(\frac{6+2}{2},\frac{3-1}{2})$، یعنی $(4,1)$ مرکز دایره است. اکنون توجه کنید که شعاع دایره برابر $\frac{1}{2}AB$ است، چون $AB=\sqrt{(3+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$، در نتیجه $r=2\sqrt{2}$. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=8\Rightarrow x^2+y^2-2x-8y=8-1-16=-9\Rightarrow c=-9$$

۱۹۵- گزینهٔ ۴ در معادلهٔ گستردهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. پس طرفین معادلهٔ داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود: $x^۲+\frac{a}{۲}y^۲-۲x+\frac{b}{۲}y-۴=۰$. به این ترتیب $\frac{a}{۲}=۱$، پس $a=۲$. از طرف دیگر، چون شعاع دایره برابر ۳ است، پس

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(\frac{b}{۲})^۲-۴(-۴)}=۳\Rightarrow\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲+۲۰}=۶\Rightarrow b=\pm۸\Rightarrow ab=\pm۱۶$$

۱۹۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند:

$$۱+a+c=۰\ ,\quad ۱+b+c=۰\ ,\quad ۱+۱-a+b+c=۰$$

از معادلهٔ دوم $b+c=-۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین در معادلهٔ سوم

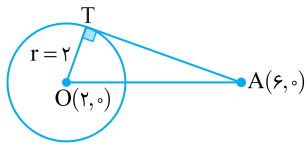
$$۲-a+b+c=۰\Rightarrow ۲-a+(-۱)=۰\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه از معادلهٔ اول $c=-۲$ و از معادلهٔ دوم $b=۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

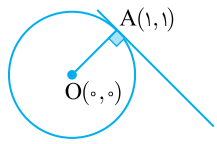
$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱-۴(-۲)}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۱۹۷- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $O(۲,۰)$ مرکز دایره و شعاع دایره $r=۲$ است. همچنین $OA=\sqrt{(۶-۲)^۲+۰^۲}=۴$، و در نتیجه

$$AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}=\sqrt{۴^۲-۲^۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$



۱۹۸- گزینهٔ ۱ مرکز دایره نقطهٔ $O(۰,۰)$ است. شیب خطی که نقطه‌های O و A روی آن قرار دارند، برابر است با $\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره که بر خط گذرنده از O و A عمود است، برابر -۱ است. پس معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ $A(۱,۱)$ به‌صورت زیر است:

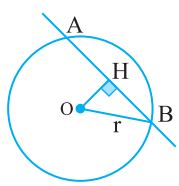


$$y-۱=(-۱)(x-۱)\Rightarrow y=-x+۲$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲=\frac{۱۶۹}{۲۵}$ نقطهٔ $O(۰,۰)$ و شعاع آن برابر $r=\frac{۱۳}{۵}$ است. بنابراین مطابق شکل زیر، OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۰)$ از خط $۴x+۳y-۱۲=۰$ است، که برابر است با $\frac{|۰+۰-۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow(\frac{۱۳}{۵})^۲=(\frac{۱۲}{۵})^۲+HB^۲\Rightarrow HB=۱$$

اکنون توجه کنید که $AB=۲HB=۲$.



۲۰۰- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x=۰$ نقطهٔ $O_۱(-\frac{-۴}{۲},۰)$، یعنی $O_۱(۲,۰)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۰^۲-۴(۰)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۰-۰}=۲$$

مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۸y+k=۰$ نقطهٔ $O_۲(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۸}{۲})$، یعنی $O_۲(-۱,۴)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۸)^۲-۴(k)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶۴-۴k}=\sqrt{۱۷-k}$$

برای اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند باید $O_۱O_۲=r_۱+r_۲$. پس

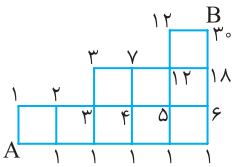
$$\sqrt{(۲+۱)^۲+(۰-۴)^۲}=۲+\sqrt{۱۷-k}\Rightarrow ۳=\sqrt{۱۷-k}\Rightarrow ۹=۱۷-k\Rightarrow k=۸$$

۲۰۱- گزینهٔ ۳ رقم صدگان عدد مورد نظر نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین برای صدگان ۴ انتخاب داریم. برای هر یک از رقم‌های دهگان و یکان ۵ انتخاب داریم. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با $۴\times۵\times۵=۱۰۰$.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ نفر اول می‌تواند بر روی هر یک از صندلی‌ها بنشیند، پس برای او ۶ انتخاب وجود دارد. نفر دوم باید صندلی‌ای به‌جز صندلی نفر اول را انتخاب کند، پس ۵ انتخاب دارد. به همین ترتیب، نفر سوم هم ۴ انتخاب دارد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۶\times۵\times۴=۱۲۰$.

۲۰۳- گزینهٔ ۱ برای هر سؤال یکی از چهار گزینه درست است، پس کلید هر سؤال ۴ حالت دارد. پس تعداد حالت‌های مختلف که یک کلید ۲۰ سؤالی می‌تواند داشته باشد $\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۲۰تا}}$ یعنی $۴^{۲۰}$ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های رسیدن از نقطهٔ A به هر نقطه روی شکل را به کمک اصل جمع حساب می‌کنیم که مطابق شکل روبه‌رو است. بنابراین به ۳۰ طریق مختلف می‌توانیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم.



۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر صدگان عدد ۷ باشد، هر کدام از رقم‌های دهگان و یکان می‌توانند نه حالت داشته باشند (فقط ۷ نمی‌توانند باشند). پس ۸۱ عدد به این صورت وجود دارد. اگر دهگان عدد ۷ باشد، رقم یکان می‌تواند نه حالت و رقم صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد (۷ و صفر نمی‌توانند باشد). پس ۷۲ عدد به این شکل وجود دارد. به همین ترتیب اگر یکان عدد ۷ باشد، دهگان می‌تواند نه حالت داشته باشد و صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد. یعنی ۷۲ عدد نیز به این شکل وجود دارد. بنابراین تعداد کل عددهای مطلوب برابر است با $۸۱+۷۲+۷۲=۲۲۵$.

۲۰۶- گزینهٔ ۳ حروف یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را به عنوان یک عضو جایگشت در نظر می‌گیریم. یعنی می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های مختلف M، I، S و P را حساب کنیم که برابر $۴!=۲۴$ است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(n,۵)=۲P(n,۴)\Rightarrow\frac{n!}{(n-۵)!}=۲\times\frac{n!}{(n-۴)!}$$

$$\frac{۱}{(n-۵)!}=\frac{۲}{(n-۴)(n-۵)!}\Rightarrow n-۴=۲\Rightarrow n=۶$$

۲۰۸- گزینهٔ ۳ باید سه رقم متمایز از میان رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ و ۹ انتخاب کنیم و با آن‌ها عددی سه رقمی بنویسیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰$.

۲۰۹- گزینهٔ ۱ ارقام اول و آخر را باید از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم که این کار به $P(۵,۲)$ حالت امکان‌پذیر است. سه رقم وسط را هم باید از بین هشت رقم باقیمانده انتخاب کنیم که این کار به $P(۸,۳)$ حالت امکان‌پذیر است. بنابراین تعداد اعداد مطلوب سؤال برابر است با

$$P(۵,۲)\times P(۸,۳)=\frac{۵!}{۳!}\times\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸!}{۳!}$$

۲۱۰- گزینهٔ ۴ در اینجا ترتیب بیرون آوردن ۴ گوی از ۲۰ گوی مهم است، پس تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $P(۲۰,۴)=\frac{۲۰!}{(۲۰-۴)!}=\frac{۲۰!}{۱۶!}$.

۲۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\binom{n}{۴}=\binom{n}{۷}\Rightarrow\frac{n!}{۴!(n-۴)!}=\frac{n!}{۷!(n-۷)!}\Rightarrow ۴!(n-۴)!=۷!(n-۷)!$$

$$۴!\times(n-۴)(n-۵)(n-۶)(n-۷)!=۴!\times۵\times۶\times۷\times(n-۷)!$$

$$(n-۴)(n-۵)(n-۶)=۷\times۶\times۵\Rightarrow n-۴=۷\Rightarrow n=۱۱$$

بنابراین $\binom{n}{۸}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۶}=۱۶۵$.

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $\binom{n}{m}=\binom{n}{k}$، آن‌گاه $m+k=n$. پس $n=۷+۴=۱۱$. پس $\binom{n}{۸}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۶}=۱۶۵$.

۲۱۲- گزینهٔ ۴ محسن به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند و ابراهیم نیز به $\binom{۸}{۳}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۶}{۸}\binom{۸}{۳}=۱۱۲۰$.

۲۱۳- گزینهٔ ۴ اگر به چهار پرسش از پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به شش پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۵}{۴}\binom{۸}{۶}=۱۴۰$. اگر به هر پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به پنج پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۵}{۵}\binom{۸}{۵}=۵۶$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $۱۹۶=۵۶+۱۴۰$.

۲۱۴- گزینهٔ ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و در یک تیم قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم پنج نفره را تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر $\binom{۸}{۳}$ است: $\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳!\times۵!}=۵۶$.

۲۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا یک زن و شوهر را از بین شش زن و شوهر به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم. اکنون باید سه نفر را از بین پنج زوج دیگر انتخاب کنیم. ابتدا سه زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. سپس از بین هر زوج انتخاب شده زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم که این کار به ۲×۲×۲ راه ممکن است. پس کل حالت‌های انتخاب پنج نفر از بین ساکنین آپارتمان برابر است با $\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۳}\times۲^۳=۴۸۰$.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین $\binom{n}{۵}=\binom{n}{۶}$ و در نتیجه $n=۵+۶=۱۱$.

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ یازده عضوی برابر است با $\binom{۱۱}{۳}$ یا همان $\binom{۱۱}{۸}$.

۲۱۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(S)=۲^۲=۴,\quad n(A)=\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۲}=۲+۱=۳$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$.

۲۱۸- گزینهٔ ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه لامپ از دوازده لامپ برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}$. چون هشت لامپ درون جعبه سالم‌اند، پس اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۸}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۸!}{۵!۳!}}{\frac{۱۲!}{۹!۳!}}=\frac{۸!\times۹!}{۵!\times۱۲!}=\frac{۶\times۷\times۸}{۱۰\times۱۱\times۱۲}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

۲۱۹- گزینهٔ ۱ واضح است که $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. برای اینکه سه مهره همرنگ باشند، یا باید هر سه آبی باشند یا هر سه قرمز. پس تعداد حالت‌های انتخاب سه مهرهٔ همرنگ برابر است با $n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۴+۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۲۲۰- گزینهٔ ۴ چون A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$.

۲۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۱=۰/۳-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

از طرف دیگر

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳+۰/۴-۰/۲=۰/۵$$

۲۲۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که هر دو عدد رو شده زوج باشند و B پیشامد این باشد که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، در این صورت

$$A\cap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\},\ B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

پس $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$.

۲۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۰/۲=P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B')}{۱-P(B)}=\frac{P(A\cap B')}{۰/۸}$$

در نتیجه $P(A\cap B')=۰/۲\times۰/۸=۰/۱۶$.

۲۲۴- گزینهٔ ۴ A را پیشامد گرفتن بیماری سارس و B را پیشامد درمان فرد می‌گیریم. در این صورت $P(A)=\frac{۲}{۱۰۰}$ و $P(B|A)=\frac{۱}{۱۰}$. در نتیجه

$$\frac{۱}{۱۰}=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۲}{۱۰۰}}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۰۲$$

در نتیجه احتمال اینکه فرد هم دچار بیماری شود و هم درمان شود ۰/۰۰۲ است.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول به هدف بزند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند.

توجه کنید که $P(A)=۰/۸$ و $P(B)=۰/۷$. پیشامدهای A و B مستقل‌اند و در نتیجه $P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۸\times۰/۷=۰/۵۶$. احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۸+۰/۷-۰/۵۶=۰/۹۴$$

۲۲۶- گزینهٔ ۳ پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴},\quad P(B)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(B')=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

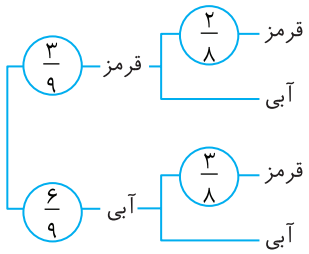
پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزند» برابر $A'\cup B'$ است که چون A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A')P(B')=\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که در اینجا فضای احتمال $S=\{ق\,ق,ق\,آ,آ\,ق,آ\,آ\}$ است. فرض کنید $R_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم قرمز و $R_۱$ و $B_۱$ به‌ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(R_۲)=P(R_۱)P(R_۲|R_۱)+P(B_۱)P(R_۲|B_۱)=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید



$$P(\text{قرمز بودن توپ دوم})=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبهٔ اول برای افزودن ۲ مهرهٔ سفید باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبهٔ دوم برای افزودن ۲ مهرهٔ سفید است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$$

توجه کنید که اگر دو مهرهٔ سفید به جعبهٔ اول اضافه شوند، این جعبه شامل ۸ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرهٔ انتخابی از این جعبه برابر $\frac{۸}{۱۰}$ می‌شود، یعنی $P(A|B)=\frac{۸}{۱۰}$. به طور مشابه

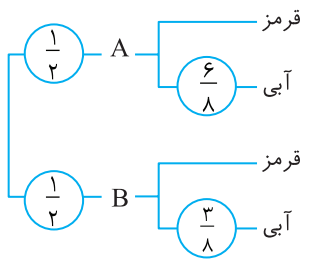
$$P(A|B')=\frac{۷}{۱۰}$$

۲۲۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر نیایند (که از اینها $(۲,۳)$، $(۳,۲)$، $(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر بیایند (که ابتدا $(۱,۱)$ و سپس $(۱,۲)$ یا $(۲,۱)$ مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۵ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{۳۰}{۳۶}\times\frac{۴}{۳۰}+\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۳۶}=\frac{۷۳}{۶۴۸}$$

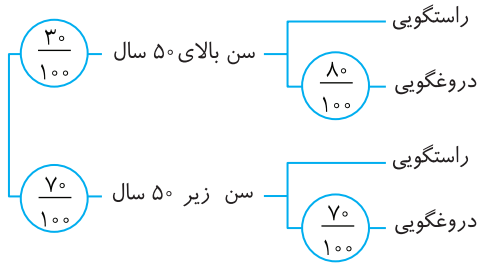
۲۳۰- گزینهٔ ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۹}{۱۶}$$

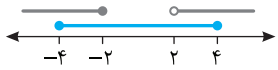
۲۳۱- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}+\frac{۷۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{۷۳}{۱۰۰}=۰/۷۳$$

۲۳۲- گزینهٔ ۲ به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A=[-۴,-۲]\cup(۲,۴]$. بنابراین اعداد صحیح -۴، -۳، -۲، ۳ و ۴ در مجموعهٔ A قرار دارند.



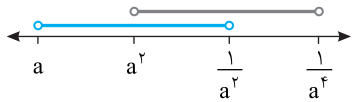
۲۳۳- گزینهٔ ۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$۲<۳+a\Rightarrow a>-۱\quad,\quad ۲a\le ۲\Rightarrow a\le ۱$$

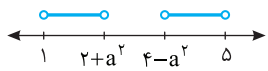
بنابراین $-۱<a\le ۱$ و در نتیجه $a\in(-۱,۱]$.

۲۳۴- گزینهٔ ۴ چون $-۱<a<۰$، پس $a<a^۲<\frac{۱}{a^۲}<\frac{۱}{a^۴}$. بنابراین با توجه به شکل زیر،

$$(a,\frac{۱}{a^۲})\cap(a^۲,\frac{۱}{a^۴})=(a^۲,\frac{۱}{a^۲})$$



۲۳۵- گزینهٔ ۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس

$$۴-a^۲\ge ۲+a^۲\Rightarrow a^۲\le ۱\Rightarrow -۱\le a\le ۱$$

یعنی

$$a\in[-۱,۱]$$

۲۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم. توجه کنید برای آنکه $\frac{۱۰}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰$ است. بنابراین $A=\{\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعهٔ B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعهٔ B تهی است. بنابراین مجموعهٔ B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۳۷- گزینهٔ ۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعهٔ نامتناهی A را که در مجموعهٔ متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

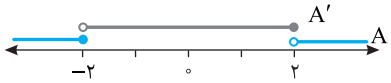
بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$، آن‌گاه $A-B=\{۰\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{۱\}$، آن‌گاه $A-B=\mathbb{Z}-\{۱\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینهٔ (۳) اگر $A=\{\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

۲۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، $A'=(-۲,۲]$. بنابراین اعداد صحیح -۱، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



۲۳۹- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=۳۰$، $n(B)=۳۵$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A\cup B)=۴۰$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۴۰=۳۰+۳۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۲۵$$

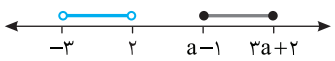
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۴۰- گزینهٔ ۲

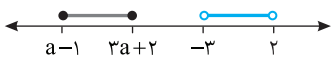
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$$

$$۲۰-۴=n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=۱۶$$

۲۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-۱\ge ۲\Rightarrow a\ge ۳$$



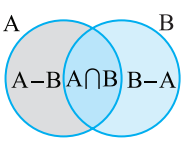
$$۳a+۲\le -۳\Rightarrow a\le -\frac{۵}{۳}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-۱,۳a+۲]$ بازه باشد باید $a-۱<۳a+۲$ و در نتیجه $a>-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$a\in([۳,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{۵}{۳}])\cap(-\frac{۳}{۲},+\infty)$$

اگر $a\ge ۳$، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.

۲۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



۲۴۳- گزینهٔ ۱ توجه‌کنید که در شکل اول، ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم، ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم، ۴×۲ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل nاُم، ۴×(n−۱) دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم، $a_n=۶+۴(n-۱)=۴n+۲$

(توجه کنید که شکل nاُم، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{۲۰}=۴\times۲۰+۲=۸۲$$

۲۴۴- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases}t_۴=۱۶\\t_{۱۶}=۲۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴a+b=۱۶\\۱۶a+b=۲۸\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $a=۱$ و $b=۱۲$. بنابراین

$$t_n=n+۱۲\Rightarrow t_۲=۱۴$$

۲۴۵- گزینهٔ ۲ شکل nاُم از $(n+۲)^۲$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $۲(n+۲)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $۲(n+۲)-۱=۲n+۳$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(۲۰)^۲$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۴۶- گزینهٔ ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{۴n-۳}{n+۳}=۳$ برقرار می‌شود. پس

$$۴n-۳=۳n+۹\Rightarrow n=۱۲$$

بنابراین جملهٔ دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۴۷- گزینهٔ ۴ عدد آخر دستهٔ اول $۲^۲$، عدد آخر دستهٔ دوم $۴^۲$، عدد آخر دستهٔ سوم $۶^۲$ و ... عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $(۲n)^۲$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم $۲۰^۲$ است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

۲۴۸- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-۱}-۳$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن ۳− با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳− و جملهٔ اول ۴− داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{۲۰}=a_۱+۱۹d=-۴+۱۹(-۳)=-۶۱$.

۲۴۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید جملهٔ اول این دنباله، $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد. در این‌صورت

$$a_۴=۵\Rightarrow a_۱+(۴-۱)d=۵\Rightarrow a_۱+۳d=۵ \quad (۱)$$

$$a_۹=۳۰\Rightarrow a_۱+(۹-۱)d=۳۰\Rightarrow a_۱+۸d=۳۰ \quad (۲)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید $۵d=۲۵$، پس $d=۵$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_۱=-۱۰$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n=a_۱+(n-۱)d=-۱۰+(n-۱)(۵)=۵n-۱۵$$

۲۵۰- گزینهٔ ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{۹۹۴-۱۰۵}{۷}+۱$ است که برابر است با ۱۲۸.

۲۵۱- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{۱}{۲}$ واسطهٔ حسابی $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x+۲}$ است، پس

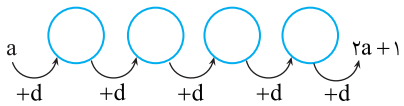
$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۲}\right)\Rightarrow ۱=\frac{x+۲+x}{x(x+۲)}$$

در نتیجه

$$x^۲+۲x=۲x+۲\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۲۵۲- گزینهٔ ۲ چون $a>۰$، پس $۲a+۱>a$. اکنون قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم $d=\frac{۲a+۱-a}{۴+۱}=\frac{a+۱}{۵}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر ۳d است و در نتیجه

$$\frac{۳(a+۱)}{۵}=۹\Rightarrow ۳a+۳=۴۵\Rightarrow ۳a=۴۲\Rightarrow a=۱۴$$



۲۵۳- گزینهٔ ۳ جملات دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-d, a, a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها ۳a است. پس $۳a=۲۱$ و در نتیجه $a=۷$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=۱۶۸\Rightarrow ۷(۴۹-d^۲)=۱۶۸$$

$$۴۹-d^۲=۲۴\Rightarrow d^۲=۲۵\Rightarrow d=\pm۵\Rightarrow ۲,۷,۱۲ \text{ یا } ۱۲,۷,۲$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۵۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد $(r>۰)$. در این‌صورت

$$a_۱+a_۵=۳۰\Rightarrow a_۱+a_۱r^۴=۳۰\Rightarrow a_۱(۱+r^۴)=۳۰ \quad (۱)$$

$$a_۳+a_۷=۱۲۰\Rightarrow a_۱r^۲+a_۱r^۶=۱۲۰\Rightarrow a_۱r^۲(۱+r^۴)=۱۲۰ \quad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $r^۲=۴$؛ پس $r^۴=۱۶$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_۱=\frac{۳۰}{۱۷}$.

۲۵۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $۳+۹=۵+۷=۴+۸$ پس

$$a_۳a_۹=a_۵a_۷=a_۴a_۸$$

در نتیجه $a_۳a_۵a_۷a_۹=(a_۴a_۸)^۲=۹$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_۴=a_۱r^۳,\quad a_۸=a_۱r^۷\Rightarrow a_۴a_۸=a_۱^۲r^{۱۰}=۳$$

پس

$$a_۳a_۵a_۷a_۹=a_۱r^۲a_۱r^۴a_۱r^۶a_۱r^۸=a_۱^۴r^{۲۰}=(a_۱^۲r^{۱۰})^۲=۹$$

۲۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_۱a_۲\cdots a_۸=\sqrt{(a_۱a_۸)^۸}\Rightarrow ۸۱=\sqrt{(a_۱a_۸)^۸}\Rightarrow a_۱a_۸=\pm۳$$

از طرف دیگر،

$$۲+۷=۱+۸\Rightarrow a_۲a_۷=a_۱a_۸$$

$$۴+۵=۱+۸\Rightarrow a_۴a_۵=a_۱a_۸$$

پس $a_۲a_۴a_۵a_۷=(a_۲a_۷)(a_۴a_۵)=(a_۱a_۸)^۲=۹$.

۲۵۷- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم به‌ترتیب $a+d$، $a+۳d$ و $a+۸d$ هستند. پس $a+۳d$ واسطهٔ هندسی $a+d$ و $a+۸d$ است و درنتیجه

$$(a+۳d)^۲=(a+d)(a+۸d)\Rightarrow a^۲+۶ad+۹d^۲=a^۲+۹ad+۸d^۲$$

$$d^۲=۳ad\Rightarrow d=۳a$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۳ برابر جملهٔ اول آن است.

۲۵۸- گزینهٔ ۲ چون $x<۰$، پس $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|=-x$. در نتیجه

$$۳\sqrt[۳]{x^۳}+۲\sqrt[۴]{x^۴}=۳x+۲(-x)=x$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[۶]{a^۶}-a=۰\Rightarrow b|a|-a=۰\Rightarrow b|a|=a$$

بنابراین اگر $a>۰$، $b=۱$ و اگر $a<۰$، $b=-۱$. در نتیجه $\sqrt[۶]{a^۶}+\sqrt[۶]{b^۶}=|a|+|b|=|a|+۱$ که اگر a مثبت باشد برابر با $a+۱$ و اگر a منفی باشد، برابر با $-a+۱$ است.

۲۶۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt{۲^n}}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۸}}}\Rightarrow \sqrt[۴×۲×۲]{۲^n}=\sqrt[۳×۴×۲]{۸}\Rightarrow ۲^{\frac{n}{۴×۲×۲}}=۲^{\frac{۳}{۳×۴×۲}}$$

$$۲^{\frac{n}{۱۶}}=۲^{\frac{۱}{۸}}\Rightarrow \frac{n}{۱۶}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow n=۲$$

۲۶۱- گزینهٔ ۳ از $a>\sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a>۱$. بنابراین $a^۲<a^۳$ و در نتیجه $\sqrt[۳]{a^۲}<\sqrt[۳]{a^۳}$. یعنی $\sqrt[۳]{a^۲}<a$. همچنین $\frac{۳}{۴}>\frac{۱}{۲}$ پس $a^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{a^۳}>\sqrt{a}=a^{\frac{۱}{۲}}$. بنابراین نابرابری داده شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{۳}{۵}}=۱۶\Rightarrow (a^{\frac{۳}{۵}})^{\frac{۵}{۳}}=۱۶^{\frac{۵}{۳}}\Rightarrow a=۱۶^{\frac{۵}{۳}}$$

بنابراین $a^{\frac{۳}{۴}}=(۱۶^{\frac{۵}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۵}{۳}\times\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۵}{۴}}=(۲^۴)^{\frac{۵}{۴}}=۲^۵=۳۲$.

۲۶۳- گزینهٔ ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۳}}}=\sqrt{۳\times ۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}}=\sqrt{۳^{\frac{۱۹}{۱۲}}}=۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

بنابراین $a=\frac{۱۹}{۲۴}$.

۲۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۴a^۲+\frac{۹}{a^۲}=(۲a+\frac{۳}{a})^۲-۱۲$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{۳}{۲a}=۴$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $۲a+\frac{۳}{a}=۸$. بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با $۸^۲-۱۲=۵۲$.

۲۶۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}}\div\sqrt{\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۳-۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۶-۲\sqrt{۵}}}\times\sqrt{\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۶+۲\sqrt{۵}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}}=\sqrt{\frac{۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲}{۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲}}=\sqrt{\frac{۹-۸}{۳۶-۲۰}}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}$$

۲۶۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(-ab-bc+ca) \quad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$ab+bc-ca=۸\Rightarrow -ab-bc+ca=-۸$$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$۳۶=a^۲+b^۲+c^۲-۱۶\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۵۲$$

۲۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲$ و $(x-۴)(x+۱)=x^۲-۳x-۴$. بنابراین

$$(x-۱)(x-۲)(x-۴)(x+۱)=(x^۲-۳x+۲)(x^۲-۳x-۴)$$

$$=(۷+۲)(۷-۴)=۲۷$$

۲۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸-(۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱)$$

$$=-۷x^۳+۶x^۲+۶x-۷$$

بنابراین ضریب $x^۲$ برابر ۶ است.

۲۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A=(x-۱)(x+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)+۱$$

$$=((x-۱)(x^۲+x+۱))((x+۱)(x^۲-x+۱))+۱$$

$$=(x^۳-۱)(x^۳+۱)+۱=x^۶-۱+۱=x^۶$$

حال قرار می‌دهیم $x=\sqrt[۱۲]{۲}$ و نتیجه می‌شود $A=(\sqrt[۱۲]{۲})^۶=\sqrt{۲}$.

۲۷۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$x^۲-y^۲-۶x-۸y-۷=(x^۲-۶x+۹)-(y^۲+۸y+۱۶)$$

$$=(x-۳)^۲-(y+۴)^۲=(x-۳-(y+۴))(x-۳+y+۴)$$

$$=(x-y-۷)(x+y+۱)$$

بنابراین $x+y+۱$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^۴+۳x^۲+۴=x^۴+۴x^۲+۴-x^۲=(x^۲+۲)^۲-x^۲$$

$$=(x^۲+۲-x)(x^۲+۲+x)$$

بنابراین $x^۲-x+۲$ عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۷۲- گزینهٔ ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$۳y^۳+۳=۳(y^۳+۱)=۳(y+۱)(y^۲-y+۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳(y+۱)(y^۲-y+۱)}{y-x}\times\frac{x(y-x)}{x(۱-y+y^۲)}=۳(y+۱)$$

۲۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^۲+ab+ac+bc=a^۲+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c=a+b+c-b=۳+۲=۵$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۳\times۵=۱۵$.

۲۷۴- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^۶-۱}{a^۴-a^۲}=\frac{(a^۲)^۳-۱}{a^۲(a^۲-۱)}=\frac{(a^۲-۱)((a^۲)^۲+a^۲+۱)}{a^۲(a^۲-۱)}$$

$$=\frac{a^۴+a^۲+۱}{a^۲}=\frac{a^۴}{a^۲}+\frac{a^۲}{a^۲}+\frac{۱}{a^۲}=a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱$$

$$=(a-\frac{۱}{a})^۲+۲+۱=\sqrt{۵}^۲+۳=۸$$

۲۷۵- گزینهٔ ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}-۵=\frac{(۴+۲\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}-۵=\frac{۴\sqrt{۳}+۴+۶+۲\sqrt{۳}}{۳-۱}-۵$$

$$=\frac{۱۰+۶\sqrt{۳}}{۲}-۵=۵+۳\sqrt{۳}-۵=۳\sqrt{۳}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$

$$=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}.$$

۲۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{(\sqrt[۳]{۳})^۳-۱}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۹}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳}+\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$.

۲۷۸- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲)=۲^۵-۴(۲)^۳+۳(۲)^۲-۲+۱=۱۱$.

۲۷۹- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ برابر است با $P(۱)=۳-۴a-۵=-۴a-۲$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-۴a-۲=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۸۰- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه

$$P(-۳)=(-۳)^۸+۳(-۳)^۷+a(-۳)^۲-۹=۰$$

بنابراین $a=۱$ و $P(x)=x^۸+۳x^۷+x^۲-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x+۲$ برابر است با $P(-۲+۱)=P(-۱)$.

اکنون توجه کنید که $P(-۱)=(-۱)^۸+۳(-۱)^۷+(-۱)^۲-۹=-۱۰$.

۲۸۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۸\pm\sqrt{۸^۲-۴\times۱۳}}{۲}=\frac{۸\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۴\pm\sqrt{۳}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۳ معادلهٔ گزینهٔ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به‌ازای هر m، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^۲-x-m=۰\Rightarrow\Delta=۱+۴m^۲>۰$$

توجه کنید که اگر $m=۰$، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) Δ همواره مثبت نیست. $x^۲-۲x+m=۰\Rightarrow\Delta=۴-۴m\Rightarrow$

گزینهٔ (۲) Δ همواره مثبت نیست. $x^۲-x+m^۲=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴m^۲\Rightarrow$

گزینهٔ (۴) Δ همواره مثبت نیست. $mx^۲-x+۱=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴m\Rightarrow$

۲۸۳- گزینهٔ ۱ باید $\Delta\geq۰$، پس

$$x^۲-(k+۱)x+۱=۰\Rightarrow\Delta=(k+۱)^۲-۴\geq۰$$

$$(k+۱)^۲\geq۴\xrightarrow{k>۰}k+۱\geq۲\Rightarrow k\geq۱$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۲۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ $۹۲x^۲-۱۶۷x+۷۵=۰$ برابر با صفر است، پس یکی از جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{۷۵}{۹۲}$ است. چون $\frac{۷۵}{۹۲}<۱$، پس کوچک‌ترین جواب $\frac{۷۵}{۹۲}$ است.

۲۸۵- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۳})(x-۲\sqrt{۲})=۰\xrightarrow{x_۱<x_۲}x_۱=\sqrt{۳},\quad x_۲=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $x_۱^۴+x_۲^۲=(\sqrt{۳})^۴+(۲\sqrt{۲})^۲=۹+۸=۱۷$.

۲۸۶- گزینهٔ ۳ این دو عدد فرد را x و $x+۲$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^۲+(x+۲)^۲=۱۳۰\Rightarrow۲x^۲+۴x+۴=۱۳۰\Rightarrow x^۲+۲x-۶۳=۰$$

$$(x+۹)(x-۷)=۰\Rightarrow x=-۹\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=۷$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر $۸۱-۴۹$ یعنی ۳۲ است.

۲۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_۱^۲x_۲+x_۱x_۲^۲=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)$$

از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=۴$ و $x_۱x_۲=-۱$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-۱)(۴)=-۴$.

۲۸۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=-۵$. بنابراین

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۸-۳\times(-۵)\times۲=۳۸$$

۲۸۹- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{۱}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-۱$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=-۱\Rightarrow m-۱=-۲\Rightarrow m=-۱$$

۲۹۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۵$ و چون $۲x_۱-x_۲=۱۷$، پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به‌دست می‌آید $x_۱=۴$. چون $x_۱$ جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$۴^۲+۵(۴)-۴m+۱۶=۰\Rightarrow m=۱۳$$

۲۹۱- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۲\beta^۲-\beta-۷=۰\Rightarrow ۲\beta^۲=\beta+۷$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $\alpha+۲\beta^۲=\alpha+\beta+۷=\frac{۱}{۲}+۷=\frac{۱۵}{۲}$.

۲۹۲- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=۲-\sqrt{۳}+۳+\sqrt{۳}=۵$$

$$P=\alpha\beta=(۲-\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})=۳-\sqrt{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۵x+۳-\sqrt{۳}=۰$$

۲۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۱$. بنابراین

$$\frac{۱}{x_۱+۱}+\frac{۱}{x_۲+۱}=\frac{x_۲+۱+x_۱+۱}{(x_۱+۱)(x_۲+۱)}=\frac{x_۱+x_۲+۲}{۱+(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲}=\frac{۱+۲}{۱+۱-۱}=۳$$

$$\frac{۱}{x_۱+۱}\times\frac{۱}{x_۲+۱}=\frac{۱}{(x_۱+۱)(x_۲+۱)}=\frac{۱}{۱+(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲}=\frac{۱}{۱+۱-۱}=۱$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^۲-۳x+۱=۰$ است.

۲۹۴- گزینهٔ ۲ برای اینکه جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ مختلف‌العلامت باشند، کافی است $\frac{c}{a}<۰$. توجه کنید که در این حالت $\Delta>۰$. بنابراین

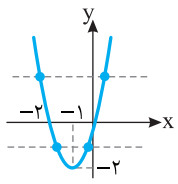
$$\frac{m+۲}{m}<۰\Rightarrow -۲<m<۰$$

۲۹۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** برای اینکه معادلهٔ مورد نظر دو جواب منفی داشته باشد، باید $\Delta>۰$، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta>۰\Rightarrow ۱۶-۴(-۲)(a)>۰\Rightarrow a>-۲,\ \frac{۴}{-۲}=-۲<۰,\ \frac{a}{-۲}>۰\Rightarrow a<۰$$

بنابراین $-۲<a<۰$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $۲x^۲+۴x=a$ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲+۴x$ و خط $y=a$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-۲<a<۰$، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a>۰$، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.



توجه کنید که $x=۰$ و $x=-۲$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-۱,-۲)$ است.

۲۹۶- گزینهٔ ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta=(a+۱)^۲-۶۴>۰\Rightarrow (a+۱)^۲>۶۴\Rightarrow \begin{cases} a+۱>۸\Rightarrow a>۷ \\ \text{یا} \\ a+۱<-۸\Rightarrow a<-۹ \end{cases} \quad (۱)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{a+۱}{۲}$ است. پس

$$-\frac{a+۱}{۲}>۰\Rightarrow a+۱<۰\Rightarrow a<-۱ \quad (۲)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a<-۹$.

۲۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{۵(k-۲)}{k+۶}<۰\Rightarrow k\in(-۶,۲)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{۱۷(k+۱)}{k+۶}<۰\Rightarrow \frac{k+۱}{k+۶}>۰\Rightarrow k\in(-\infty,-۶)\cup(-۱,+\infty)$$

بنابراین $k\in(-۱,۲)$.

۲۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=-۱$ یک جواب معادله است.

$$(-۱)^۳-(-۱)^۲-۳(-۱)-۱=۰$$

بنابراین معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^۳+x^۲-۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow x^۲(x+۱)-(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

$$x^۲(x+۱)-(x+۱)(۲x+۱)=۰\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۲x-۱)=۰$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-۱+(۱-\sqrt{۲})=-\sqrt{۲}$.

۲۹۹- گزینهٔ ۴ چون $x=۲$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $۸+۴a+۲+۶=۰$ پس $a=-۴$. چون $x-۲$ عاملی از $x^۳-۴x^۲+x+۶$ است، بنابراین $x^۳-۴x^۲+x+۶=(x-۲)Q(x)$.

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^۳-۴x^۲+x+۶$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x)=x^۲-۲x-۳$. بنابراین

$$x^۳-۴x^۲+x+۶=(x-۲)(x^۲-۲x-۳)=(x-۲)(x+۱)(x-۳)$$

پس به غیر از $x=۲$ جواب‌های دیگر معادله -۱ و ۳ هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۰ است.

۳۰۰- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq ۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۳t-۱=۰$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$ است. عدد $\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین

$$x^۲=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}=-\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۳۰۱- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ و $t\geq ۰$. همچنین معادله به شکل $t^۲-۲t+m^۲-۱=۰$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در معادلهٔ $t^۲-۲t+m^۲-۱=۰$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta>۰\Rightarrow ۴-۴(m^۲-۱)>۰\Rightarrow m^۲<۲\Rightarrow -\sqrt{۲}<m<\sqrt{۲}$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow ۲>۰,\quad \frac{c}{a}>۰\Rightarrow m^۲-۱>۰\Rightarrow m<-۱ \text{ یا } m>۱$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $(-\sqrt{۲},-۱)\cup(۱,\sqrt{۲})$ باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$m\in(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})-[-۱,۱]$$

۳۰۲- گزینهٔ ۳ معادلـه را بـه شـکل $(x^۲-x)^۲+۲(x^۲-x)-۳=۰$ می‌نویسیم. با قرار دادن $x^۲-x=t$ به‌دست می‌آید

$$t^۲+۲t-۳=۰\Rightarrow t=-۳, t=۱$$

$$x^۲-x=-۳\Rightarrow x^۲-x+۳=۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow$$ معادله جواب ندارد

$$x^۲-x=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow \Delta>۰\Rightarrow$$ مجموع جواب‌ها $=۱$

۳۰۳- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x(\frac{۲}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱})=۰\Rightarrow x(\frac{۲(x+۱)-(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)})=۰$$

$$x(\frac{x+۳}{(x-۱)(x+۱)})=۰\Rightarrow \frac{x(x+۳)}{(x-۱)(x+۱)}=۰$$

جواب‌های این معادله ۰ و -۳ هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها -۳ است.

۳۰۴- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $۳(x-۳)(x+۳)$ است ضرب می‌کنیم:

$$۳(x-۳)(x+۳)\frac{x+۳}{x-۳}+۳(x-۳)(x+۳)\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۱۰}{۳}\times ۳(x-۳)(x+۳)$$

$$۳(x+۳)^۲+۳(x-۳)^۲=۱۰(x-۳)(x+۳)$$

$$۳(x^۲+۶x+۹)+۳(x^۲-۶x+۹)=۱۰(x^۲-۹)$$

$$۶x^۲+۵۴=۱۰x^۲-۹۰\Rightarrow ۴x^۲=۱۴۴\Rightarrow x=\pm ۶$$

چون -۶ و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۳۶ است.

۳۰۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۲x-۲a+x+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴\Rightarrow \frac{۳x-۲a+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴$$

$$۳x-۲a+۳=۴x^۲+(۱۲-۴a)x-۱۲a$$

$$۴x^۲+(۹-۴a)x-۱۰a-۳=۰$$

بنابراین

$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{۴a-۹}{۴}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴a-۹=-۱\Rightarrow a=۲$$

اگر $a=۲$، آن‌گاه معادلـه به‌صورت $۴x^۲+x-۲۳=۰$ درمی‌آیـد که چون $\Delta>۰$ پس معادله دو جواب دارد. ($x=۲$ و $x=-۳$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادلهٔ اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادلهٔ بالا نیستند. پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.)

۳۰۶- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x+a+۳x=۲x^۲+۲ax\Rightarrow ۲x^۲+(۲a-۴)x-a=۰$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta\geq ۰$. پس

$$(۲a-۴)^۲+۸a\geq ۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۶a+۱۶+۸a\geq ۰\Rightarrow a^۲-۲a+۴\geq ۰$$

عبـارت $a^۲-۲a+۴$ همواره مثبت اسـت، پس معادله بـه‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ سمت راست معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}=۲(x^۲+x+۱)-۱$$

اگر فرض کنیم $x^۲+x+۱=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{۱۵}{t}=۲t-۱\Rightarrow ۱۵=۲t^۲-t\Rightarrow ۲t^۲-t-۱۵=۰\Rightarrow t=-\frac{۵}{۲}, t=۳$$

به این ترتیب

$$x^۲+x+۱=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x^۲+x+\frac{۷}{۲}=۰$$ جواب ندارد $(\Delta<۰)$

$$x^۲+x+۱=۳\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=-۲, x=۱$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(x+\frac{۱}{x})^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲=(x-\frac{۱}{x})^۲+۴$$

پـس معادلهٔ مـورد نظر بـه معادلهٔ $(x-\frac{۱}{x})^۲=\frac{۳}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ تبدیل می‌شـود.

بنابراین یا $x-\frac{۱}{x}=۰$، یعنی $x^۲-۱=۰$، که مجموع جواب‌هایش صفر اسـت، یـا $x-\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱=۰$ کـه مجموع جواب‌هایش $\frac{۳}{۲}$ اسـت.

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر با $\frac{۳}{۲}$ است.

۳۰۹- گزینهٔ ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}=۴\Rightarrow x+۱=۴x^۲\Rightarrow ۴x^۲-x-۱=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر ماشـین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند، ماشـین سـریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{۳}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر به تنهایی در یک سـاعت $\frac{۱}{t}$ کار و ماشـین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{۳}{t}$ کار را انجـام می‌دهـد. از طرف دیگر دو ماشـین با هم در یک سـاعت $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow \frac{۴}{t}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow t=۲۴$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۱۱- گزینهٔ ۳ بـا توجـه به جـدول تعیین علامـت باید $a-b<۰$، پس $a<b$. همچنین $x=b$ ریشهٔ عبارت است، بنابراین

$$(a-b)b-۲a+۲b=۰\Rightarrow (a-b)b-۲(a-b)=۰$$

$$(a-b)(b-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} a-b=۰\Rightarrow a=b & \text{(غ.ق.ق)} \\ b-۲=۰\Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a<b=۲\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $a+b=۳$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ بـا توجـه به جـدول تعیین علامت، مشـخص اسـت که عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجهٔ اول باشـد. پس $a-۲=۰$ و در نتیجه $a=۲$. بنابرایـن عبارت به صورت $y=-(۲+b)x+۴$ اسـت. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$-(۲+b)\times ۴+۴=۰\Rightarrow b=-۱$$

بنابراین $a-b=۳$.

۳۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و $(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	۰	$+$	ت	$+$	

۳۱۴- گزینهٔ ۲ دو نامعادلهٔ $3x-2<5x+6$ و $4x-1<3x-2$ را حل می‌کنیم:

$$4x-1<3x-2\Rightarrow x<-1\ ,\quad 3x-2<5x+6\Rightarrow -2x<8\Rightarrow x>-4$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق یعنی $-4<x<-1$ جواب مسئله است. پس $a=-4$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-5$.

۳۱۵- گزینهٔ ۱ باید شرایط $\Delta<0$ و $a>0$ برقرار باشند. پس

$$m-1>0\Rightarrow m>1 \quad (1)$$

$$\Delta=8-4m(m-1)<0\Rightarrow m^2-m-2>0\Rightarrow (m+1)(m-2)>0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m<-1 \text{ یا } m>2 \quad (2)$$

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>2$.

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
m^2-m-2		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۳۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	ت	$+$	۰	$+$	ت	$-$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-2]\cup(0,2)$ است.

۳۱۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{2}{x}-1\geq 0\Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x}\geq 0$$

به کمک تعیین علامت مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$\frac{x^2-x-2}{x}$		$-$	۰	$+$	ت	$-$	۰	$+$	

این مجموعه به‌صورت $[-1,0)-(2,+\infty]$ است. پس $a=-1$ و $b=2$. در نتیجه $a+b=1$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x-1=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-5x+5=0$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ و $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ هستند. ولی $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و در معادلهٔ $\sqrt{x-1}=x-2$ اگر $1<x<2$، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله است.

۳۱۹- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+1}+1=\sqrt{2x+3}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1+1+2\sqrt{x+1}=2x+3\Rightarrow 2\sqrt{x+1}=x+1$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(x+1)=(x+1)^2\Rightarrow 4x+4=x^2+2x+1$$

$$x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1\ ,x=3$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^2+5x+28-24-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^2+5x+28}=t$، این معادله می‌شود

$$t^2-24-5t=0\Rightarrow (t-8)(t+3)=0\Rightarrow t=8\ ,t=-3$$

چون $t\geq 0$، پس $t=8$، یعنی

$$\sqrt{x^2+5x+28}=8\Rightarrow x^2+5x+28=64\Rightarrow x^2+5x-36=0$$

$$(x-4)(x+9)=0\Rightarrow x=4\ ,x=-9$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -36 است.

۳۲۱- گزینهٔ ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x}{2}=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}\frac{x^2}{4}=x\Rightarrow x^2=4x$$

$$x=0,\ x=4$$

چون هر دو عدد در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۲۲- گزینهٔ ۱

$$\left|3+\left|2-|1+a|\right|\right|=\left|3+|2-(-(1+a))|\right| \quad (\text{چون } 1+a<0)$$

$$=\left|3+|3+a|\right|=|3-(3+a)| \quad (\text{چون } 3+a<0)$$

$$=|-a|=-a \quad (\text{چون } a<0)$$

۳۲۳- گزینهٔ ۴ چون a منفی است، پس $|a|=-a$، در نتیجه $||a|-b|=|-a-b|$. اکنون توجه کنید که

$$b<|a|=-a\Rightarrow a+b<0$$

بنابراین $||a|-b|=|-a-b|=-a-b$. از طرف دیگر،

$$\left|b-|2a|\right|=|b-2|a||=|b+2a|$$

چون $\underbrace{b}_{<0}+\underbrace{2a}_{<0}<0$، $b+2a=\underbrace{b+a}_{<0}+a$، در نتیجه $|b+2a|=-b-2a$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-a-b-(-b-2a)=a$.

۳۲۴- گزینهٔ ۳ چون $۱<x<۲$، پس

$$\frac{|x-۲|}{x-۲}=\frac{۲-x}{x-۲}=-۱,\quad \frac{x-۱}{|x-۱|}=\frac{x-۱}{x-۱}=۱,\quad \frac{|x|}{x}=۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۱-۱+۱=-۱$.

۳۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$x^۲<x\Rightarrow x^۲-x=x(x-۱)<۰$$

در نتیجه $۰<x<۱$. بنابراین $|x+۱|=x+۱$، $|۱-x|=۱-x$ و $|x|=x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+۱-(۱-x)+x=۳x$.

۳۲۶- گزینهٔ ۴ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-۲|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۳\\x-۲=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

۳۲۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $|x|=|-x|$ و $|۳x|=۳|x|$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x|+|x|+۳|x|=۱۵\Rightarrow ۵|x|=۱۵\Rightarrow|x|=۳\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۳$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر صفر است.

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادلهٔ مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد صفر است.

۳۲۸- گزینهٔ ۴ از تساوی $|۳x-x^۲|=|x-۱|$ تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند

$$۳x-x^۲=x-۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰\qquad(۱)$$

$$۳x-x^۲=-(x-۱)\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\qquad(۲)$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

۳۲۹- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-۳\le۲x-a\le۳\Rightarrow a-۳\le۲x\le a+۳\Rightarrow\frac{a-۳}{۲}\le x\le\frac{a+۳}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $[\frac{a-۳}{۲},\frac{a+۳}{۲}]$ است. پس

$$\frac{a-۳}{۲}=-a\Rightarrow a-۳=-۲a\Rightarrow a=۱\ ,\quad \frac{a+۳}{۲}=b\Rightarrow b=۲$$

۳۳۰- گزینهٔ ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\big||x|-۲\big|<۶\Rightarrow-۶<|x|-۲<۶\Rightarrow-۴<|x|<۸$$

نابرابری $-۴<|x|$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $|x|<۸$ را حل کنیم:

$$|x|<۸\Rightarrow-۸<x<۸$$

بنابراین اعداد صحیح -۷ تا ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

۳۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت $|x-۲|>۲|x|$ می‌نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$۴x^۲>(x-۲)^۲\Rightarrow(۲x)^۲-(x-۲)^۲>۰$$

در نتیجه $(۲x-(x-۲))(۲x+x-۲)>۰$ یا به طور معادل

$$(x+۲)(۳x-۲)>۰$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های مورد نظر برابر است با $(-\infty,-۲)\cup(\frac{۲}{۳},+\infty)$.

۳۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

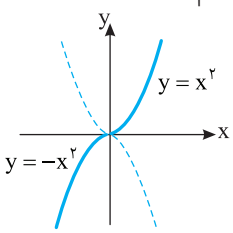
$$f(\sqrt{۳}-۱)+f(\sqrt{۵}-۲)=۵|۳(\sqrt{۳}-۱)-۲|-۳|۵(\sqrt{۳}-۱)-۲|$$

$$+۵|۳(\sqrt{۵}-۲)-۲|-۳|۵(\sqrt{۵}-۲)-۲|=۵|\underbrace{۳\sqrt{۳}-۵}_{+}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۳}-۷}_{+}|$$

$$+۵|\underbrace{۳\sqrt{۵}-۸}_{-}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۵}-۱۲}_{-}|=-۴+۴=۰$$

۳۳۳- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge۰\\ -x^۲ & x\le۰\end{cases}$ است.

پس باید برای $x\ge۰$ نمودار تابع $y=x^۲$ را رسم کنیم و برای $x\le۰$ نمودار تابع $y=-x^۲$ را رسم کنیم.



۳۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$. بنابراین $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x>۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$. در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۱) است.

۳۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)+x & x\le-۱\\ x+۱+x & -۱<x\le۰\\ x+۱-x & x>۰\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x\le-۱\\ ۲x+۱ & -۱<x\le۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۳) است.

۳۳۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[\tfrac{۱}{۲}]=۰\ ,\ [\tfrac{۲}{۲}]=[\tfrac{۳}{۲}]=۱\ ,\ [\tfrac{۴}{۲}]=[\tfrac{۵}{۲}]=۲\ ,\ \cdots\ ,\ [\tfrac{۱۸}{۲}]=[\tfrac{۱۹}{۲}]=۹\ ,\ [\tfrac{۲۰}{۲}]=۱۰$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\tfrac{۱}{۲}]+[\tfrac{۲}{۲}]+[\tfrac{۳}{۲}]+\cdots+[\tfrac{۲۰}{۲}]=۲(۱+۲+\cdots+۹)+۱۰=۹۰+۱۰=۱۰۰$$

۳۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow-۱<x<۰$$

اگر عددی بین -۱ و صفر باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-۱<x<۰\Rightarrow\begin{cases}۰<x^{۲k}<۱\Rightarrow[x^{۲k}]=۰\\ -۱<x^{۲k+۱}<۰\Rightarrow[x^{۲k+۱}]=-۱\end{cases}$$

$$[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]=۵\times۰+۵\times(-۱)=-۵$$

۳۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نابرابری $n^۳<n^۳+۳n^۲<(n+۱)^۳$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}<n+۱$، بنابراین $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=۲$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=۲$، آن‌گاه $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=[\sqrt[۳]{۲۰}]=۲$. از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=۲$ برابر ۲ می‌شود.

۳۳۹- گزینهٔ ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به‌صورت $[x]+[x]=[x]-[x]-۲$ می‌نویسیم. بنابراین

$$[x]=-۱\Rightarrow -۱\le x<۰$$

۳۴۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{۱}{۲})=|[-\frac{۵}{۲}]+[-\frac{۷}{۲}]|=|-۳+(-۴)|=۷$$

۳۴۱- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x+۱$، پس

$$f(x+۱)=۴(x+۱)-[x+۱]-[۳(x+۱)]=۴x+۴-[x]-۱-[۳x]-۳$$
$$=۴x-[x]-[۳x]=f(x)$$

۳۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x]-۲\ge ۰\Rightarrow [x]\ge ۲\Rightarrow x\ge ۲$$

بنابراین $D_f=[۲,+\infty)$.

۳۴۳- گزینهٔ ۲ مقادیری از x که مخرج $f(x)$ را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{۳}]-۲=۰\Rightarrow [\frac{x}{۳}]=۲\Rightarrow ۲\le \frac{x}{۳}<۳\Rightarrow ۶\le x<۹$$

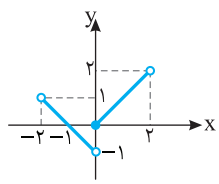
بنابراین $D_f=\mathbb{R}-[۶,۹)$. پس $a=۶$، $b=۹$ و در نتیجه $a+b=۱۵$.

۳۴۴- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است

$$-۲<x<۰\Rightarrow -۱<\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=-۱\Rightarrow f(x)=-x-۱$$

$$۰\le x<۲\Rightarrow ۰\le \frac{x}{۲}<۱\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۰\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است



۳۴۵- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴^a+b=-\frac{۳}{۴}$$

$$f(۱)=۰\Rightarrow ۴^{۱+a}+b=۰\Rightarrow ۴\times ۴^a+b=۰$$

اگر رابطهٔ اول را از رابطهٔ دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$۳\times ۴^a=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=-۱$$

$$۴^{-۱}+b=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow \frac{۱}{۴}+b=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=-۱$$

در نتیجه $a+b=-۲$.

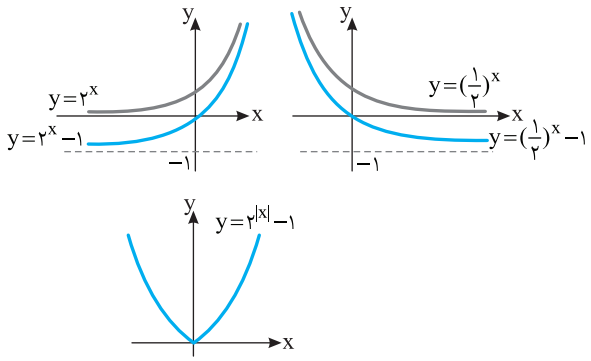
۳۴۶- گزینهٔ ۴ ابتدا $f(-x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$f(-x)=\frac{۲^{-x}-۱}{۲^{-x}+۱}=\frac{\frac{۱}{۲^x}-۱}{\frac{۱}{۲^x}+۱}=\frac{۱-۲^x}{۱+۲^x}$$

بنابراین $f(x)+f(-x)=\frac{۲^x-۱}{۱+۲^x}+\frac{۱-۲^x}{۱+۲^x}=\frac{۲^x-۱+۱-۲^x}{۱+۲^x}=۰$.

۳۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که یعنی $f(x)=\begin{cases}۲^x-۱ & x\ge ۰\\ ۲^{-x}-۱ & x<۰\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}۲^x-۱ & x\ge ۰\\ (\frac{۱}{۲})^x-۱ & x<۰\end{cases}$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۳۴۸- گزینهٔ ۱ اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>۱$. بنابراین $۳k+۱>۱$، پس $k>۰$.

۳۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(\frac{۲}{۳})^{-۴}=(\frac{۳}{۲})^۴=\frac{۸۱}{۱۶}$، بنابراین

$$(\frac{۲}{۳})^{x+۲}=(\frac{۸۱}{۱۶})^{x-۱}\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{x+۲}=((\frac{۳}{۲})^۴)^{x-۱}=(\frac{۲}{۳})^{-۴(x-۱)}$$

در نتیجه $x+۲=-۴(x-۱)$، پس $x=\frac{۲}{۵}$.

۳۵۰- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از ۵^x معادله را حل می‌کنیم

$$۵^x(۱+۳\times ۵^{-۲})=۱۴۰\Rightarrow ۵^x(۱+\frac{۳}{۲۵})=۱۴۰\Rightarrow ۵^x\times \frac{۲۸}{۲۵}=۱۴۰$$

$$۵^x=\frac{۲۵\times ۱۴۰}{۲۸}=۱۲۵=۵^۳\Rightarrow x=۳$$

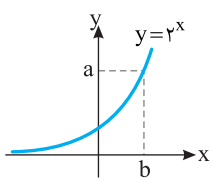
پس معادله یک جواب دارد.

۳۵۱- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع $y=۲^x$، معادلهٔ $۲^x=a$ در صورتی که $a>۰$، دقیقاً یک جواب دارد $(x=b)$ و اگر $a\le ۰$، جواب ندارد. بنابراین

یک جواب دارد. $\Rightarrow ۲^x-۵=۰$ ، یک جواب دارد. $\Rightarrow ۲^x-۶=۰$

جواب ندارد. $\Rightarrow ۲^x+۶=۰$ ، جواب ندارد. $\Rightarrow ۲^x+۵=۰$

چون تابع $y=۲^x$ یک‌به‌یک است، پس معادلهٔ اصلی دو جواب دارد.



۳۵۲- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $۳^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۳\times۹\times۹^x-۶\times۳^x-۱=۰\Rightarrow ۲۷t^۲-۶t-۱=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۹},t=\frac{۱}{۳}$$

چون $t>۰$، پس $t=\frac{۱}{۳}$، یعنی $۳^x=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$، پس $x=-۱$. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۵۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۰<a<۱$ و $a^{f(x)}<a^{g(x)}$، آن‌گاه $f(x)>g(x)$ و بالعکس. چون $۰<\frac{۱}{۲}<۱$، پس

$$۳-x>x-۳\Rightarrow x<۳$$

۳۵۴- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $۵^x=t$، نامعادلهٔ داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$۲۵^x+۲۴\times۵^{x-۱}<۱\Rightarrow t^۲+۲۴\times\frac{t}{۵}<۱\Rightarrow ۵t^۲+۲۴t<۵$$

$$۵t^۲+۲۴t-۵<۰\Rightarrow(t+۵)(t-\frac{۱}{۵})<۰$$

چون $t+۵>۰$، پس $t-\frac{۱}{۵}<۰$، یعنی $۵^x<\frac{۱}{۵}=۵^{-۱}$، در نتیجه $x<-۱$.

۳۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=۷^{\frac{۱}{۵}}\times۷^{\frac{۱}{۵\times۴}}=۷^{\frac{۱}{۴}}$. اکنون اگر از ویژگی $\log_a x^n=n\log_a x$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\log_۷\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=\log_۷ ۷^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}\log_۷ ۷=\frac{۱}{۴}$$

۳۵۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$ به‌دست می‌آید

$$\log_۴(\sqrt۳-۱)+\log_۴(\sqrt۳+۱)=\log_۴((\sqrt۳-۱)(\sqrt۳+۱))=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$$

۳۵۷- گزینهٔ ۱ چون $\log_x a=\frac{۱}{\log_a x}$، پس

$$\frac{۱}{\log_۴ ۶}+\frac{۱}{\log_۹ ۶}=\log_۶ ۴+\log_۶ ۹=\log_۶(۴\times۹)$$

$$=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲\log_۶ ۶=۲$$

۳۵۸- گزینهٔ ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ می‌توان نوشت

$$۳^{\log_۹ ۶}=۶^{\log_۹ ۳}=۶^{\log_{۳^۲} ۳}=۶^{\frac{۱}{۲}\log_۳ ۳}=۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt۶$$

۳۵۹- گزینهٔ ۲ از تساوی $\log ۴=a$ نتیجه می‌شود

$$\log ۲^۲=a\Rightarrow ۲\log ۲=a\Rightarrow\log ۲=\frac{a}{۲}$$

بنابراین

$$\log ۱۲۵=\log ۵^۳=۳\log ۵=۳\log\frac{۱۰}{۲}=۳(\log ۱۰-\log ۲)$$

$$=۳(۱-\frac{a}{۲})=۳-\frac{۳a}{۲}$$

۳۶۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log ۳۰=a\Rightarrow\log(۳\times۱۰)=a\Rightarrow\log ۳+\log ۱۰=a\Rightarrow\log ۳=a-۱$$

$$\log ۵۰=b\Rightarrow\log(۵\times۱۰)=b\Rightarrow\log ۵+\log ۱۰=b\Rightarrow\log ۵=b-۱$$

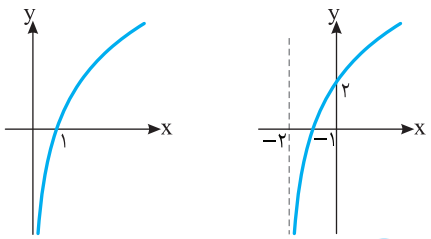
بنابراین $\log_۵ ۳=\frac{\log ۳}{\log ۵}=\frac{a-۱}{b-۱}$.

۳۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۳^{x+۲}=۳^۲\times۳^x=۹\times۳^x=۴$. بنابراین

$$۳^x=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x=\log_۳\frac{۴}{۹}$$

۳۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید که نمودار f از روی نمودار $y=\log_a x$ به‌دست آمده باشد. معلوم است که نمودار $y=\log_a x$، دو واحد به سمت چپ منتقل شده است تا نمودار f به‌دست آید. بنابراین ضابطهٔ تابع f می‌تواند $f(x)=\log_a(x+۲)$ باشد. از طرف دیگر $f(۰)=۲$، پس $\log_a ۲=۲$، یعنی $a^۲=۲$. بنابراین $a=\sqrt۲$ (توجه کنید که $a>۰$). بنابراین

$$f(x)=\log_{\sqrt۲}(x+۲)$$



۳۶۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$f(x)=۴+\log(۲x-۴)=۶\Rightarrow\log(۲x-۴)=۲\Rightarrow۲x-۴=۱۰^۲\Rightarrow x=۵۲$$

بنابراین $f(۵۲)=۶$، پس $f^{-۱}(۶)=۵۲$.

۳۶۴- گزینهٔ ۲

۳۶۵- گزینهٔ ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس

$$۹-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۹\Rightarrow-۳<x<۳\Rightarrow D_f=(-۳,۳)$$

بنابراین اعداد صحیح ±۲، ±۱ و صفر در دامنهٔ تابع هستند.

۳۶۶- گزینهٔ ۴ اگر $y=۳^{۵x-۱}$، آن‌گاه

$$\log_۳ y=۵x-۱\Rightarrow x=\frac{\log_۳ y+۱}{۵}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{\log_۳ x+۱}{۵}$.

۳۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\log_۳(x-۲)\Rightarrow ۳^y=x-۲\Rightarrow x=۳^y+۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۳^x+۲$.

۳۶۸- گزینهٔ ۱ کافی است معادلهٔ $x^۲-۷x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۸x=۰\Rightarrow x=۰,x=۸$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۶۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۲\sqrt x=\log_۲ x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_۲ x$$

$$\log_۴(x-۶)=\log_{۲^۲}(x-۶)=\frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶)$$

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶)=۲\Rightarrow\log_۲ x+\log_۲(x-۶)=۴$$

$$\log_۲(x(x-۶))=۴\Rightarrow x(x-۶)=۲^۴\Rightarrow x^۲-۶x-۱۶=۰$$

$$(x-۸)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۸,\quad x=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

دقت کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، بنابراین غیرقابل قبول است.

۳۷۰- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به‌صورت $x=(2x-1)^2$ می‌نویسیم. بنابراین

$$4x^2-4x+1=x\Rightarrow 4x^2-5x+1=0$$

$$(4x-1)(x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}, x=1$$

پایهٔ لگاریتم عبارت $2x-1$ است که به ازای $x=1$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{1}{4}$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود. ولی می‌دانیم که پایهٔ لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس هیچ‌کدام از مقدارهای به‌دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۷۱- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3(10-x)\le\log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10-x\le 9\Rightarrow x\ge 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(10-x)$ وقتی معنادار است که $10-x>0$ و در نتیجه $x<10$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[1,10)$ است.

۳۷۲- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+2)>\log(2x+1)$ نتیجه می‌شود

$$x+2>2x+1\Rightarrow x<1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x>-2$ و عبارت $\log(2x+1)$ برای $x>-\frac{1}{2}$ معنادار است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2},1)$ است.

۳۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-2>0$، یعنی $x>2$. از طرف دیگر، باید

$$\log_{0/5}(x-2)\ge 0=\log_{0/5}1$$

در نتیجه (چون $0/5<1$)

$$x-2\le 1\Rightarrow x\le 3$$

بنابراین $D_f=[2,3)$. به این ترتیب $a=2$ و $b=3$، پس $ab=6$.

۳۷۴- گزینهٔ ۳

۳۷۵- گزینهٔ ۴ چون C روی نیمساز زاویهٔ AOB قرار دارد، پس $x=CA=CB=6$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAC و OBC همنهشت‌اند (وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $y=OA=OB=12$، در نتیجه

$$x+y=18$$

۳۷۶- گزینهٔ ۲ چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $y=DH=DB=3$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و AHD همنهشت‌اند (وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $x=AH=AB=4$، در نتیجه

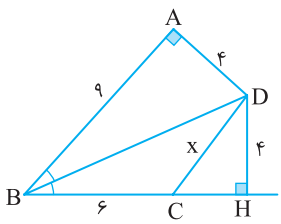
$$x+y=7$$

۳۷۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید H پای عمود وارد از نقطهٔ D بر خط BC باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ ABH است، پس $DH=DA=4$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BAD و BHD همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه). بنابراین

$$BH=BA=9\Rightarrow BC+CH=9\Rightarrow 6+CH=9\Rightarrow CH=3$$

اکنون، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHD نتیجه می‌شود

$$CD^2=CH^2+DH^2\Rightarrow x^2=3^2+4^2=25\Rightarrow x=5$$



۳۷۸- گزینهٔ ۴ چون $EF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{2}{1}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\times 2=4$$

۳۷۹- گزینهٔ ۴ چون $EF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x+2}\Rightarrow x^2+2x=2x^2-2x$$

$$x^2=4x\Rightarrow x=4$$

۳۸۰- گزینهٔ ۳ چون $ED\|BF$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABF،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DF}\Rightarrow\frac{12}{4}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=2$$

همین‌طور، چون $EF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{12}{4}=\frac{8}{y}\Rightarrow y=\frac{8}{3}$$

بنابراین $xy=\frac{16}{3}$.

۳۸۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند. در نتیجه $DF=BE=15$. چون BDFE متوازی‌الاضلاع است، پس $DF\|BE$، در نتیجه $DF\|BC$. بنابراین، از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+8}=\frac{15}{15+12}\Rightarrow 27x=15(x+8)$$

$$12x=15\times 8\Rightarrow x=10$$

راه‌حل دوم چون $EF\|BA$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CE}{EB}=\frac{CF}{FA}\Rightarrow\frac{12}{15}=\frac{CF}{FA}\Rightarrow\frac{FA}{CF}=\frac{5}{4}\quad (1)$$

از طرف دیگر چون $DF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(1)}\frac{x}{8}=\frac{5}{4}\Rightarrow x=10$$

۳۸۲- گزینهٔ ۴ بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{8}{4}=\frac{x}{3}\Rightarrow x=6$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{8}{12}=\frac{4}{y}\Rightarrow y=6$$

بنابراین $xy=36$.

۳۸۳- گزینهٔ ۳ بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{4}=\frac{9}{x}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6$$

۳۸۴- گزینهٔ ۴ در مثلث FBC، چون نقطهٔ N وسط ضلع FC است و MN||BC، پس بنابر قضیهٔ تالس نقطهٔ M هم وسط ضلع FB است. در نتیجه در مثلث FBC، پاره‌خط MN میان‌خط است و

$$MN=\frac{BC}{2}\Rightarrow 6=\frac{BC}{2}\Rightarrow BC=12$$

اکنون توجه کنید که چون EF||BC، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{EF}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow EF=4$$

۳۸۵- گزینهٔ ۲ مثلث‌های ABF و ACE دو زاویهٔ برابر دارند ($A\hat{E}C=A\hat{F}B$ و زاویهٔ A در آن‌ها مشترک است). بنابراین این مثلث‌ها متشابه‌اند (زز). در نتیجه

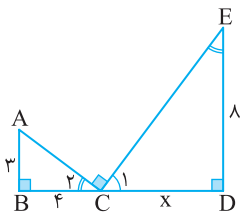
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{3+1}{2+x}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2(2+x)=3\times 4\Rightarrow x=4$$

۳۸۶- گزینهٔ ۳ مثلث‌های AEF و ACB دو زاویهٔ برابر دارند ($\hat{B}=A\hat{F}E$ و در زاویهٔ رأس A مشترک‌اند)، پس این دو مثلث متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}\Rightarrow\frac{4}{6+2}=\frac{6}{4+x}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{6}{4+x}\Rightarrow 4+x=12\Rightarrow x=8$$

۳۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که زاویه‌های C_1 و E متمم یکدیگرند، و زاویه‌های C_1 و C_2 نیز متمم یکدیگرند. بنابراین زاویه‌های E و C_2 برابرند. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و CDE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{4}{8}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=6$$



۳۸۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2},\quad A\hat{B}D=D\hat{B}C$$

بنابراین مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ض‌زض). در نتیجه

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{x}{8}\Rightarrow x=4$$

۳۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}$. بنابراین دو مثلث AEF و ACB دو ضلع متناسب دارند و زاویهٔ بین این دو ضلع متناسب در آن‌ها (یعنی $\hat{A}$) برابر است، پس این دو مثلث به حالت (ض ز ض) متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{CB}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{8}{x}\Rightarrow x=16$$

۳۹۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید $EB=x$. چون EF||BC، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2\Rightarrow\frac{18}{18+32}=\left(\frac{3}{3+x}\right)^2$$

$$\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{3+x}\right)^2\Rightarrow(3+x)^2=25\Rightarrow x=2$$

۳۹۱- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $AH^2=HB\times HC=5\times 4=20$. پس $AH=2\sqrt{5}$.

۳۹۲- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^2=HB\times HC\Rightarrow 6^2=3\times x\Rightarrow x=12$$

۳۹۳- گزینهٔ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD،

$$BH^2=HA\times HD=4/5\times 2=9\Rightarrow BH=3$$

همین‌طور، بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC،

$$AH^2=BH\times HC\Rightarrow(4/5)^2=3\times HC\Rightarrow HC=6/75$$

بنابراین $BC=3+6/75=9/75$.

۳۹۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید $HC=x$. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2=CH\times CB\Rightarrow 24=x(x+5)\Rightarrow x^2+5x-24=0$$

$$(x+8)(x-3)=0\Rightarrow x=3$$

۳۹۵- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2=AH\times AC,\quad BC^2=HC\times AC$$

اگر تساوی اول را بر تساوی دوم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AH\times AC}{HC\times AC}=\frac{AH}{HC}=3\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}$$

۳۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، $AC^2=BA^2+BC^2=12^2+5^2=169$. پس $AC=13$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB\times BC=BH\times AC\Rightarrow 12\times 5=x\times 13\Rightarrow x=\frac{60}{13}$$

فصل دوم

پاسخ آزمون‌ها

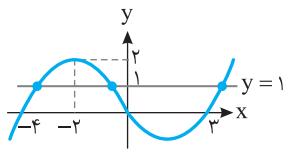
فصل اول

۱- گزینهٔ ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی‌های $2a-b=1$، $2b+c=2$ و $2a=2$ برقرار است که نتیجه می‌شود $a=1$، $b=1$ و $c=0$، پس $a+b+c=2$.

۲- گزینهٔ ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد a^2 و $a+2$ باید یکسان باشند. پس $a^2=a+2$ که نتیجه می‌شود $a=-1$ یا $a=2$. اگر $a=2$، باید داشته باشیم $b=a^2=4$، پس $a+b=6$. اگر $a=-1$، باید داشته باشیم $b=2b+1$، پس $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$. پس حاصل $a+b$ برابر ۶ یا -2 است.

۳- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{1,3,5\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع مجموعهٔ $\{3,5,a^2\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^2=3$ یا باید $a^2=5$. بنابراین $a=\pm\sqrt{5}$ یا $a=\pm\sqrt{3}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=1$ برابر با تعداد نقطه‌های برخورد خط $y=1$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.



۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x+2)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2\Rightarrow f(t)=t^2-2$$

اکنون اگر به‌جای t قرار دهیم $\sqrt{3}$، نتیجه می‌شود $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2=1$.

۶- گزینهٔ ۴ در ضابطهٔ تابع به جای x، مقدار $x-1$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)=x^2-4x+3$$

در ضابطهٔ تابع به جای x مقدار $x+1$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1$$

بنابراین $f(x-1)+f(x+1)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x)+2=2f(x)+2$.

۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(\frac{x^2+1}{x})=3x+\frac{3}{x}-4\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=3(x+\frac{1}{x})-4$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{1}{x}=4$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=4$ معادل است با $x^2-4x+1=0$، که دلتای آن مثبت است، پس جواب حقیقی دارد.) آن‌گاه $f(4)=3\times4-4=8$.

۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{x-2}=t$ و در نتیجه

$$tx-2t=x+1\Rightarrow tx-x=2t+1\Rightarrow(t-1)x=2t+1\Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-1},\ t\neq1$$

در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2t+1}{t-1}$:

$$f(t)=2(\frac{2t+1}{t-1})-1=\frac{4t+2-t+1}{t-1}=\frac{3t+3}{t-1}$$

در نتیجه اگر $x\neq1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{3x+3}{x-1}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید $f(0)=-3$

اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تنها تابعی که در آن $f(0)=-3$ تابع گزینهٔ (۱) است.

۹- گزینهٔ ۳ برای $x=2$ از ضابطهٔ اول به‌دست می‌آید $f(2)=4m-2$ و از ضابطهٔ دوم $f(2)=8-m$.

برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(2)$ وجود داشته باشد. یعنی $4m-2=8-m$، پس $m=2$. بنابراین باید $f(2)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(2)=8-2=6$.

۱۰- گزینهٔ ۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه عدد $\sqrt[4]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[4]{81}$، اعدادی گویا هستند و بقیهٔ اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[4]{2})+f(\sqrt[4]{3})+\cdots+f(\sqrt[4]{100})=2\times1+97\times0=2$$

۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(2,0)$ و $(2,m^3-m)$ نتیجه می‌شود:

$$m^3-m=0\Rightarrow m=0,1,-1$$

اگر $m=0$، $f=\{(2,0),(0,1),(0,2)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=1$، $f=\{(2,0),(1,1),(0,2),(2,1)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=-1$، $f=\{(2,0),(-1,1),(0,2),(-2,1)\}$ و f تابع است.

پس m فقط می‌تواند برابر -1 باشد.

۱۲- گزینهٔ ۳ چون $f(1)=2$ و $f(4)=2$، پس $f(a)=1$ یا $f(a)=4$.

از $f(a)=1$ نتیجه می‌شود $a=3$ و از $f(a)=4$ نتیجه می‌شود $a=5$.

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $[-5,-2]\cup[4,5]$ است. بنابراین ۶ عدد صحیح $(-5,-4,-3,-2,4$ و $5)$ در این نامعادله صدق می‌کنند.

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $x=2$ را در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$f(2)-2f(2)=4-6+4\Rightarrow f(2)=-2$$

پس $f(x)=x^2-3x$، در نتیجه $f(-2)=10$.

۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^2+1$، آن‌گاه $x^2=t-1$ و $t\geq1$ بنابراین

$$f(x^2+1)=(x^2)^2-x^2\Rightarrow f(t)=(t-1)^2-(t-1)=t^2-3t+2$$

بنابراین اگر $x\geq1$، آن‌گاه $f(x)=x^2-3x+2$.

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^3+6x^2+12x=(x+2)^3-8$$

$$x^3+6x^2+12x+10=(x+2)^3+2$$

بنابراین $f(x+2)=\frac{(x+2)^3-8}{(x+2)^3+2}$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-2$، به‌دست می‌آید $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3+2}$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $-۱\le x<۰$، آن‌گاه $۰<-x\le ۱$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $۰<-x\le ۱$، آن‌گاه $-۱\le x<۰$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$.

۱۸- گزینهٔ ۲ چون

$$f(-۱)=a\times(-۱)+b=b-a,\quad f(۶)=a\times(۶)+۴b=۶a+۴b$$

پس

$$f(-۱)+f(۶)=-۱۰\Rightarrow b-a+۶a+۴b=-۱۰$$

$$۵(a+b)=-۱۰\Rightarrow a+b=-۲$$

در نتیجه $f(۱)=a+۴b=(a+b)+۳b=۳b-۲$.

۱۹- گزینهٔ ۱ برای ورودی‌های فرد، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن بیشتر است، یعنی

$$f(۱)=۱+۱=۲,\ f(۳)=۳+۱=۴,\ \ldots,\ f(۱۹)=۱۹+۱=۲۰$$

برای ورودی‌های زوج، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن کمتر است، یعنی

$$f(۲)=۲-۱=۱,\ f(۴)=۴-۱=۳,\ \ldots,\ f(۲۰)=۲۰-۱=۱۹$$

بنابراین

$$A=(۲+۴+\cdots+۲۰)+(۱+۳+\cdots+۱۹)$$

$$=۱+۲+۳+\cdots+۲۰=\frac{۲۰}{۲}(۱+۲۰)=۲۱۰$$

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر ضابطهٔ داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در $x=۲$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد. یعنی مقدار $f(۲)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=۲x^۲+a$، آن‌گاه $f(۲)=۸+a$. اگر $f(x)=ax^۳-۲$، آن‌گاه $f(۲)=۸a-۲$. بنابراین

$$۸+a=۸a-۲\Rightarrow ۷a=۱۰\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۷}$$

و در نتیجه

$$۷f(۷a)=۷f(۱۰)=۷(۲\times ۱۰^۲+\frac{۱۰}{۷})=۱۴۱۰$$

۲۱- گزینهٔ ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-۲=۴\Rightarrow m=۶$$

$$m+۲n=۴\xrightarrow{m=۶}۶+۲n=۴\Rightarrow n=-۱$$

$$mn+k=۴\xrightarrow{m=۶,n=-۱}-۶+k=۴\Rightarrow k=۱۰$$

۲۲- گزینهٔ ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب $x^۲$ و x برابر با صفر باشند:

$$۴-a=۰\Rightarrow a=۴,\ ۳+b=۰\Rightarrow b=-۳$$

در این صورت $f(x)=ab+۱۹=۴\times(-۳)+۱۹=۷$.

بنابراین

$$f(a+b)=f(۱)=۷$$

۲۳- گزینهٔ ۳ در تابع همانی، ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=x$ است.

بنابراین

$$f(-۴)=m-۲n=-۴,\quad f(۶)=m+n=۶$$

$$\begin{cases}m-۲n=-۴\\ m+n=۶\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۸}{۳},\quad n=\frac{۱۰}{۳}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{۴}{۵}$.

۲۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^۲-۴)+۲ax+۴a}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)+۲a(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\frac{(x+۲)(x-۲+۲a)}{x+۲}=x-۲+۲a,\quad x\neq -۲$$

ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $۲a-۲=۰$ و در نتیجه $a=۱$، پس $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

راه‌حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(۰)=۰$، بنابراین

$$\frac{۴a-۴}{۲}=۰\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

۲۵- گزینهٔ ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین

$$f(۲)-۳f(-۲)=۲a+b-۳(-۲a+b)=۸a-۲b=۴۶$$

$$f(۳)-۳f(۱)=۳a+b-۳(a+b)=-۲b=۲۲$$

در نتیجه $a=۳$، $b=-۱۱$ و $f(x)=۳x-۱۱$. بنابراین $f(-۲)=-۱۷$.

۲۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x-۱)=a(x-۱)+b=ax-a+b$$

$$۲f(x+۲)=۲(a(x+۲)+b)=۲(ax+۲a+b)=۲ax+۴a+۲b$$

پس $f(x-۱)+۲f(x+۲)=۳ax+۳a+۳b=-۹x+۲۱$. بنابراین

$$\begin{cases}۳a=-۹\\ ۳a+۳b=۲۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۱۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۳x+۱۰$$

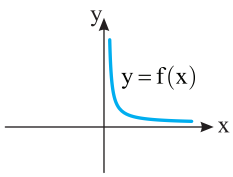
راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای هر x برقرار است، پس $x=۱$ را در این تساوی قرار می‌دهیم: $f(۰)+۲f(۳)=۱۲$. فقط در تابع گزینه (۳) این شرط برقرار است.

۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f(-۱)$ و $f(۲)$ را حساب می‌کنیم تا مقادیر a و b به‌دست آید:

$$\begin{cases}f(-۱)=a+b=۳\\ f(۲)=۴a-۲b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x$ و در نتیجه $f(۱)=-۱$.

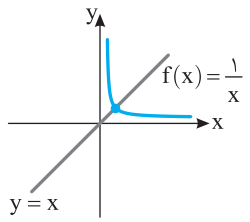
۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x>۰$، آن‌گاه $|x|=x$، پس $f(x)=\frac{۱}{x}$. همچنین اگر $x\le ۰$، آن‌گاه $|x|=-x$ و $x+|x|=۰$. در نتیجه تابع به‌ازای $x\le ۰$ تعریف نمی‌شود، بنابراین $D_f=(۰,+\infty)$. بنابراین نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$

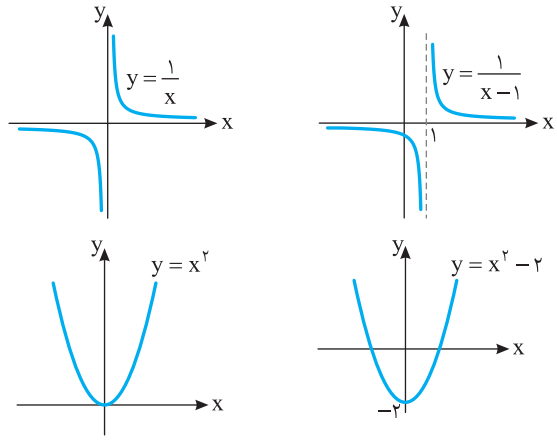
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و خط $y=x$ را در یک نقطه قطع می‌کند.



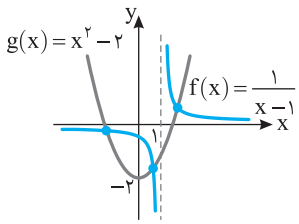
۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f به‌دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع g به‌دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ این تابع $f(x)=x$ است. پس $f(2)=2$. در نتیجه

$$14-2k=2\Rightarrow 2k=12\Rightarrow k=6$$

بنابراین باید $f(14-3\times 6)$ را حساب کنیم: $f(14-3\times 6)=f(-4)=-4$.

۳۲- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^2-2m+2x+2x^2=(2-k)x^2+(2+km)x-2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته باشد. یعنی ضرایب x و x^2 باید صفر باشند. پس

$$2-k=0\Rightarrow k=2,\quad 2+km=0\xrightarrow{k=2}2+2m=0\Rightarrow m=-1$$

بنابراین $k+m=1$.

۳۳- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-2=0,\quad b-3=1,\quad a+b-c=0$$

در نتیجه $a=2$، $b=4$ و $c=a+b=2+4=6$.

۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3}=k\Rightarrow 2x+1=kax-3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=2$ و $-3k=1$ برقرار باشند. بنابراین $k=-\frac{1}{3}$ و $a=-6$.

راه‌حل دوم با توجه به اینکه $f(0)=-\frac{1}{3}$ و تابع ثابت است، پس $f(1)=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه

$$f(1)=\frac{2+1}{a-3}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 9=-a+3\Rightarrow a=-6$$

۳۵- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2-4x-m=(1-m)x^2+(2m-4)x-m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=1\Rightarrow f(x)=-2x-1$$

بنابراین $f(m)=f(1)=-3$.

۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطهٔ داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+1$ است. یعنی

$$x^2+mx+2=(x+1)(x+a)\Rightarrow x^2+mx+2=x^2+(a+1)x+a$$

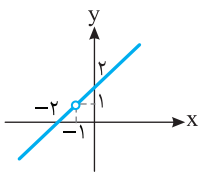
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2,\quad m=a+1\xrightarrow{a=2}m=3$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2,\quad x\neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f(1)=a+b\Rightarrow f(f(1))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^2+ab+b=1$$

$$f(-1)=-a+b\Rightarrow f(f(-1))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^2+ab+b=-7$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^2+ab+b-(-a^2+ab+b)=1-(-7)\Rightarrow 2a^2=8\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

$$a^2+ab+b=1\Rightarrow\begin{cases}a=2\Rightarrow 4+2b+b=1\Rightarrow b=-1\Rightarrow f(x)=2x-1\\ a=-2\Rightarrow 4-2b+b=1\Rightarrow b=3\Rightarrow f(x)=-2x+3\end{cases}$$

بنابراین $f(0)=-1$ یا $f(0)=3$.

۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در ضابطهٔ تابع به‌جای x مقدار $x-1$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-1)=a(x-1)^2-b(x-1)+2=ax^2-2ax-bx+a+b+2$$

بنابراین از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$f(x-1)-f(x)=ax^2-2ax-bx+a+b+2-ax^2+bx-2=6x+2$$

بنابراین $-2ax+a+b=6x+2$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases}-2a=6\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=5\end{cases}\Rightarrow a-b=-8$$

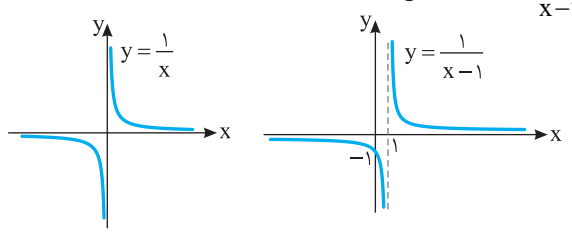
راه‌حل دوم چون رابطهٔ $f(x-1)-f(x)=6x+2$ به ازای هر مقدار x برقرار است، پس به ازای $x=1$ هم برقرار است:

$$f(0)-f(1)=8\Rightarrow 2-(a-b+2)=8\Rightarrow 2-a+b-2=8\Rightarrow a-b=-8$$

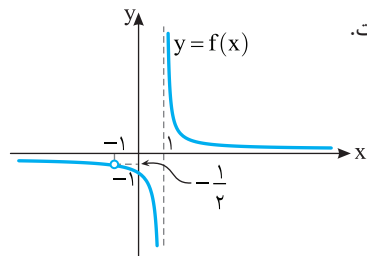
۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1},\quad D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

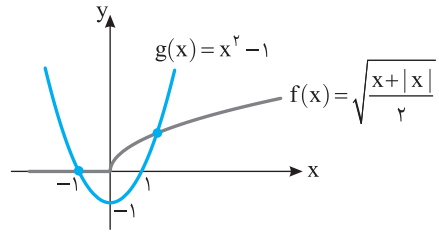
اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{1}{x-1}$ به‌دست می‌آید.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت شکل رسم شده است که خطوط $y=0$ و $y=-\frac{1}{2}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر ۰ و $-\frac{1}{2}$ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{1}{2}$ است.



۴۰- گزینهٔ ۲ برای $x\geq 0$، $|x|=x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ و برای $x<0$، $|x|=-x$ و $f(x)=0$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

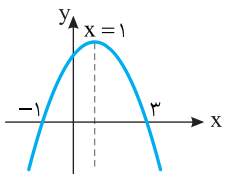


۴۱- گزینهٔ ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینهٔ (۳) طول رأس سهمی $x=-\frac{4}{2(-1)}=2$ و در گزینهٔ (۴) طول رأس سهمی $x=-\frac{-4}{2(-1)}=-2$ است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

۴۲- گزینهٔ ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-2}{2k}=\frac{1}{k}$ است. عرض رأس سهمی را پیدا می‌کنیم: $y=k(\frac{1}{k})^2-2(\frac{1}{k})+2=2-\frac{1}{k}$. چون رأس سهمی روی خط $y=-2x$ است، پس $2-\frac{1}{k}=-2(\frac{1}{k})$ در نتیجه $k=\frac{-1}{2}$.

۴۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=mx^2+2m^2x+3m$ خط $y=-\frac{2m^2}{2m}=-m$ است. بنابراین $-m=2$، یعنی $m=-2$. به این ترتیب، معادلهٔ سهمی می‌شود $y=-2x^2+8x-6$، که عرض رأس آن برابر است با $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-2)(-6)-8^2}{4(-2)}=2$.

۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط نقاط $(3,0)$ و $(-1,0)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=\frac{3-1}{2}=1$ است. از طرف دیگر با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی $x=\frac{b}{2a}$ است. بنابراین $\frac{b}{2a}=1$. در نتیجه $\frac{b}{a}=2$.



راه‌حل دوم سهمی از نقطهٔ $(-1,0)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$0=a(-1)^2-b(-1)+c\Rightarrow a+b+c=0\quad(1)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(3,0)$ عبور کرده است، پس

$$9a-3b+c=0\quad(2)$$

دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم می‌کنیم:

$$9a-3b+c-a-b-c=0\Rightarrow 8a-4b=0\Rightarrow 8a=4b\Rightarrow\frac{b}{a}=2$$

راه‌حل سوم مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^2-bx+c=0$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x=-1$ و $x=3$ هستند. بنابراین $\frac{b}{a}=3+(-1)=2$.

۴۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به نمودار داده شده، c و $-2c$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases}c-2c=-\frac{b}{a}\\ c(-2c)=\frac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{b}{a}\Rightarrow b=ac\\ -2c=\frac{1}{a}\Rightarrow ac=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow ac+b=-1$$

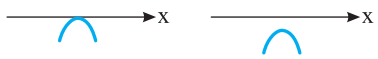
راه‌حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است. بنابراین

$$ac^2+bc+c=0\xrightarrow{c\neq 0}ac+b+1=0\Rightarrow ac+b=-1$$

۴۶- گزینهٔ ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $y=0$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-2}{m}<0\Rightarrow 0<m<2$$

۴۷- گزینهٔ ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجهٔ دوم از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب x^2 در این معادله منفی است.

$$a=m-1<0\Rightarrow m<1 \quad (1)$$

$$\Delta\le 0\Rightarrow 1-4(m-1)^2\le 0\Rightarrow (m-1)^2\ge\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} m-1\ge\frac{1}{2}\Rightarrow m\ge\frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ m-1\le-\frac{1}{2}\Rightarrow m\le\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m\le\frac{1}{2}$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=5\Rightarrow\frac{4(2m)-36}{4}=5\Rightarrow 2m-9=5\Rightarrow m=7$$

۴۹- گزینهٔ ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با $3y+4x=200$ است. پس $4x=200-3y$. همچنین مساحت کل زمین برابر است با $A=2xy$. در نتیجه

$$A=2xy=\frac{1}{2}\times 4xy=\frac{1}{2}(200-3y)y=\frac{1}{2}(200y-3y^2)$$

بنابراین

$$2A=200y-3y^2=-3(y^2-\frac{200y}{3})=-3((y-\frac{100}{3})^2-\frac{10000}{9})$$

$$=\frac{10000}{3}-3(y-\frac{100}{3})^2\le\frac{10000}{3}$$

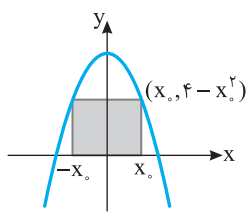
بنابراین $A\le\frac{5000}{3}$، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{5000}{3}$ است.

۵۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط مستطیل برابر است با

$$2(2x_0+4-x_0^2)=-2x_0^2+4x_0+8=-2(x_0^2-2x_0+1)+10$$

$$=-2(x_0-1)^2+10\le 10$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.



۵۱- گزینهٔ ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{-2}{2\times 3}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3(\frac{1}{3})^2-2(\frac{1}{3})+1=\frac{2}{3}$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ است و چون ضریب x^2 عددی مثبت است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

۵۲- گزینهٔ ۳ رأس سهمی $y=ax^2-2ax+2$ نقطهٔ $(1,2-a)$ است که روی سهمی $y=bx^2+2bx+1$ قرار دارد. پس

$$2-a=b+2b+1\Rightarrow a+3b-1=0 \quad (1)$$

رأس سهمی $y=bx^2+2bx+1$ نقطهٔ $(-1,1-b)$ است که روی سهمی $y=ax^2-2ax+2$ قرار دارد. پس

$$1-b=a+2a+2\Rightarrow b=-3a-1 \quad (2)$$

اگر در معادلهٔ (۱) مقدار b را از معادلهٔ (۲) قرار دهیم، آن‌گاه $a+3(-3a-1)-1=0$ در نتیجه $a=-\frac{1}{2}$. بنابراین $b=\frac{1}{2}$ و در نتیجه $a+b=0$.

۵۳- گزینهٔ ۱ معادلهٔ محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-2}{2(3m-4)}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3m-4=-m+2\Rightarrow 4m=6\Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که چون $OA<OB$، پس محور تقارن سهمی پاره‌خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{2a}>0$، یعنی علامت a و b فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a>0$، در نتیجه $b<0$. از طرف دیگر، عرض نقطهٔ تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c<0$. به این ترتیب، $bc>0$.

۵۵- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ عبور می‌کند، پس $c=0$. طول رأس سهمی برابر $x=1$ است. پس $-\frac{b}{2a}=1$ در نتیجه $b=-2a$. عرض رأس سهمی برابر است با $y=-1$، بنابراین

$$a\times 1^2+b\times 1=-1\xrightarrow{b=-2a}a-2a=-1\Rightarrow a=1$$

بنابراین $b=-2$.

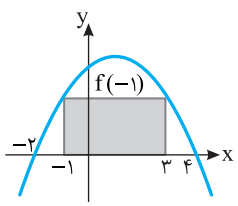
۵۶- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x=4$ و $x=-2$ قطع کرده است، معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=k(x+2)(x-4)$ است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $4f(-1)$ است. بنابراین

$$4f(-1)=8\Rightarrow f(-1)=2$$

پس

$$k(-1+2)(-1-4)=2\Rightarrow k=-\frac{2}{5}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-\frac{2}{5}(x+2)(x-4)$ یا $f(x)=-\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{16}{5}$ است و در نتیجه $c=\frac{16}{5}$.



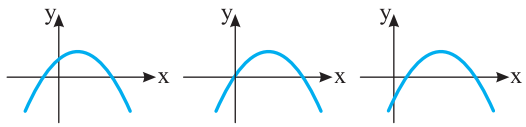
۵۷- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب x^2 و عرض نقطهٔ تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m+2>0,\quad m>0 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $y=0$ اعداد $\frac{m}{m+2}$ و ۱ هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند.

بنابراین حدود m بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

۵۸- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سـهمی اسـت که ماکزیمـم دارد. بنابرایـن در حالت کلی باید به‌صورت‌های زیر باشـد تا از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب داشـته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشـد. اگر یکی از جواب‌ها $x=0$ باشد، آن‌گاه $m=0$ و معادلـه بـه صورت $f(x)=-x^2$ در می‌آید کـه از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصـات عبـور نمی‌کنـد. پـس شـرط داشـتن دو جـواب منفـی $(\Delta>0 , -\frac{b}{a}<0 , \frac{c}{a}>0)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta>0\Rightarrow m^2+8m>0\Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ \text{یا} \\ m<-8 \end{cases} , \quad \begin{cases} \frac{c}{a}>0\Rightarrow -2m>0\Rightarrow m<0 \\ -\frac{b}{a}<0\Rightarrow m<0 \end{cases}$$

پس $m<0$، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m>0$.

۵۹- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشـان می‌دهیم. در این صـورت طبـق فـرض مسـئله، $\alpha+\beta=2\alpha\beta$، چـون $\alpha+\beta=-(k-2)$ و $\alpha\beta=-k$، بنابراین $-k+2=-2k$ پس $k=-2$. بنابراین

$$f(x)=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x)+1=-2(x+1)^2+3\le 3$$

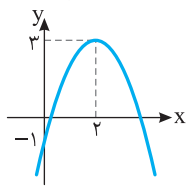
پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ طـول اضـلاع قائمه را با b و c نشـان می‌دهیـم. در این صورت $b+c=8$. از طرف دیگر،

$$S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}b(8-b)=\frac{1}{2}(8b-b^2)$$

بیشـترین مقدار عبارت $8b-b^2$ به ازای $b=\frac{-8}{2(-1)}=4$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(8\times 4-4^2)=\frac{16}{2}=8$.

۶۱- گزینهٔ ۲ سـهمی از نقطهٔ $(0,-1)$ عبور می‌کند، طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2$ و عـرض آن $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-1)(-1)-16}{4(-1)}=3$ اسـت، در نتیجـه رأس سـهمی نقطهٔ $(2,3)$ و نمودار آن به شـکل زیر اسـت. بنابراین این سهمی از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۶۲- گزینهٔ ۱ سـهمی به معادلهٔ $y=x^2-2x$ دارای پایین‌ترین نقطه به مختصات $x=1$ و $y=-1$ است. پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ از نقطهٔ $(0,-2)$ عبور می‌کند و رأس آن $(1,-1)$ است. بنابراین

$$-2=0+0+c\Rightarrow c=-2$$

طول رأس سهمی : $x=-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow b=-2a$

عرض رأس سهمی : $y=a(1)^2+b(1)-2=-1\Rightarrow a+b=1$

$$\xrightarrow{b=-2a} a-2a=1\Rightarrow a=-1,\ b=2$$

بنابراین $abc=(-1)(2)(-2)=4$.

۶۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^2-4x+1$ خط $x=2$ است و محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^2-a^3x$ خط $x=\frac{a^2}{2}$ است. پس

$$\frac{a^2}{2}=2\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

۶۴- گزینهٔ ۴ ابتـدا نابرابـری $\frac{b^2}{4a}>c$ را به‌صـورت $\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ می‌نویسـیم. می‌دانیم عرض رأس سـهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ است، که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینهٔ ۴ معادلـهٔ سـهمی $y=ax^2+bx+c$ اسـت. مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$x=-1 , y=0\Rightarrow 0=a-b+c \quad (1)$$

$$x=1 , y=4\Rightarrow 4=a+b+c \quad (2)$$

$$x=2 , y=9\Rightarrow 9=4a+2b+c \quad (3)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$4-0=a+b+c-(a-b+c)\Rightarrow 4=2b\Rightarrow b=2$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a-2+c=0 \\ 4a+4+c=9 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ 4a+c=5 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سـهمی $y=x^2+2x+1$ اسـت. این سـهمی از نقطهٔ $(-2,1)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینهٔ ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m+1<0\Rightarrow m<-1$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادلهٔ آن منفی است:

$$\Delta=(m+1)^2+16(m+1)<0$$

بنابراین به نامعادلهٔ $(m+1)(m+17)<0$ می‌رسـیم. می‌دانیم $m+1<0$، در نتیجه $m+17>0$، پس $m>-17$. بنابراین $m\in(-17,-1)$.

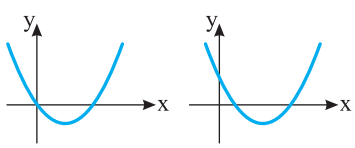
۶۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیهٔ سـوم عبور نکند، آن‌گاه از ناحیه‌هـای اول، دوم و چهارم عبـور می‌کند. (توجه کنید که ضریب x^2 مثبت اسـت و سـهمی کمترین مقـدار دارد.) پـس باید معادلـهٔ $f(x)=0$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

$$\Delta>0\Rightarrow m^2+4m>0\Rightarrow m\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty) \quad (1)$$

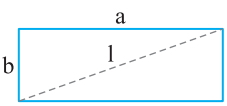
$$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow -m>0\Rightarrow m\in(-\infty,0) \quad (2)$$

$$\frac{c}{a}\ge 0\Rightarrow -m\ge 0\Rightarrow m\in(-\infty,0] \quad (3)$$

از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m\in(-\infty,-4)$.



۶۸- گزینهٔ ۳ از شکل روبه‌رو و فرض مسئله نتیجه می‌شود



$$۲(a+b)=۲۴\Rightarrow a+b=۱۲\Rightarrow b=۱۲-a$$

اکنون توجه کنید که $l^۲=a^۲+b^۲=a^۲+(۱۲-a)^۲=۲a^۲-۲۴a+۱۴۴$.

کمترین مقدار $l^۲$ برابر است با $-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-۲۴)^۲-۴\times۲\times۱۴۴}{۴\times۲}=۷۲$.

بنابراین

$$l^۲\geq ۷۲\Rightarrow l\geq ۶\sqrt{۲}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۰,-۲)$ گذشته است، پس

$$f(۰)=-۲\Rightarrow c=-۲$$

از طرف دیگر، $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $-x^۲+bx+c=۰$ هستند، در نتیجه $x_۱+x_۲=b$ و $x_۱x_۲=-c=۲$. بنابراین

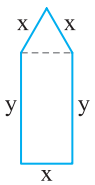
$$x_۱^۲+x_۲^۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲\Rightarrow(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲$$

$$b^۲-\frac{۷}{۲}\times۲=۴۲\Rightarrow b^۲=۴۹$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر است با $\frac{۴(-۱)(-۲)-۴۹}{۴(-۱)}=\frac{۴۱}{۴}$.

۷۰- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که

$$\text{محیط شکل}=۳x+۲y=۴$$



باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲+xy\Rightarrow ۴S=\sqrt{۳}x^۲+۴xy$$

چون $۲y=۴-۳x$، پس

$$۴S=\sqrt{۳}x^۲+۲x\times۲y=\sqrt{۳}x^۲+۲x(۴-۳x)=(\sqrt{۳}-۶)x^۲+۸x$$

چون $\sqrt{۳}-۶<۰$، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای $x=\frac{-۸}{۲(\sqrt{۳}-۶)}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad ۱-\frac{۱}{x+۱}=۰\Rightarrow\frac{x}{x+۱}=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$.

۷۲- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴-۳x^۲+۲=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x^۲-۲)=۰$$

$$x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱,\quad x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱,\pm\sqrt{۲}\}$. پس چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینهٔ ۲ مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$۲|x|-|x-۱|=۰\Rightarrow ۲|x|=|x-۱|$$

$$۲x=x-۱\Rightarrow x=-۱,\quad ۲x=-x+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,\frac{۱}{۳}\}$. بنابراین دو عدد -۱ و $\frac{۱}{۳}$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

۷۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنهٔ تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطهٔ تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^۲-۱۶<۰\Rightarrow m^۲<۱۶\Rightarrow -۴<m<۴$$

۷۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $\frac{۹-x}{x+۲}\geq ۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت $-۲<x\leq ۹$ است.

x	$-\infty$		-۲		۹		$+\infty$
$\frac{۹-x}{x+۲}$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

پس $D_f=(-۲,۹]$. در نتیجه $a=-۲$، $b=۹$ و $a-b=-۱۱$.

۷۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱,\quad ۷-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۷$$

$$\sqrt{x-۱}-\sqrt{۷-x}\neq ۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}\neq\sqrt{۷-x}\Rightarrow x-۱\neq ۷-x\Rightarrow x\neq ۴$$

بنابراین $D_f=[۱,۷]-\{۴\}$. پس عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

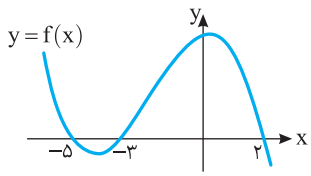
۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\{x|x^۲+۲x+۲-m^۲\geq ۰\}$.

برای اینکه همواره $x^۲+۲x+۲-m^۲\geq ۰$، باید $\Delta\leq ۰$،

$$\Delta=۲^۲-۴(۲-m^۲)\leq ۰\Rightarrow ۴-۸+۴m^۲\leq ۰\Rightarrow m^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq m\leq ۱$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -۱ و بیشترین مقدار آن برابر ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۲ است.

۷۸- گزینهٔ ۲ برای اینکه از نمودار تابع $y=f(x-۲)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$، عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{x}{f(x)}$		$-$	ت ن	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

بنابراین $D_g=(-۵,-۳)\cup[۰,۲)$، پس دامنهٔ تابع g شامل سه عدد صحیح است.

۷۹- گزینهٔ ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(۱,۲a)=(۱,۸)\Rightarrow a=۴$$

$$(۲,۲a+b)=(۲,۵)\Rightarrow ۲a+b=۵\xrightarrow{a=۴}۸+b=۵\Rightarrow b=-۳$$

$$(a+c,۳)=(۵,۳)\Rightarrow a+c=۵\xrightarrow{a=۴}۴+c=۵\Rightarrow c=۱$$

بنابراین $a+b+c=۲$.

۸۰- گزینهٔ ۲ تابع‌های $f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}$ برابرند، زیرا

$$D_f=D_g=[۰,۶],\ f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}=\sqrt{x(۶-x)}=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}=g(x)$$

تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۳}$ و همین‌طور تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+۳}$ دامنهٔ یکسان ندارند، پس برابر نیستند. تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ و $g(x)=x-۳$ دامنهٔ یکسان دارند، اما ضابطهٔ برابر ندارند، زیرا

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{(x-۳)^۲}=|x-۳|\neq g(x)$$

۸۱- گزینهٔ ۴ سه کسر در ضابطهٔ تابع وجود دارد. مخرج هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

$$۱-\frac{۴}{x+۱}=۰\Rightarrow x+۱-۴=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$. پس حاصل‌ضرب عددهایی که در دامنهٔ تابع قرار ندارند برابر -۶ است.

۸۲- گزینهٔ ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰\Rightarrow x^۳-x-۲x^۲+۲=۰$$

$$x(x^۲-۱)-۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x-۲)=۰$$

$$(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=-۱,x=۲$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱,۲\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۳- گزینهٔ ۳ چون $x=۴$ در دامنهٔ تابع نیست، پس مخرج حداقل یکی از کسرهای ضابطهٔ تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=۰\xrightarrow{x=۴}۴-a=۰\Rightarrow a=۴$$

$$x-\frac{a+۱}{x-a}=۰\xrightarrow{x=۴}۴-\frac{a+۱}{۴-a}=۰\Rightarrow a=۳$$

پس حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a برابر ۷ است.

۸۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد. در این حالت $m=۰$ و $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n، ۲ است.

۸۵- گزینهٔ ۱ باید $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های معادلهٔ $a|x|-bx+۱=۰$ باشند، بنابراین

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=-۱}a+b+۱=۰$$

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=۲}۲a-۲b+۱=۰$$

بنابراین $a=-\frac{۳}{۴}$ و $b=-\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $ab=\frac{۳}{۱۶}$.

۸۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارند:

$$۳-x\geq۰\Rightarrow x\leq۳,\quad x+۲\geq۰\Rightarrow x\geq-۲$$

$$\sqrt{x+۲}-۲\neq۰\Rightarrow\sqrt{x+۲}\neq۲\Rightarrow x+۲\neq۴\Rightarrow x\neq۲$$

بنابراین $D_f=[-۲,۳]-\{۲\}$ و عددهای صحیح -۲، -۱، ۰، ۱ و ۳ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

۸۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۳,۲]$ است. بنابراین عبارت $ax^۲+bx+۲a^۲$ باید روی این بازه نامنفی باشد و روی بازهٔ $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ منفی باشد. پس $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲a^۲=۰$ هستند. یعنی اگر به جای x یک بار ۲ و بار دیگر -۳ قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{matrix}۳\times\\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}۴a+۲b+۲a^۲=۰ & (I)\\ ۹a-۳b+۲a^۲=۰\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}۱۲a+۶b+۶a^۲=۰\\ ۱۸a-۶b+۴a^۲=۰\end{cases}$$

$$۳۰a+۱۰a^۲=۰$$

$$۱۰a(۳+a)=۰\Rightarrow a=۰,a=-۳$$

اگر $a=۰$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $b=۰$ و اگر $a=-۳$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود

$$-۱۲+۲b+۱۸=۰\Rightarrow b=-۳$$

اگر $a=b=۰$ آن‌گاه $f(x)=۰$ و $D_f=\mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-۳$ قابل قبول است و در نتیجه $a+b=-۶$.

۸۸- گزینهٔ ۴ باید نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^۲-x}\geq۰$ را حل کنیم. مطابق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$$x=-۱\ \text{یا}\ ۰<x<۱\ \text{یا}\ ۱<x\leq۲$$

بنابراین $D_g=\{-۱\}\cup(۰,۱)\cup(۱,۲]$.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$	▨	▨	▨	$-$	۰	$-$	∄	$-$	۰	$+$	▨	▨	▨
$x^۲-x$		$+$		$+$		$+$	∄	$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{f(x)}{x^۲-x}$	▨	▨	▨	$-$	۰	$-$	∄	$+$	∄	$+$	▨	▨	▨

۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع g برابر باشد. در این صورت به ازای هر $x\neq۳$ تساوی $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=ax+b$ برقرار است. پس

$$x^۲-mx+۳=۳ax+۳b-ax^۲-bx=-ax^۲+(۳a-b)x+۳b$$

تساوی بالا به ازای هر $x\neq۳$ برقرار است. بنابراین

$$a=-۱,\quad ۳=۳b\Rightarrow b=۱$$

$$-m=۳a-b\xrightarrow[b=۱]{a=-۱}m=۴$$

بنابراین $g(x)=-x+۱$. همچنین باید تساوی $f(۳)=g(۳)$ درست باشد. پس

$$f(۳)=n,\quad g(۳)=-۳+۱=-۲\Rightarrow n=-۲$$

در نتیجه $m+n=۲$.

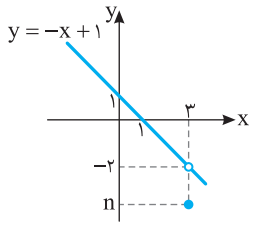
راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}$ ساده شود. یعنی باید صورت کسر عامل $x-۳$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=۳$ صفر می‌شود.

$$۹-۳m+۳=۰\Rightarrow m=۴$$

$$\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=\frac{x^۲-۴x+۳}{۳-x}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{-(x-۳)}=-x+۱$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x\neq ۳\\ n & x=۳\end{cases}$$



واضح است که اگر $n\neq -۲$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-۲$، بنابراین $m+n=۲$

۹۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+۲}{۸x+b}=c\Rightarrow ۸cx+bc=bx+۲$$

$$\begin{cases}۸c=b\\ bc=۲\end{cases}\Rightarrow c\times ۸c=۲\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{۱}{۲}, b=۴\\ c=-\frac{۱}{۲}, b=-۴\end{cases}$$

اگر $b=۴$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۴x+۲}{۸x+۴}$. بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد و در دامنهٔ تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c}=-۴$. در حالت $b=-۴$، $f(x)=\frac{-۴x+۲}{۸x-۴}$ که نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{ab}{c}=۴$.

۹۱- گزینهٔ ۱ عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=۲$ جواب معادلهٔ $x^۳-(a+۱)x+a=۰$ است. پس

$$۸-۲(a+۱)+a=۰\Rightarrow a=۶$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{x^۳-۷x+۶}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۷x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+۲x-۳)=۰\Rightarrow x=۲, x=۱, x=-۳$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲,-۳\}$.

۹۲- گزینهٔ ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارد:

$$۲x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲}$$

$$۴-\sqrt{۲x-۱}\geq ۰\Rightarrow\sqrt{۲x-۱}\leq ۴\Rightarrow ۲x-۱\leq ۱۶\Rightarrow x\leq\frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین $D_f=[\frac{۱}{۲},\frac{۱۷}{۲}]$. پس $a=\frac{۱}{۲}$، $b=\frac{۱۷}{۲}$ و $a+b=۹$.

۹۳- گزینهٔ ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه $\frac{۱۶-x^۲}{x}\geq ۰$ و $\frac{-x}{x+۵}\geq ۰$. با توجه به جدول‌های تعیین علامت زیر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول $(-\infty,-۴]\cup(۰,۴]$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم $(-۵,۰]$ است. بنابراین دامنهٔ تابع f برابر است با

$$((-\infty,-۴]\cup(۰,۴])\cap(-۵,۰]=(-۵,-۴]$$

x	$-\infty$		-۴		۰		۴		$+\infty$
$۱۶-x^۲$		−	۰	+		+	۰	−	
x		−		−	۰	+		+	
$\frac{۱۶-x^۲}{x}$		+	۰	−	ت ن	+	۰	−	

x	$-\infty$		-۵		۰		$+\infty$
$\frac{-x}{x+۵}$		−	ت ن	+	۰	−	

بنابراین $a=-۵$، $b=-۴$ و $a+b=-۹$.

۹۴- گزینهٔ ۳ شرط تعیین دامنه به‌صورت زیر است

$$(a+۲)x^۲+ax+b\geq ۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق نمی‌تواند به‌صورت $(-\infty,۳]$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+۲)x^۲+ax+b$ درجهٔ اول باشد، یعنی $a+۲=۰$. در نتیجه $a=-۲$. پس نامعادله به‌صورت $-۲x+b\geq ۰$ درمی‌آید:

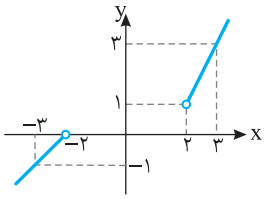
$$-۲x+b\geq ۰\Rightarrow x\leq\frac{b}{۲}\Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{b}{۲}]$$

بنابراین $\frac{b}{۲}=۳$ و در نتیجه $b=۶$.

۹۵- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ $-x^۳f(x)\geq ۰$ به‌دست می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله $[۱,۲]\cup\{-۱,۰\}$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$-x^۳$		+		+		+	۰	−		−		−	
$f(x)$		‖		−	۰	−	۰	+	۰	−		‖	
$-x^۳f(x)$		‖		−	۰	−	۰	−	۰	+		‖	

۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $\mathbb{R}-[۰,۱]$ است. پس $a=۰$ و $b=۱$. در نتیجه $a+b=۱$.



راه‌حل دوم اگر $x>۲$، آن‌گاه

$$۲x>۴\Rightarrow ۲x-۳>۱\Rightarrow f(x)>۱$$

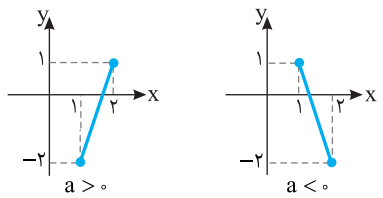
اگر $x<-۲$، آن‌گاه

$$x+۲<۰\Rightarrow f(x)<۰$$

پس $R_f=(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)=\mathbb{R}-[۰,۱]$. در نتیجه $a=۰$ و $b=۱$.

$$a+b=۱$$

۹۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$. نمودار تابع f در دو حالت $a>0$ و $a<0$ را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



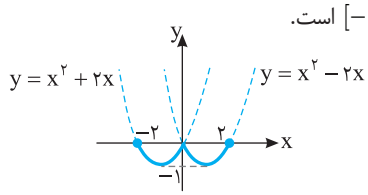
اگر $a>0$، آن‌گاه $f(1)=-2$ و $f(2)=1$. پس

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=-1$$

اگر $a<0$، آن‌گاه $f(1)=1$ و $f(2)=-2$، پس

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+4 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=0$$

۹۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که برد تابع f بازهٔ $[-1,0]$ است.

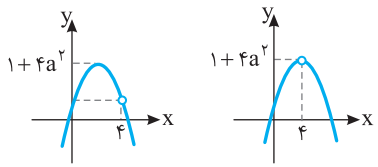


۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-x^2-4ax+1$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، برد آن بازهٔ $(-\infty,1+4a^2]$ است. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی‌شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $1+4a^2$ است:

$$\text{طول رأس سهمی} = x=-\frac{-4a}{2(-1)}=4 \Rightarrow a=-2$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = y=1+4a^2=1+16 \Rightarrow b=17$$

بنابراین $a+b=15$.



۱۰۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x\neq 1 \Rightarrow g(x)=\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=x^3+x^2+x+1$$

$$g(x)=f(x) \Rightarrow a=1$$

از طرف دیگر،

$$x=1 \Rightarrow g(x)=g(1)=b\ ,\quad f(1)=4\ ,\quad g(1)=f(1) \Rightarrow b=4$$

بنابراین $a+b=5$.

راه‌حل دوم با استفاده از نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ مقادیر a و b به راحتی به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f(0)=g(0) \Rightarrow a=1 \\ f(1)=g(1) \Rightarrow 3+a=b \end{cases} \xrightarrow{a=1} 4=b \Rightarrow a+b=5$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ طول مستطیل را x و عرض آن را $x-2$ در نظر می‌گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x)=2(x+x-2)=4x-4$.

۱۰۲- گزینهٔ ۴ اگر r شعاع دایره باشد، $P=2\pi r$ و در نتیجه $r=\frac{P}{2\pi}$.

از طرف دیگر $S=\pi r^2$. بنابراین

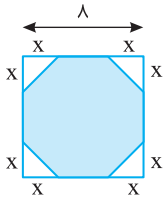
$$S=\pi(\frac{P}{2\pi})^2=\frac{\pi P^2}{4\pi^2} \Rightarrow S(P)=\frac{1}{4\pi}P^2$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ ابعاد مستطیل x و $2-\frac{x}{2}$ هستند، پس محیط آن به‌صورت $P(x)=2(x+2-\frac{x}{2})=x+4$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل درمی‌یابیم که اندازهٔ شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به‌دست می‌آید، بنابراین

$$S(r)=r^2-\frac{1}{4}\pi r^2=(\frac{4-\pi}{4})r^2$$

۱۰۵- گزینهٔ ۳ مقدار x باید مثبت باشد و مقدار بریده شده یعنی $2x$ باید از ۸ کمتر باشد. پس $2x<8$ در نتیجه $0<x<4$. بنابراین دامنهٔ این تابع بازهٔ $(0,4)$ است.



۱۰۶- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که نقطهٔ A از یک طرف تا محل برخورد خط با محور x، یعنی نقطهٔ $(6,0)$، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنهٔ این تابع بازهٔ $(0,6)$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با

حجم نیم کره + ۲× حجم استوانه $= V$

$$=\pi(r^2)(20)+2\times\frac{2}{3}\pi(r^3)=\frac{4\pi}{3}r^3+20\pi r^2$$

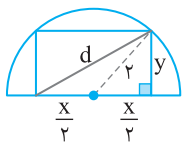
۱۰۸- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس،

$$(\frac{x}{2})^2+y^2=2^2 \Rightarrow y^2=4-\frac{x^2}{4}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطهٔ فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4-\frac{x^2}{4}}$$

بنابراین $d(x)=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+4}$ ضابطهٔ تابع مورد نظر است.

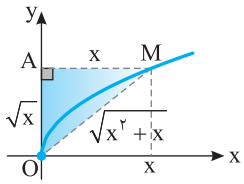


۱۰۹- گزینهٔ ۳ شیب خطی که از نقطه‌های $(2,3)$ و $(x,0)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{3-0}{2-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(2,3)$ و $(0,y)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{y-3}{0-2}$ است. چون نقطه‌های $(2,3)$، $(x,0)$ و $(0,y)$ روی یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{3-0}{2-x}=\frac{y-3}{0-2}$ برقرار است. بنابراین

$$y-3=\frac{-6}{2-x} \Rightarrow y=3-\frac{6}{2-x} \Rightarrow y=\frac{3x}{x-2}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیهٔ فیثاغورس برابر است با $\sqrt{AM^۲+OA^۲}=\sqrt{x^۲+(\sqrt{x})^۲}=\sqrt{x^۲+x}$.

پس محیط مثلث OAM برابر است با



$$P(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x^۲+x}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$ است که دامنهٔ تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل $f+g=\{(۲,۲),(۳,۱۱),(۴,-۱)\}$ است. بنابراین $R_{f+g}=\{۲,۱۱,-۱\}$ و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=\{۱,۳,۵,-۱\},\quad D_g=\{۱,۲,۵,۴\}$$
$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۱,۵\}$$

راه‌حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۴=۶$$
$$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-۴=-۲$$
$$(f+g)(۵)=f(۵)+g(۵)=۶+۲=۸$$
$$(f-g)(۵)=f(۵)-g(۵)=۶-۲=۴$$

پس $(f+g)(۵)=۲(f-g)(۵)$ و در نتیجه $a=۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a)=۲(f-g)(a)\Rightarrow f(a)+g(a)=۲f(a)-۲g(a)\Rightarrow f(a)=۳g(a)$$
$$f(۱)=۲, g(۱)=۴\Rightarrow f(۱)\neq ۳g(۱)$$
$$f(۵)=۶, g(۵)=۲\Rightarrow f(۵)=۳g(۵)\Rightarrow a=۵$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,۰]\cup[۳,+\infty)$ و $D_g=\{-۱,۱,۰,۲,۴\}$. بنابراین $D_{۲g-f}=D_g\cap D_f=\{-۱,۰,۴\}$.

بنابراین a باید یکی از مقدارهای ۱- یا ۰ یا ۴ باشد:

$$(۲g-f)(-۱)=۲g(-۱)-f(-۱)=۴-۲=۲$$
$$(۲g-f)(۰)=۲g(۰)-f(۰)=۲-۰=۲$$
$$(۲g-f)(۴)=۲g(۴)-f(۴)=۶-۲=۴$$

پس $(۲g-f)(۴)=۴$. بنابراین $a=۴$ و در نتیجه $f(-a)=f(-۴)=\sqrt{۲۸}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}+\frac{x^۴-x^۲}{x^۲+۱}=\frac{x^۲-۱+x^۴-x^۲}{x^۲+۱}$$
$$=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=x^۲-۱$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=-۱$ و $g(۰)=۰$. پس $(f+g)(۰)=-۱$. با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۳) به ازای $x=۰$ حاصل ۱- است.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow f(x)+g(x)=x^۲-۱$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=x-۳$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x)+g(x)+f(x)-g(x)=x^۲-۱+x-۳\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲+x-۴}{۲}$$

پس باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^۲+x-۴}{۲}=۲$ را به‌دست آوریم

$$x^۲+x-۴=۴\Rightarrow x^۲+x-۸=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ بالا برابر $\frac{c}{a}=-۸$ است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_g=\mathbb{R}-\{۳\}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$.

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}=(\mathbb{R}-\{۲,۳\})-\{x|\frac{x+۴}{x-۲}=۰\}$$
$$=\mathbb{R}-\{۲,۳,-۴\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)+g(x)=x^۲-۴x,\quad f(x)-g(x)=x^۲-۶x-۱۲$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$۲f(x)=۲x^۲-۱۰x-۱۲\Rightarrow f(x)=x^۲-۵x-۶$$

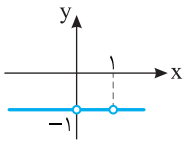
بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}$$
$$=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})-\{x|x^۲-۵x-۶=۰\}=\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، پس $D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x^۲-x}-\frac{x^۲+۱}{x^۲-x}=\frac{x-x^۲}{x^۲-x}=-۱$$

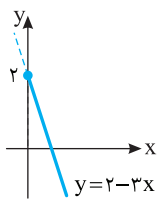
بنابراین باید نمودار تابع $y=-۱$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ رسم کنیم که به‌صورت مقابل است.



۱۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=[۰,+\infty)$، پس $D_{g-f}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=۲-\sqrt{x}-(۳x-\sqrt{x})=۲-۳x$$

پس نمودار تابع $g-f$ به‌صورت روبه‌رو است و برد آن بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.



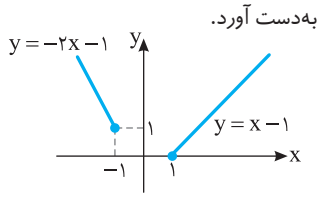
۱۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-(x+۱) & x\geq ۱\\ x-۱-۳x & x\leq -۱\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۱\\ -۲x-۱ & x\leq -۱\end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x\geq ۱\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow y\geq ۰\\ x\leq -۱\Rightarrow -۲x\geq ۲\Rightarrow -۲x-۱\geq ۱\Rightarrow y\geq ۱\end{cases}$$

بنابرایـن برد تابع $f-g$ بازهٔ $[۰,+\infty)$ اسـت. از روی نمـودار تابع $f-g$ هم می‌توان برد آن را به‌دست آورد.



۱۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_{f-۲g}=D_f\cap D_g=\{۰,۱,۲\}$. بنابراین

$$(f-۲g)(۰)=f(۰)-۲g(۰)=۱-۲(-۱)=۳$$
$$(f-۲g)(۱)=f(۱)-۲g(۱)=۴-۲(-۲)=۸$$
$$(f-۲g)(۲)=f(۲)-۲g(۲)=-۶-۲(۳)=-۱۲$$

بنابراین مجموع مقدارهای تابع $f-۲g$ برابر -۱ است.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=۲x+۱\Rightarrow(f+g)(۲)=۲\times۲+۱=۵\Rightarrow f(۲)+g(۲)=۵ \quad (۱)$$
$$(f-g)(x)=۱-x\Rightarrow(f-g)(۲)=۱-۲=-۱\Rightarrow f(۲)-g(۲)=-۱ \quad (۲)$$

اگـر دسـتگاه معادله‌هـای (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دسـت می‌آید $f(۲)=۲$ و $g(۲)=۳$. بنابراین $(f\times g)(۲)=f(۲)\times g(۲)=۲\times۳=۶$.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_f=(-\infty,۴]-\{۰\},\quad D_g=\{-۲,-۱,۰,۳,۴,۵\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x|g(x)=۰\}=\{-۲,-۱,۳,۴\}-\{-۱\}=\{-۲,۳,۴\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x-۱|+|x|=\begin{cases}-۲x+۱ & x\le۰\\ ۱ & ۰\le x\le۱\\ ۲x-۱ & x\ge۱\end{cases}$$

در بازهٔ $[۰,۱]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\underbrace{|x-۱|}_{-}-\underbrace{|x|}_{+}=-x+۱-x=-۲x+۱$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+۲g)(x)=f(x)+۲g(x)\Rightarrow f(x)+۲g(x)=۱-x$$
$$f(x)=۱-x-۲g(x)$$
$$(۲f-g)(x)=۲f(x)-g(x)\Rightarrow ۲f(x)-g(x)=x^۲$$

بنابراین

$$۲(۱-x-۲g(x))-g(x)=x^۲\Rightarrow -۵g(x)+۲-۲x=x^۲$$
$$g(x)=\frac{۱}{۵}(-x^۲-۲x+۲)$$

۱۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۵-x}{x-۱}\ge۰\Rightarrow۱<x\le۵\Rightarrow D_f=(۱,۵]$$
$$\frac{x-۱}{۴-x}\ge۰\Rightarrow۱\le x<۴\Rightarrow D_g=[۱,۴)$$

بنابراین

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۱,۵]\cap[۱,۴)=(۱,۴)$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲} \quad (۱)$$
$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=x\Rightarrow g(x)=xf(x) \quad (۲)$$

اگر به جای $g(x)$ در تسـاوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تسـاوی (۲) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$f(x)\times xf(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

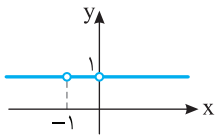
بنابراین $g^۲(x)=x^۲f^۲(x)=\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}$، در نتیجه

$$(f^۲-g^۲)(x)=f^۲(x)-g^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۱+x}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}+\frac{x}{x+۱}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x+۱}+\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$$

پـس اگـر $x\neq-۱$ و $x\neq۰$، آن‌گاه $(f+g)(x)=۱$. بنابرایـن نمـودار تابـع $f+g$ به‌صورت مقابل است.



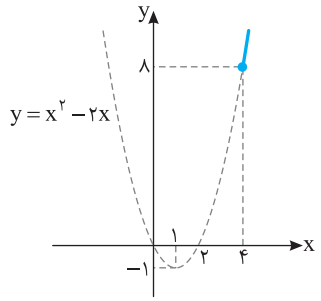
۱۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=D_g=[۴,+\infty)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+\sqrt{x-۴}-۲x-\sqrt{x-۴}$$
$$=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x\ge۴\Rightarrow x-۱\ge۳\Rightarrow(x-۱)^۲\ge۹\Rightarrow(x-۱)^۲-۱\ge۸\Rightarrow(f-g)(x)\ge۸$$

پس $R_{f-g}=[۸,+\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینهٔ ۴ اگر $x>۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-(-۲)=۳$$

اگر $۰<x\le۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱,g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-۲=-۱$$

اگر $-۱\le x\le۰$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱,\ g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-۲=-۳$$

اگر $x<-۱$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-(-۲)=۱$$

بنابراین $R_{f-g}=\{۳,-۱,-۳,۱\}$.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g به شکل زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x)=۲\} = \{۱,۴,۳,۵\} - \{۴,۳\} = \{۱,۵\}$$

از طرف دیگر،

$$g(۱)=\frac{f(۱)}{۲-f(۱)}=\frac{-۱}{۲-(-۱)}=-\frac{۱}{۳}\ ,\quad g(۵)=\frac{f(۵)}{۲-f(۵)}=\frac{۱}{۲-۱}=۱$$

بنابراین $g=\{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۵,۱)\}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a)=۲ \Rightarrow f(a)-g(a)=۲ \Rightarrow f(a)=g(a)+۲ \quad (۱)$$

$$(f\times g)(a)=۸ \Rightarrow f(a)g(a)=۸ \xrightarrow{(۱)} (g(a)+۲)g(a)=۸$$

$$g^۲(a)+۲g(a)-۸=۰ \Rightarrow (g(a)+۴)(g(a)-۲)=۰$$

$$\begin{cases} g(a)=-۴ \xrightarrow{(۱)} f(a)=-۲ \\ g(a)=۲ \xrightarrow{(۱)} f(a)=۴ \end{cases}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{۴}{۲}=۲,\quad (\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=[-۳,۳],\quad D_g=\{۱,-۱,۳,-۳,-۴\}$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow \sqrt{۹-x^۲}=۰ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۳$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f \cap D_g - \{x | f(x)=۰\} = \{۱,-۱,۳,-۳\} - \{۳,-۳\} = \{۱,-۱\}$$

از طرف دیگر،

$$(\frac{g}{f})(۱)=\frac{g(۱)}{f(۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\quad (\frac{g}{f})(-۱)=\frac{g(-۱)}{f(-۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $\{(۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲}),(-۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲})\}=\frac{g}{f}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ است. پس

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g = \mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

اکنون ضابطهٔ تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲-x}$$

$$=\frac{x+x-۱-۱}{x^۲-x}=\frac{۲(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۲}{x}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \\ x+۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۴ \end{cases} \Rightarrow D_f=[-۲,۲]$$

$$\begin{cases} ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \\ ۱-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۱ \end{cases} \Rightarrow D_g=[-۲,۱]$$

بنابراین $D_{f+g}=D_f \cap D_g=[-۲,۱]$. پس $a=-۲$، $b=۱$ و در نتیجه

$$a+b=-۱$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{(ax+۲)^۲},\quad g(x)=\frac{۱}{(x+۱)(x+b)}$$

چون فقط $x=-۱$ در دامنهٔ تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x=-۱$ می‌تواند ریشهٔ مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b=۱$. برای a دو حالت وجود دارد:

حالت اول اگر $x=-۱$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a=۲$.

حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a=۰$.

بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$ax-a+۱\geq ۰ \Rightarrow ax\geq a-۱$$

اگر $a>۰$، آن‌گاه $x\geq \frac{a-۱}{a}$. اگر $a<۰$، آن‌گاه $x\leq \frac{a-۱}{a}$. اگر $a=۰$، آن‌گاه $x\in\mathbb{R}$. با توجه به این موضوع و اینکه $D_{f\times g}=[۲,۵]$ و $D_g=[۲,+\infty)$ باید $D_f=(-\infty,\frac{a-۱}{a}]$، در نتیجه

$$\frac{a-۱}{a}=۵ \Rightarrow a-۱=۵a \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

پس $f(x)=\sqrt{-\frac{۱}{۴}x+\frac{۵}{۴}}$ و در نتیجه $f(۳)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع $(f+g)^۲$ را به‌دست می‌آوریم (توجه کنید که $x\geq ۱$):

$$(f+g)^۲(x)=f^۲(x)+g^۲(x)+۲f(x)g(x)$$

$$=x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+۲\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=۲x+۲\sqrt{x^۲-x}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت است. بنابراین $(f+g)(x)=\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^۲-x}}$. پس $a=۲$، $b=۱$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌صورت زیر است:

$$x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

$$a-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq a \Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

چون $D_{f-g}=D_f \cap D_g=[۲,۴]$. پس $a=۴$. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۳)=۵ \Rightarrow f(۳)+g(۳)=\sqrt{۳-۲}+\sqrt{۴-۳}+b=۵$$

$$۲+b=۵ \Rightarrow b=۳$$

در نتیجه $a+b=۷$.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} ۲-x & x\leq ۰ \\ x+۲ & ۰<x<۱ \\ x+۲ & x\geq ۱ \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & x\leq ۰ \\ ۲x+۳ & ۰<x<۱ \\ ۳x+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} -۳x-۱ & x\leq ۰ \\ -x-۱ & ۰<x<۱ \\ -۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۲)=۴$ و $g(۲)=۸$، پس

$$(f-g)(۲)=۴-۸=-۴$$

همچنین $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲}$ و $g(\frac{۱}{۲})=۴$، پس $(f-g)(\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲}-۴=-\frac{۳}{۲}$.

همچنین $f(-۱)=۳$ و $g(-۱)=۱$، پس $(f-g)(-۱)=۳-۱=۲$.

همهٔ این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۲)=۳$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(-۳)=-۲$$

بنابراین $(fog)(-۲)-(gof)(-۱)=۳-(-۲)=۵$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(fog)(-۲)=f(g(-۲))$. از طرف دیگر، $g(-۲)=-۲+۶=۴$ و $f(g(-۲))=f(۴)=۴^۲+۲=۱۸$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=۳g(x)-۲=۳(۴x+۳)-۲=۱۲x+۷$$

بنابراین $(fog)(x-۱)=۱۲(x-۱)+۷=۱۲x-۵$.

راه‌حل دوم دقت کنید که

$$(fog)(x-۱)=f(g(x-۱))=f(۴(x-۱)+۳)$$

$$=f(۴x-۱)=۳(۴x-۱)-۲=۱۲x-۵$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))$.

بنابراین

$$(gof)(x)=g(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۲(\frac{۲x+۱}{x-۱})-۲}{\frac{۲x+۱}{x-۱}+۲}=\frac{۴x+۲-۲x+۲}{۲x+۱+۲x-۲}=\frac{۲x+۴}{۴x-۱}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=-۴$. فقط در گزینهٔ (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲-۶x+۱۵)=۵x^۲-۳x+۲$$

بنابراین $f((x-۳)^۲+۶)=۵x^۲-۳x+۲$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $f(۶)=۳۸$.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{fof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_f\}=\{۱\le x\le ۲\ ,\ ۱\le ۴-۲x\le ۲\}$$

از نامعادلهٔ $۱\le ۴-۲x\le ۲$ نتیجه می‌شود $-۳\le -۲x\le -۲$، پس $۱\le x\le \frac{۳}{۲}$.

بنابراین $D_{fof}=\{۱\le x\le ۲, ۱\le x\le \frac{۳}{۲}\}=[۱,\frac{۳}{۲}]$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=x^۲$. تابع $f(x^۲)$، تابع fog است. بنابراین می‌توان نوشت

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,۱\le x^۲\le ۴\}$$

از نامعادله‌های $۱\le x^۲\le ۴$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} x^۲\le ۴\Rightarrow -۲\le x\le ۲ \\ ۱\le x^۲\Rightarrow x\le -۱\ ,\ x\ge ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\le x\le -۱\ ,\ ۱\le x\le ۲$$

بنابراین $D_{f(x^۲)}=[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$.

۱۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع gof را با توجه به $D_f=[-۲,۲]$ و $D_g=\mathbb{R}$ به‌دست می‌آوریم

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{-۲\le x\le ۲\ ,\ \sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{۴-x^۲})=(\sqrt{۴-x^۲})^۲+۱=۵-x^۲$$

برای محاسبهٔ برد از دامنهٔ تابع کمک می‌گیریم

$$-۲\le x\le ۲\Rightarrow ۰\le x^۲\le ۴\Rightarrow -۴\le -x^۲\le ۰$$

$$۱\le ۵-x^۲\le ۵\Rightarrow ۱\le (gof)(x)\le ۵$$

بنابراین $R_{gof}=[۱,۵]$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\ge a\ ,۰\le |x-۱|\le ۳\}$$

$$=\{x|x\ge a\ ,-۳\le x-۱\le ۳\}=\{x|x\ge a\ ,-۲\le x\le ۴\}$$

بنابراین $D_{fog}=[a\ ,+\infty]\cap[-۲,۴]=[-۲,۴]$. برای اینکه این تساوی برقرار باشد، باید $a\le -۲$. یعنی حداکثر مقدار a برابر -۲ است.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} ۲g(x)-۱ & g(x)<۰ \\ g(x)+۴ & g(x)\ge ۰ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۲(۳x-۶)-۱ & ۳x-۶<۰ \\ ۳x-۶+۴ & ۳x-۶\ge ۰ \end{cases}=\begin{cases} ۶x-۱۳ & x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۳)=۷\ ,\quad (fog)(۱)=f(g(۱))=f(۲)=۵$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۰)=-۱\ ,\quad (fog)(۵)=f(g(۵))=f(۱)=۰$$

بنابراین $fog=\{(-۱,۷),(۱,۵),(۳,-۱),(۵,۰)\}$.

۱۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۲)=۳$. در نتیجه

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۳m+۲=۸\Rightarrow m=۲$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۱)=\frac{۱}{۲x+۱-۱}=\frac{۱}{۲x}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۲}{x-۱}+۱=\frac{x+۱}{x-۱}$$

بنابراین

$$(fog)(x)+(gof)(x)=\frac{۱}{۲x}+\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱+۲x^۲+۲x}{۲x(x-۱)}=\frac{۲x^۲+۳x-۱}{۲x^۲-۲x}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fof)(x)=f(f(x))=f^۲(x)+۳f(x)+۲$$

بنابراین

$$(fof)(x)=۶\Rightarrow f^۲(x)+۳f(x)+۲=۶$$

$$f^۲(x)+۳f(x)-۴=۰\Rightarrow (f(x)-۱)(f(x)+۴)=۰$$

$$\begin{cases} f(x)=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۱=۰ & (۱) \\ f(x)=-۴\Rightarrow x^۲+۳x+۲=-۴\Rightarrow x^۲+۳x+۶=۰ & (۲) \end{cases}$$

معادلهٔ (۲) جواب ندارد $(\Delta<۰)$. در معادلهٔ (۱) حاصل‌جمع جواب‌ها برابر -۳ است.

پس حاصل‌جمع جواب‌های معادلهٔ $(fof)(x)=۶$ برابر -۳ است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-1)=\frac{x+2}{3}\xrightarrow{x\to x+1}g(x)=\frac{(x+1)+2}{3}=\frac{x+3}{3}$$

بنابراین

$$(fog)(x)=6x+5\Rightarrow f(g(x))=6x+5\Rightarrow f(\frac{x+3}{3})=6x+5$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$، به‌دست می‌آید $f(1)=5$.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$
$$=\{-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\sqrt{3-x^2}\in\{-3,0,1,2\}\}$$
$$\sqrt{3-x^2}=-3\quad(\text{غ.ق.ق.})$$
$$\sqrt{3-x^2}=0\Rightarrow 3-x^2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3-x^2}=1\Rightarrow 3-x^2=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3-x^2}=2\Rightarrow 3-x^2=4\Rightarrow x^2=-1\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین

$$D_{gof}=\{-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},x\in\{\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}\}=\{\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}$$

پس حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ تابع gof برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=2^x$، تابع $y=f(2^x)$، تابع $y=(fog)(x)$ است. دامنهٔ تابع g، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{fog}=\{x|\,x\in D_g,g(x)\in D_f\}=\{x|\,x\in\mathbb{R},\ 1\le 2^x\le 4\}$$

از نامعادله‌های $1\le 2^x\le 4$ نتیجه می‌شود $0\le x\le 2$، پس $D_{f(2^x)}=[0,2]$.

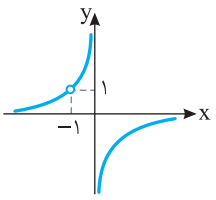
۱۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\ne -1,\ \frac{x-1}{x+1}\ne -1\}$$
$$\frac{x-1}{x+1}=-1\Rightarrow x-1=-x-1\Rightarrow x=0$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{x-1-x-1}{x-1+x+1}=\frac{-1}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x|-2\le x\le 3,1\le x^2-3\le 13\}$$

از حل نامعادلهٔ $1\le x^2-3\le 13$ نتیجه می‌شود $2\le x\le 4$ یا $-4\le x\le -2$.

بنابراین $D_{gof}=[2,3]\cup\{-2\}$.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ تابع gof به شکل زیر است

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}3-f(x) & f(x)>0\\ 2-f(x) & f(x)<0\end{cases}$$

کافی است نامعادله‌های $f(x)>0$ و $f(x)<0$ را حل کنیم.

حل $f(x)>0$: اگر $x\ge 0$، آن‌گاه

$$f(x)=x+1>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow x\ge 0$$

اگر $x<0$، آن‌گاه

$$f(x)=x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow x\in\varnothing$$

حل $f(x)<0$: اگر $x\ge 0$، آن‌گاه

$$f(x)=x+1<0\Rightarrow x<-1\Rightarrow x\in\varnothing$$

اگر $x<0$، آن‌گاه

$$f(x)=x-1<0\Rightarrow x<1\Rightarrow x<0$$

بنابراین $(gof)(x)=\begin{cases}3-(x+1) & x\ge 0\\ 2-(x-1) & x<0\end{cases}=\begin{cases}2-x & x\ge 0\\ 3-x & x<0\end{cases}$.

۱۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(1)=f(g(1))=f(4)=1\Rightarrow a=1$$
$$(fog)(2)=f(g(2))=f(1)=2\Rightarrow b=2$$
$$(fog)(3)=f(g(3))=f(3)=4\Rightarrow c=4$$
$$(fog)(4)=f(g(4))=f(2)=3\Rightarrow d=3$$

بنابراین $a-b+c-d=0$.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا مقادیر $(fog)(2)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(2)=f(g(2))=f(2)=4+a$$
$$(gof)(a)=g(f(a))=g(3a)=6-6a$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$4+a-(6-6a)=3\Rightarrow 7a=5\Rightarrow a=\frac{5}{7}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ باید $(fof)(x)$ را به‌دست آوریم

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)+2}{f(x)-2}=\frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2}=\frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4}$$
$$=\frac{3x-2}{-x+6}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ضابطهٔ تابع f،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-1}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-1}=\frac{x}{2x+1}\Rightarrow 2xg(x)+g(x)=xg(x)-x$$
$$(x+1)g(x)=-x\Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x+1}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{4f(x)-19}$$

بنابراین

$$\sqrt{4f(x)-19}=\sqrt{4g(x)+x}\Rightarrow 4f(x)-19=4g(x)+x$$
$$f(x)-g(x)=\frac{x+19}{4}\Rightarrow(f-g)(x)=\frac{x+19}{4}$$

در نتیجه $(f-g)(5)=\frac{5+19}{4}=6$.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به شکل زیر است:

$$D_f=[1,+\infty)\ ,\quad D_g=[0,3]$$

بنابراین $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq 1\,|\,0\leq\sqrt{x-1}\leq 3\}$. از نامعادله‌های $0\leq\sqrt{x-1}\leq 3$ نتیجه می‌شود

$$x-1\leq 9\Rightarrow x\leq 10$$

بنابراین $D_{gof}=\{x\,|\,x\geq 1, x\leq 10\}=[1,10]$.

۱۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{1}{x}+3$، آن‌گاه $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$ و $h(x)=f(g(x))=(fog)(x)$. بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{0\}\,|\,2\leq\frac{1}{x}+3\leq 4\}$$

باید نامعادله‌های $2\leq\frac{1}{x}+3\leq 4$ را حل کنیم:

$$-1\leq\frac{1}{x}\leq 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}-1\leq 0\Rightarrow\frac{1-x}{x}\leq 0 & (1)\\ \frac{1}{x}+1\geq 0\Rightarrow\frac{1+x}{x}\geq 0 & (2)\end{cases}$$

از حل نامعادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ و از حل نامعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$. از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع h مشخص می‌شود: $D_h=\mathbb{R}-(-1,1)$.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq 1,\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=[1,+\infty)$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2+6=x-1+6=x+5$$

اکنون با توجه به دامنهٔ تابع gof که شرط $x\geq 1$ را دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$x\geq 1\Rightarrow x+5\geq 6\Rightarrow(gof)(x)\geq 6\Rightarrow R_{gof}=[6,+\infty)$$

راه‌حل دوم چون $f(x)=\sqrt{x-1}$، پس $f(x)\geq 0$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^2(x)+6\geq 6$$

بنابراین $R_{gof}=[6,+\infty)$.

۱۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$ و

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\neq -2,\frac{2x-4}{x+2}\neq -2\}$$

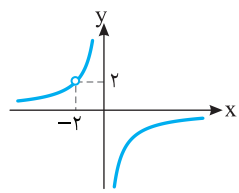
$$\frac{2x-4}{x+2}\neq -2\Rightarrow 2x-4\neq -2x-4\Rightarrow x\neq 0$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-2,0\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{2f(x)-4}{f(x)+2}$$

$$=\frac{2(\frac{2x-4}{x+2})-4}{\frac{2x-4}{x+2}+2}=\frac{4x-8-4x-8}{2x-4+2x+4}=-\frac{4}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R}-\{0,2\}$.



۱۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=3f(x)+2=\begin{cases}6x-1 & x<0\\ 3x-4 & x\geq 0\end{cases}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(1)=4\ ,\quad f(2)=3\ ,\quad f(3)=2\ ,\quad f(4)=1\ ,\quad f(5)=5$$

$$f(g(1))=2\ ,\ f(g(2))=5\ ,\ f(g(3))=1\ ,\ f(g(4))=4\ ,\ f(g(5))=3$$

اکنون توجه کنید که

$$f(g(1))=f(3)\Rightarrow g(1)=3\ ,\quad f(g(2))=f(5)\Rightarrow g(2)=5$$

$$f(g(3))=f(4)\Rightarrow g(3)=4\ ,\quad f(g(4))=f(1)\Rightarrow g(4)=1$$

$$f(g(5))=f(2)\Rightarrow g(5)=2$$

بنابراین $g=\{(1,3),(2,5),(3,4),(4,1),(5,2)\}$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$5=(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(6)=5$، پس

$$a+\sqrt{a}=6\Rightarrow a=4\Rightarrow g(a)=g(4)=1$$

۱۷۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-5x+2a)$$

$$=2(-5x+2a)-a+1=-10x+3a+1$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-a+1)$$

$$=-5(2x-a+1)+2a=-10x+7a-5$$

چون $(fog)(x)=(gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$$7a-5=3a+1\Rightarrow 4a=6\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای $x=0$ برقرار است. پس

$$(fog)(0)=(gof)(0)\Rightarrow f(g(0))=g(f(0))\Rightarrow f(2a)=g(-a+1)$$

$$4a-a+1=-5(-a+1)+2a\Rightarrow 3a+1=7a-5\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۱۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{x+1}{x-2})$.

بنابراین

$$g(\frac{x+1}{x-2})=\frac{1}{x+2}\quad (*)$$

اگر فرض کنیم $t=\frac{x+1}{x-2}$، آن‌گاه

$$tx-2t=x+1\Rightarrow(t-1)x=2t+1\Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-1}$$

در تساوی $(*)$ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2t+1}{t-1}$ و نتیجه می‌شود

$$g(t)=\frac{1}{\frac{2t+1}{t-1}+2}=\frac{t-1}{2t+1+2t-2}=\frac{t-1}{4t-1}\Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{4x-1}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=x^2+f(x)\Rightarrow g(f(x))=x^2+f(x)$$

$$f^2(x)-3f(x)+4=x^2+f(x)$$

$$f^2(x)-4f(x)-x^2+4=0\Rightarrow(f(x)-2)^2=x^2$$

چون f تابعی چندجمله‌ای است، پس $f(x)-2=-x$ یا $f(x)-2=x$. پس

$$f(x)=-x+2\ \text{یا}\ f(x)=x+2$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ چون f خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. پس

$$(fof)(x)=f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

$$a^۲x+ab+b=۴x-۳\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\ab+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲,b=۳\\a=۲,b=-۱\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-۲x+۳$ یا $f(x)=۲x-۱$ که نتیجه می‌شود $f(۰)=۳$ یا $f(۰)=-۱$.

۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $((fof)og)(x)=f(f(g(x)))$. از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x))=f(|x|)=||x|+۲|$. چون $|x|+۲>۰$، پس $f(g(x))=|x|+۲-۴=|x|-۲$ و

$$f(f(g(x)))=f(|x|-۲)=||x|-۲+۲|-۴=||x||-۴=|x|-۴$$

۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$۴x-x^۲\geq۰\Rightarrow x(۴-x)\geq۰\Rightarrow۰\leq x\leq۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq۴\,|\,۰\leq\sqrt{۴x-x^۲}-۱\leq۴\}$$

پس

$$۱\leq\sqrt{۴x-x^۲}\leq۵\Rightarrow۱\leq۴x-x^۲\leq۲۵\Rightarrow-۳\leq۴x-x^۲-۴\leq۲۱$$

$$-۳\leq-(x-۲)^۲\leq۲۱\Rightarrow-۲۱\leq(x-۲)^۲\leq۳\Rightarrow|x-۲|\leq\sqrt{۳}$$

$$-\sqrt{۳}\leq x-۲\leq\sqrt{۳}\Rightarrow۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین $D_{fof}=\{۰\leq x\leq۴,۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}\}=[۲-\sqrt{۳},۲+\sqrt{۳}]$.

۱۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[k,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$.

بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\neq۰\,|\,\frac{۱}{x}+۳\geq k\}$$

نامعادلهٔ $\frac{۱}{x}+۳\geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}+۳-k\geq۰\Rightarrow\frac{۱+(۳-k)x}{x}\geq۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق یا به‌صورت $(۰,\frac{۱}{k-۳}]$ یا به‌صورت $(-\infty,\frac{۱}{k-۳}]\cup(۰,+\infty)$ است. باتوجه به فرض مسئله

$$D_{fog}=(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$$

بنابراین

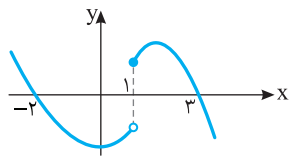
$$\frac{۱}{k-۳}=-۱\Rightarrow k-۳=-۱\Rightarrow k=۲$$

۱۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

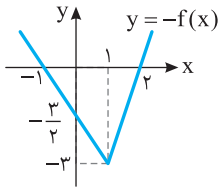
$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}g^۲(x)-۱ & g(x)<۰\\ ۳g(x)+۴ & ۰\leq g(x)<۲\\ ۵ & g(x)\geq۲\end{cases}$$

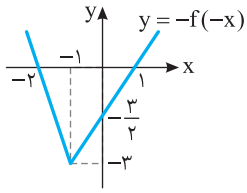
$$=\begin{cases}(x+۱)^۲-۱ & x+۱<۰\\ ۳(x+۱)+۴ & ۰\leq x+۱<۲\\ ۵ & x+۱\geq۲\end{cases}=\begin{cases}x^۲+۲x & x<-۱\\ ۳x+۷ & -۱\leq x<۱\\ ۵ & x\geq۱\end{cases}$$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

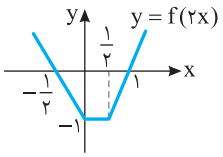


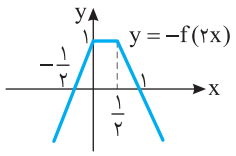
۱۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.



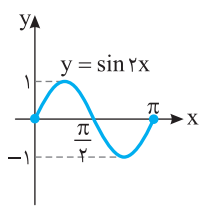


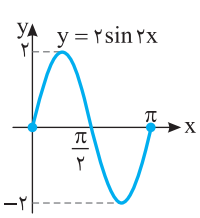
۱۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ به‌دست بیاید.

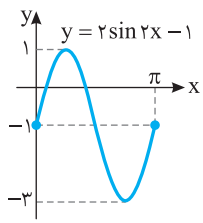


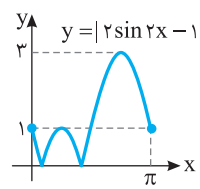


۱۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin۲x$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin۲x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲\sin۲x-۱$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.







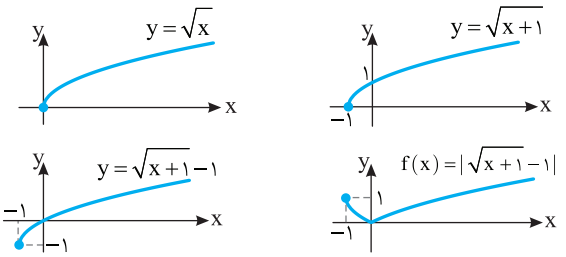


۱۸۵- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(۰)=۰$. در نتیجه

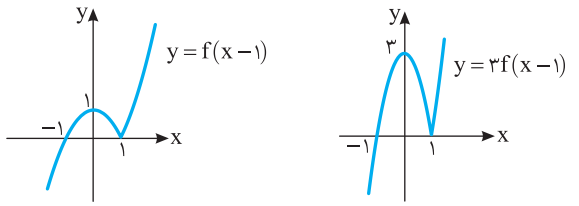
$$g(۰)=f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲-۷a+۹+a=۰$$
$$a^۲-۶a+۹=۰\Rightarrow(a-۳)^۲=۰\Rightarrow a=۳$$

۱۸۶- گزینهٔ ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x-۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آید.

۱۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}-۱$ به‌دست آید. اکنون قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.



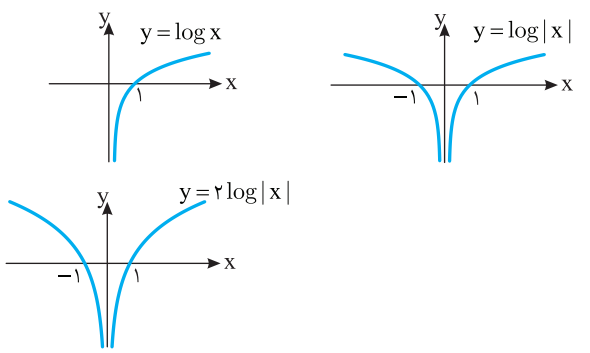
۱۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



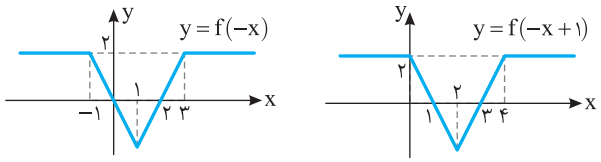
۱۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^۲=\log|x|^۲=۲\log|x|$$

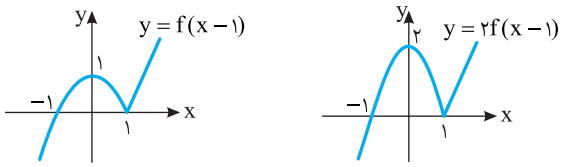
پس ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\log|x|$ به‌دست آید.



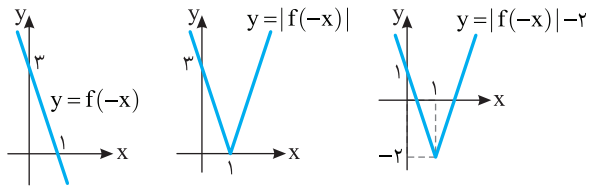
۱۹۰- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))=f(-x+۱)$ به‌دست می‌آید.



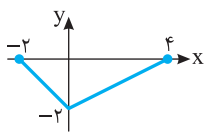
۱۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



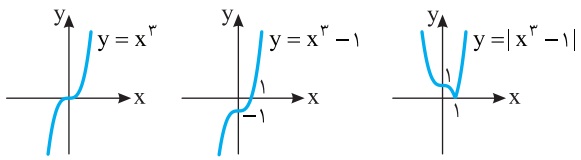
۱۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-۲$ به‌دست بیاید.



۱۹۳- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۱۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^۳-۱$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^۳-۱|$ به‌دست آید.



۱۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادلهٔ $f(x-۱)+۲=۰$ را به‌دست آوریم:

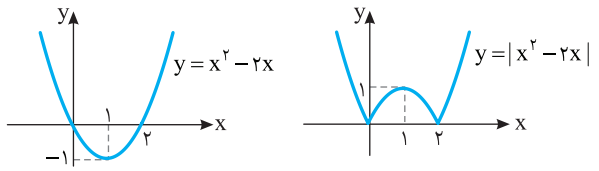
$$-(x-۱)^۲+(x-۱)-۲+۲=۰\Rightarrow -x^۲+۲x-۱+x-۱=۰$$
$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=۲$$

۱۹۶- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۲))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=۳f(۲x+۴)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=۳f(-۲x+۴)$ به‌دست می‌آید.

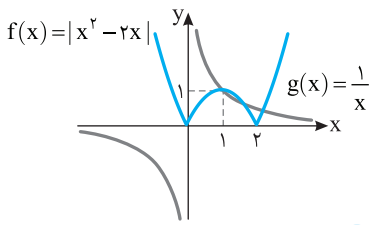
۱۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=|x||x-۲|=|x(x-۲)|=|x^۲-۲x|$$

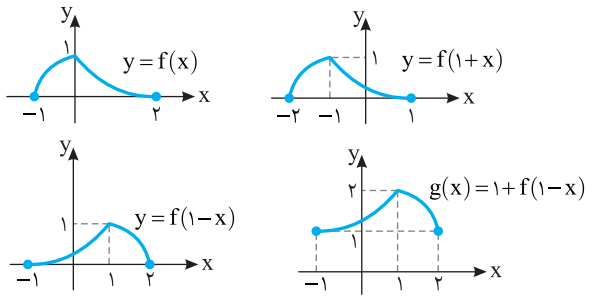
بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^۲-۲x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



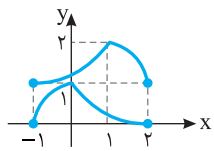
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.



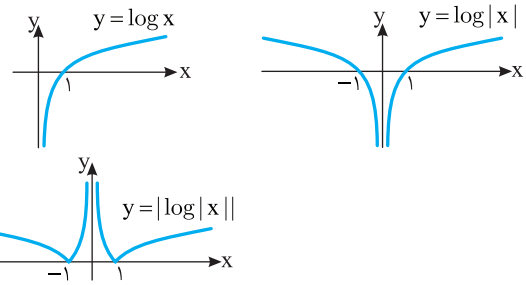
۱۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=۱+f(۱-x)$ رسم شود.



نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید که نقطهٔ مشترکی ندارند.



۱۹۹- گزینهٔ ۳ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم



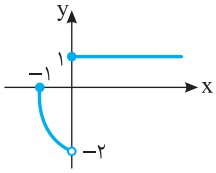
۲۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

$$D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x \mid -۲\le x-|x|\le ۲\}=[-۱,+\infty)$$

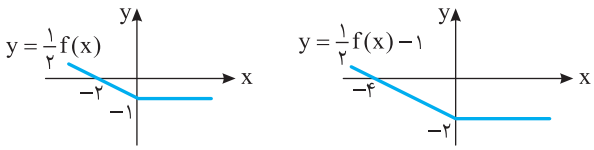
اکنون توجه کنید که

$$x\ge ۰\Rightarrow g(x)=-f(۰),\quad x<۰\Rightarrow g(x)=-f(۲x)$$

پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\ge ۰\\ -f(۲x) & -۱\le x<۰\end{cases}$. پس در بازهٔ $[۰,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[-۱,۰)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ رسم شود.



۲۰۱- گزینهٔ ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $\frac{۱}{۲}f$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ به‌دست بیاید.

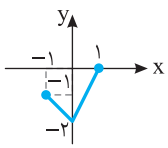


توجه کنید که اگر $x<۰$، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(-۲,۰)$ و $(۰,-۲)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x<۰$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-x-۲$ است. در نتیجه اگر $x<۰$ و $\frac{۱}{۲}f(x)-۱=۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}(-x-۲)-۱=۰$، پس $x=-۴$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ محور x را در نقطه‌ای به طول -۴ قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))$ به‌دست می‌آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ است.

۲۰۳- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم.

بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه‌بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.



۲۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(۰)=۰$ و در نتیجه $f(-a)+a=۰$. اگر $f(x)=-x^۲+۳x-۲$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۳a-۲+a=۰\Rightarrow a^۲+۲a+۲=۰$$

اگر $f(x)=x^۲+۱$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲+۱+a=۰\Rightarrow a^۲+a+۱=۰$$

اگر $f(x)=-x^۲-۱$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۱+a=۰\Rightarrow a^۲-a+۱=۰$$

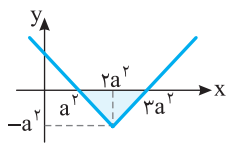
معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.

اگر $f(x)=x^۲+۵x+۴$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲-۵a+۴+a=۰\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰$$

$$(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۲$$

۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $۲a^۲$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۲a^۲|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را $a^۲$ واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x-۲a^۲|-a^۲$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با $S=\frac{۱}{۲}a^۲(۲a^۲)=a^۴$. بنابراین



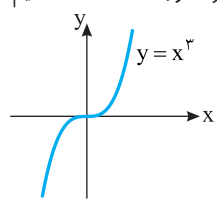
$a^۴=۴$، پس $a=\pm\sqrt{۲}$.

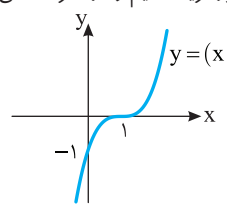
۲۰۶- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱-۲)=f(x-۳)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۳)-۱$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-f(-۲x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید.

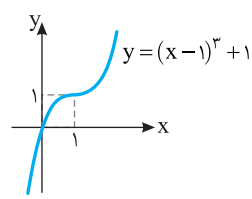
۲۰۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

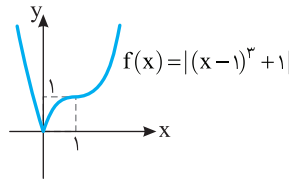
$$f(x)=|x^۳-۳x^۲+۳x|=|(x-۱)^۳+۱|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.







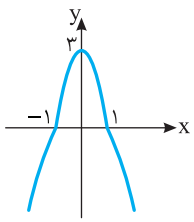


۲۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

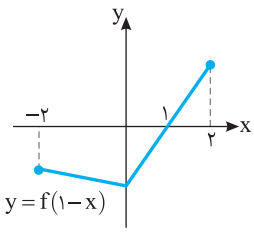
$$g(x)=-۲f(x)+|f(x)|=\begin{cases}-۲f(x)+f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۲f(x)+(-f(x)) & f(x)<۰\end{cases}$$

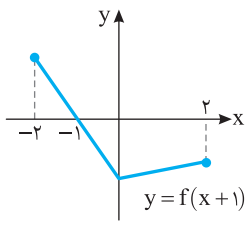
$$=\begin{cases}-f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۳f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

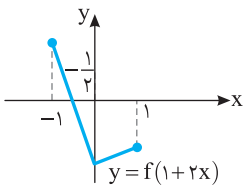
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازهٔ $(-۱,۱)$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

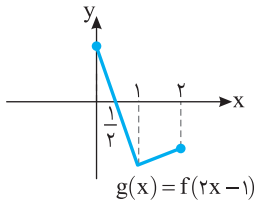


۲۰۹- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۱-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+x)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲x)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲(x-۱))=f(۲x-۱)$ به‌دست می‌آید.

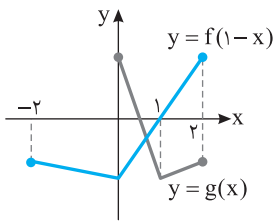








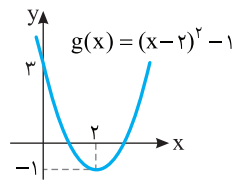
با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y=f(۱-x)$ و $y=g(x)$ یک نقطهٔ برخورد دارند.

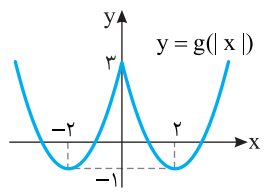


۲۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴|x|+۳=|x|^۲-۴|x|+۳$$

پس اگر فرض کنیم $g(x)=x^۲-۴x+۳$، آن‌گاه $f(x)=g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y=g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

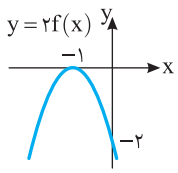


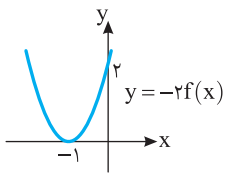


۲۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که همواره $f(x)\leq ۰$. بنابراین

$$y=|f(x)|-f(x)=-f(x)-f(x)=-۲f(x)$$

برای رسم کردن نمودار $y=-۲f(x)$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۲f(x)$ به‌دست بیاید.

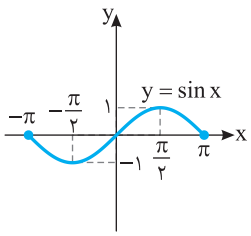


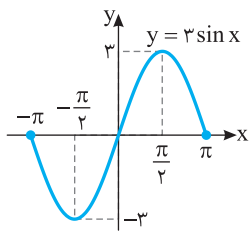


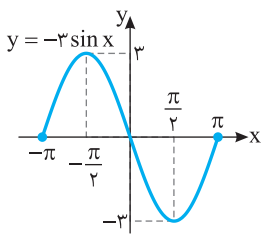
۲۱۲- گزینهٔ ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x+۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر متعلق به تابع $y=f(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲})$ است.

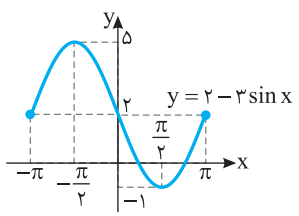
۲۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳\sin x$ به‌دست بیاید.

سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۳\sin x$ به‌دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y=-۳\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۲-۳\sin x$ به‌دست بیاید.

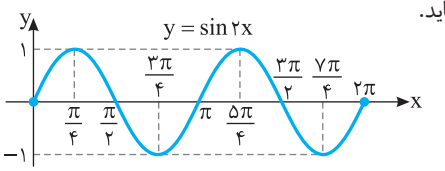


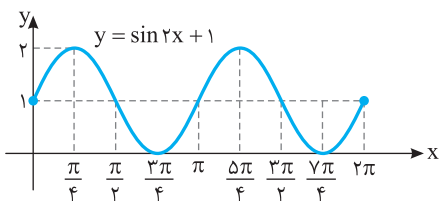






۲۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۴\pi]$ را ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.





۲۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است.

از طرف دیگر،

$$f(۰)=|a|-۲=a-۲,\quad f(a)=-۲$$

$$f(x)=۰\Rightarrow|x-a|-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x-a=۲\Rightarrow x=a+۲\\ x-a=-۲\Rightarrow x=a-۲\end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

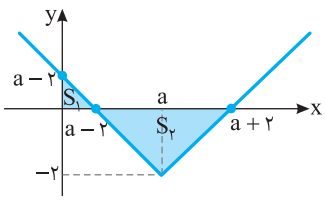
$$S_۱=\frac{(a-۲)^۲}{۲},\quad S_۲=\frac{۲(a+۲-(a-۲))}{۲}=۴$$

$$S_۱+S_۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\frac{(a-۲)^۲}{۲}+۴=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a^۲-۴a+۴+۸=۹$$

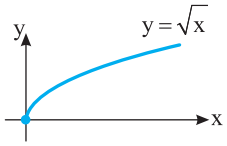
$$a^۲-۴a+۳=۰\Rightarrow(a-۳)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۳,\ a=۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

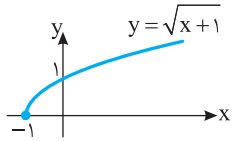
اگر $a=۱$، آن‌گاه $f(x)=|x-۱|-۲$ و در نتیجه $f(۰)=-۱$ ولی در نمودار رسم شده مقدار $f(۰)$ عددی مثبت است. پس $a=۱$ قابل قبول نیست. در نتیجه

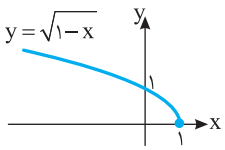
$$f(x)=|x-۳|-۲\Rightarrow f(\frac{۱}{a})=f(\frac{۱}{۳})=|\frac{۱}{۳}-۳|-۲=\frac{۲}{۳}$$

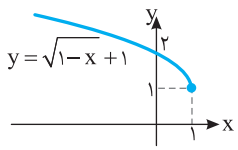


۲۱۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.

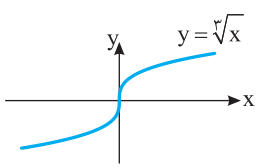


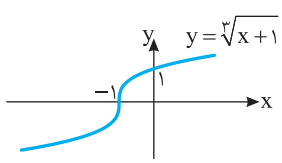


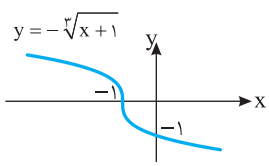




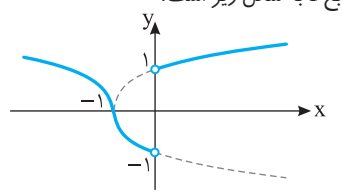
۲۱۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & x>۰\\ -\sqrt[۳]{x+۱} & x<۰\end{cases}$ است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[۳]{x+۱}$ و $y=-\sqrt[۳]{x+۱}$ به‌صورت زیر است:







بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



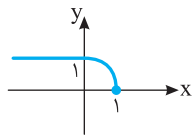
۲۱۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $h(x)=x+|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

$$D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x\mid -۲\le x+|x|\le ۲\}=(-\infty,۱]$$

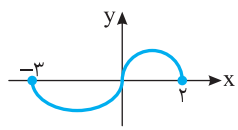
اکنون توجه کنید که

$$x\le ۰\Rightarrow g(x)=-f(x-x)=-f(۰)=۱$$
$$۰<x\le ۱\Rightarrow g(x)=-f(x+x)=-f(۲x)$$

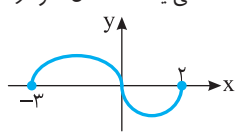
پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\le ۰\\ -f(۲x) & ۰<x\le ۱\end{cases}$. پس در بازهٔ $(-\infty,۰]$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $(۰,۱]$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در بازهٔ $(۰,۲]$ را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.



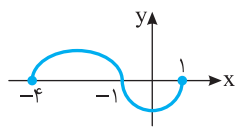
۲۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+۱))$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



$y=f(-x)$



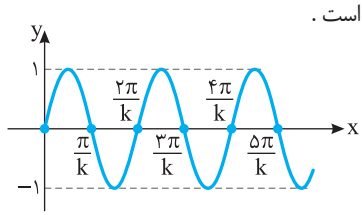
$y=-f(-x)$



$y=-f(-x-۱)$

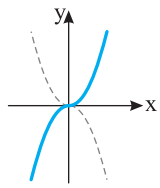
راه‌حل دوم در شکل (۲)، نقطهٔ $(-۴,۰)$ روی نمودار تابع است. در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ازای $x=-۴$ مقادیر $f(۵)$ و $f(-۵)$ ظاهر می‌شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و ۵− در دامنهٔ تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می‌شوند.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ مطابق شکل باید $\frac{۴\pi}{k}\le\frac{\pi}{۲}<\frac{۵\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار محور طول‌ها را روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ قطع کند. بنابراین $۸\le k<۱۰$ ، پس حداقل مقدار k برابر ۸ است.



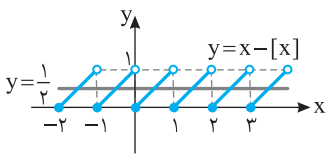
۲۲۱- گزینهٔ ۲ با توجه به دو زوج مرتب $(۲b,۳)$ و $(۲,۳)$ نتیجه می‌گیریم که $۲b=۲$ و در نتیجه $b=۱$. با توجه به دو زوج مرتب $(۲a,۱)$ و $(b,۱)$ نتیجه می‌گیریم $۲a=b$ ، پس $a=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $a+b=\frac{۳}{۲}$.

۲۲۲- گزینهٔ ۳ توابع $y=x^۲$ ، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک‌به‌یک نیستند، چون خطی موازی محور طول‌ها وجود دارد که نمودار آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر است و هر خط موازی محور طول‌ها آن را در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

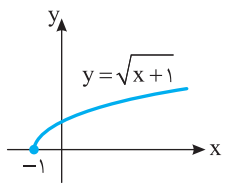


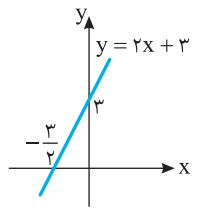
$$y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x\le ۰\end{cases}$$

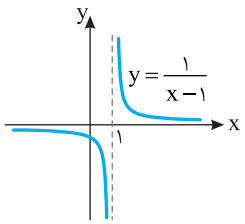
۲۲۳- گزینهٔ ۴ توابع $y=\sqrt{x+۱}$ ، $y=۲x+۳$ و $y=\frac{۱}{x-۱}$ یک‌به‌یک هستند چون هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. تابع $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{۱}{۲}$ نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار سایر توابع به‌صورت زیر است:





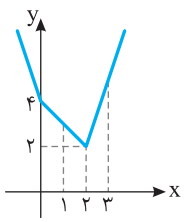


۲۲۴- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=x^۳-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا $f(۰)=f(۱)=۰$

۲۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۴ & x\ge ۲\\ -x+۴ & ۰\le x\le ۲\\ -۳x+۴ & x\le ۰\end{cases}$$

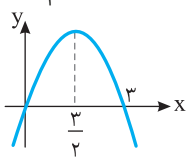
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های $(-\infty,۲]$ و $[۲,+\infty)$ و $[۰,۲]$ یک‌به‌یک است ولی روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک نیست.



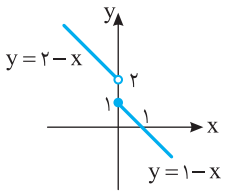
۲۲۶- گزینهٔ ۱ شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع $-۲a-۳=۰$ است. پس $a=-\frac{۳}{۲}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x)=\frac{ax+۳}{x-۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}x+۳}{x-۲}=\frac{-۳x+۶}{۲x-۴}=\frac{-۳(x-۲)}{۲(x-۲)}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۳)=-\frac{۳}{۲}$$

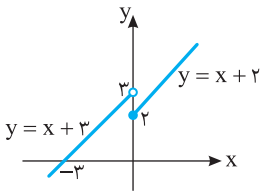
۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل معلوم است که تابع روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۲}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a>\frac{۳}{۲}$، خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۳}{۲}$ است.



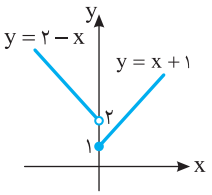
۲۲۸- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت روبه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است. نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:



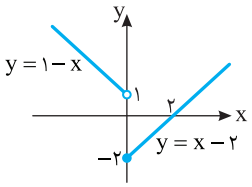
گزینهٔ (۱)



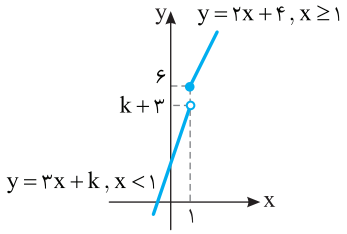
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



۲۲۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت زیر است. مطابق شکل واضح است که با شرط $k+۳\leq ۶$ تابع f یک‌به‌یک است. پس $k\leq ۳$.



راه‌حل دوم اگر $x\geq ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=۲x+۴$ یک‌به‌یک است. همچنین اگر $x<۱$، تابع $h(x)=۳x+k$ یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x\geq ۱\Rightarrow ۲x\geq ۲\Rightarrow ۲x+۴\geq ۶\Rightarrow g(x)\geq ۶\Rightarrow R_g=[۶,+\infty)$$

$$x<۱\Rightarrow ۳x<۳\Rightarrow ۳x+k<k+۳\Rightarrow h(x)<k+۳\Rightarrow R_h=(-\infty,k+۳)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد، باید

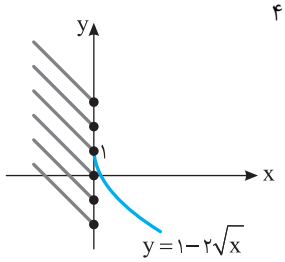
$$R_g\cap R_h=\varnothing\Rightarrow[۶,+\infty)\cap(-\infty,k+۳)=\varnothing\Rightarrow k+۳\leq ۶\Rightarrow k\leq ۳$$

پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

۲۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $۴k-x$ به‌ازای $x\leq ۰$ از ۱ کمتر نباشد:

$$x\leq ۰\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow ۴k-x\geq ۴k$$

یعنی $۴k\geq ۱$، پس $k\geq\frac{۱}{۴}$.



راه‌حل دوم اگر $x>۰$، آن‌گاه تابع $g(x)=۱-۲\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است و اگر $x\leq ۰$، آن‌گاه تابع $h(x)=۴k-x$ یک‌به‌یک است و

$$x>۰\Rightarrow\sqrt{x}>۰\Rightarrow -۲\sqrt{x}<۰\Rightarrow ۱-۲\sqrt{x}<۱\Rightarrow R_g=(-\infty,۱)$$

$$x\leq ۰\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow ۴k-x\geq ۴k\Rightarrow R_h=[۴k,+\infty)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک شود، باید $R_g\cap R_h=\varnothing$. پس

$$۴k\geq ۱\Rightarrow k\geq\frac{۱}{۴}$$

۲۳۱- گزینهٔ ۳ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۹,۱)$ و $(a^۲,۱)$ مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^۲=۹\Rightarrow a=\pm ۳$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های $(۶,۲)$ و $(۳a+b,۲)$ نیز مساوی باشند، پس $۳a+b=۶$، بنابراین $b=۶-۳a$.

اگر $a=۳$، آن‌گاه $b=-۳$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(۳,۹)\}$$

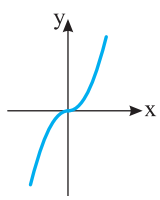
اگر $a=-۳$، آن‌گاه $b=۱۵$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(-۳,-۴۵)\}$$

پس $a-b=۶$ یا $a-b=-۱۸$.

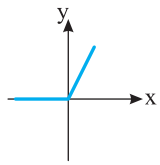
۲۳۲- گزینهٔ ۳ در گزینهٔ (۱)، $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۲)، $x\neq ۰$، $f(x)=|x|$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۴) مثلاً $f(۱)=f(-۱)$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۳) نمودار تابع به‌صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

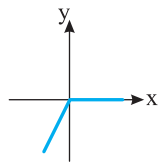


۲۳۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

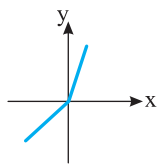
گزینهٔ (۱): $f(x)=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



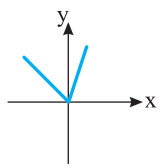
گزینهٔ (۲): $f(x)=x-|x|=\begin{cases}2x & x<0\\ 0 & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



گزینهٔ (۳): $f(x)=2x+|x|=\begin{cases}x & x<0\\ 3x & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است



گزینهٔ (۴): $f(x)=x+2|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ 3x & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



۲۳۴- گزینهٔ ۱ در تابع گزینهٔ (۲)، $f(0)=f(1)=f(-1)=0$.

در تابع گزینهٔ (۳)، اگر $x\leq 0$، آن‌گاه $f(x)=0$.

در تابع گزینهٔ (۴)، $f(0)=f(2)=0$.

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک است. اگر $(x_1,f(x_1))$ و $(x_2,f(x_2))$ دو زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه

$$x_1^3+x_1+1=x_2^3+x_2+1\Rightarrow x_1^3-x_2^3+x_1-x_2=0$$
$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1-x_2)=0$$
$$(x_1-x_2)\underbrace{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)}_{A}=0 \qquad (1)$$

اکنون توجه کنید که

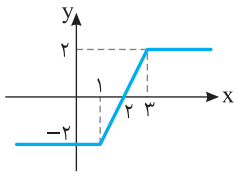
$$A=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1>0$$

بنابراین از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x_1-x_2=0$، پس $x_1=x_2$ و تابع f یک‌به‌یک است.

۲۳۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

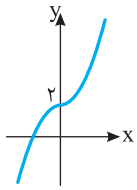
$$x\geq 3\Rightarrow f(x)=x-1-x+3=2$$
$$1\leq x\leq 3\Rightarrow f(x)=x-1+x-3=2x-4$$
$$x\leq 1\Rightarrow f(x)=-x+1+x-3=-2$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و این تابع روی بازهٔ $[1,3]$ یک‌به‌یک است. توجه کنید که تابع f روی هر بازهٔ $[c,d]$ که $c\geq 1$ و $d\leq 3$ نیز یک‌به‌یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b-a$ برابر ۲ است.

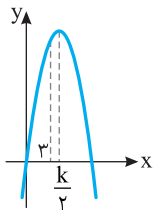


۲۳۶- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ یک‌به‌یک است و اگر $ad-bc=0$، آن‌گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست. پس اگر $k^3-4k=0$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک نیست. از معادلهٔ اخیر به‌دست می‌آید $k=0$ و $k=\pm 2$. پس به‌ازای سه مقدار مختلف k تابع f یک‌به‌یک نیست.

۲۳۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ x^2+2 & x\geq 0\end{cases}$ به شکل زیر است. واضح است که تابع یک‌به‌یک است. بقیهٔ گزینه‌ها را می‌توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض، رد کنید.



۲۳۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=-x^2+kx$ به شکل مقابل است. اگر $x=3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع در بازهٔ $(-\infty,3]$ یک‌به‌یک است. بنابراین



$$3\leq\frac{k}{2}\Rightarrow k\geq 6$$

۲۳۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه

$$x_1-k\sqrt{x_1}=x_2-k\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1-x_2-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k)=0$$

اگر $k<0$، آن‌گاه $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k\neq 0$ و در نتیجه

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0\Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

به‌ازای $k=0$ هم تابع به‌صورت $f(x)=x$ است و یک‌به‌یک است. اما اگر $k>0$، آن‌گاه از $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k=0$ می‌توان مقدار x_1 را برحسب x_2 به‌دست آورد و از $f(x_1)=f(x_2)$ لزوماً $x_1=x_2$ نتیجه نمی‌شود. پس در این حالت تابع یک‌به‌یک نیست.

راه‌حل دوم (این راه‌حل پس از مطالعهٔ فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است.) تابع f روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد، اکیداً یکنواست. اکنون توجه کنید که $f'(x)=۱-\frac{k}{۲\sqrt{x}}=\frac{۲\sqrt{x}-k}{۲\sqrt{x}}$.

اگر $k\leq ۰$، آن‌گاه $f'(x)>۰$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k>۰$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[۰,\frac{k^۲}{۴}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{k^۲}{۴},+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ غیریکنواست.

۲۴۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $f(x^۳+۳)=f(x^۲+۱)$ می‌نویسیم. چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^۳+۳=x^۲+۱\Rightarrow x^۳-x^۲+۲=۰$$

واضح است که $x=-۱$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت $x^۳-x^۲+۲$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-x^۲+۲=(x+۱)(x^۲-۲x+۲)=۰$$

معادلهٔ $x^۲-۲x+۲=۰$ جواب ندارد. پس $x=-۱$ تنها جواب معادله است.

۲۴۱- گزینهٔ ۲ تابع گزینهٔ (۱) صعودی نیست، زیرا $۱<۲$، اما $f(۱)>f(۲)$.

تابع گزینهٔ (۲) صعودی است، زیرا $۲<۴<۵$ و $f(۲)=f(۴)<f(۵)$.

تابع گزینهٔ (۳) صعودی نیست، زیرا $۲<۳$، اما $f(۲)>f(۳)$.

تابع گزینهٔ (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-۲<۳$، اما $f(-۲)>f(۳)$.

۲۴۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$۱<۲<۳\Rightarrow f(۱)<f(۲)<f(۳)\Rightarrow a^۲-۱<a+۱<۳a-۱$$

$$a^۲-۱<a+۱\Rightarrow(a+۱)(a-۲)<۰\Rightarrow -۱<a<۲ \qquad (۱)$$

$$a+۱<۳a-۱\Rightarrow a>۱ \qquad (۲)$$

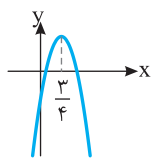
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $۱<a<۲$.

۲۴۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازهٔ $[-۲,۳]$ و هر بازهٔ $[a,b]$ که $-۲\leq a<b\leq ۳$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۲۴۴- گزینهٔ ۱ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>۱$، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

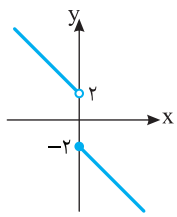
$$k^۲-۳>۱\Rightarrow k^۲>۴\Rightarrow |k|>۲$$

۲۴۵- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=-۴x^۲+۶x-۱$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۴}$.



از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت زیر است و این تابع نزولی است.



$$f(x)=\begin{cases}-x-۲ & x\geq ۰\\ -x+۲ & x<۰\end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

۲۴۷- گزینهٔ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همهٔ مقادیر تابع $y_۲=۲x+۱$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_۱=x+a$ باشد:

$$\begin{cases}x\geq ۱\Rightarrow x+a\geq ۱+a\Rightarrow y_۱\geq ۱+a\\ x<۱\Rightarrow ۲x+۱<۳\Rightarrow y_۲<۳\end{cases}$$

بنابراین $۱+a\leq ۳$. پس $a\geq ۲$.

۲۴۸- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$۲m-۱\geq m+۱\Rightarrow m\geq ۲$$

۲۴۹- گزینهٔ ۲ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $f(x)\geq ۰$ را حل کنیم. چون $f(۰)=۰$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)<f(۰)$، پس باید نامعادلهٔ $f(x)\geq f(۰)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\geq ۰$. پس $D_g=[۰,+\infty)$.

۲۵۰- گزینهٔ ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، تابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$، یعنی تابع $۲f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$-۲<۰<۱\Rightarrow ۴x\leq x^۲+۳\leq ۷x-x^۲$$

$$۴x\leq x^۲+۳\Rightarrow x^۲-۴x+۳\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱ \text{ یا } x\geq ۳ \qquad (۱)$$

$$x^۲+۳\leq ۷x-x^۲\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۳\leq ۰$$

$$(۲x-۱)(x-۳)\leq ۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}\leq x\leq ۳ \qquad (۲)$$

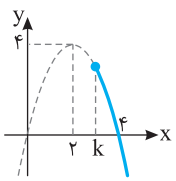
با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x=۳$ یا $\frac{۱}{۲}\leq x\leq ۱$، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به‌ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

۲۵۳- گزینهٔ ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازهٔ $[-۳,۱]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

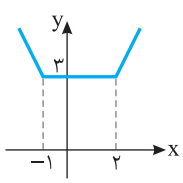
۲۵۴- گزینهٔ ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

$$۰<k-۱<۱\Rightarrow ۱<k<۲$$

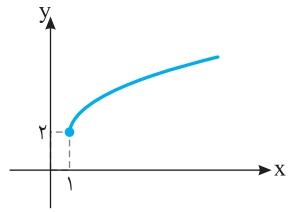
۲۵۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد، بنابراین $k\geq ۲$.



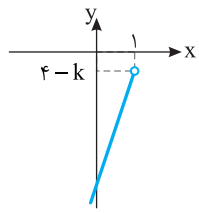
۲۵۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. چون تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند $[a,b]$ که $-۱\leq a<b\leq ۲$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۲$، که در این صورت $b-a=۳$.



۲۵۷- گزینهٔ ۳ توابع $y=\sqrt{x-1}+2$ و $y=4x-k$ صعودی هستند.



$y=\sqrt{x-1}+2$



$y=4x-k, x<1$

مطابق شکل‌های بالا کافی است $4-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $4-k\leq 2$، در نتیجه $k\geq 2$.

۲۵۸- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^2-3<2a\Rightarrow a^2-2a-3<0\Rightarrow(a+1)(a-3)<0\Rightarrow -1<a<3$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x-2)-2\geq 0\Rightarrow f(x-2)\geq 2\Rightarrow f(x-2)\geq f(1)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x-2\leq 1\Rightarrow x\leq 3$

بنابراین $D_g=(-\infty,3]$.

۲۶۰- گزینهٔ ۲ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۶۱- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$1<2<3\Rightarrow f(1)\leq f(2)\leq f(3)\Rightarrow m-1\leq 2m\leq m+3$$

$$m-1\leq 2m\Rightarrow m\geq -1,\quad 2m\leq m+3\Rightarrow m\leq 3$$

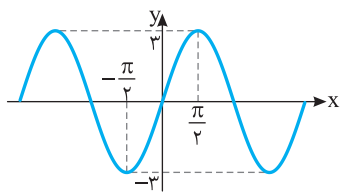
بنابراین $-1\leq m\leq 3$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و ۱- را داشته باشد.

۲۶۲- گزینهٔ ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

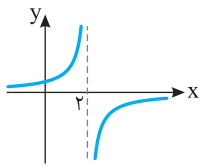
$$f(1)=f(2)=f(3),\quad a-2=3a+6=4a-b,\quad a=-4,\quad b=-10$$

در نتیجه $a+b=-14$.

۲۶۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر نقطهٔ آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=3\sin x$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $[-\frac{\pi}{2},a]$ که $-\frac{\pi}{2}\leq a\leq\frac{\pi}{2}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



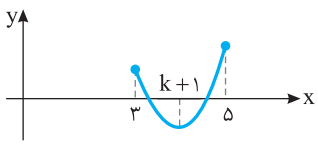
۲۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x+2}=\frac{1}{-(x-2)}$ به‌دست بیاید.



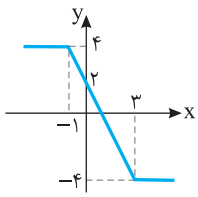
اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,2)$ و هر بازهٔ دیگری مانند $(-\infty,a)$ که $a\leq 2$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۶۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که $x=k+1$ است، در بازهٔ $(3,5)$ باشد، آن‌گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس

$$3<k+1<5\Rightarrow 2<k<4$$



۲۶۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-1,3]$ و هر بازه‌ای به صورت $[a,b]$ که $-1\leq a<b\leq 3$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=3$، که در این صورت $b-a=4$.



۲۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=kx+|x-1|=\begin{cases}(k+1)x-1 & x\geq 1\\ (k-1)x+1 & x<1\end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطهٔ تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases}k+1\geq 0\\ k-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow k\geq 1$$

۲۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x>6\Rightarrow f(x)>f(6)\Rightarrow f(x)>0$$

$$x<6\Rightarrow f(x)<f(6)\Rightarrow f(x)<0$$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $\frac{4-x^2}{f(x)}\geq 0$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$$x\in(-\infty,-2]\cup[2,6)$$

بنابراین در دامنهٔ تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4-x^2}{f(x)}$		$+$	0	$-$	0	$+$	ت ن	$-$	

۲۶۹- گزینهٔ ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+1$ نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y=\sqrt{x}+1$ همواره مثبت هستند.

بنابراین تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x$ و $y=x^3$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها یعنی $y=x^3+x$ صعودی است. توابع سه گزینهٔ دیگر غیریکنوا هستند.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-1}og^{-1})(a)=-1$ مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(a))=-1\Rightarrow f(-1)=g^{-1}(a)$$

$$4=g^{-1}(a)\Rightarrow g(4)=a\Rightarrow a=-2$$

بنابراین مقدار $f^{-1}(-2)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(3)=-2$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(-2)=3$.

۲۷۲- گزینهٔ ۴ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(2,-1),(5,3),(3,-2),(-1,5)\}$$

در نتیجه $gof^{-1}=\{(2,4),(5,0)\}$.

۲۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $g(3)=2$، پس $g^{-1}(2)=3$. بنابراین

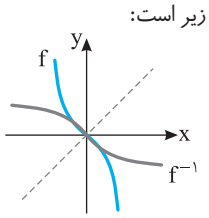
$$f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6\Rightarrow f^{-1}(a)+3=6$$

$$f^{-1}(a)=3\Rightarrow f(3)=a\Rightarrow a=2$$

در نتیجه $g(a)=g(2)=4$.

۲۷۴- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(9,11)$ عبور می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(11,9)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:



۲۷۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+1)^2-1$$

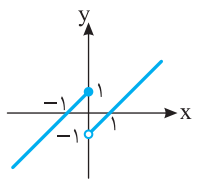
$$-1\le x\le 2\Rightarrow 0\le x+1\le 3$$

$$0\le(x+1)^2\le 9\Rightarrow -1\le(x+1)^2-1\le 8\Rightarrow -1\le f(x)\le 8$$

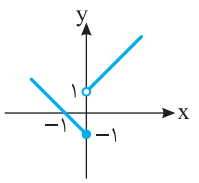
بنابراین $D_{f^{-1}}=R_f=[-1,8]$.

۲۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

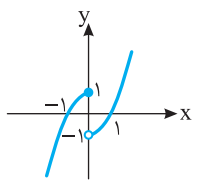
گزینهٔ (۱)



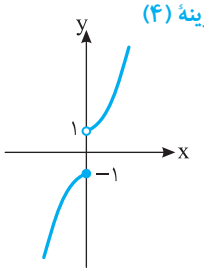
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینهٔ (۴) وارون‌پذیر است.

۲۷۸- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم نمودار تابع f^{-1} به‌دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x)=3x-4$ را به‌دست آوریم.

$$y=3x-4\Rightarrow y+4=3x\Rightarrow x=\frac{y+4}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

بنابراین معادلهٔ خط جدید $y=\frac{x+4}{3}$ است.

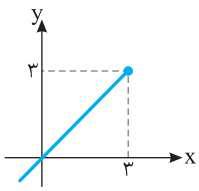
۲۷۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از تساوی $y=\sqrt{x-1}+2$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y-2=\sqrt{x-1}\Rightarrow(y-2)^2=x-1\Rightarrow x=(y-2)^2+1\Rightarrow x=y^2-4y+5$$

بنابراین $f^{-1}(x)=x^2-4x+5$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(1)=2$، پس $f^{-1}(2)=1$ که فقط در تابع گزینهٔ (۳) صدق می‌کند.

۲۸۰- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in D_f$ تساوی $(f^{-1}of)(x)=x$ برقرار است. پس تابع g به‌صورت $g(x)=x, x\le 3$ است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.



۲۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{1,2,3,5\}$ و

$$f^{-1}=\{(3,1),(4,2),(2,3),(1,5)\}\Rightarrow D_{f^{-1}}=\{3,4,2,1\}$$

بنابراین

$$D_{f\times f^{-1}}=D_f\cap D_{f^{-1}}=\{1,2,3\}$$

$$(f\times f^{-1})(1)=f(1)\times f^{-1}(1)=3\times 5=15$$

$$(f\times f^{-1})(2)=f(2)\times f^{-1}(2)=4\times 3=12$$

$$(f\times f^{-1})(3)=f(3)\times f^{-1}(3)=2\times 1=2$$

بنابراین تابع $f\times f^{-1}$ به‌صورت زیر است

$$f\times f^{-1}=\{(1,15),(2,12),(3,2)\}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $f^{-1}(3)=a$. پس $f(a)=3$ و در نتیجه

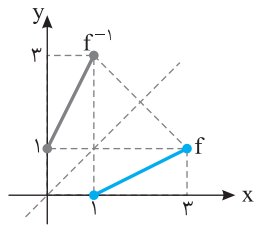
$$\frac{a}{a-1}=3\Rightarrow a=3a-3\Rightarrow 2a=3\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

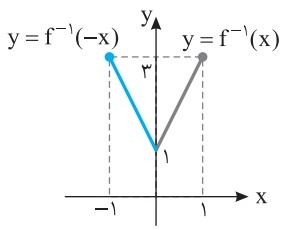
یعنی $f^{-1}(3)=\frac{3}{2}$.

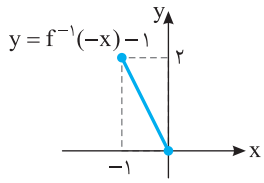
۲۸۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(8,9)$ عبور می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(9,8)$ عبور می‌کند:

$$f(8)=8+\sqrt[3]{8}-1=9\Rightarrow f^{-1}(9)=8$$

۲۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-1$ به‌دست بیاید.







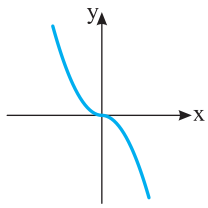
۲۸۵- گزینهٔ ۳ برد تابع f^{-1} برابر دامنهٔ تابع f است. پس دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$۴x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\ ,\quad x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱$$

پس $R_{f^{-1}}=D_f=[۰,۱)\cup(۱,۴]$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در برد تابع f^{-1} قرار دارند.

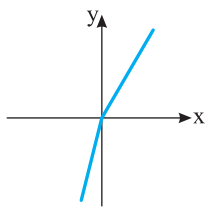
۲۸۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های چهار گزینه به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱)



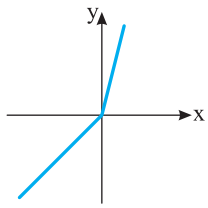
$$f(x)=-x|x|=\begin{cases}x^۲ & x<۰\\ -x^۲ & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۲)



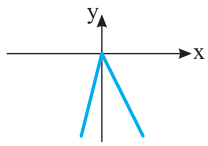
$$f(x)=۳x-|x|=\begin{cases}۴x & x<۰\\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۳)



$$f(x)=۲x+|x|=\begin{cases}x & x<۰\\ ۳x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۴)



$$f(x)=x-۳|x|=\begin{cases}۴x & x<۰\\ -۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=x-۳|x|$ وارون‌پذیر نیست.

۲۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$y=a-۳x\Rightarrow ۳x=a-y\Rightarrow x=\frac{a-y}{۳}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{a-x}{۳}$$

بنابراین باید معادلهٔ $x^۲=\frac{a-x}{۳}$ فقط یک جواب داشته باشد

$$۳x^۲+x-a=۰\ ,\quad \Delta=۱+۱۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۱۲}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴x+۲=(x-۲)^۲-۲, D_f=[۲,+\infty)$$

بنابراین f تابعی یک‌به‌یک است. توجه کنید که

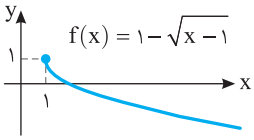
$$y=(x-۲)^۲-۲\Rightarrow (x-۲)^۲=y+۲\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y+۲}$$

$$\xrightarrow{x\geq ۲} x-۲=\sqrt{y+۲}\Rightarrow x=\sqrt{y+۲}+۲$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\sqrt{x+۲}+۲$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$.

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع f، $R_f=(-\infty,۱]$، بنابراین دامنهٔ تابع fof^{-1} برابر $(-\infty,۱]$ است.



۲۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow (g^{-۱}of)(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow g^{-۱}(f(x))=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(x-۱)=\frac{x-۲}{۲}\xrightarrow{(x\to x+۱)} g^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ را پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$(f^{-۱}og)(x)=۲x+۲\quad (۱)$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(x)=x+۱$، پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-۱}(g(x))=۲x+۲\Rightarrow g(x)+۱=۲x+۲\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

۲۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,-۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-۱}=\{(۲,۲),(۱,۳),(-۱,۴),(-۲,۱)\}$$

اکنون $g^{-۱}of^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۲\xrightarrow{f^{-۱}}۱\xrightarrow{g^{-۱}}۳$$
$$۳\longrightarrow ۲\longrightarrow ۲$$
$$۴\longrightarrow -۲\longrightarrow ۱$$
$$۱\longrightarrow ۴\longrightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

توجه کنید که می‌توان ابتدا fog را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$ مسئله را حل کرد.

۲۹۲- گزینهٔ ۱ اگر نقطه‌های $(۷,a)$ و $(-۱,b)$ روی نمودار تابع وارون تابع f باشند، نقطه‌های $(a,۷)$ و $(b,-۱)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی‌دانیم a و b بزرگ‌تر از یک هستند یا کوچک‌تر از آن. پس با فرض $x<۱$ به‌دست می‌آید:

$$x+۳=۷\Rightarrow x=۴\ (\text{ق.ق}),\quad x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

همچنین با فرض $x\geq ۱$،

$$۳x+۱=۷\Rightarrow x=۲\ (\text{ق.ق})\ ,\quad ۳x+۱=-۱\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(-۴)=-۱\Rightarrow f^{-۱}(-۱)=-۴\ ,\quad f(۲)=۷\Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

بنابراین $f^{-۱}(۷)+f^{-۱}(-۱)=۲-۴=-۲$.

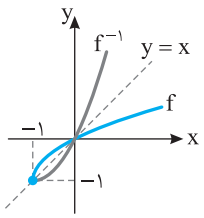
۲۹۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(۳,۲)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۲)=۳\Rightarrow ۸+۲+a=۳\Rightarrow a=-۷$$

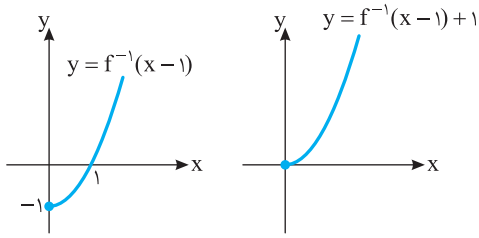
در نتیجه

$$f(x)=x^۳+x-۷\Rightarrow f(۳)=۲۷+۳-۷=۲۳$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y=f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(x-۱)+۱$ رسم می‌شود.



۲۹۵- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f\Rightarrow f(۱)=۲\Rightarrow\sqrt{a+b}=۲$$

$$(۱,۲)\in f^{-1}\Rightarrow(۲,۱)\in f\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow\sqrt{۲a+b}=۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases}a+b=۴\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=-۳, b=۷$$

بنابراین $ab=-۲۱$.

۲۹۶- گزینهٔ ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$.

در این صورت

$$f(۱)=۳\Rightarrow a+b=۳ \quad (۱)$$

$$f^{-1}(۱۱)=۳\Rightarrow f(۳)=۱۱\Rightarrow ۳a+b=۱۱ \quad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$. بنابراین $f(x)=۴x-۱$ و در نتیجه $f(-۳)=-۱۳$.

۲۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم که وارون تابع $f^{-1}(x)$ است:

$$y=۲x+k\Rightarrow ۲x=y-k\Rightarrow x=\frac{y-k}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x-k}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ $x^۲=\frac{x-k}{۲}$ نباید جواب داشته باشد

$$۲x^۲=x-k\Rightarrow ۲x^۲-x+k=۰,\quad \Delta<۰\Rightarrow ۱-۸k<۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۸}$$

۲۹۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x+۱)^۳-۱$. بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. از طرف دیگر،

$$y=(x+۱)^۳-۱\Rightarrow(x+۱)^۳=y+۱\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y+۱}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱$$

در نتیجه $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$.

۲۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f^{-1}(x)=\frac{x+a}{x-۲}$. بنابراین

$$f^{-1}(۳)=\frac{۳+a}{۳-۲}=a+۳$$ پس

$$(f^{-1}of^{-1})(۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(۳))=\frac{۹}{۴}$$

$$f^{-1}(a+۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{(a+۳)+a}{a+۳-۲}=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{۲a+۳}{a+۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۸a+۱۲=۹a+۹\Rightarrow a=۳$$

۳۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_{f^{-1}of}=D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$.

۳۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,-۱),(-۲,۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-1}=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۲),(۱,۱)\}$$

$$D_{f^{-1}-g^{-1}}=D_{f^{-1}}\cap D_{g^{-1}}=\{۲,۳,-۲,۱\}\cap\{۲,۳,۴,۱\}=\{۲,۳,۱\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1}-g^{-1}$ را به‌دست آوریم:

$$f^{-1}-g^{-1}=\{(۲,۱-۳),(۳,-۱-۴),(۱,۴-۱)\}$$
$$=\{(۲,-۲),(۳,-۵),(۱,۳)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1}-g^{-1}$ برابر است با

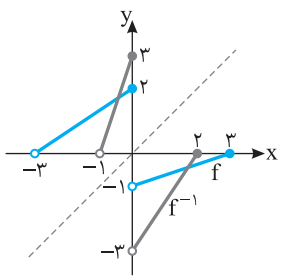
$$۲+(-۲)+۳+(-۵)+۱+۳=۲$$

۳۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۹)=\sqrt[۳]{۹-۱}+۲=۲+۲=۴$. پس $f^{-1}(۴)=۹$ و در نتیجه $f(۹)+f^{-1}(۴)=۱۳$.

۳۰۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۱۳)$ عبور می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(۱۳,۸)$ می‌گذرد:

$$f(۸)=۲\times۸+\sqrt[۳]{۸}-۵=۱۳\Rightarrow f^{-1}(۱۳)=۸$$

۳۰۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و f^{-1} در دو نقطه متقاطع‌اند.



۳۰۵- گزینهٔ ۳ چون $(۱,۲)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} است، پس $(۱,۲)\in f$ و $(۱,۲)\in f^{-1}$، یعنی $(۲,۱)\in f$. بنابراین

$$\begin{cases}f(۱)=۲\Rightarrow a\sqrt{b-۳}=۲\\ f(۲)=۱\Rightarrow a\sqrt{b-۶}=۱\end{cases}\Rightarrow\sqrt{b-۳}=۲\sqrt{b-۶}\Rightarrow b-۳=۴b-۲۴\Rightarrow b=۷$$

پس $a=۱$ و در نتیجه $a+b=۸$.

۳۰۶- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۳)=g(۶)-۱\Rightarrow g(۶)=f(۳)+۱$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(۲)=۳$ پس $f(۳)=۲$. در نتیجه $g(۶)=۲+۱=۳$.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$ می‌نویسیم. حالا x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+۱=(\sqrt{x}+۱)^۲\Rightarrow\sqrt{y+۱}=\sqrt{x}+۱$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱\Rightarrow x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$.

راه‌حل دوم

$$f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱$$

در بین گزینه‌های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینهٔ (۲)، به جای x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می‌شود.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x\geq ۱\Rightarrow f(x)=x+۲-x+۱-۲x=-۲x+۳ \\ -۲\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=x+۲+x-۱-۲x=۱ \\ x\leq -۲\Rightarrow f(x)=-x-۲+x-۱-۲x=-۲x-۳ \end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ وارون‌پذیر است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}-[a,b]$ که در آن $a\leq -۲$ و $b\geq ۱$ هم وارون‌پذیر است ولی برای اینکه $b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ در نظر می‌گیریم.

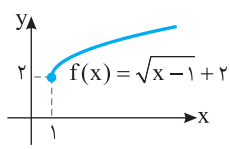
$$x>۱\Rightarrow y=-۲x+۳\Rightarrow x=\frac{۳-y}{۲}\Rightarrow\begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲} \\ \frac{۳-y}{۲}>۱\Rightarrow y<۱ \end{cases}$$

$$x<-۲\Rightarrow y=-۲x-۳\Rightarrow x=\frac{-y-۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{-x-۳}{۲} \\ \frac{-y-۳}{۲}<-۲\Rightarrow y>۱ \end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{۳-x}{۲} & x<۱ \\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱ \end{cases}$.

۳۰۹- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۲,+\infty)$. پس برای هر $x\geq ۲$، $g(x)=x+۳$. بنابراین

$$x\geq ۲\Rightarrow x+۳\geq ۵\Rightarrow g(x)\geq ۵\Rightarrow R_g=[۵,+\infty)$$



۳۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم که به‌صورت زیر هستند:

$$f^{-۱}(x)=(x-۱)^۳+۲,\quad g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)$$

$$=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^۳+۲=x+۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(۱+\sqrt[۳]{x-۲})=(۱+\sqrt[۳]{x-۲}-۱)^۳=x-۲$$

و $(gof)^{-۱}(x)=x+۲$. بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=x+۲$.

۳۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(fog^{-۱})(a)=a$.

بنابراین $f(g^{-۱}(a))=a$. چون $f(c)=a$، پس $g^{-۱}(a)=c$ و در نتیجه $g(c)=a$. به همین ترتیب

$$(fog^{-۱})(b)=c\Rightarrow f(g^{-۱}(b))=c\xrightarrow{f(b)=c}$$

$$g^{-۱}(b)=b\Rightarrow g(b)=b$$

$$(fog^{-۱})(c)=d\Rightarrow f(g^{-۱}(c))=d\xrightarrow{f(d)=d}$$

$$g^{-۱}(c)=d\Rightarrow g(d)=c$$

$$(fog^{-۱})(d)=b\Rightarrow f(g^{-۱}(d))=b\xrightarrow{f(a)=b}$$

$$g^{-۱}(d)=a\Rightarrow g(a)=d$$

پس $g=\{(a,d),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۱)=a$، در این صورت

$$f(a)=۱\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+۲}+۲}=۱\Rightarrow a+\sqrt{a+۲}+۲=۱$$

$$\sqrt{a+۲}=-a-۱\quad(*)\Rightarrow a+۲=a^۲+۲a+۱$$

$$a^۲+a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲},\ a=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ واضح است که $-a-۱\geq ۰$، پس $a\leq -۱$. بنابراین $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول نیست.

۳۱۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم طول نقطهٔ برخورد a باشد. در این صورت عرض آن $a+۱$ است. پس نقطهٔ $(a,a+۱)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ است. در نتیجه نقطهٔ $(a+۱,a)$ روی نمودار تابع f است. پس

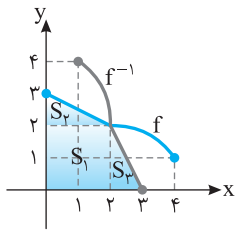
$$f(a+۱)=a\Rightarrow(a+۱)^۳+۲(a+۱)+۹=a$$

$$a^۳+۳a^۲+۴a+۱۲=۰\Rightarrow(a+۳)(a^۲+۴)=۰\Rightarrow a=-۳$$

پس عرض نقطهٔ برخورد $a+۱=-۲$ است.

۳۱۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S=S_۱+S_۲+S_۳\Rightarrow S=۲\times۲+\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۱\times۲}{۲}=۶$$



۳۱۵- گزینهٔ ۲ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. بنابراین

$$f(-1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3},\quad f(\frac{1}{3})=-1\Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-a+b=-\frac{2}{3}\\ a+3b=-\frac{26}{9}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{2}{9},\ b=-\frac{8}{9}$$

پس $a+b=-\frac{10}{9}$.

۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(g^{-1}of)(-1)=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3)=s$. در این صورت $g(s)=3$ و اگر در تساوی $g(x)=1-f(x+1)$ قرار دهیم $x=s$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}g(s)=1-f(s+1)\\ g(s)=3\end{cases}\Rightarrow f(s+1)=-2$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+1=4$، پس $s=3$. یعنی

$$g^{-1}(3)=3$$

۳۱۷- گزینهٔ ۳ از تساوی $y=\frac{2x+a}{x+b}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$yx+by=2x+a\Rightarrow (y-2)x=a-by\Rightarrow x=\frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{a-bx}{x-2}$ و در نتیجه $a=-4$، $b=-3$ و $ab=12$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}3x+(-(x-1)) & x<1\\ 3x+(x-1) & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ 4x-1 & x\geq 1\end{cases}$$

فرض کنید برای $x<1$، $g(x)=2x+1$ و برای $x\geq 1$، $h(x)=4x-1$، بنابراین

$$x<1\Rightarrow 2x+1<3\Rightarrow g(x)<3$$

$$g(x)=2x+1\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$x\geq 1\Rightarrow 4x-1\geq 3\Rightarrow h(x)\geq 3$$

$$h(x)=4x-1\Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x+1}{4}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x<3\\ \frac{x+1}{4} & x\geq 3\end{cases}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=1$ و $f(2)=7$، پس $f^{-1}(1)=0$ و $f^{-1}(7)=2$. این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۳۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون f و f^{-1} تابع‌هایی برابرند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(a+1)x+4}{3x-1}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-(a+1)}\Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$. پس $\frac{a+1}{3}=\frac{1}{3}$، در نتیجه $a=0$.

توجه کنید که اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-1}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f=f^{-1}$، آن‌گاه $a=-d$. بنابراین در اینجا $a+1=-(-1)$، در نتیجه $a=0$.

۳۲۰- گزینهٔ ۳ برای هر $x\in D_{f^{-1}}=R_f$ تساوی $(fof^{-1})(x)=x$ برقرار است. برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow \sqrt{x-1}+2\geq 2\Rightarrow f(x)\geq 2\Rightarrow R_f=[2,+\infty)$$

پس برای هر $x\geq 2$، $g(x)=2x$. بنابراین

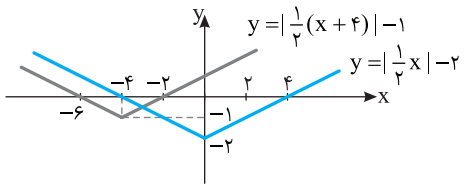
$$x\geq 2\Rightarrow 2x\geq 4\Rightarrow g(x)\geq 4\Rightarrow R_g=[4,+\infty)$$

۳۲۱- گزینهٔ ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطهٔ برخورد نمودارها جواب معادلهٔ زیر است:

$$|\frac{1}{2}(x+4)|-1=|\frac{1}{2}x|-2\qquad (1)$$

توجه کنید که x منفی و $x+4$ مثبت است. بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\frac{1}{2}(x+4)-1=-\frac{1}{2}x-2\Rightarrow x=-3$$



تجربی - ۹۳

۳۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(6)=5$، پس

$$a+\sqrt{a}=6\Rightarrow a=4$$

تجربی - ۹۱

۳۲۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x-1}{x+1})=\frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}$$

$$=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}=\frac{6x}{3}=2x$$

تجربی - ۹۶

۳۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x))=g(2x+3)=8x^2+22x+20$$

فرض می‌کنیم $2x+3=t$. در این صورت $x=\frac{t-3}{2}$ و

$$g(t)=8(\frac{t-3}{2})^2+22(\frac{t-3}{2})+20$$

$$=2t^2-12t+18+11t-33+20=2t^2-t+5$$

بنابراین $g(x)=2x^2-x+5$ و

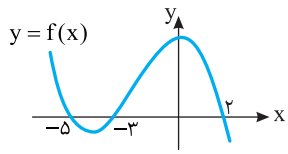
$$(fog)(x)=f(g(x))=2g(x)+3=2(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$$

ریاضی - ۹۲

۳۲۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه از نمودار $y=f(x-2)$ به نمودار $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل کنیم. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$، عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

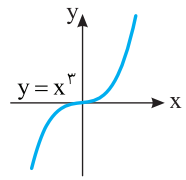
x	$-\infty$		-5		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$xf(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

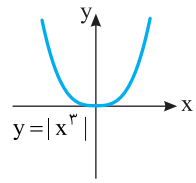
بنابراین $D_g=[-5,-3]\cup[0,2]$.



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۲۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به نمودار تابع $y=|x^3|$ معلوم می‌شود که این تابع یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌ناپذیر است.





راه‌حل دوم سه نقطهٔ $(1,1)$، $(-1,-1)$ و $(0,0)$ روی نمودار این تابع هستند، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۲۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f^{-1}og)(a)=f^{-1}(g(a))=6$.

بنابراین $g(a)=f(6)=12-5=7$. باتوجه به اینکه $g(4)=7$ نتیجه می‌شود

$$a=4$$

ریاضی - ۹۳

۳۲۸- گزینهٔ ۳ اگر $x<0$، آن‌گاه

$$y=-\sqrt{-x}\Rightarrow -x=y^2\Rightarrow x=-y^2\xrightarrow{y<0}x=y|y|$$

و اگر $x\geq 0$، آن‌گاه

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2\xrightarrow{y\geq 0}x=y|y|$$

بنابراین در هر حالتی $x=y|y|$ و ضابطهٔ تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-1}(x)=x|x|$ است.

تجربی - ۹۶

۳۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow xy-2y=x+4\Rightarrow x(y-1)=2y+4\Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}\Rightarrow x^2+3x-4=2x^2-8$$

$$x^2-3x-4=0\Rightarrow(x+1)(x-4)=0\Rightarrow x=-1, x=4$$

راه‌حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y=x$ را بیابیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x\Rightarrow x^2-2x=x+4\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=-1, x=4$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax+by=8\Rightarrow y=\frac{8-ax}{b},\quad 2x-3y=b\Rightarrow y=\frac{2x-b}{3}$$

چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینهٔ یکدیگر هستند، پس تابع‌های $y=\frac{8-ax}{b}$ و $y=\frac{2x-b}{3}$ وارون یکدیگرند. از طرف دیگر، وارون تابع $y=\frac{2x-b}{3}$ می‌شود $y=\frac{3x+b}{2}$. بنابراین $\frac{8}{b}=\frac{b}{2}$ و $\frac{-a}{b}=\frac{3}{2}$. در نتیجه $b^2=16$، یعنی $b=\pm 4$.

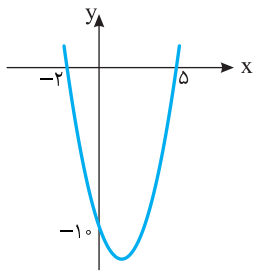
$$b=-4\Rightarrow\frac{-a}{-4}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=6\Rightarrow a+b=2$$

$$b=4\Rightarrow\frac{-a}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=-6\Rightarrow a+b=-2$$

بنابراین $a+b=\pm 2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۳۱- گزینهٔ ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-10=0$ هستند. جواب‌های این معادله $x=-2$ و $x=5$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.



خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3)=2x-3-[2x-3]=2x-3-[2x]+3=2x-[2x]$$

پس $g(x)=f(2x-3)-2f(x)=2x-[2x]-2x+2[x]=2[x]-[2x]$.

اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر $k\leq x<k+\frac{1}{2}$، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$2k\leq 2x<2k+1\Rightarrow[2x]=2k$$

بنابراین اگر $k+\frac{1}{2}\leq x<k+1$، آن‌گاه $[x]=k$ و $g(x)=2k-2k=0$.

$$2k+1\leq 2x<2k+2\Rightarrow[2x]=2k+1$$

بنابراین $g(x)=2k-2k-1=-1$. در نتیجه $R_g=\{-1,0\}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+۲)=(۲x+۴-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

اکنون معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۱۲x+۹$$

$$۱۶x=۸\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

تجربی - ۹۲

۳۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۲x+۳}{۲-x})=\frac{۱-۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}$$

$$=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{۲-x}}{\frac{۲x+۳+۴-۲x}{۲-x}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$.

از طرف دیگر، $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$ و $D_g=[۰,۱]$. در نتیجه

$$D_{gof}=\{x|x\neq\pm۱,\ ۰\leq\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\leq۱\}$$

$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\leq۱\Rightarrow\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}-۱=\frac{۱+x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲}\leq۰$$

$$\frac{۲x^۲}{۱-x^۲}\leq۰\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x=۰ \text{ یا } x>۱$$

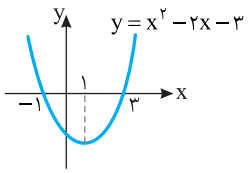
$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\geq۰\Rightarrow ۱-x^۲>۰\Rightarrow -۱<x<۱$$

از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع gof به‌دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof}=\{۰\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۳۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از نامساوی $-۲<x-۱<۲$ به‌دست می‌آید، پس $D_f=(-۱,۳)$. با توجه به نمودار تابع $y=x^۲-۲x-۳$، در بازهٔ $(-۱,۳)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.



ریاضی - ۹۱

۳۳۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از تساوی $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ نتیجه می‌شود

$$g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸\Rightarrow g(۸)=f^{-۱}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{۵\times۸+۹}=f^{-۱}(a)\Rightarrow f^{-۱}(a)=۷$$

پس $a=f(۷)$، یعنی $a=۳$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-۱}of^{-۱})(x)=(fog)^{-۱}(x)$. چون $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$، بنابراین $(fog)^{-۱}(a)=۸$. یعنی $(fog)(۸)=a$. در نتیجه

$$f(g(۸))=a\Rightarrow f(۷)=a\Rightarrow a=۳$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}۴x-۴ & x\leq۲\\ ۴ & x>۲\end{cases}$$

می‌نویسیم. تابع f در بازهٔ $(-\infty,۲]$ وارون‌پذیر است. فرض می‌کنیم $y=۴x-۴$، در این صورت $x=\frac{y+۴}{۴}$. از طرف دیگر،

$$x\leq۲\Rightarrow ۴x-۴\leq۴\Rightarrow y\leq۴$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱,\ x\leq۴$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا برای $۰<x<۱$ ضابطهٔ تابع وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\frac{x}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\sqrt{۱-x^۲}$$

$$y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲\Rightarrow x=\sqrt{۱-y^۲}$$

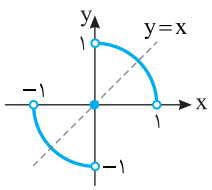
$$f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^۲}=f(x)$$

به همین ترتیب برای $-۱<x<۰$:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\frac{-x}{x}\sqrt{۱-x^۲}=-\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow y^۲=۱-x^۲$$

$$x^۲=۱-y^۲\Rightarrow x=-\sqrt{۱-y^۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-x^۲}=f(x)$$

همچنین $f(۰)=۰$، در نتیجه $f^{-۱}(۰)=۰$. پس در هر صورت می‌توان نوشت $f^{-۱}(x)=f(x)$. توجه کنید که نمودار تابع به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y=x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با خودش برابر است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۴۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۱=\sqrt{y}\Rightarrow x=\sqrt{y}-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۱$$

اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

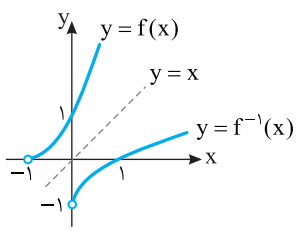
$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow(x+۱)^۲+۱=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x\geq۰}(x+۱)^۴+۲(x+۱)^۲+۱=x$$

$$(x+۱)^۴+۲x^۲+۳x+۳=۰$$

معادلهٔ بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$، نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. واضح است که دو نمودار نقطهٔ برخوردی ندارند.



ریاضی - ۹۲

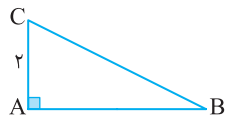
۳۴۱- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۶$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲\Rightarrow ۶^۲=۲^۲+AB^۲\Rightarrow AB^۲=۳۲$$

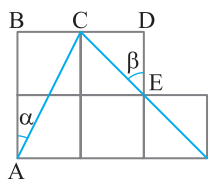
یعنی $AB=۴\sqrt{۲}$. بنابراین $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$.



۳۴۲- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل، $\sin\alpha=\frac{BC}{AC}$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AC=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$. بنابراین $\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. همچنین $\cos\beta=\frac{DE}{CE}$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $CE=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$. بنابراین $\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. به این ترتیب

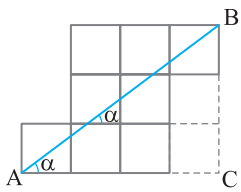
$$\sin\alpha-\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$$



۳۴۳- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=B\hat{A}C$، در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan B\hat{A}C=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۴}{۳}$$

پس $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}$.



۳۴۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، چون $C\hat{A}B=۴۵^\circ$ پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $B\hat{A}D=۶۰^\circ$. پس

$$\tan۶۰^\circ=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+۱\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{۳}-۱$$

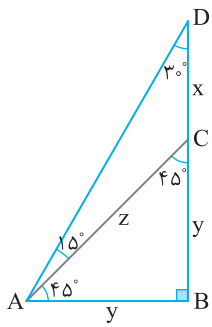
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow z^۲=y^۲+y^۲$$

$$z=y\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\frac{DC}{AC}=\frac{x}{\sqrt{۲}y}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$



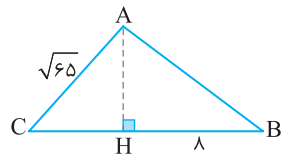
۳۴۵- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، در مورد زاویهٔ B می‌دانیم

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{HB}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۶$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:

$$AC^۲=CH^۲+AH^۲$$

$$۶۵=CH^۲+۳۶\Rightarrow CH=\sqrt{۲۹}$$



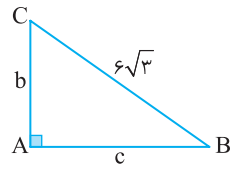
۳۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل $\cot\hat{B}=\frac{c}{b}=\sqrt{۲}$. بنابراین $c=b\sqrt{۲}$. از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$b^۲+c^۲=(۶\sqrt{۳})^۲\Rightarrow b^۲+(b\sqrt{۲})^۲=(۶\sqrt{۳})^۲$$

$$b^۲+۲b^۲=۳۶\times۳\Rightarrow b^۲=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $c=۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\sqrt{۲}=۱۸\sqrt{۲}$$



۳۴۷- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، $H\hat{O}C+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}=H\hat{O}C=\alpha$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

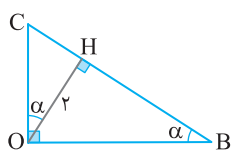
$$\sin\alpha=\sin\hat{B}=\frac{OH}{OB}=\frac{۲}{OB}\Rightarrow OB=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH،

$$\cos\alpha=\frac{OH}{OC}=\frac{۲}{OC}\Rightarrow OC=\frac{۲}{\cos\alpha}$$

بنابراین

$$OB+OC=\frac{۲}{\sin\alpha}+\frac{۲}{\cos\alpha}$$



۳۴۸- گزینهٔ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، $\sin\alpha=\frac{y}{۴}$. بنابراین باید مقدار y را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، $x^۲+y^۲=۹$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

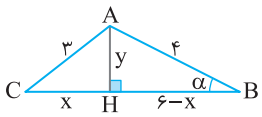
$$y^۲+(۶-x)^۲=۱۶\Rightarrow y^۲+x^۲-۱۲x+۳۶=۱۶$$

با جای‌گذاری $x^۲+y^۲=۹$ به‌دست می‌آید

$$۹-۱۲x+۳۶=۱۶\Rightarrow ۱۲x=۲۹\Rightarrow x=\frac{۲۹}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{x^۲+y^۲=۹}(\frac{۲۹}{۱۲})^۲+y^۲=۹\Rightarrow y^۲=\frac{۴۵۵}{۱۴۴}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}$$

و در نتیجه

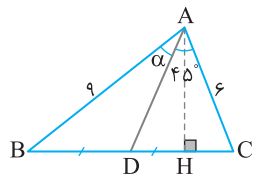


$$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴۸}$$

۳۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع وارد از رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}=۱$. بنابراین

$$S_{ABD}=S_{ACD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\alpha=\frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin۴۵^\circ$$

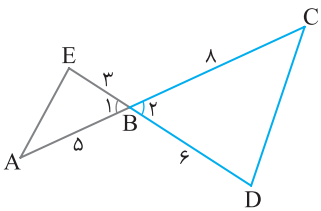
$$AB\times\sin\alpha=AC\times\sin۴۵^\circ\Rightarrow۹\times\sin\alpha=۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$



۳۵۰- گزینهٔ ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$، از طرف دیگر،

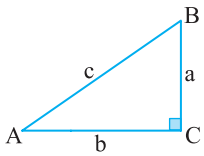
$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}\times۳\times۵\times\sin\hat{B}_۱,\quad S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸\times\sin\hat{B}_۲$$

بنابراین



$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}=\frac{۵}{۱۶}$$

۳۵۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل،



$$\sin\hat{B}=\frac{b}{c}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow c=\frac{۵}{۴}b$$

از طرف دیگر $b+c=۷$. بنابراین

$$b+\frac{۵}{۴}b=۷\Rightarrow\frac{۹b}{۴}=۷\Rightarrow b=\frac{۲۸}{۹},\ c=\frac{۵}{۴}\times\frac{۲۸}{۹}=\frac{۳۵}{۹}$$

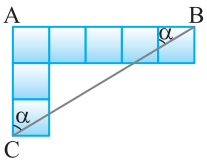
اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow(\frac{۳۵}{۹})^۲=a^۲+(\frac{۲۸}{۹})^۲$$

$$a^۲=\frac{۳۵^۲-۲۸^۲}{۹^۲}=\frac{(۳۵-۲۸)(۳۵+۲۸)}{۹^۲}=\frac{۷\times۶۳}{۹^۲}=\frac{۷\times۷}{۹}=\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

۳۵۲- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{AC}=\frac{۵}{۳}$$



۳۵۳- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

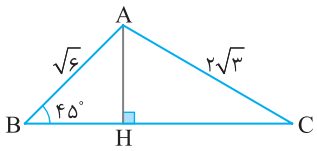
$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin۴۵^\circ=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow AH=\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر چون $\tan\hat{B}=\tan۴۵^\circ=\frac{AH}{BH}$، پس $\frac{\sqrt{۳}}{BH}=۱$، بنابراین $BH=\sqrt{۳}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$AH^۲+HC^۲=AC^۲\Rightarrow(\sqrt{۳})^۲+HC^۲=(۲\sqrt{۳})^۲$$

$$HC^۲=۹\Rightarrow HC=۳$$

بنابراین $\frac{HC}{BH}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$.

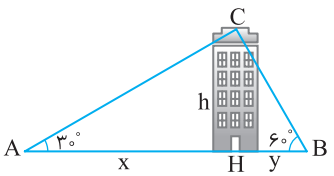


۳۵۴- گزینهٔ ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH،

$$\tan۳۰^\circ=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=\sqrt{۳}h,\quad\tan۶۰^\circ=\frac{h}{y}=\sqrt{۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h$$

بنابراین $x+y=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h$. از طرف دیگر $x+y=۲۴$، بنابراین

$$۲۴=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h\Rightarrow h=۶\sqrt{۳}$$

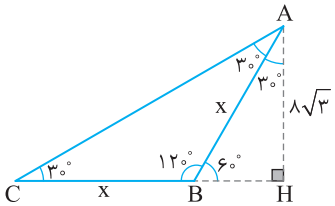


۳۵۵- گزینهٔ ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$\tan۶۰^\circ=\frac{AH}{BH}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۸\sqrt{۳}}{BH}\Rightarrow BH=۸$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

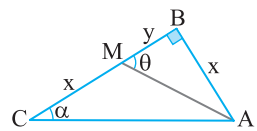
$$\sin A\hat{B}H=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin۶۰^\circ=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow x=۱۶$$



۳۵۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق فرض $\tan\theta=۳\tan\alpha$، بنابراین $\frac{x}{y}=\frac{۳x}{x+y}$. پس $x+y=۳y$، در نتیجه $x=۲y$. از این‌رو $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ و $\tan\theta=۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۳}{۲}$ و

$\cot\theta=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه

$$\cot\alpha+\cot\theta=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$



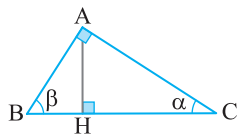
۳۵۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH،

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=\cos\beta\times AB\\ \cos\alpha=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\cos\alpha\times AC\end{cases}\Rightarrow\frac{BH}{HC}=\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\cos\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴},\quad \cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}$$

بنابراین $\frac{BH}{HC}=(\frac{AB}{AC})^۲=\tan^۲\alpha$.



راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴}\Rightarrow AB=۴\sin\alpha$$
$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}\Rightarrow AC=۴\cos\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،

$$\cos\alpha=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=AC\cos\alpha=۴\cos^۲\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=AB\cos\beta=۴\sin\alpha\cos\beta$$

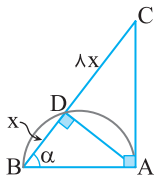
چون α و β متمم هستند، پس $\cos\beta=\sin\alpha$ و در نتیجه $BH=۴\sin^۲\alpha$. بنابراین $\frac{BH}{HC}=\frac{۴\sin^۲\alpha}{۴\cos^۲\alpha}=\tan^۲\alpha$.

۳۵۸- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $\cos\alpha=\frac{BD}{AB}=\frac{x}{AB}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{x+۸x}=\frac{AB}{۹x}$. بنابراین

$$\frac{x}{AB}=\frac{AB}{۹x}\Rightarrow AB^۲=۹x^۲\Rightarrow AB=۳x$$

در نتیجه $\cos\alpha=\frac{x}{AB}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$.



۳۵۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times۸\times BC\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}BC\quad(۱)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}AB\times BC\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

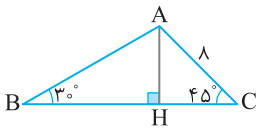
$$۲\sqrt{۲}BC=\frac{۱}{۴}AB\times BC\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC،

$$\sin\hat{C}=\sin۴۵^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۴\sqrt{۲}$$

در مثلث ABH،

$$\sin\hat{B}=\sin۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{AB}\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$$

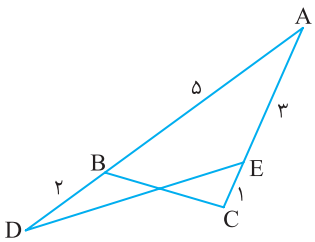


۳۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۷\times۳\times\sin\hat{A}=\frac{۲۱}{۲}\sin\hat{A}$$
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۴\times\sin\hat{A}=۱۰\sin\hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE}+S_{ABC}=(\frac{۲۱}{۲}+۱۰)\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}$. پس

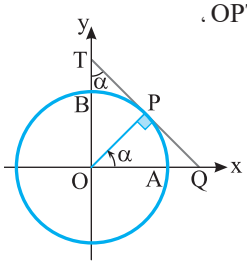
$$\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۴}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha\text{ حاده است.}}\hat{A}=۳۰^\circ$$



۳۶۱- گزینهٔ ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۳۰° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin۲۳۰^\circ$ و $\cos۲۳۰^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۳۱۰° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin۳۱۰^\circ$ عددی منفی و $\cos۳۱۰^\circ$ عددی مثبت است.

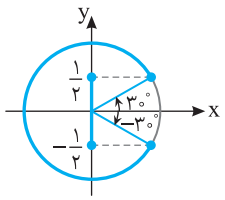
۳۶۲- گزینهٔ ۳ با توجه به تساوی $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$، معلوم است که $\cos\alpha\le۰$. با توجه به تساوی $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$، معلوم است که $\sin\alpha\le۰$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم مثلثاتی است.

۳۶۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید کـه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ POQ و OTQ در زاویهٔ حادهٔ رأس Q مشترک‌اند، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $O\hat{T}Q=P\hat{O}Q=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPT،



$$\sin\alpha=\frac{OP}{OT}=\frac{1}{OB+BT}=\frac{1}{1+BT}$$
$$1+BT=\frac{1}{\sin\alpha}\Rightarrow BT=\frac{1}{\sin\alpha}-1$$

۳۶۴- گزینهٔ ۴ از $-15^\circ\le\alpha\le 15^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-30^\circ\le 2\alpha\le 30^\circ$. با توجه بـه شـکل مقابـل $-\frac{1}{2}\le\sin 2\alpha\le\frac{1}{2}$ و در نتیجه $-\frac{1}{2}\le\frac{m}{4}\le\frac{1}{2}$، یعنی $-2\le m\le 2$.



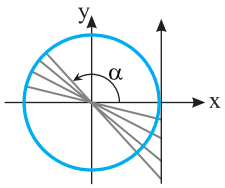
بنابرایـن m می‌توانـد مقادیـر صحیح ± 2، ± 1 و صفر باشد.

۳۶۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ برابر ۱ است. بنابرایـن از تسـاوی $2\sin\alpha+5\cos\beta=7$ نتیجـه می‌شـود $\sin\alpha=1$ و $\cos\beta=1$. بنابراین $3\sin\alpha-4\cos\beta=3-4=-1$.

۳۶۶- گزینهٔ ۳ از $0^\circ\le\alpha\le 180^\circ$ نتیجه می‌شود $0\le\sin\alpha\le 1$. بنابراین
$$0\le 2\sin\alpha\le 2\Rightarrow 1\le 2\sin\alpha+1\le 3$$
$$\frac{1}{3}\le\frac{2\sin\alpha+1}{3}\le 1\Rightarrow 1\le\frac{3}{2\sin\alpha+1}\le 3$$
پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۳۶۷- گزینهٔ ۱ فـرض کنیـد زاویـهٔ بیـن ایـن دو ضلع α باشـد. چون $\sin\alpha\le 1$، پس
$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{6}\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha\le\sqrt{3}$$
اگـر زاویـهٔ بین این دو ضلع 90° باشـد، مسـاحت مثلث برابر $\sqrt{3}$ می‌شـود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{3}$ است.

۳۶۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیـم اگـر $90^\circ<\alpha\le 180^\circ$، آن‌گاه $\tan\alpha\le 0$. بنابراین

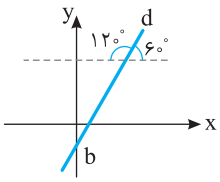


$$2m+1\le 0\Rightarrow m\le-\frac{1}{2}$$

۳۶۹- گزینهٔ ۳ چـون خط از نقطهٔ $(0,2)$ می‌گـذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:
$$3\times 0-a\times 2+2\sqrt{3}=0\Rightarrow a=\sqrt{3}$$
بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $3x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ یا همان $y=\sqrt{3}x+2$ است که شیب آن $\sqrt{3}$ است. پس $\tan\alpha=\sqrt{3}$. بنابراین
$$\alpha=60^\circ\Rightarrow\sin\alpha=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

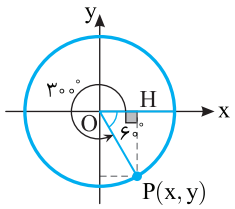
۳۷۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ است و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادلهٔ $y=ax-2a+\sqrt{3}$ شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-2a+\sqrt{3}$ است.

بنابراین
$$a=\tan 60^\circ=\sqrt{3},\quad b=-2a+\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

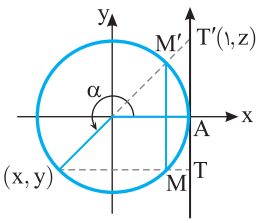


۳۷۱- گزینهٔ ۱ انتهای کمـان روبه‌رو به زاویه‌هـای 70°، 170° و 190° به‌ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan 170^\circ$ عددی منفی است و $\tan 190^\circ$، $\cot 70^\circ$ و $\cot 260^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

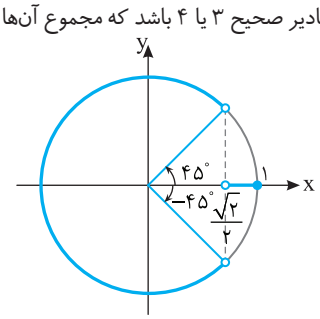
۳۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،
$$\sin 60^\circ=\frac{PH}{OP}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{PH}{1}\Rightarrow PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60^\circ=\frac{OH}{OP}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{OH}{1}\Rightarrow OH=\frac{1}{2}$$
از طرف دیگر $x=OH$ و $y=-PH$. بنابراین
$$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{y}{x-1}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\sqrt{3}$$



۳۷۳- گزینهٔ ۲ بـا توجـه به شـکل زیـر واضح اسـت که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با
$$TT'=AT+AT'=|y|+|z|=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$
از طرف دیگر، $MM'=2|y|=-2y=-2\sin\alpha$. بنابراین
$$TT'-MM'=\tan\alpha-\sin\alpha-(-2\sin\alpha)=\tan\alpha+\sin\alpha$$



۳۷۴- گزینهٔ ۳ وقتـی $-90^\circ<\alpha<90^\circ$، $-45^\circ<\frac{\alpha}{2}<45^\circ$ و مطابـق شکل زیر، $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}\le 1$. در نتیجه $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{m}{4}\le 1$، یعنی $2\sqrt{2}<m\le 4$.
پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.



۳۷۵- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^۲ x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲ x$. پس عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=۴(۱-\sin^۲ x)-۲\sin x=-۴\sin^۲ x-۲\sin x+۴$$
$$=-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۷}{۴}$$

اکنون دو راه‌حل ارائه می‌کنیم.

راه‌حل اول چون $-۱\le\sin x\le ۱$، پس

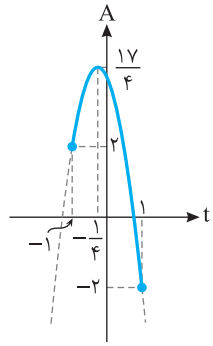
$$-۲\le ۲\sin x\le ۲\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le ۲\sin x+\frac{۱}{۲}\le\frac{۵}{۲}$$
$$۰\le(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow -\frac{۲۵}{۴}\le -(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le ۰$$
$$-۲\le\frac{۱۷}{۴}-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow -۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=\sin x$، آن‌گاه

$$A=-(۲t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۷}{۴},\quad -۱\le t\le ۱$$

نمودار A برحسب t به‌صورت زیر است. واضح است که $-۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$.



۳۷۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۳\cos\alpha+۹}{\cos\alpha+۳}-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}=۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}$$

از $-۱\le\cos\alpha\le ۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\le\cos\alpha+۳\le ۴\Rightarrow\frac{۱}{۴}\le\frac{۱}{\cos\alpha+۳}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۴\le\frac{-۸}{\cos\alpha+۳}\le -۲$$
$$-۱\le ۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}\le ۱\Rightarrow -۱\le A\le ۱$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ شود.

راه‌حل دوم اگر قرار دهیم $A=\frac{۹}{۸}$، آن‌گاه

$$\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow ۲۴\cos\alpha+۸=۹\cos\alpha+۲۷$$
$$۱۵\cos\alpha=۱۹\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱۹}{۱۵}$$

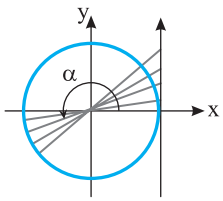
چون مقدار $\cos\alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{۱۹}{۱۵}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ باشد.

۳۷۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$ آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$ و اگر $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$. بنابراین $\sin ۲۰^\circ<\cos ۲۰^\circ$ و $\sin ۷۰^\circ>\cos ۷۰^\circ$. در نتیجه

$$A=\underbrace{|\sin ۲۰^\circ-\cos ۲۰^\circ|}_{-}-\underbrace{|\sin ۷۰^\circ-\cos ۷۰^\circ|}_{+}$$
$$=-\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ-(\sin ۷۰^\circ-\cos ۷۰^\circ)$$
$$=-\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ-\sin ۷۰^\circ+\cos ۷۰^\circ$$

چون زاویه‌های ۲۰° و ۷۰° متمم یکدیگرند، پس $\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$ و $\cos ۲۰^\circ=\sin ۷۰^\circ$ و در نتیجه $A=۰$.

۳۷۸- گزینهٔ ۳ از $۱۸۰^\circ\le\alpha<۲۷۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha\ge ۰$ و در نتیجه $m^۳+m^۲\ge ۰$، یعنی $m^۲(m+۱)\ge ۰$.



چون $m^۲\ge ۰$ همواره درست است، پس کافی است $m+۱\ge ۰$ که در نتیجه $m\ge -۱$.

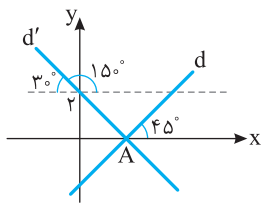
۳۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan ۱۵۰^\circ$ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+۲$ است. بنابراین طول نقطهٔ A که محل برخورد خط d' با محور x است، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۰=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x_A+۲\Rightarrow x_A=۲\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan ۴۵^\circ$ است و این خط از نقطهٔ A می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت $y=x+b$ است و اگر مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$۰=۲\sqrt{۳}+b\Rightarrow b=-۲\sqrt{۳}$$

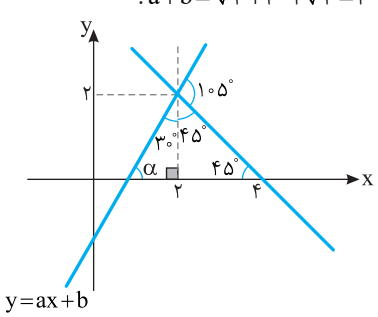
پس معادلهٔ خط d به‌صورت $y=x-۲\sqrt{۳}$ است.



۳۸۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha=۶۰^\circ$ و در نتیجه $a=\tan\alpha=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$، یعنی معادلهٔ خط $y=\sqrt{۳}x+b$ است و چون نقطهٔ $(۲,۲)$ روی خط قرار دارد، پس

$$۲=\sqrt{۳}\times ۲+b\Rightarrow b=۲-۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $a+b=\sqrt{۳}+۲-۲\sqrt{۳}=۲-\sqrt{۳}$.



۳۸۱- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵\Rightarrow\tan^۲\alpha=۴\Rightarrow\tan\alpha=\pm۲$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم است، پس $\tan\alpha<۰$، در نتیجه $\tan\alpha=-۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۱}{۲}$، پس

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۳۸۲- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲m}(m+۳)=۱\Rightarrow m+۳=۲m\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\cot\alpha=۶$ و به کمک اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ مقدار $\sin^۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۶^۲=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳۷}$$

۳۸۳- گزینهٔ ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sin۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱-\sin۱۰^\circ}=\frac{۱-\sin۱۰^\circ+۱+\sin۱۰^\circ}{(۱+\sin۱۰^\circ)(۱-\sin۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲}{۱-\sin^۲۱۰^\circ}=\frac{۲}{\cos^۲۱۰^\circ}$$

۳۸۴- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin۱۵^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos۱۵^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin۱۵^\circ(۱-\sin^۲۱۵^\circ)}{\cos۱۵^\circ(۱-\cos^۲۱۵^\circ)}=\frac{\sin۱۵^\circ\times\cos^۲۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ\times\sin^۲۱۵^\circ}=\frac{\cos۱۵^\circ}{\sin۱۵^\circ}=\cot۱۵^\circ$$

۳۸۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در تساوی $۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x$ به جای $\sin^۲x$ قرار می‌دهیم $۱-\cos^۲x$ و مقدار $\cos^۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۳(۱-\cos^۲x)=۱+۴\cos^۲x\Rightarrow۳-۳\cos^۲x=۱+۴\cos^۲x$$

$$۷\cos^۲x=۲\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۲}{۷}$$

اکنون به کمک اتحاد $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ مقدار $\tan^۲x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\frac{۲}{۷}}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x\Rightarrow۳\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}+۴$$

چون $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$، پس

$$۳\tan^۲x=۱+\tan^۲x+۴\Rightarrow۲\tan^۲x=۵\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۵}{۲}$$

۳۸۶- گزینهٔ ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\frac{\sin\alpha(۱+\frac{۱}{\cos\alpha})}{\cos\alpha(۱+\frac{۱}{\sin\alpha})}$$

$$=\tan\alpha(\frac{\cos\alpha}{\frac{۱+\sin\alpha}{\sin\alpha}})=\tan^۲\alpha(\frac{۱+\cos\alpha}{۱+\sin\alpha})$$

واضح است که عبارت‌های $۱+\cos\alpha$، $۱+\sin\alpha$ و $\tan^۲\alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

۳۸۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^۲\alpha-\cos\alpha(۱-\cos\alpha)}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha-\cos\alpha+\cos^۲\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{۱-\cos\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۳۸۸- گزینهٔ ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\cot^۲x+\underbrace{\cot^۲x\tan^۲x}_{۱}+\tan^۲x+\underbrace{\tan^۲x\cot^۲x}_{۱}$$

$$=\tan^۲x+\cot^۲x+۲=(\tan x+\cot x)^۲$$

بنابراین $\sqrt{A}=\sqrt{(\tan x+\cot x)^۲}=|\tan x+\cot x|$. چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan x<۰$ و $\cot x<۰$. در نتیجه $\tan x+\cot x<۰$. بنابراین

$$\sqrt{A}=-\tan x-\cot x$$

۳۸۹- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲(\sin\alpha\cos\alpha)^۲=۱-۲(\frac{۳}{۸})^۲=\frac{۲۳}{۳۲}$$

۳۹۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

پس

$$\frac{۲}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\Rightarrow\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۶}$$

$$(\sin\alpha\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. پس $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۶}}{۶}$.

۳۹۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ مقدار $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم است، پس $\sin x<۰$، بنابراین $\sin x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{\cos x}{-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}}\Rightarrow \cos x=-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

بنابراین $۲\cos x-\sin x=-\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}-(-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}})=-\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$.

۳۹۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-۱})^۲+(\sqrt{۲k-۳})^۲=۱\Rightarrow k-۱+۲k-۳=۱\Rightarrow ۳k=۵\Rightarrow k=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین $\sin\alpha=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، $\cos\alpha=\sqrt{\frac{۱}{۳}}$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}{\sqrt{\frac{۱}{۳}}}=\sqrt{۲}$$

۳۹۳- گزینهٔ ۴

$$\frac{(۱+\tan ۲۰^\circ)(۱-\cot ۲۰^\circ)}{(۱+\cot ۲۰^\circ)(۱-\tan ۲۰^\circ)}=\frac{۱-\cot ۲۰^\circ+\tan ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ\cot ۲۰^\circ}{۱-\tan ۲۰^\circ+\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰\cot ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۱-\cot ۲۰^\circ+\tan ۲۰^\circ-۱}{۱-\tan ۲۰^\circ+\cot ۲۰^\circ-۱}=\frac{\tan ۲۰^\circ-\cot ۲۰^\circ}{\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ}=-۱$$

۳۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$. بنابراین

$$\frac{۱+\cot^۲ x}{\cot x}=\frac{۱+\frac{۱}{\tan^۲ x}}{\frac{۱}{\tan x}}=\frac{\tan^۲ x+۱}{\tan x}$$

در نتیجه $\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{۱+\cot^۲ x}{\cot x}=\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{\tan^۲ x+۱}{\tan x}=۱$.

۳۹۵- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به‌صورت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos\alpha=\sin^۲\alpha \quad (*)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ تساوی داده شده به‌صورت $\cos\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ درمی‌آید. پس

$$\cos^۲\alpha+\cos\alpha-۱=۰\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ مشخص است که $\cos\alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۳۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۹}=(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{۹}{۴}$ است.

۳۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=۲$$

در نتیجه $(\frac{۳}{۴})^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲$. بنابراین $(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۲۳}{۱۶}$.

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>۰$ و $\sin x>۰$. بنابراین

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۲۳}}{۴}$$

۳۹۸- گزینهٔ ۳ دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^۲=(\sqrt{۵})^۲\Rightarrow \tan^۲ x+\cot^۲ x+۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=۵$$

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲=۵$$

پس $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۳$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^۲ x+\cot^۲ x)^۲=۳^۲\Rightarrow \tan^۴ x+\cot^۴ x+۲\underbrace{\tan^۲ x\cot^۲ x}_{۱}=۹$$

$$\tan^۴ x+\cot^۴ x+۲=۹$$

پس $\tan^۴ x+\cot^۴ x=۷$.

۳۹۹- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}$$

$$=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲\alpha\sin^۲\alpha}=\cos\alpha-|\tan\alpha\sin\alpha|$$

چون $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، پس $\sin\alpha<۰$ و $\tan\alpha>۰$، در نتیجه $\sin\alpha\tan\alpha<۰$. بنابراین

$$A=\cos\alpha+\tan\alpha\sin\alpha=\cos\alpha+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱}{\cos\alpha}$$

۴۰۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha-\cos^۴\alpha}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}}$$

$$=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha\sin^۲\alpha}}=\sqrt{۱+۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $۳۱۵^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$، پس $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$. بنابراین $\sin\alpha\cos\alpha<۰$، پس

$$A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

چون $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$، پس $\sin\alpha-\cos\alpha<۰$ و در نتیجه

$$A=-\sin\alpha+\cos\alpha$$

۴۰۱- گزینهٔ ۳ از تساوی $\frac{۵\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $۱۰\sin x=۲\sin x+\cos x$. بنابراین $۸\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\cos x}{\sin x}=۸$، پس $\cot x=۸$.

۴۰۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ نتیجه می‌شود

$$۱+(\sqrt{\frac{m+۲}{۲m+۵}})^۲=\frac{۱}{(\sqrt{\frac{m+۲}{۳m+۷}})^۲}$$

$$۱+\frac{m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow\frac{۲m+۵+m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}$$

$$\frac{۳m+۷}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow ۲m+۵=m+۲\Rightarrow m=-۳$$

(توجه کنید که $۳m+۷$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x=\sqrt{\frac{-۳+۲}{۲(-۳)+۵}}=۱$$

۴۰۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و مخرج مشترک‌گیری به‌دست می‌آید

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۴۰۴- گزینهٔ ۴ چون $\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ=۱$، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{۱-\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{(۱-\cos ۱۵^\circ)(۱+\cos ۱۵^\circ)}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{(۱-\sin ۱۵^\circ)(۱+\sin ۱۵^\circ)}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=۱-\cos ۱۵^\circ-(۱-\sin ۱۵^\circ)+\cos ۱۵^\circ=\sin ۱۵^\circ$$

۴۰۵- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^۳ x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}-\frac{۲\cos x}{\cos^۳ x}}{\frac{۴\sin x}{\cos^۳ x}-\frac{\cos^۳ x}{\cos^۳ x}}=\frac{\tan^۳ x-\frac{۲}{\cos^۲ x}}{\frac{۴\tan x}{\cos^۲ x}-۱}$$

$$=\frac{\tan^۳ x-۲(۱+\tan^۲ x)}{۴\tan x(۱+\tan^۲ x)-۱}=\frac{۳^۳-۲(۱+۳^۲)}{۴\times۳(۱+۳^۲)-۱}=\frac{۷}{۱۱۹}=\frac{۱}{۱۷}$$

۴۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x)$$

$$=(\sin x-\cos x)(۱+\sin x\cos x)$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\frac{۲}{۳})(۱+\frac{۵}{۱۸})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۱۸}=\frac{۲۳}{۲۷}$.

راه‌حل دوم طرفین تساوی $\sin x-\cos x=\frac{۲}{۳}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x-\cos x)^۳=(\frac{۲}{۳})^۳$$

$$\sin^۳ x-۳\sin^۲ x\cos x+۳\sin x\cos^۲ x-\cos^۳ x=\frac{۸}{۲۷}$$

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x-۳\sin x\cos x(\sin x-\cos)=\frac{۸}{۲۷}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$، در نتیجه

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x-۳\times\frac{۵}{۱۸}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow\sin^۳ x-\cos^۳ x=\frac{۲۳}{۲۷}$$

۴۰۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^۳ x-\cot^۳ x=(\tan x-\cot x)^۳$$
$$+۳\tan x\cot x(\tan x-\cot x)$$

چون $\tan x\cot x=۱$ و $\tan x-\cot x=۳$، پس

$$\tan^۳ x-\cot^۳ x=۳^۳+۳\times۱\times۳=۳۶$$

۴۰۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$، آن‌گاه $\cot\alpha=\frac{۱}{t}$ و معادلهٔ داده شده به‌صورت $t-\frac{۲}{t}=\sqrt{۲}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^۲-۲=\sqrt{۲}t\Rightarrow t^۲-\sqrt{۲}t-۲=۰\Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع اول است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}}{۲}<۰$ قابل قبول نیست، در نتیجه $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}}{۲}$.

بنابراین $\tan\alpha=\sqrt{۲}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$، در نتیجه

$$\tan^۲\alpha=\frac{(۱+\sqrt{۵})^۲}{۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۲}=۳+\sqrt{۵}$$

۴۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۱-۲\sin^۲ x=\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin^۲ x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

$$\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)=\cos^۲ x(۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x})=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+۱=\frac{۲\sin x}{\sin x-\cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر است با $\frac{۲\tan x}{\tan x-۱}$.

۴۱۰- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^۲ x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲ x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A=۱-\sin^۲ x-۲\sin x=۱-(\sin^۲ x+۲\sin x+۱-۱)$$
$$=۱-(\sin x+۱)^۲+۱=۲-(\sin x+۱)^۲$$

چون $-۱\le \sin x\le ۱$، پس

$$۰\le \sin x+۱\le ۲\Rightarrow ۰\le (\sin x+۱)^۲\le ۴\Rightarrow -۴\le -(\sin x+۱)^۲\le ۰$$
$$-۲\le ۲-(\sin x+۱)^۲\le ۲\Rightarrow -۲\le A\le ۲$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۴۱۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از تساوی $\tan x=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $\cos x=۳\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار می‌دهیم $۳\sin x$. در این صورت $A=\frac{۲\sin x+۳\sin x}{\sin x+۹\sin x}=\frac{۵\sin x}{۱۰\sin x}=\frac{۱}{۲}$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A برحسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{۳\cos x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x+۱}{\tan x+۳}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{۱}{۳}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به‌دست می‌آید $A=\frac{\frac{۲}{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}+۳}=\frac{۱}{۲}$.

۴۱۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\tan ۱۵^\circ=\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}$ و $\cot ۱۵^\circ=\frac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}$. بنابراین

$$A=\frac{\cot^۲ ۱۵^\circ-\cos^۲ ۱۵^\circ}{\tan^۲ ۱۵^\circ-\sin^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ}-\cos^۲ ۱۵^\circ}{\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ}{\cos^۲ ۱۵^\circ}-\sin^۲ ۱۵^\circ}$$
$$=\frac{\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ-\cos^۲ ۱۵^\circ\sin^۲ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ}}{\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ-\sin^۲ ۱۵^\circ\cos^۲ ۱۵^\circ}{\cos^۲ ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ)}{\sin^۲ ۱۵^\circ}}{\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ(۱-\cos^۲ ۱۵^\circ)}{\cos^۲ ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\frac{\cos^۴ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ}}{\frac{\sin^۴ ۱۵^\circ}{\cos^۲ ۱۵^\circ}}=\frac{\cos^۶ ۱۵^\circ}{\sin^۶ ۱۵^\circ}=\cot^۶ ۱۵^\circ$$

راه‌حل دوم کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\cot^۲ ۱۵^\circ-\cos^۲ ۱۵^\circ}{\tan^۲ ۱۵^\circ-\sin^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\cot^۲ ۱۵^\circ(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ)}{\tan^۲ ۱۵^\circ(۱-\cos^۲ ۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cot^۲ ۱۵^\circ\cos^۲ ۱۵^\circ}{\frac{۱}{\cot^۲ ۱۵^\circ}(\sin^۲ ۱۵^\circ)}=\cot^۴ ۱۵^\circ(\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ})$$
$$=\cot^۴ ۱۵^\circ\cot^۲ ۱۵^\circ=\cot^۶ ۱۵^\circ$$

۴۱۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$(\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}+\tan ۲۰^\circ)(۱-\sin ۲۰^\circ)=(\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}+\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ})(۱-\sin ۲۰^\circ)$$
$$=\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}(۱+\sin ۲۰^\circ)(۱-\sin ۲۰^\circ)=\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}(۱-\sin^۲ ۲۰^\circ)$$
$$=\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}(\cos^۲ ۲۰^\circ)=\cos ۲۰^\circ$$

۴۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$B=\sqrt{۱+\cos ۳۶^\circ}+\sqrt{۱-\cos ۳۶^\circ}$$

در نتیجه

$$B^۲=۱+\cos ۳۶^\circ+۱-\cos ۳۶^\circ+۲\sqrt{(۱-\cos ۳۶^\circ)(۱+\cos ۳۶^\circ)}$$
$$=۲+۲\sqrt{۱-\cos^۲ ۳۶^\circ}=۲+۲\sqrt{\sin^۲ ۳۶^\circ}=۲+۲\sin ۳۶^\circ$$

چون $B>۰$، پس $B=\sqrt{۲(۱+\sin ۳۶^\circ)}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{۲}$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم (درس ششم این فصل را ببینید)

$$۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x,\quad ۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$$
$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۱+\cos ۳۶^\circ}+\sqrt{۱-\cos ۳۶^\circ}}{\sqrt{۱+\sin ۳۶^\circ}}$$
$$=\frac{\sqrt{۲\cos^۲ ۱۸^\circ}+\sqrt{۲\sin^۲ ۱۸^\circ}}{\sqrt{\sin^۲ ۱۸^\circ+\cos^۲ ۱۸^\circ+۲\sin ۱۸^\circ\cos ۱۸^\circ}}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}(\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ)}{\sqrt{(\sin ۱۸^\circ+\cos ۱۸^\circ)^۲}}=\frac{\sqrt{۲}(\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ)}{\sin ۱۸^\circ+\cos ۱۸^\circ}=\sqrt{۲}$$

۴۱۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳(۱-\cos^۲ \alpha)-۵\cos\alpha+۵=۰\Rightarrow ۳\cos^۲ \alpha+۵\cos\alpha-۸=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\cos\alpha$، می‌توانیم معادله را به شکل $۳t^۲+۵t-۸=۰$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t=۱$ و دیگری $t=\frac{-۸}{۳}$ است. چون $\cos\alpha=-\frac{۸}{۳}$ قابل قبول نیست، پس $\cos\alpha=۱$ و در نتیجه $\cos^۶ \alpha=۱$.

راه‌حل دوم $\alpha=۰$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^۶ \alpha$ را به ازای $\alpha=۰$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۱۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^۲=(\sqrt{۵})^۲\Rightarrow \tan^۲ x+\cot^۲ x+۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=۵$$
$$\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲=۵$$

پس $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۳$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^۲ x+\cot^۲ x)^۳=۳^۳$$
$$\tan^۶ x+۳\tan^۴ x\cot^۲ x+۳\tan^۲ x\cot^۴ x+\cot^۶ x=۲۷$$
$$\tan^۶ x+\cot^۶ x+۳\tan^۲ x\cot^۲ x(\tan^۲ x+\cot^۲ x)=۲۷$$

با توجه به اینکه $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۳$ و $\tan^۲ x\cot^۲ x=۱$ نتیجه می‌شود

$$\tan^۶ x+\cot^۶ x+۹=۲۷\Rightarrow \tan^۶ x+\cot^۶ x=۱۸$$

۴۱۷- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{۳\cos^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x}=\frac{۲}{\cos^۲ x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$، تساوی قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^۲ x+۳-۲\tan x=۲(۱+\tan^۲ x)\Rightarrow \tan^۲ x+۲\tan x-۱=۰$$

بنابراین $\tan x=-۱\pm\sqrt{۲}$.

۴۱۸- گزینهٔ ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\alpha)}}=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}}$$
$$=\sqrt{۱-۲\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲}}=\sqrt{۱-۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $\alpha=۲۰۰^\circ$، پس $\sin\alpha<۰$، $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha>۰$.

بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=|\sin ۲۰۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ|$$

توجه کنید که $\sin ۲۰۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ>۰$. بنابراین $A=\sin ۲۰۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ$.

۴۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^۳ ۴۰^\circ-\cos^۳ ۴۰^\circ$$
$$=(\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ)(\sin^۲ ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ+\cos^۲ ۴۰^\circ)$$
$$=(\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ)(۱+\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ)$$

مخرج کسر

$$\cos ۴۰^\circ+\cos^۲ ۴۰^\circ\sin ۴۰^\circ=\cos ۴۰^\circ(۱+\cos ۴۰^\circ\sin ۴۰^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}=\frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}-۱=\tan ۴۰^\circ-۱$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan ۴۰^\circ$ است.

۴۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^۳ x-\cot^۳ x}{\tan x-\cot x}$$
$$=\frac{(\tan x-\cot x)(\tan^۲ x+\tan x\cot x+\cot^۲ x)}{\tan x-\cot x}$$
$$=\tan^۲ x+۱+\cot^۲ x=۷$$

بنابراین $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۶$. در نتیجه

$$\frac{۱}{\sin^۲ x}+\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\cot^۲ x+۱+\tan^۲ x$$
$$=۲+\tan^۲ x+\cot^۲ x=۲+۶=۸$$

۴۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ۳۶° برابر با $\frac{۳۶^\circ}{۱۸۰^\circ}\pi=\frac{\pi}{۵}$ رادیان است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث برابر است با $\pi-(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۱۰})=\frac{\pi}{۲}$ که این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

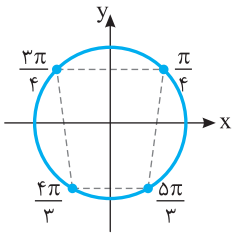
۴۲۲- گزینهٔ ۴ اگر اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D\times R=\frac{۵\pi}{۴}$، بنابراین $R=\frac{۵\pi}{۴D}$.

از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$. بنابراین

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۵\pi}{۴D}}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۵}{۴D}\Rightarrow D^۲=\frac{۹۰۰^\circ}{۴}\Rightarrow D=۱۵^\circ$$

بنابراین اندازهٔ این زاویه برابر ۱۵° است.

۴۲۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل ذوزنقه است.



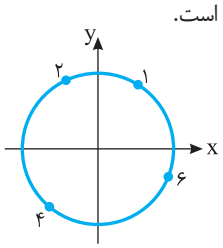
۴۲۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید، با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که

$$-۵۶۰^\circ+۴\pi=-۵۶۰^\circ+۷۲۰^\circ=۱۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف -۵۶۰° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شدهٔ دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتها نیست.

۴۲۵- گزینهٔ ۴ زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $\frac{۲\pi}{۲۰}=\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان است. از طرف دیگر، $\frac{۴۸\pi}{۵}=۸\pi+\frac{۸\pi}{۵}=۸\pi+۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$. وقتی چرخ‌وفلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی ۸π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ‌وفلک به اندازهٔ $۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شمارهٔ یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۲۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویهٔ ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیهٔ نقاط است، پس $\sin ۴$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۲۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در هر ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{۶۰}{x}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{\frac{۵\pi}{۸}}\Rightarrow x=۲۲۵\text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربهٔ ساعت‌شمار $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند، پس $\frac{۱}{x}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{\frac{۵\pi}{۸}}$، بنابراین دقیقه $x=\frac{\frac{۵\pi}{۸}}{\frac{\pi}{۳۶۰}}=۲۲۵$.

۴۲۸- گزینهٔ ۲ طول کمان AB برابر است با $۴\pi\alpha$. از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی $۸\pi^۲-۴\pi\alpha$. بنابراین

$$۸\pi^۲-۴\pi\alpha=۴\pi\alpha+\pi\Rightarrow ۸\alpha=۸\pi-۱\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{۱}{۸}$$

۴۲۹- گزینهٔ ۱ ۱۶ کابین در این چرخ‌وفلک وجود دارد. پس زاویهٔ بین دو کابین متوالی برابر $\frac{۲\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۸}$ است. بنابراین زاویهٔ متناظر به کمان $P_۰P_۱$ برابر $\frac{۷\pi}{۸}$ است. بنابراین

$$\overset{\frown}{P_۰P_۱}=r\theta=۴۰\times\frac{۷\pi}{۸}=۳۵\pi\ \text{متر}$$

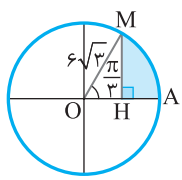
۴۳۰- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$MH=۶\sqrt{۳}\sin\frac{\pi}{۳}=۹\ ,\qquad \overset{\frown}{AM}=۶\sqrt{۳}\times\frac{\pi}{۳}=۲\sqrt{۳}\pi$$

$$OH=۶\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۳}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۶\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

بنابراین اندازهٔ محیط قسمت رنگی برابر است با

$$۹+۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}\pi=۹+\sqrt{۳}(۳+۲\pi)$$



۴۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ۴۰۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۴۰۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۰\pi}{۹}$$

بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر x و اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر برحسب رادیان برابر y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+y=\frac{۲۰\pi}{۹} \\ x-y=\frac{۴\pi}{۹} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{۴\pi}{۳} \\ y=\frac{۸\pi}{۹} \end{cases}$$

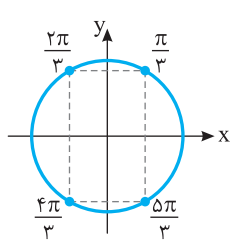
پس اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

۴۳۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R=\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}$. از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$، بنابراین

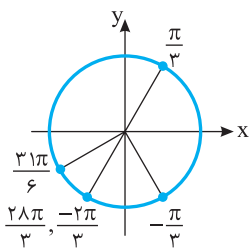
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۸۰}D-\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۳۶}$$

$$\frac{۵}{۴}D=۲۵^\circ\Rightarrow D=۲۰^\circ$$

۴۳۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۳۴- گزینهٔ ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که $\frac{۲۸\pi}{۳}=۹\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۳۱\pi}{۶}=۵\pi+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان نظیر زاویه‌های $\frac{۲۸\pi}{۳}$ و $\frac{-۲\pi}{۳}$ یکسان است.



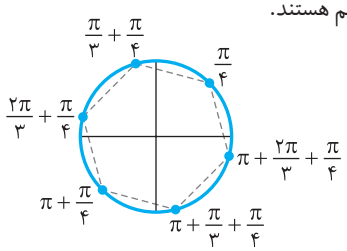
۴۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$k=۳s\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{۳s\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۴}$$

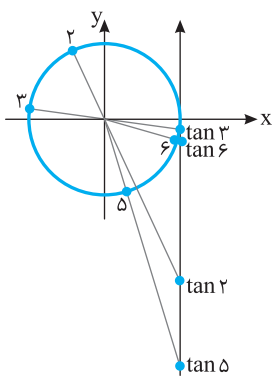
$$k=۳s+۱\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{(۳s+۱)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

$$k=۳s+۲\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{(۳s+۲)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم هستند.



۴۳۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\tan ۳$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۳۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چون عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{۱}{۱۲}$ دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین در هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۲۰}{۶۰}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا ساعت $۱۰:۲۰'$ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربهٔ ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان.

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربهٔ ساعت‌شمار در هر دقیقه $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت ۱۰:۲۰′ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{۱}{۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{x}\Rightarrow x=۸۰\times\frac{\pi}{۳۶۰}=\frac{۲\pi}{۹}\,\text{rad}$$

۴۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۲۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۳۶}\,\text{rad}$$

بنابراین $\overset{\frown}{AB}=۶\times\frac{۵\pi}{۳۶}$ و $\overset{\frown}{CD}=۹\times\frac{۵\pi}{۳۶}$. پس

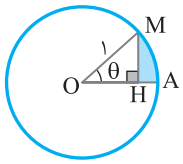
$$\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}=\frac{۴۵\pi}{۳۶}-\frac{۳۰\pi}{۳۶}=\frac{۱۵\pi}{۳۶}=\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۴۳۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با توجه به شکل،

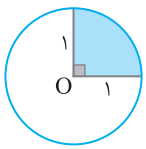
$$MH=\sin\theta,\quad \overset{\frown}{AM}=r\theta=\theta$$

$$OH=\cos\theta\Rightarrow AH=OA-OH=۱-\cos\theta$$

بنابراین محیط قسمت رنگی برابر است با $P=\sin\theta+\theta+۱-\cos\theta$.



راه‌حل دوم فرض کنید $\theta=\frac{\pi}{۲}$. در این‌صورت ناحیهٔ رنگی مورد نظر $\frac{۱}{۴}$ دایره‌ای به شعاع ۱ است و محیط آن برابر $۱+۱+\frac{\pi}{۲}=۲+\frac{\pi}{۲}$ است.



اکنون مقدار گزینه‌ها را به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱) $۱+\sin\theta+\cos\theta=۲$

گزینهٔ (۲) $۱+\sin\theta-\cos\theta=۲$

گزینهٔ (۳) $۱-\theta+\sin\theta+\cos\theta=۲-\frac{\pi}{۲}$

گزینهٔ (۴) $۱+\theta+\sin\theta-\cos\theta=۲+\frac{\pi}{۲}$

۴۴۰- گزینهٔ ۴ با جابه‌جایی نقطهٔ A به اندازهٔ ۲۰° یا $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، ریسمان به اندازهٔ $l=r\theta=۸\times\frac{\pi}{۹}=\frac{۸\pi}{۹}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض کنیم چرخ کوچک به اندازهٔ α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{۸\pi}{۹}=۶\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۴\pi}{۲۷}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow D=۱۸۰^\circ\times\frac{R}{\pi}=۱۸۰^\circ\times\frac{۴}{۲۷}=\frac{۸۰^\circ}{۳}$$

۴۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین

$$A=-\tan\alpha\cot\alpha+(-\sin\alpha)^۲+\cos^۲\alpha$$

$$=-\tan\alpha\cot\alpha+\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=-۱+۱=۰$$

۴۴۲- گزینهٔ ۲ چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس

$$\cos(x-۹۰^\circ)=\cos(۹۰^\circ-x)=\sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$، پس

$$\cot(-x-۱۸۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ+x)=-\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x)=-\cos x$$

۴۴۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)+\sin(۳\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\times۰/۴}=-\frac{۳}{۴}$.

۴۴۴- گزینهٔ ۲ چون $x+۳y=\frac{\pi}{۲}$، در نتیجه $۲x+۳y=\frac{\pi}{۲}+x$. پس

$$\tan(۲x+۳y)=\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=-\cot x$$

۴۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$ و

$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)=\cos x$. در نتیجه

$$-\sin x=۲\cos x\Rightarrow\tan x=-۲$$

۴۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos۵۱۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۱۵۰^\circ)=\cos۱۵۰^\circ$$

$$=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-\cos۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos\frac{۴۳\pi}{۶}=\cos(۷\pi+\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۴۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۲۳\pi}{۶}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۶\pi}{۳}=\cos(۵\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۳۵\pi}{۴}=\tan(۹\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cot(-\frac{۴۳\pi}{۴})=-\cot\frac{۴۳\pi}{۴}=-\cot(۱۱\pi-\frac{\pi}{۴})=-(-\cot\frac{\pi}{۴})=۱$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲})(-۱)(۱)=-\frac{۱}{۴}$.

۴۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\sin\alpha=\sin\beta$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\ ,\quad \frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}}=-1$.

۴۵۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$، در نتیجه $\cos\alpha+\cos\beta=0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$$
$$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=0$$

پس $A=0$.

۴۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(4\pi+\alpha)=\sin\alpha\ ,\sin(5\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین $A=3\sin\alpha+4\sin\alpha-5\sin\alpha=2\sin\alpha$.

۴۵۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

بنابراین $A=\dfrac{3\cot\alpha-\cot\alpha}{2\tan\alpha-\tan\alpha}=\dfrac{2\cot\alpha}{\tan\alpha}=2\cot^2\alpha$.

۴۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos(3\pi+\alpha)}=3\Rightarrow\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{-\sin\alpha+2\cos\alpha}=3$$
$$\cos\alpha-2\sin\alpha=-3\sin\alpha+6\cos\alpha$$
$$\sin\alpha=5\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=5$$

بنابراین $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{2})=-\tan(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{1}{5}$.

۴۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\alpha=\frac{3\pi}{2}+\beta\Rightarrow\cot\alpha=\cot(\frac{3\pi}{2}+\beta)=-\tan\beta$$

بنابراین

$$\frac{1}{1-\cot\alpha}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1}{1+\tan\beta}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1+\cot\beta+1+\tan\beta}{(1+\tan\beta)(1+\cot\beta)}$$
$$=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{1+\cot\beta+\tan\beta+\tan\beta\cot\beta}=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{2+\tan\beta+\cot\beta}=1$$

۴۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$. در نتیجه

از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$. اکنون توجه کنید که

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{169}{144}\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{25}{144}$$

چون α در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan\alpha<0$. بنابراین $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

۴۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(-600^\circ)=\cos600^\circ=\cos(2\times360^\circ-120^\circ)$$
$$=\cos120^\circ=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$\cot675^\circ=\cot(2\times360^\circ-45^\circ)=-\cot45^\circ=-1$$
$$\tan945^\circ=\tan(3\times360^\circ-135^\circ)=-\tan135^\circ=\tan45^\circ=1$$
$$\sin(-330^\circ)=-\sin330^\circ=-\sin(360^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=-3$.

۴۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan75^\circ=\tan(90^\circ-15^\circ)=\cot15^\circ=\frac{1}{a}$$
$$\tan105^\circ=\tan(90^\circ+15^\circ)=-\cot15^\circ=-\frac{1}{a}$$
$$\tan165^\circ=\tan(180^\circ-15^\circ)=-\tan15^\circ=-a$$
$$\tan255^\circ=\tan(270^\circ-15^\circ)=\cot15^\circ=\frac{1}{a}$$

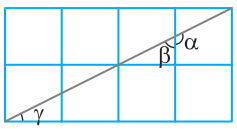
بنابراین $A=\dfrac{2(\frac{1}{a})-\frac{1}{a}}{3(-a)-\frac{1}{a}}=\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{-3a^2-1}{a}}=\dfrac{1}{-3a^2-1}=\dfrac{-1}{3a^2+1}$.

۴۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\frac{1013\pi}{3}=\sin(\frac{1012\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\sin(334\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{98\pi}{3}=\cos(\frac{99\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos(33\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=4(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2(-\frac{1}{2})=3+1=4$.

۴۵۹- گزینهٔ ۳ از نماد گذاری شکل



روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\tan\alpha=\tan(180^\circ-\beta)=-\tan\beta$$

از طرف دیگر $\beta+\gamma=90^\circ$، پس $\tan\beta=\cot\gamma$. اکنون توجه کنید که

$\cot\gamma=\frac{4}{2}=2$. بنابراین $\tan\alpha=-2$.

۴۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan\beta=\cot\alpha$ و در نتیجه $\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha\times\cot\alpha=1$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{14}+\frac{6\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{14}\tan\frac{6\pi}{14}=1$$
$$\frac{2\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{2\pi}{14}\tan\frac{5\pi}{14}=1$$
$$\frac{3\pi}{14}+\frac{4\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{3\pi}{14}\tan\frac{4\pi}{14}=1$$

پس $A=1$.

۴۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

بنابراین $A=\frac{-\tan\alpha+3\tan\alpha}{-\tan\alpha-\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{-2\tan\alpha}=-1$.

۴۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \tan(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},\quad \cot(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین $A=\frac{4(\frac{1}{2})-2(\frac{1}{2})}{3(\frac{\sqrt{3}}{3})-6(-\frac{\sqrt{3}}{3})}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

۴۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ یکی از زوایا 90° است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=90^\circ$. پس $\sin\hat{A}=1$ و $\cos\hat{A}=0$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، پس $\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{B}$، بنابراین ساده شدهٔ عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}}{\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}}=\frac{0+\sin^2\hat{C}+\cos^2\hat{C}}{1+\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A}=90^\circ,\quad \hat{B}=45^\circ,\quad \hat{C}=45^\circ$$

در این صورت $\frac{\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}}{\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}}=\frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

۴۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin a=\sin(\frac{5\pi}{2}-b)=\cos b,\quad \tan a=\tan(\frac{5\pi}{2}-b)=\cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a+\tan a\tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\cos^2 b+1}=\frac{\cos b+\cot b\tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\sin^2 a+1}$$
$$=\frac{\cos b+1-1}{\sin b-1+1}=\frac{\cos b}{\sin b}=\cot b$$

۴۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+2b=\pi\Rightarrow a+2(a+b)=\pi\Rightarrow\frac{a}{2}+(a+b)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}-(a+b)$$

بنابراین $\sin\frac{a}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-(a+b))=\cos(a+b)=\frac{3}{5}$.

۴۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin 410^\circ=\sin(360^\circ+50^\circ)=\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$$
$$\sin 400^\circ=\sin(360^\circ+40^\circ)=\sin 40^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 410^\circ+\sin^2 400^\circ=\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ=1$$

همچنین $\tan 731^\circ=\tan(2\times360^\circ+11^\circ)=\tan 11^\circ$. بنابراین

$$\tan 731^\circ\times\cot 11^\circ=\tan 11^\circ\times\cot 11^\circ=1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ=\cos(90^\circ+25^\circ)=-\sin 25^\circ$$
$$\cos 155^\circ=\cos(180^\circ-25^\circ)=-\cos 25^\circ$$
$$\cos 295^\circ=\cos(270^\circ+25^\circ)=\sin 25^\circ$$
$$\cos 335^\circ=\cos(360^\circ-25^\circ)=\cos 25^\circ$$

بنابراین $A=\frac{-\sin 25^\circ+3\cos 25^\circ}{3\sin 25^\circ+\cos 25^\circ}$. صورت و مخرج کسر A را بر $\sin 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{-\frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{3\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{3\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}=\frac{-1+3\cot 25^\circ}{3+\cot 25^\circ}=\frac{-1+3a}{3+a}=\frac{3a-1}{a+3}$$

۴۶۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$
$$\cot\frac{9\pi}{4}=\cot(2\pi+\frac{\pi}{4})=\cot\frac{\pi}{4}=1$$
$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=-\frac{1}{2}\times1-1\times\frac{1}{2}=-1$.

۴۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\sin\beta=\cos\alpha$. بنابراین

$$\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{7\pi}{16}=\sin\frac{\pi}{16}$$
$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{16}=\sin\frac{3\pi}{16}$$

پس

$$A=\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{\pi}{16}$$
$$=(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16})+(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16})=1+1=2$$

۴۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=180^\circ$، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$. بنابراین

$$\cos 179^\circ=-\cos 1^\circ,\quad \cos 178^\circ=-\cos 2^\circ,\ \dots,$$
$$\cos 92^\circ=-\cos 88^\circ,\quad \cos 91^\circ=-\cos 89^\circ$$

پس $A=\frac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\dots+\cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ-\cos 2^\circ-\dots-\cos 89^\circ}=-1$.

۴۷۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\cos^2 x$$

۴۷۲- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\cos^۴\frac{\pi}{۸}-\sin^۴\frac{\pi}{۸}=(\cos^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{\pi}{۸})(\cos^۲\frac{\pi}{۸}-\sin^۲\frac{\pi}{۸})$$
$$=۱\times\cos(۲\times\frac{\pi}{۸})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۹۰^\circ=۷۵^\circ+۱۵^\circ$، بنابراین $\sin ۷۵^\circ=\cos ۱۵^\circ$، در نتیجه

$$\cos ۱۵^\circ\sin ۷۵^\circ=\cos ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=\cos^۲ ۱۵^\circ$$

از طرف دیگر، $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$، پس

$$\cos ۳۰^\circ=۲\cos^۲ ۱۵^\circ-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\cos^۲ ۱۵^\circ-۱$$

پس $\cos^۲ ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}$.

۴۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\frac{۱۶}{۲۵}+\cos^۲\theta=۱$$
$$\cos^۲\theta=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi}\cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

بنابراین

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=۲\times\frac{۴}{۵}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

۴۷۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحادهای $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}}=۸$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\frac{۱}{۴}}=۸$$

۴۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$، پس

$$A=\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\cos^۲ x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{۱}{\cot x}=\frac{۱}{۳}$$

۴۷۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\frac{۱-\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}=\frac{۲\sin^۲ ۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\tan ۲۰^\circ$$

۴۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$، بنابراین

$$\frac{\cos ۸۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ=\frac{\cos(۲\times ۴۰^\circ)}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ$$
$$=\frac{\cos^۲ ۴۰^\circ-\sin^۲ ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ=(\cos ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ)-\sin ۴۰^\circ$$
$$=\cos ۴۰^\circ$$

۴۷۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$$

بنابراین $A=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳})^۲=۱-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱۷}{۱۸}$.

۴۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$، بنابراین

$$\frac{\sin^۳ x}{۲\sin x-\sin ۲x}=\frac{\sin^۳ x}{۲\sin x-۲\sin x\cos x}=\frac{\sin^۲ x}{۲(۱-\cos x)}$$
$$=\frac{۱-\cos^۲ x}{۲(۱-\cos x)}=\frac{۱+\cos x}{۲}$$

بنابراین $\frac{۱+\cos x}{۲}=\frac{۲}{۳}$ پس $\cos x=\frac{۴}{۳}-۱=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه

$$\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱=\frac{۲}{۹}-۱=-\frac{۷}{۹}$$

۴۸۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin ۲\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=۲\sin\alpha\cos\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$$
$$=۲\sin^۲\alpha+۲\cos^۲\alpha=۲(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)=۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$، پس

$$\sin ۲\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=۲$$

۴۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $۲\cos^۲ x-۱=\cos ۲x$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$. بنابراین

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}(۲\cos^۲\frac{\pi}{۲۴}-۱)=\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{۲\pi}{۲۴}$$
$$=\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۴۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin\frac{۳\pi}{۸}=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸})=\cos\frac{\pi}{۸}$.

بنابراین $\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۸}=\cos^۲\frac{\pi}{۸}$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$. پس

$$\cos^۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۱+\cos(۲\times\frac{\pi}{۸})}{۲}=\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

۴۸۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x},\quad \cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$$

بنابراین $\sin ۲x+\cos ۲x=\frac{۲\tan x+۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۲(\frac{۱}{۳})+۱-\frac{۱}{۹}}{۱+\frac{۱}{۹}}=\frac{۷}{۵}$.

۴۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۹\cos\theta+\frac{۱}{\cos\theta}=۱۰\Rightarrow ۹\cos^۲\theta+۱=۱۰\cos\theta$$
$$۹\cos^۲\theta-۱۰\cos\theta+۱=۰\Rightarrow\cos\theta=۱\ (\text{غ.ق.ق})\ \text{یا}\ \cos\theta=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین $\cos ۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱=۲(\frac{۱}{۹})^۲-۱=-\frac{۷۹}{۸۱}$.

۴۸۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ و

$$\sin ۸۴^\circ=\sin(۹۰^\circ-۶^\circ)=\cos ۶^\circ=\cos(۲\times ۳^\circ)=۲\cos^۲ ۳^\circ-۱=۲a^۲-۱$$

۴۸۷- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲ ۲\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \sin ۲\alpha=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

با توجه به اینکه $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$، در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. یعنی $\sin ۲\alpha<۰$. پس $\sin ۲\alpha=-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$.

۴۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin ۵۰^\circ=\sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cos ۴۰^\circ$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$. بنابراین

$$\frac{\sin ۵۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos ۴۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}$$

۴۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$، آن‌گاه

$$۱۰x+۲x=۱۲x=\frac{\pi}{۲}$$

پس $\cos ۱۰x=\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)=\sin ۲x$، در نتیجه

$$\cos ۱۰x\cos ۲x=\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin(۴\times\frac{\pi}{۲۴})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

۴۹۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan ۵۰^\circ=\tan(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cot ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ=\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ=\frac{\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}-\frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\cos^۲ ۴۰^\circ-\sin^۲ ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ}=\frac{\cos(۲\times ۴۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times ۴۰^\circ)}=\frac{۲\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}$$

$$=۲\cot ۸۰^\circ=۲\cot(۹۰^\circ-۱۰^\circ)=۲\tan ۱۰^\circ$$

بنابراین $\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\tan ۱۰^\circ$.

راه‌حل دوم از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\frac{\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\frac{۲\cot ۸۰^\circ}{۲}=\tan ۱۰^\circ$$

۴۹۱- گزینهٔ ۱ از عبارت $\sin x\cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A=\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

۴۹۲- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱+\sin ۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲x=-\frac{۳}{۴}$$

۴۹۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\quad(\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi)$$

به این ترتیب

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۴}{۵})(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲\times\frac{۹}{۲۵}-۱=-\frac{۷}{۲۵}$$

بنابراین $\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲۴}{۷}$.

۴۹۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** بنابر فرض $\sin x=\frac{۵}{۲}\cos x$. دو طرف این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^۲ x=\frac{۵}{۲}\cos x\sin x\quad(۱)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x=\frac{۲}{۵}\sin x$. دو طرف این تساوی را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\cos^۲ x=\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\quad(۲)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱=\frac{۵}{۲}\sin x\cos x+\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\Rightarrow ۱=\frac{۲۹}{۱۰}\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}$ و در نتیجه $\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$.

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $۲\sin x=۵\cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴\sin^۲ x=۲۵\cos^۲ x$$

با توجه به $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ نتیجه می‌شود

$$۴\sin^۲ x=۲۵(۱-\sin^۲ x)\Rightarrow ۲۹\sin^۲ x=۲۵\Rightarrow\sin^۲ x=\frac{۲۵}{۲۹}$$

$$\cos^۲ x=۱-\frac{۲۵}{۲۹}=\frac{۴}{۲۹}\Rightarrow\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱۰۰}{۲۹^۲}$$

$$\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند و $\sin x\cos x$ مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از $۲\sin x=۵\cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x=\frac{۵}{۲}$، پس

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۲\times\frac{۵}{۲}}{۱+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۲۰}{۲۹}$$

۴۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin ۲x}{\sin ۲y}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\sin y\cos y}=\frac{\sin x}{\sin y}\times\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{۴\sin y}{\sin y}\times\frac{\cos x}{۳\cos x}=\frac{۴}{۳}$$

۴۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^۲=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}$$

$$-۲\sin x\cos x=\frac{۷}{۹}\Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{۷}{۱۸}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos^۳ x+\sin^۳ x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^۲ x+\sin^۲ x-\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{۱-\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{۱+\frac{۷}{۱۸}}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۲۵}{۲۴}$$

۴۹۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin ۱۱۰^\circ=\sin(۹۰^\circ+۲۰^\circ)=\cos ۲۰^\circ$ و $\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$، بنابراین

$$\frac{\sin^۲ ۱۱۰^\circ-\sin^۲ ۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos^۲ ۲۰^\circ-\sin^۲ ۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos(۲\times ۲۰^\circ)}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos ۴۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos ۴۰^\circ=\cos(۹۰^\circ-۵۰^\circ)=\sin ۵۰^\circ$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۴۹۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$، بنابراین $۱+\cos ۴۰^\circ=۲\cos^۲ ۲۰^\circ$. از طرف دیگر، $۵۵^\circ+۳۵^\circ=۹۰^\circ$، پس $\cos ۵۵^\circ=\sin ۳۵^\circ$. به این ترتیب

$$\frac{۱+\cos ۴۰^\circ}{\cos ۵۵^\circ\cos ۳۵^\circ}=\frac{۲\cos^۲ ۲۰^\circ}{\sin ۳۵^\circ\cos ۳۵^\circ}=\frac{۲\cos^۲ ۲۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times ۳۵^\circ)}=\frac{۴\cos^۲ ۲۰^\circ}{\sin ۷۰^\circ}$$

اکنون توجه کنید که $۹۰^\circ=۷۰^\circ+۲۰^\circ$، پس $\sin ۷۰^\circ=\cos ۲۰^\circ$. در نتیجه کسر مورد نظر برابر است با $\frac{۴\cos^۲ ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=۴\cos ۲۰^\circ$.

۴۹۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۱۶\sin a}\Rightarrow ۲\sin a\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}$$

$$\sin ۲a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۴a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\sin ۴a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $\cos ۸a=۱-۲\sin^۲ ۴a=۱-۲(\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۷}{۸}$.

۵۰۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x$$

$$\frac{۴}{۵}=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x\Rightarrow\sin^۲ ۲x=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین $\cos^۲ ۲x=۱-\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$.

۵۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-\frac{\sqrt{۲}\cos x-۱}{\sqrt{۲}\cos x-۱}=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱$$

بنابراین از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ نتیجه می‌شود

$$A=\frac{۲\cos^۲ x-۱}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱=\frac{(\sqrt{۲}\cos x-۱)(\sqrt{۲}\cos x+۱)}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱$$

$$=\sqrt{۲}\cos x+۱-۱=\sqrt{۲}\cos x$$

۵۰۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$ و $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$. بنابراین

$$\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}=۲\Rightarrow\frac{۲\sin^۲ x}{۲\cos^۲ x}=۲\Rightarrow\tan^۲ x=۲\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{۲}$$

چون $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$، مقدار $\sqrt{۲}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x=-\sqrt{۲}\Rightarrow\cot x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در نتیجه $\tan x+۲\cot x=-\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}$.

۵۰۳- گزینهٔ ۲ اگر در اتحاد $۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha$ قرار دهیم $\alpha=\frac{x}{۲}$، اتحاد $۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس

$$A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos\frac{\pi}{۸}}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲(۱+\cos\frac{\pi}{۸})}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲\times ۲\cos^۲\frac{\frac{\pi}{۸}}{۲}}}$$

$$=\sqrt{۲+۲|\cos\frac{\pi}{۱۶}|}=\sqrt{۲+۲\cos\frac{\pi}{۱۶}}=\sqrt{۲(۱+\cos\frac{\pi}{۱۶})}$$

$$=\sqrt{۲\times ۲\cos^۲\frac{\pi}{۳۲}}=۲|\cos\frac{\pi}{۳۲}|=۲\cos\frac{\pi}{۳۲}$$

۵۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin^۴\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۴\frac{\pi}{۱۲}=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲\frac{۲\pi}{۱۲}$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲\frac{\pi}{۶}=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۵۰۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x=(\tan x+\cot x)^۲-۲\tan x\cot x$$

$$=(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲-۲=(\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\cos x\sin x})^۲-۲$$

$$=(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})^۲-۲=\frac{۴}{\sin^۲ ۲x}-۲$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{\pi}{۸}$، به‌دست می‌آید

$$\tan^۲\frac{\pi}{۸}+\cot^۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۴}{\sin^۲\frac{\pi}{۴}}-۲=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۶$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^۲\frac{\pi}{۸}+\cot^۲\frac{\pi}{۸}=(\tan\frac{\pi}{۸}+\cot\frac{\pi}{۸})^۲-۲=(\frac{۲}{\sin\frac{۲\pi}{۸}})^۲-۲$$

$$=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۸-۲=۶$$

۵۰۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha,\quad \cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha=\frac{x}{۲}$ استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$A=\tan^۲\frac{x}{۲}-\cot^۲\frac{x}{۲}=(\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲})(\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲})$$

$$=\frac{۲}{\sin x}\times(-۲\cot x)=-\frac{۴\cot x}{\sin x}$$

از طرف دیگر،

$$۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}\xrightarrow{\cot x=\frac{۱}{\tan x}=\frac{۳}{۴}}۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\sin^۲x}$$

$$\sin^۲x=\frac{۱۶}{۲۵}\xrightarrow{۰<x<\frac{\pi}{۲}}\sin x=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین $A=\frac{-۴\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۴}{۵}}=-\frac{۱۵}{۴}$.

۵۰۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱=\frac{۲\cos^۲۱۰^\circ-۱}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱)(\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ-۱)}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱=\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ-۱+۱$$

$$=\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ=\sqrt{۲}\cos(۹۰^\circ-۸۰^\circ)=\sqrt{۲}\sin ۸۰^\circ$$

۵۰۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $۲m-۱$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=۲m-۱\Rightarrow ۱=۲m-۱\Rightarrow m=۱$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m+۳$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+۳=۴\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۴$$

$$\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}=۴\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم برای تعیین $\sin ۲\alpha$ می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+۳=۴\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۲\alpha}=۴\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

۵۰۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^۲x+\cot^۲x=۵\Rightarrow(\tan x+\cot x)^۲-۲\tan x\cot x=۵$$

$$(\tan x+\cot x)^۲=۷\Rightarrow(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲=۷$$

$$(\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x})^۲=۷\Rightarrow(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})^۲=۷$$

$$\frac{۴}{\sin^۲ ۲x}=۷\Rightarrow\sin^۲ ۲x=\frac{۴}{۷}$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^۲x+\cot^۲x=۵\Rightarrow(\tan x+\cot x)^۲-۲=۵$$

$$(\frac{۲}{\sin ۲x})^۲-۲=۵\Rightarrow\frac{۴}{\sin^۲ ۲x}=۷\Rightarrow\sin^۲ ۲x=\frac{۴}{۷}$$

۵۱۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases}\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\\ \cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱\end{cases}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

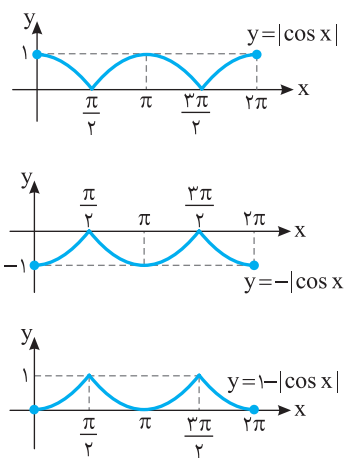
نتیجه می‌شود

$$\frac{۱+\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}{۱+\sin ۴۰^\circ+\cos ۴۰^\circ}=\frac{۱+۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ-(۱-۲\sin^۲ ۲۰^\circ)}{۱+۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\cos^۲ ۲۰^\circ-۱}$$

$$=\frac{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\sin^۲ ۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\cos^۲ ۲۰^\circ}=\frac{۲\sin ۲۰^\circ(\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ)}{۲\cos ۲۰^\circ(\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ)}$$

$$=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\tan ۲۰^\circ$$

۵۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\cos x|$ به‌دست آید. نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|\cos x|$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۵۱۲- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}-1)$ و $(\frac{\pi}{3},0)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{4}-b=\sqrt{2}-1\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}-b=\sqrt{2}-1$$

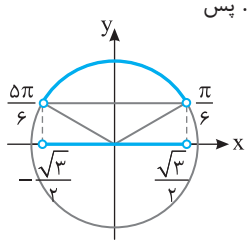
$$f(\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{3}-b=0\Rightarrow\frac{a}{2}=b$$

در نتیجه

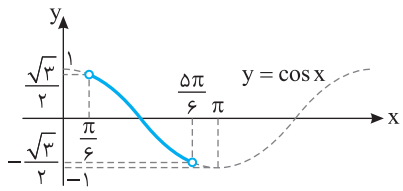
$$\frac{a\sqrt{2}}{2}-b=b\sqrt{2}-b=b(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1\Rightarrow b=1$$

بنابراین $a=2b=2$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۵۱۳- گزینهٔ ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$، آن‌گاه $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$. پس



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}m<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$$



۵۱۴- گزینهٔ ۲ چون $-1\le\sin x\le1$، پس

$$0\le\sin^2 x\le1\Rightarrow0\le5\sin^2 x\le5$$

$$-3\le5\sin^2 x-3\le2\Rightarrow-3\le f(x)\le2$$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب -3 و ۲ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها -6 است. توجه کنید که $f(0)=-3$ و $f(\frac{\pi}{2})=2$.

۵۱۵- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|k|}$، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|k|}=\frac{\pi}{2k+1}\Rightarrow|k|=4k+2$$

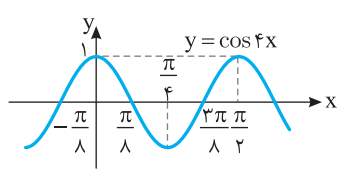
اگر $k>0$، آن‌گاه

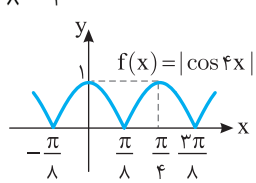
$$k=4k+2\Rightarrow k=-\frac{2}{3}\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $k<0$، آن‌گاه

$$-k=4k+2\Rightarrow k=-\frac{2}{5}$$

۵۱۶- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دورهٔ تناوب آن برابر است با $\frac{\pi}{8}-(-\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{4}$.





۵۱۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-2$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس

$$a-2=-1\Rightarrow a=1$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{45}{8}-\frac{5}{8}=5$ است. پس

$$T=\frac{2\pi}{|\frac{2\pi}{b}|}=5\Rightarrow|b|=5\Rightarrow b=\pm5$$

اگر $b=-5$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{2\pi}{5}x+\frac{\pi}{4})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این‌طور نیست. پس $b=5$ و در نتیجه $b-a=4$.

توجه کنید که اگر $b=-5$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{2\pi}{5}x+\frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{5}{8})=1$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

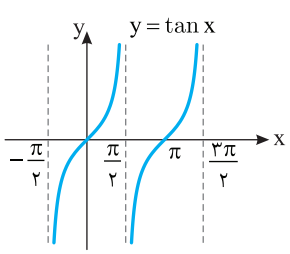
۵۱۸- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ به‌دست می‌آید. پس $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x\neq2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$.

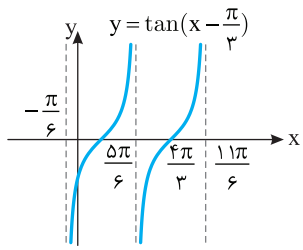
۵۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{3})$ و در نتیجه $\tan x\ge-\sqrt{3}$. بنابراین

$$\frac{2-m}{\sqrt{3}}\ge-\sqrt{3}\Rightarrow2-m\ge-3\Rightarrow m\le5$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

۵۲۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{3})$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است و حداقل مقدار a برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

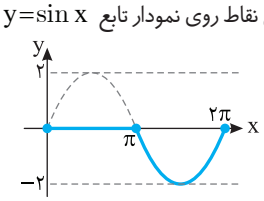




۵۲۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\sin x & 0\le x\le\pi\\ \sin x+\sin x & \pi<x\le2\pi\end{cases}=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ 2\sin x & \pi<x\le2\pi\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ نمودار تابع از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\sin x$ به‌دست آمده است.



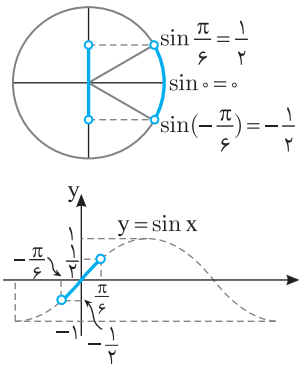
۵۲۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $f(0)=2$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱ است. بنابراین $f(0)=2a-b=2$ و $f_{min}=2a-b-|a+b|$. با توجه به شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با $2a-b-a-b=a-2b$. از حل دستگاه معادله‌های نتیجه $\begin{cases}2a-b=2\\a-2b=1\end{cases}$ می‌شود $a=1$ و $b=0$. بنابراین $f(x)=\sin x+2$ که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

۵۲۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$، آن‌گاه $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$. بنابراین

$$-\frac{1}{2}<\frac{m+1}{2m}<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<\frac{m+1}{m}<1\Rightarrow\left|\frac{m+1}{m}\right|<1$$
$$|m+1|<|m|,\quad m\neq 0$$

در نتیجه

$$m^2+2m+1<m^2\Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$



۵۲۴- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos^2 x=1+2\cos^2 x$$

چون $-1\le\cos x\le 1$، پس

$$0\le\cos^2 x\le 1\Rightarrow 0\le 2\cos^2 x\le 2\Rightarrow 1\le 1+2\cos^2 x\le 3\Rightarrow 1\le f(x)\le 3$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[1,3]$ است.

۵۲۵- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $3a-a^2$ است که وقتی $\cos ax=-1$ اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$3a-a^2=2\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=1, a=2$$

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a=1$، آن‌گاه دورهٔ تناوب این تابع برابر 2π است و اگر $a=2$، آن‌گاه دورهٔ تناوب آن برابر π است.

۵۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

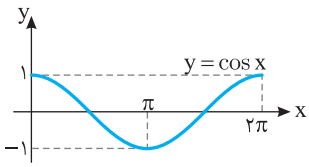
$$f(x)=\cos 4x+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3\cos 4x+1}{2}$$

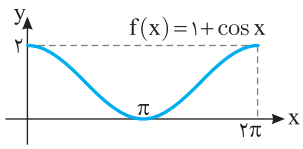
در نتیجه، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

۵۲۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)=1+\cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ یک واحد به بالا انتقال دهیم.





۵۲۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(\frac{\pi}{2}-bx)=1$، پس

$$a+2=1\Rightarrow a=-1$$

در نتیجه

$$f(x)=-1+2\sin bx$$

با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow b=\pm 3$$

برای $x>0$ نمودار تابع $f(x)=-1+2\sin bx$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=3$ قابل قبول است، یعنی $f(x)=-1+2\sin 3x$ و مقدار $b-a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b=-3$، آن‌گاه $f(x)=-1+2\sin(-3x)$ و $f(\frac{\pi}{18})=-2$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۲۹- گزینهٔ ۳ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{4}]$ اکیداً صعودی است، پس

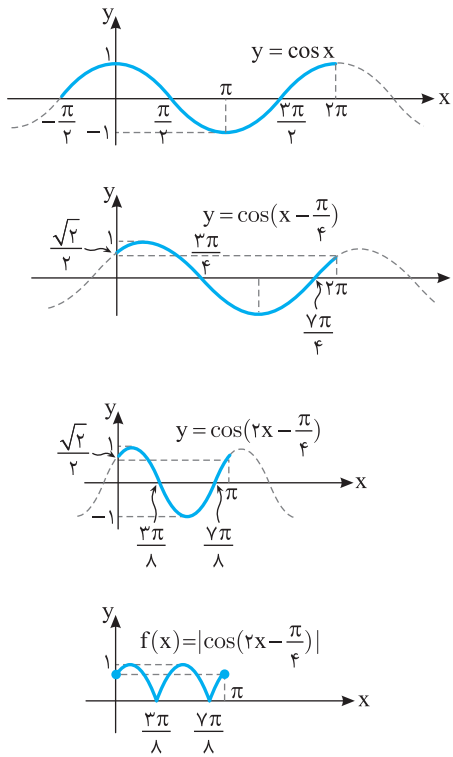
$$0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan 0\le\tan x\le\tan\frac{\pi}{4}$$
$$0\le\tan x\le 1\Rightarrow -1\le-\tan x\le 0\Rightarrow 1\le\frac{3-\tan x}{2}\le\frac{3}{2}$$

بنابراین $R_f=[1,\frac{3}{2}]$.

۵۳۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan x>1$ و اگر $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$، آن‌گاه $\tan x<-1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}>1\Rightarrow m-1>2\Rightarrow m>3$$
$$\frac{m-1}{2}<-1\Rightarrow m-1<-2\Rightarrow m<-1$$

۵۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار به‌دست آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})|$ به‌دست آید.



۵۳۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند، یعنی $f(۰)=۲$.

بنابراین

$$f(۰)=a-۲b\sin ۰=a\Rightarrow a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲-۲b\sin x$ است. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید یا به ازای $\sin x=-۱$ (بستگی به علامت b دارد). اگر $b>۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=-۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲+۲b$.

بنابراین

$$۲+۲b=۶\Rightarrow b=۲$$

و در نتیجه $f(x)=۲-۴\sin x$. اگر $b<۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲-۲b$.

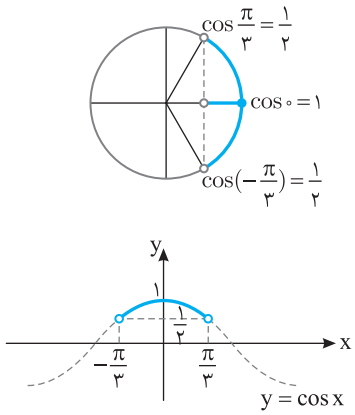
بنابراین

$$۲-۲b=۶\Rightarrow b=-۲$$

و در نتیجه $f(x)=۲+۴\sin x$. با توجه به اینکه xهایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطهٔ $f(x)=۲+۴\sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=۲$ و در نتیجه $ab=۴$.

۵۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}<\cos x\leq ۱$. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}<\frac{m^۲+۱}{۴}\leq ۱\Rightarrow ۲<m^۲+۱\leq ۴\Rightarrow ۱<m^۲\leq ۳\Rightarrow ۱<|m|\leq\sqrt{۳}$$



۵۳۴- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل $f(x)=(\sin^۲ x+۱)^۲-۱$ می‌نویسیم. چون $-۱\leq\sin x\leq ۱$، پس

$$۰\leq\sin^۲ x\leq ۱\Rightarrow ۱\leq\sin^۲ x+۱\leq ۲\Rightarrow ۱\leq(\sin^۲ x+۱)^۲\leq ۴$$

$$۰\leq(\sin^۲ x+۱)^۲-۱\leq ۳\Rightarrow ۰\leq f(x)\leq ۳$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۵۳۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|a\pi|}=۴\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۲}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a|-|b|$ است. بنابراین

$$|a|-|b|=-۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}-|b|=-۳\Rightarrow|b|=\frac{۷}{۲}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a|+|b|$ است که برابر است با $\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{۲}=۴$.

۵۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\cos^۲ ax(۱-\cos^۲ ax)=\cos^۲ ax\sin^۲ ax=(\cos ax\sin ax)^۲$$

$$=(\frac{۱}{۲}\sin ۲ax)^۲=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲ax=\frac{۱}{۴}(\frac{۱-\cos ۴ax}{۲})$$

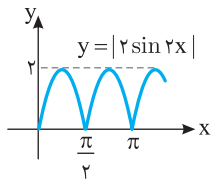
بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۴a|}$ است. پس

$$\frac{۲\pi}{|۴a|}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

۵۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۴|\sin x\cos x|=۴|\frac{۱}{۲}\sin ۲x|=|۲\sin ۲x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ به‌دست آید. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.



اکنـون کافی اسـت نمودار تابع را فقط در یـک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ رسم کنیم.

۵۳۸- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجـه کنید کـه کمترین مقدار تابـع برابر $۱-|a|$ است که با توجه به نمودار تابع، برابر -۱ است:

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(۰)$ مثبت است:

$$f(۰)>۰\Rightarrow ۱+a\sin\frac{\pi}{۴}>۰\Rightarrow\frac{a\sqrt{۲}}{۲}+۱>۰\Rightarrow a>-\sqrt{۲}$$

بنابراین فقط $a=۲$ قابل قبول اسـت. با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}=۴$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{b}|}=۴\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=\pm۲$$

بـا توجـه به اینکه تابـع $f(x)=۱+۲\sin(\frac{\pi}{b}x+\frac{\pi}{۴})$ در یک همسـایگی صفر صعودی است، فقط مقدار $b=۲$ قابل قبول است. پس $a+b=۴$. توجه کنید کـه اگـر $b=-۲$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{\pi}{۲}x+\frac{\pi}{۴})$ و $f(\frac{۱}{۲})=۱$ کـه با توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

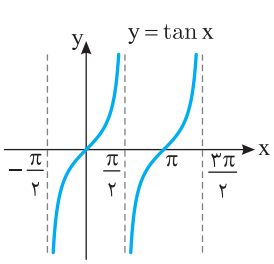
$$۰\le x\le ۲\Rightarrow۰\le\frac{\pi x}{۴}\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow-\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi x}{۴}-\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi}{۶}$$

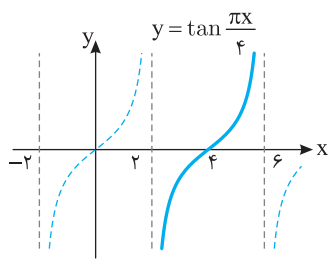
از طرف دیگر تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۶}]$ اکیداً صعودی است، پس تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

$$-\tan\frac{\pi}{۶}\le-\tan(\frac{\pi x}{۴}-\frac{\pi}{۳})\le-\tan(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\le f(x)\le\sqrt{۳}$$

پس $R_f=[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}]$.

۵۴۰- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسـم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{۴}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. پس حداکثـر مقـدار a بـرای اینکه تابـع f روی دامنـه‌اش یعنی بـازهٔ $(۲,a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.





۵۴۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند

$$۳x=۲k\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵}$ شامل جواب‌های به‌صورت $۲k\pi$ هم هستند (مثلاً اگـر در $\frac{۲k\pi}{۵}$ قرار دهید $k=۵$، آن‌گاه جواب ۲π به‌دسـت می‌آید که از قرار دادن $k=۱$ در $۲k\pi$ حاصل می‌شـود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵},\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

۵۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\frac{x}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+۳\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۴۳- گزینهٔ ۳ اگـر نمـودار تابع f محور طول‌هـا را در نقطه‌ای با طول x قطع کند، $f(x)=۰$. پس

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow۲x-\frac{\pi}{۳}=k\pi$$

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{(۳k+۱)\pi}{۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{۲}<\frac{(۳k+۱)\pi}{۶}<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow-۳<۳k+۱<۹\Rightarrow-\frac{۴}{۳}<k<\frac{۸}{۳}$$

بنابراین به ازای $k=-۱$، $k=۰$، $k=۱$ و $k=۲$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۵۴۴- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۵})=-\sin x\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۵})=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow۲k\pi=-\frac{۳\pi}{۱۰},\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow x=k\pi-\frac{۷\pi}{۲۰},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۴۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin۲x(\cos۲x-۱)=۰\Rightarrow\sin۲x=۰\ \text{یا}\ \cos۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z},\quad ۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های معادلهٔ دوم جزء جواب‌های معادلهٔ اول هسـتند، بنابراین جواب‌های معادلهٔ اصلی $x=\frac{k\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z}$ است.

۵۴۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin 2x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $2t^2-7t+5=0$ درمی‌آید و از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=1$ و $t=\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin 2x=\frac{5}{2}\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

۵۴۷- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin 2x\cos 2x=\sqrt{2}\sin 2x\Rightarrow 2\sin 2x(\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{8}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{8},\pi$. پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

۵۴۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2\cos^2 x-1=\cos x-1\Rightarrow\cos x(2\cos x-1)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\quad \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

۵۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 2x+2\sin^2 x=\sin 2x\Rightarrow 1-2\sin^2 x+2\sin^2 x=\sin 2x$$

$$\sin 2x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۵۰- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos x(1-\cos^2 x)=0$$

$$\sin x\cos^2 x-\cos x\sin^2 x=0$$

$$\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$، 2π و $\frac{\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{5\pi}{4}$. $\frac{13\pi}{2}$

۵۵۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$5x=2k\pi+4x\Rightarrow x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=2k\pi-4x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{2k\pi}{9}$ شامل جواب‌های به‌صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{2k\pi}{9}$ قرار دهید $k=9$، آن‌گاه جواب 2π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=0$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (به ازای هیچ مقدار صحیح k، $x=0$ به‌دست نمی‌آید). اگر $k=9$، آن‌گاه $\frac{k\pi}{9}=\pi$، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست، پس گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود.

۵۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin x=-\sqrt{3}\Rightarrow\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin x=\sin(-\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\ ,\ x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\ ,\ x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

۵۵۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\sin 3x=1$، نمودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(4k+1)\pi}{6},k\in\mathbb{Z}$$

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi\le\frac{(4k+1)\pi}{6}\le 2\pi\Rightarrow -6\le 4k+1\le 12\Rightarrow -7\le 4k\le 11$$

$$-\frac{7}{4}\le k\le\frac{11}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-1,0,1,2\}$$

۵۵۴- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{2x}{3}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\cos\frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{2x}{3}\Rightarrow x=\frac{(-12k+3)\pi}{7}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi-\frac{2x}{3}\Rightarrow x=12k\pi-3\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به‌صورت $x=12k\pi-3\pi$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار ندارند.

پس جواب‌های به‌صورت $x=\frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می‌کنیم

k	0	1	-1
x	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{-9\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7}$
		(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۵۵۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲}\sin^۲ x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sqrt{۲}\sin x-۱)=۰$$

$$\sin x=۰ \text{ یا } \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۵۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^۲ x)-۳\sin x-۳=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x+۳\sin x+۱=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $۲t^۲+۳t+۱=۰$ درمی‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t=-۱$ و $t=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲},\quad \sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۶},-\frac{۵\pi}{۶}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,۰)$ را مشخص کرده‌ایم که تعداد آن‌ها سه‌تاست.

۵۵۷- گزینهٔ ۱ چون $\sin ۴x\neq ۰$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{\cos ۲x}=\frac{۱}{\sin ۴x}\Rightarrow \sin ۴x=\cos ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\cos ۲x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x-\cos ۲x=۰\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

$$\cos ۲x=۰ \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$، که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۵۵۸- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{۳\sin x}{\cos x}\Rightarrow \sin ۲x\cos x=۳\sin x\cos ۲x$$

اکنون از اتحادهای $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده می‌کنیم

$$۲\sin x\cos^۲ x-۳\sin x(۲\cos^۲ x-۱)=۰$$

$$\sin x(۲\cos^۲ x-۶\cos^۲ x+۳)=۰\Rightarrow \sin x(۳-۴\cos^۲ x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=\pi$$

$$\cos^۲ x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با ۵π.

۵۵۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۱۶}{۳}$$

$$۱۶\sin^۲ x\cos^۲ x=۳\Rightarrow ۴(۲\sin x\cos x)^۲=۳$$

$$۴\sin^۲ ۲x=۳\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \sin ۲x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\quad ۲x=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$$

$$۲x=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳},\quad ۲x=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر است با ۲π.

۵۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+\frac{\pi}{۹}-(x-\frac{۷\pi}{۱۸})=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x-\frac{۷\pi}{۱۸}=(x+\frac{\pi}{۹})-\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^۲(x+\frac{\pi}{۹})+۲\sin^۲(-\frac{\pi}{۲}+(x+\frac{\pi}{۹}))=۲$$

$$\sin^۲(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^۲(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$۱-\cos^۲(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^۲(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$\cos^۲(x+\frac{\pi}{۹})=۱\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۹})=\pm۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۹})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{\pi}{۹}=k\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۵x=۲k\pi+۳x\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=۲k\pi+\pi-۳x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۲- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos\frac{x}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi\pm\frac{۴\pi}{۳},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	−۱
$x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$	$-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$۴\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$-۴\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)

k	۰	۱	−۱
$x=۴k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$۴\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$-۴\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادلهٔ فوق یک جواب در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ دارد.

۵۶۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\cos ۴x=۱$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$۴x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	−۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$

بنابراین در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۵۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت $\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)=\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})$ می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow ۲k\pi=-\frac{۱۱\pi}{۱۸},\ k\in\mathbb{Z}\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۵- گزینهٔ ۲ جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۲\cos^۳x-\cos x=۰\Rightarrow\cos x(۲\cos^۲x-۱)=۰$$

$$\cos x=۰,\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون جواب‌های معادله را در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۵۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin(\pi+x)=-\sin x$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۲x-\sin x-۲=۰\Rightarrow(\sin x+۱)(\sin x-۲)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x-۲=۰\Rightarrow\sin x=۲\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sin x+۱=۰\Rightarrow\sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x=۱-\sin^۲x\Rightarrow\cos ۲x=\cos^۲x$$

اکنون از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$۲\cos^۲x-۱=\cos^۲x\Rightarrow\cos^۲x=۱\Rightarrow\cos x=\pm۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x=۲k\pi\ \text{یا}\ x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و ۲π.

راه‌حل دوم از اتحاد $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱-\cos ۲x=\sin^۲x\Rightarrow ۲\sin^۲x=\sin^۲x\Rightarrow\sin^۲x=۰\Rightarrow\sin x=۰$$

$$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=۰,x=\pi,x=۲\pi$$

۵۶۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ استفاده می‌کنیم.

$$۱+\cos\frac{x}{۲}=-\cos x\xrightarrow{\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}-۱}$$

$$۱+\cos\frac{x}{۲}=-۲\cos^۲\frac{x}{۲}+۱\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}(۲\cos\frac{x}{۲}+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است

$$\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi\pm\frac{۴\pi}{۳},\ k\in\mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ هیچ یک در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار ندارند، ولی از جواب‌های $x=۲k\pi+\pi$ و $x=۴k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به‌ازای $k=۰$ به‌دست می‌آیند که π و $\frac{۴\pi}{۳}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{۷\pi}{۳}$ است.

۵۶۹- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=۱$$

$$\xrightarrow{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=\sin x}۱-\sin x=۱\Rightarrow\sin x=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $x=۰$، $x=\pi$ و $x=۲\pi$.

ولی توجه کنید که جواب $x=۰$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.

۵۷۰- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$(\cos x-\sin x)(\cos^۲x+\sin x\cos x+\sin^۲x)=\cos^۲x-\sin^۲x$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱-\sin x)(۱-\cos x)=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\sin x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\quad \cos x=۱\Rightarrow x=۰,۲\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۵۷۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۳x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+x-\frac{\pi}{۹}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۳x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{۹}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱۳\pi}{۳۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰<k\pi+\frac{\pi}{۹}<۲\pi\Rightarrow-\frac{۱}{۹}<k<\frac{۱۷}{۹}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۰,۱\}$$

$$۰<\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱۳\pi}{۳۶}<۲\pi\Rightarrow\frac{-۱۳}{۱۸}<k<\frac{۵۹}{۱۸}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۰,۱,۲,۳\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ شش جواب دارد.

۵۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos ۳x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۳x=\cos\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۳x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۹}=\frac{(۶k\pm۱)\pi}{۹}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را معین می‌کنیم

k	۰	۱	۲
$x=(۶k+۱)\frac{\pi}{۹}$	$\frac{\pi}{۹}$	$\frac{۷\pi}{۹}$	$\frac{۱۳\pi}{۹}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x=(۶k-۱)\frac{\pi}{۹}$	$-\frac{\pi}{۹}$	$\frac{۵\pi}{۹}$	$\frac{۱۱\pi}{۹}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۹}+\frac{۵\pi}{۹}=\frac{۱۳\pi}{۹}$$

۵۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $۲\cos^۲\alpha-۱=\cos۲\alpha$، معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(۳x-\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow\sin۳x=۰$$

$$۳x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

۵۷۴- گزینهٔ ۲ چون $\cos(x-\frac{\pi}{۶})\neq۰$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{۶})=-\sin۳x\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۳x\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{x\in(۰,\pi)}$$

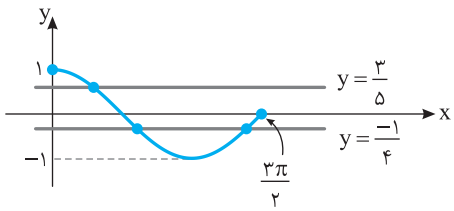
$$۰<-k\pi-\frac{\pi}{۳}<\pi\Rightarrow\frac{۱}{۳}<-k<\frac{۴}{۳}\Rightarrow-\frac{۴}{۳}<k<-\frac{۱}{۳}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-۱\}$$

$$x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۳x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}\xrightarrow{x\in(۰,\pi)}$$

$$۰<\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}<\pi\Rightarrow\frac{۲}{۱۲}<k<\frac{۲۶}{۱۲}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۱,۲\}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ به وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد.

۵۷۵- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت $\cos x=-\frac{۱}{۴}$ یا $\cos x=\frac{۳}{۵}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=-\frac{۱}{۴}$ و $y=\frac{۳}{۵}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{۳}{۵}$ در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ یک جواب و معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۴}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ فوق سه جواب دارد.



۵۷۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=۲\Rightarrow\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x}=۲$$

$$\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin۲x}=۲\Rightarrow\sin۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم معادله را به کمک اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin۲x}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۲}{\sin۲x}=۲\Rightarrow\sin۲x=۱\Rightarrow۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۷۷- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos۲\alpha}{۲}$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱-\cos۲x}{۲}+\frac{۱-\cos۸x}{۲}=۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos۲x+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos۸x=۱$$

$$\cos۸x=-\cos۲x\Rightarrow\cos۸x=\cos(\pi-۲x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۸x=۲k\pi+\pi-۲x\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۱۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۸x=۲k\pi-\pi+۲x\Rightarrow x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۱۰}$	$\frac{\pi}{۱۰}$	$\frac{۳\pi}{۱۰}$	$\frac{\pi}{۲}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس جواب‌های معادله که در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قرار دارند عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۰}$، $\frac{۳\pi}{۱۰}$ و $\frac{\pi}{۶}$.

۵۷۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^۴x-\sin^۴x=۱\Rightarrow(\cos^۲x+\sin^۲x)(\cos^۲x-\sin^۲x)=۱$$

$$\cos۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۳\pi)$ به ازای $k=۱,۲$ به‌دست می‌آیند که عبارت‌اند از π و ۲π و مجموع آن‌ها برابر ۳π است.

۵۷۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\cos x$، آن‌گاه $\sin^۲ x=۱-t^۲$ و معادله به‌صورت $(۲-\sqrt{۲})(۱-t^۲)+t-۱=۰$ در می‌آید. بنابراین

$$(۲-\sqrt{۲})(۱-t)(۱+t)-(۱-t)=۰$$
$$(۱-t)((۲-\sqrt{۲})(۱+t)-۱)=۰$$
$$(۱-t)(۲-\sqrt{۲}+(۲-\sqrt{۲})t-۱)=۰$$
$$t=۱\ ,\quad t=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-\sqrt{۲}}\times\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۱\Rightarrow x=۰\ ,\qquad \cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، سه است.

۵۸۰- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$ استفاده می‌کنیم.

$$۲(\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x)=۳\Rightarrow ۲(۱+\sin ۲x)=۳$$
$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ به ازای $k=۰$، $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۵۸۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۳})=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

بنابراین جواب‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲k\pi=-\frac{۷\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\quad\text{(غ.ق.ق.)}$$
$$x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۱۳\pi}{۲۴},k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	$\frac{۱۳\pi}{۲۴}$	$\frac{۳۷\pi}{۲۴}$	$\frac{۶۱\pi}{۲۴}$	$-\frac{۱۱\pi}{۲۴}$	$-\frac{۳۵\pi}{۲۴}$
		(غ.ق.ق.)			(غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازهٔ فوق دارد.

۵۸۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x+\frac{۵\pi}{۳۶})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{۵\pi}{۳۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۱۸}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$x+\frac{۵\pi}{۳۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۱۱\pi}{۱۸}$$

پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

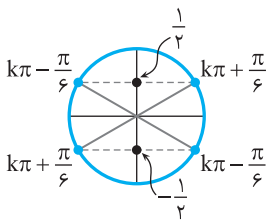
۵۸۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^۲(۵x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin(۵x-\frac{\pi}{۳})=\pm\frac{۱}{۲}$$

با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۵x-\frac{\pi}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$۵x=k\pi+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}=\frac{k\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$۵x=k\pi-\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.



۵۸۴- گزینهٔ ۱ چون $\cos ۲x\neq۰$، طرفین معادله را در $\cos ۲x$ ضرب می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\cos ۲x\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

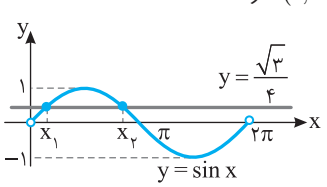
k	۰	۱	۲
$x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۲}$
			(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	−۱
$x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{۹\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۴}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

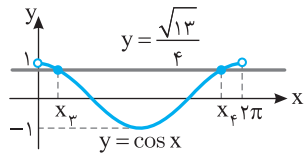
جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ ولی $\frac{۳\pi}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که $x=\frac{۳\pi}{۴}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos ۲x$ به وجود آمده است).

پس تعداد جواب‌ها در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر یک است.

۵۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ یا $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$. با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$، معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



همچنین با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها $(x_۴)$ همان جواب معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ است $(x_۱)$، زیرا $(\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۳}}{۴})^۲=۱$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر مسئله سه جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۵۸۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow\cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب‌های $۲k\pi$ نیز می‌شوند، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۳}$, $k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

به ازای $k=۳$، گزینهٔ (۱) برابر π می‌شود، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^۲\pi-\cos^۲\pi=-۱\ ,\quad \sin(\frac{۳\pi}{۲}-\pi)=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

بنابراین گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۵۸۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$
$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x+\sin x$ ضرب می‌کنیم

$$\cos x-\sin x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^۲$$
$$\begin{cases}\cos x-\sin x=۰ & (۱)\\ (\cos x+\sin x)^۲=۱ & (۲)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۱) جواب‌های زیر در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}$$

از معادلهٔ (۲) جواب‌های زیر در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^۲ x+\sin^۲ x+\underbrace{۲\sin x\cos x}_{\sin ۲x}=۱\Rightarrow\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi$$
$$x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,\pi]}x=۰\ ,\ x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ x=\pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر $\frac{۷\pi}{۴}$ است.

۵۸۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x)=\sin x$$
$$(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)=\sin x$$
$$\sin x-\sin^۲ x\cos x+\cos x-\sin x\cos^۲ x=\sin x$$
$$\cos x(-\sin^۲ x+۱-\sin x\cos x)=۰$$
$$\cos x(\cos^۲ x-\sin x\cos x)=۰\Rightarrow\cos^۲ x(\cos x-\sin x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\quad \cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=\sin x\Rightarrow\sin x-\sin^۳ x-\cos^۳ x=۰$$
$$\sin x(۱-\sin^۲ x)-\cos^۳ x=۰\Rightarrow\sin x\cos^۲ x-\cos^۳ x=۰$$
$$\cos^۲ x(\sin x-\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ \sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد.

۵۸۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^۲ x=۲-۲\sin^۲ x\Rightarrow\tan^۲ x=۲(۱-\sin^۲ x)$$
$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=۲\cos^۲ x\xrightarrow{\cos x\neq۰}\sin^۲ x=۲\cos^۴ x$$
$$۱-\cos^۲ x=۲\cos^۴ x\Rightarrow۲\cos^۴ x+\cos^۲ x-۱=۰$$
$$(\cos^۲ x+۱)(۲\cos^۲ x-۱)=۰$$

چون $\cos^۲ x+۱\neq۰$، بنابراین

$$۲\cos^۲ x=۱\Rightarrow\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴},\quad k\in\mathbb{Z}$$

۵۹۰- گزینهٔ ۲ از $\cos(۲\pi\sin x)=-۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\pi\sin x=۲k\pi+\pi\Rightarrow\sin x=k+\frac{۱}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به $-۱\leq\sin x\leq۱$ نتیجه می‌شود که k می‌تواند مقادیر صفر و -۱ را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$k=۰\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۵\pi}{۶}$$
$$k=-۱\Rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶},x=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با ۴π.

۵۹۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\times۰/۲}=۳$.

۵۹۲- گزینهٔ ۴ از اتحادهای $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم و عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4\theta\cos^4\theta}=\frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta}=\frac{16}{\sin^4 2\theta}=16\sin^{-4}2\theta$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۵۹۳- گزینهٔ ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب، برابر ۳ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\Rightarrow\frac{2}{|b|}=1\Rightarrow b=\pm2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس

$$|a|=3\Rightarrow a=\pm3$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}\Rightarrow y=3\sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}\Rightarrow y=-3\sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -6 است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۵۹۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم. اگر $\alpha=\frac{x}{2}$، آن‌گاه

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-2\cot x=-\frac{2}{\tan x}=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۵۹۵- گزینهٔ ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد:

$$\sin 3x=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow\sin 3x=\sin x$$

$$\begin{cases}3x=2k\pi+x\Rightarrow x=k\pi & (\text{غ.ق.ق})\\3x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

به‌ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۵۹۶- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت $\cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$ نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\pi-x\\3x=2k\pi-\pi+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\2x=2k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq0$، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول است. پس جواب کلی $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۵۹۷- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$. در ادامه معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{8}))=1$$

$$2\sin(x+\frac{\pi}{8})=1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{4}$ است:

$$x_1=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8},\quad x_2=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow x_1+x_2=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۵۹۸- گزینهٔ ۴ زاویهٔ $\frac{\pi}{2}-x$، متمم زاویهٔ x است، پس

$$\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0\Rightarrow\sin 2x+\sin x=0$$

$$\sin 2x=-\sin x\Rightarrow\sin 2x=\sin(-x)$$

$$2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\quad 2x=2k\pi+\pi+x\Rightarrow x=(2k+1)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از 0، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$، 2π و π. مجموع این جواب‌ها برابر 5π است.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۵۹۹- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos x=0\Rightarrow2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$-2\cos^2 x+3\cos x+2=0\Rightarrow\cos x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-4}$$

$$\begin{cases}\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\\\cos x=2\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۶۰۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به اتحاد $2\cos^2 x=\cos 2x+1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0\Rightarrow\cos 2x+\cos 2x+1=0$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱+۲\cos^۲ x=۰\Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱$$

$$\cos x=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند.

تجربی - ۹۶

۶۰۱- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم.

ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

چون $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$.

تجربی - ۹۵

۶۰۲- گزینهٔ ۳ عبارت را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)+\sin(۷۲۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ+۲۰^\circ)-\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)}=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos ۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}=\frac{-۱-\frac{۲}{۵}}{-۱+\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{-۷}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{۷}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۰۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱$، پس

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه $y=-۱-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱+۲\sin(bx)$. با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm ۳$$

برای $x>\frac{\pi}{۱۸}$ نمودار تابع $y=-۱+۲\sin(bx)$ به صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=۳$ قابل قبول است، یعنی $y=-۱+۲\sin(۳x)$ و مقدار $a+b$ برابر است با $۲=-۱+۳$.

ریاضی - ۹۵

۶۰۴- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=\sin^۲(\pi+\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^۲ x-\cos^۲ x=\sin^۲\frac{\pi}{۴}\Rightarrow-\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

تجربی - ۹۲

۶۰۵- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x=\frac{\cos x}{\sin x}(۴\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})=۴\cos x+۱$$

$$۲(۲\cos^۲ x-۱)=۴\cos x+۱\Rightarrow ۴\cos^۲ x-۴\cos x-۳=۰$$

$$(۲\cos x+۱)(۲\cos x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x=\frac{۳}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.}),\quad \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۰۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow\cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب $۲k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های کلی به صورت $\frac{۲k\pi}{۳}$ هستند.

تجربی - ۹۱

۶۰۷- گزینهٔ ۱ از اتحادهای $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ و $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲\cos^۲ x-۱)+۲\sin x\cos x=۰\Rightarrow\cos ۲x+\sin ۲x=۰$$

$$\cos ۲x=-\sin ۲x\Rightarrow\cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow k=-\frac{۱}{۴}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x=-\sin 2x$ به کمک دایرهٔ مثلثاتی متوجه می‌شویم:

$$2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

تجربی - ۹۴

۶۰۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

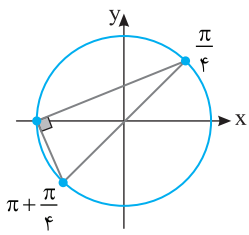
$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x$$
$$\sin x\cos x=\sin^2 x\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\quad \cos x-\sin x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به‌ازای $x=2k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(2k+1)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ هستند که روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱



۶۰۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت چپ معادله لازم است که

$$1+\cos x\neq 0\Rightarrow \cos x\neq -1\Rightarrow x\neq 2k\pi+\pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x=2k\pi-2x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z} \\ 3x=2k\pi+\pi+2x\Rightarrow x=2k\pi+\pi \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۶۱۰- گزینهٔ ۳ از اتحادهای

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$2\sin 2x\cos 2x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$$
$$2\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x\Rightarrow \cos 2x(2\sin 2x+1)=0$$

$$\begin{cases} \cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \sin 2x=\frac{-1}{2}\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{12} \\ x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{11\pi}{12}$ و $\frac{7\pi}{12}$

که مجموعشان برابر $\frac{30\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$ است.

ریاضی - ۹۵

۶۱۱- گزینهٔ ۴ کافی است $x=۲$ عضو بازهٔ $(a-۲, ۲a)$ باشد. یعنی

$$a-۲<۲\Rightarrow a<۴,\quad ۲a>۲\Rightarrow a>۱$$

بنابراین $۱<a<۴$.

۶۱۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از شرط $[x]\neq ۲$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است:

$$D_f=(-\infty, ۲)\cup[۳, +\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x=۳$ تعریف نشده است.

۶۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۳$،

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۶۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} f(x+۱)=\lim_{y\to ۱} f(y)=۰$$

از طرف دیگر، اگر $x\to ۹^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۳}\to ۳^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۹^+} f(\frac{x}{۳})=\lim_{t\to ۳^+} f(t)=۱$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

۶۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۱، $[x]=۰$.

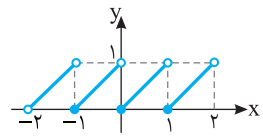
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x[x])=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(۰)=\lim\limits_{x\to ۱^-} ۲=۲$.

۶۱۶- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار،

$$x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to ۲^+$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to ۲^+} f(t)=-۲$.

۶۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که تابع در نقطه‌های $x=-۱$، $x=۰$ و $x=۱$ از بازهٔ $(-۲, ۲)$ حد ندارد.



۶۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=۲a(۵)-۳=۱۰a-۳$$

$$\lim_{x\to ۵^+} f(x)=۵^۲-a(۵)+b=۲۵-۵a+b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۱۷$، پس هر یک از حدهای بالا برابر ۱۷ است:

$$\begin{cases} ۱۰a-۳=۱۷ \\ ۲۵-۵a+b=۱۷ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۲ \end{cases}\Rightarrow ab=۴$$

۶۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x+۴}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۴)}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}=\frac{۷}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}=\frac{۷}{۶}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۶$. همچنین $\lim\limits_{x\to ۱} f(۲x+۱)=\lim\limits_{t\to ۳} f(t)=۶$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(۲x+۱)}{x+۲}=\frac{۶}{۱+۲}=۲$$

۶۲۰- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۶x^۲-x^۳)=۲۴-۸=۱۶$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^۲-x^۳)=۱۲-۸=۴$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر ۲۰ است.

۶۲۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

پس بازهٔ $(-۱, ۳)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطهٔ $x=-۲$ نیست.

۶۲۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=۲a,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=a-۲,\quad f(a)=a$$

بنابراین

$$۲a-(a-۲)=۳a+۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۶۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to ۰^-$ و اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^۲)-\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^۲)=\lim_{t\to ۰^-} f(t)-\lim_{t\to ۰^+} f(t)=۳-۱=۲$$

۶۲۴- گزینهٔ ۳ در سمت راست نقطهٔ ۱-، $[x]=-۱$ و $|x|=-x$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{-x}{-۱})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{|x|}{[x]})$.

۶۲۵- گزینهٔ ۴ چون

$$x\to ۱^+\Rightarrow f(x)\to(-۱)^+,\quad x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to ۱^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱^+}(fof)(x)=\lim_{t\to(-۱)^+} f(t)=-۱$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=\lim_{t\to ۱^-} f(t)=۱$$

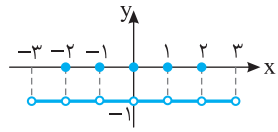
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^+}(fof)(x)-\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=-۱-۱=-۲$.

۶۲۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]\Rightarrow f(x)=۰$$

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]-۱\Rightarrow f(x)=-۱$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(۳,-۳)$ به شکل زیر است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر -۱ است.



۶۲۷- گزینهٔ ۱ این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x=۲$ و $x=-۲$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax^۳+x^۲)=۸a+۴$$

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x+b)=۲+b$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(ax^۳+x^۲)=-۸a+۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(x+b)=-۲+b$$

بنابراین

$$\begin{cases}۸a+۴=۲+b\\ -۸a+۴=-۲+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۸a+۲\\ b=-۸a+۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow ab=۱$$

۶۲۸- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $\lim_{x\to۲} f(x)=L$، طبق قضایای حد

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)}{f(x)+۱}=۳\Rightarrow\frac{۲L}{L+۱}=۳\Rightarrow ۲L=۳L+۳\Rightarrow L=-۳$$

در نتیجه $\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}=\frac{۲\times(-۳)-۱}{-۳}=\frac{۷}{۳}$.

۶۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=-۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(ax[۳x]+x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(-۷ax+x)$$
$$=۱۴a-۲$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(ax[۳x]+x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(-۶ax+x)$$
$$=۱۲a-۲$$

بنابراین

$$۱۴a-۲+۱۲a-۲=۱۱\Rightarrow ۲۶a=۱۵\Rightarrow a=\frac{۱۵}{۲۶}$$

۶۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ $x=۱$ حساب می‌کنیم. اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^-$ و اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و $۲x\to۲^-$. در نتیجه

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{x\to۱^-}[۲x]+(m+۱)\lim_{x\to۱^-}[-x]=۱+(m+۱)(-۱)=-m$$

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{x\to۱^+}[۲x]+(m+۱)\lim_{x\to۱^+}[-x]=۲+(m+۱)(-۲)=-۲m$$

در نتیجه

$$-۲m=-m\Rightarrow m=۰$$

۶۳۱- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$۴-x^۲\geq۰\Rightarrow x^۲\leq۴\Rightarrow-۲\leq x\leq۲$$

$$x-[x]\neq۰\Rightarrow x\neq[x]\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)$ است، پس نقاط $x=\pm۱$ و $x=۰$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۶۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید اگر $x\to۳^-$، آن‌گاه $t=(x-۱)\to۲^-$.

بنابراین $\lim_{x\to۳^-} f(x-۱)=\lim_{t\to۲^-} f(t)=-۱$. همچنین اگر $x\to۰^+$، آن‌گاه $t=(x+۱)\to۱^+$. بنابراین $\lim_{t\to۱^+} f(t)=-۲$. بنابراین $\lim_{x\to۰^+} f(x+۱)$ مقدار مورد نظر برابر -۳ است.

۶۳۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $x=۰$ مقدارهای تابع f نزدیک ۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to۲^-$ و $[f(x)]=۱$. بنابراین $\lim_{x\to۰^+}[f(x)]=۱$. همچنین در یک همسایگی چپ $x=۰$ مقدارهای تابع f نزدیک -۱ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to(-۱)^-$ و $[f(x)]=-۲$.

بنابراین $\lim_{x\to۰^-}[f(x)]=-۲$، در نتیجه

$$۲\lim_{x\to۰^+}[f(x)]-\lim_{x\to۰^-}[f(x)]=۲-(-۲)=۴$$

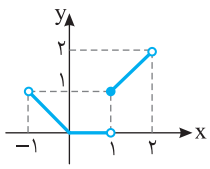
۶۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$-۱<x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-x$$

$$۰\leq x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۱\leq x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ از بازهٔ $(۲,-۱)$ حد ندارد.



۶۳۵- گزینهٔ ۴ اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x>۱$، پس $۲-x<۱$. در نتیجه $\lim_{x\to۱^+} f(۲-x)=\lim_{y\to۱^-} f(y)=۲a$. همچنین $\lim_{x\to۱^+} f(x)=a$. در نتیجه $\lim_{x\to۱^+}\frac{f(۲-x)}{f(x)}=\frac{۲a}{a}=۲$.

۶۳۶- گزینهٔ ۱ چون تابع‌های f و g در $x=a$ حد دارند، پس

$$\lim_{x\to a}(f(x)-۲g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a}۲g(x)$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)-۲\lim_{x\to a} g(x)=۲$$

همچنین

$$\lim_{x\to a}(۲f(x)-۳g(x))=\lim_{x\to a}۲f(x)-\lim_{x\to a}۳g(x)$$
$$=۲\lim_{x\to a} f(x)-۳\lim_{x\to a} g(x)=۶$$

بنابراین اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_۲$، آن‌گاه

$$\begin{cases}L_۱-۲L_۲=۲\\ ۲L_۱-۳L_۲=۶\end{cases}\Rightarrow L_۱=۶\ ,\ L_۲=۲$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_۱\times L_۲=۱۲$.

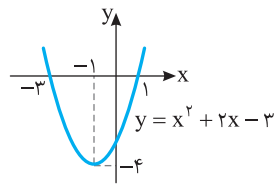
۶۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x[x]+۲a)=\lim_{x\to۲^+}(۲x+۲a)=۴+۲a$$
$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(b[-x]+۳x)=\lim_{x\to۲^-}(-۲b+۳x)=-۲b+۶$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع f در این نقطه برابرند:

$$۴+۲a=-۲b+۶\Rightarrow ۲a+۲b=۲\Rightarrow a+b=۱$$

۶۳۸- گزینهٔ ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y=x^۲+۲x-۳$ رسم شده است. توجه کنید $\lim_{x\to-۳}(x^۲+۲x-۳)=۰$. اما در سمت چپ $x=-۳$، مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ $x=-۳$، $[x^۲+۲x-۳]=۰$. در نتیجه حاصل حد نیز صفر می‌شود.



۶۳۹- گزینهٔ ۳ مطابق قضیه‌های محاسبهٔ حد، اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{۱+f^۲(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{۱+(\lim_{x\to a} f(x))^۲}=\frac{L}{۱+L^۲}$$

در بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۶۴۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح نشود، تابع $y=[۲x]$ حد دارد. در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح شود، تابع $y=[۲x]$ حد ندارد. این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم

$$۲x=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{۲}$$
$$۰<\frac{k}{۲}<۳\Rightarrow ۰<k<۶\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازهٔ $(۰,۳)$ حد ندارد.

۶۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^۳)\to۰^-$ و اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^۳)\to۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^+} f(۱-x^۳)+\lim_{x\to۱^-} f(۱-x^۳)=\lim_{t\to۰^-} f(t)+\lim_{t\to۰^+} f(t)=۴+۲=۶$$

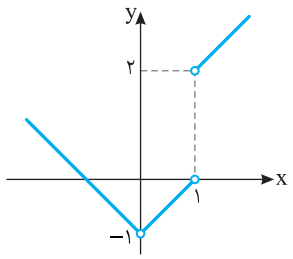
۶۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim_{x\to۱} f(x)=۳$. بنابراین $[\lim_{x\to۱} f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف $x=۱$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to۳^-$. بنابراین در این بازه $[f(x)]=۲$، پس $\lim_{x\to۱}[f(x)]=\lim_{x\to۱}۲=۲$. بنابراین

$$\frac{\lim_{x\to۱}[f(x)]}{[\lim_{x\to۱} f(x)]}=\frac{۲}{۳}$$

۶۴۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x<۰\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{-x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-x-۱$$
$$۰<x<۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=x-۱$$
$$x>۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{x}+\frac{x-۱}{x-۱}=x+۱$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. پس تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد.



۶۴۴- گزینهٔ ۱ تابع f فقط در $x=۲$ و $x=-۲$ ممکن است حد نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+} x^۲=۴,\quad \lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x^۳-۲x)=۴$$
$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(x^۳-۲x)=-۴$$
$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-} x^۲=۴$$

پس تابع در $x=۲$ حد دارد ولی در $x=-۲$ حد ندارد.

۶۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x^۳-x=x(x^۲-۱)$. در نتیجه اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن‌گاه $x^۳-x>۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to۰^-} f(x^۳-x)=\lim_{t\to۰^+} f(t)=\lim_{t\to۰^+}(\sqrt{t+۹})=۳$$

۶۴۶- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax^۲+۳)=۴a+۳$$
$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+۳a)=۴+۳a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر باشند، یعنی

$$۴+۳a=۴a+۳\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $\lim_{x\to۳} f(x)=\lim_{x\to۳}(x^۲+۳a)=\lim_{x\to۳}(x^۲+۳)=۱۲$.

۶۴۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{۳f(x)}{۴f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳\lim_{x\to a} f(x)}{۴\lim_{x\to a} f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳L}{۴L+۲}=۱$$
$$۴L+۲=۳L\Rightarrow L=-۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)-۳}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} f(x)-۳}=\frac{L}{L-۳}=\frac{-۲}{-۲-۳}=\frac{۲}{۵}$$

۶۴۸- گزینهٔ ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x)=x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد.

در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=0$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از بازهٔ $(-2,2)$ حد ندارد.

۶۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{4a}{x^2}+x^2\right)=\frac{4a}{4}+4=a+4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{3a}{x^2}+x^2\right)=\frac{3a}{4}+4$$

بنابراین

$$a+4+\frac{3a}{4}+4=10\Rightarrow\frac{7a}{4}=2\Rightarrow a=\frac{8}{7}$$

۶۵۰- گزینهٔ ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

این تابع در $x=0$ حد ندارد، ولی

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}1=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{f(x)}=0$$

برای رد گزینهٔ (۲)، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x<0\\ \frac{1}{2} & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در $x=0$ حد ندارد ولی $\lim_{x\to 0}[f(x)]=\lim_{x\to 0}0=0$.

۶۵۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x+1}=\frac{5}{2}$$

۶۵۲- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که $x^4+4x^3+4x^2=x^2(x^2+4x+4)=x^2(x+2)^2$. بنابراین

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+4x^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}x^2=4$$

۶۵۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4),\quad x^2-4=(x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{2+2}=3$$

۶۵۴- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim_{x\to -2} f(x)=4$. در نتیجه

$$\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-64}{f(x)-4}=\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-4^3}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(f(x)-4)(f^2(x)+4f(x)+16)}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}(f^2(x)+4f(x)+16)=4^2+4\times 4+16=48$$

۶۵۵- گزینهٔ ۳ یک عامل $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-3x+3}{x^3-1+3x-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+x+4}=\frac{0}{6}=0$$

۶۵۶- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2-3x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x-1}=-1$$

۶۵۷- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست $(b\neq 0)$. پس

$$\lim_{x\to 3}(x^2+ax+3)=9+3a+3=12+3a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{3+3}{3-1}=3$$

بنابراین $a+b=-4+3=-1$.

۶۵۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-2x^3})(1+\sqrt{1-2x^3})}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2x^3)}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\sqrt{1-2x^3}}=\frac{2}{1+1}=1$$

۶۵۹- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}{(x^2-6x+5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}=\frac{-3}{4(2+2)}=\frac{-3}{16}$$

۶۶۰- گزینهٔ ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}$$
$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x-8}{x+1-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{3+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

۶۶۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است، توجه کنید که

$$(2x+1)^3+(2x-1)^3=8x^3+12x^2+6x+1+8x^3-12x^2+6x-1$$
$$=16x^3+12x=4x(4x^2+3)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x(4x^2+3)}{4x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3)=3$$

۶۶۲- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^4-9x^2}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^2(x^2-3)}{x-\sqrt{3}}$$
$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}(3x^2(x+\sqrt{3}))$$
$$=3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+\sqrt{3})=18\sqrt{3}$$

۶۶۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^4-27x=x(x^3-27)=x(x-3)(x^2+3x+9)$$
$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-27x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x^2+3x+9)}{x+2}=\frac{3(9+9+9)}{3+2}=\frac{81}{5}$$

۶۶۴- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^4-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=3$$

۶۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲ است. پس

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x[x]-3}{x[x]-6}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x-3}{2x-6}$$
$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{2}=2$$

۶۶۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد چاق و لاغر، $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right)\times\left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\right)\times\frac{1}{12}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}}\right)\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{48}$$

۶۶۷- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{3x-\sqrt{15x+6}}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{3x+\sqrt{15x+6}}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{9x^2-15x-6}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{9x+3}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)=\frac{3}{21}\times\frac{6+6}{2+2}=\frac{3}{7}$$

۶۶۸- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. فرض می‌کنیم $\sqrt[6]{x}=t$.

در این صورت، اگر $x\to 64$، آن‌گاه $t\to 2$، بنابراین $t>0$. اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{2^2+2\times 2+4}{2+2}=3$$

۶۶۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[12]{x}$، آن‌گاه $x=t^{12}$ و $t\to 1$.

بنابراین $t>0$ و می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^{12}}-t^{12}}{\sqrt[3]{t^{12}}-\sqrt[4]{t^{12}}}=\lim_{t\to 1}\frac{t^6-t^{12}}{t^4-t^3}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{-t^6(t^6-1)}{t^3(t-1)}=\lim_{t\to 1}\frac{-t^3(t-1)(t^5+t^4+\cdots+t+1)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to 1}(-t^3(t^5+t^4+\cdots+t+1))=-6$$

۶۷۰- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-3)=0\Rightarrow\sqrt{b}=3\Rightarrow b=9$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{ax+9}-3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{ax+9}-3}\times\frac{\sqrt{ax+9}+3}{\sqrt{ax+9}+3}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{ax+9-9}\times\frac{\sqrt{ax+9}+3}{1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}+3}{a}=\frac{6}{a}$$

بنابراین $\frac{6}{a}=\frac{1}{2}$ و در نتیجه $a=12$. پس $a+b=21$.

۶۷۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-2,0)\cup(0,2]$ است، بنابراین این تابع در نقطهٔ $x=2$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطهٔ $x=-2$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطهٔ $x=0$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است: $\lim_{x\to 1}f(x)=\sqrt{3}=f(1)$.

۶۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(2)=4,\quad\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+x)=4+2=6$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x)=4-2=2$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطهٔ $x=2$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطهٔ $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۶۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۷-m^۲x^۲)=۷-۹m^۲$$

همچنین $f(۳)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(x^۲-۶)=۳$، در نتیجه

$$۷-۹m^۲=۳\Rightarrow ۹m^۲=۴\Rightarrow m=\pm\frac{۲}{۳}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن m برابر $-\frac{۴}{۹}$ است.

۶۷۴- گزینهٔ ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=-۱$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{a}{x-۲}=\frac{a}{-۳}$$

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۲a}{x+۲}=\frac{-۱+۲a}{-۱+۲}=۲a-۱$$

بنابراین

$$۲a-۱=-\frac{a}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۷}$$

۶۷۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=a\ ,\quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x-[x])=\lim_{x\to ۲^-}(۳x-۱)=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲b)=۲+۲b$$

بنابراین $a=۵$ و $۲+۲b=۵$، پس $b=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $ab=\frac{۱۵}{۲}$.

۶۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax^۲-a+۴)=a-a+۴=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}}=۴$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار a تابع f در $x=۱$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)=۴$$

۶۷۷- گزینهٔ ۳

$$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{x^۲-۴x}{(x-۱)(x-۲)}\geq ۰$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	۰	۱	۲	۴	$+\infty$
$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}$		+ ۰	− ت ن	+ ت ن	− ۰	+

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty,۰]$، $(۱,۲)$ و $[۴,+\infty)$ پیوسته است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۶۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $[x]\geq ۰$ و $f(x)=۰$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $[x]<۰$ و $f(x)=۲[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x=۰$، $x=-۱$، $x=-۲$ و $x=-۳$ از بازهٔ $(-۴,۴)$ ناپیوسته است.

۶۷۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+۱}{۴}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{x+۱}{۴}]$ ناپیوسته است:

$$\frac{x+۱}{۴}=k\Rightarrow x=۴k-۱,\quad k\in\mathbb{Z}$$

یعنی در نقطه‌هایی به‌صورت $۴k-۱$ تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازهٔ $(-۱,۳)$ پیوسته است و در $x=۳$ ناپیوسته است. سپس روی بازهٔ $(۳,۷)$ پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم

$$-۱<x<k\xrightarrow{+۱}۰<x+۱<k+۱\xrightarrow{\div ۴}۰<\frac{x+۱}{۴}<\frac{k+۱}{۴}$$

برای اینکه $[\frac{x+۱}{۴}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+۱}{۴}=۱$، پس $k=۳$.

۶۸۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع $y=[\sqrt{x}]$ ناپیوسته است.

$$\sqrt{x}=k\in\mathbb{R}\Rightarrow x=k^۲$$

پس تابع در نقطه‌های $x=۰$، $x=۱$، $x=۴$، $x=۹$ و ... ناپیوسته است، یعنی تابع روی بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته است، در $x=۴$ ناپیوسته است سپس روی بازهٔ $(۴,۹)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۶۸۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۴)=[\frac{۴}{۲}]+[-\frac{۴}{۲}]=۲-۲=۰$ و

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=۲-۳=-۱\ ,\quad \lim_{x\to ۴^-} f(x)=۱-۲=-۱$$

بنابراین تابع در $x=۴$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۶۸۲- گزینهٔ ۲ در $x=۴$، $x=۱۶$ و $x=۶۴$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x)=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطهٔ $x=۹$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه پیوسته است.

۶۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲-۳x)=۵$.

همچنین $f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=|-۳-a|=|۳+a|$. در نتیجه

$$|۳+a|=۵\Rightarrow ۳+a=۵\ \text{یا}\ ۳+a=-۵\Rightarrow a=۲\ \text{یا}\ a=-۸$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر -۶ است.

۶۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(\frac{\pi}{۴})=۱+ab$ و

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin ۲x-a)=\sin\frac{\pi}{۲}-a=۱-a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(-۲-\sin ۲x)=-۲-\sin\frac{\pi}{۲}=-۳$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید $۱+ab=۱-a=-۳$. در نتیجه $a=۴$ و $b=-۱$، بنابراین $۱+ab=۱+۴b=-۳$. پس $a+b=۳$.

۶۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^-}(۳x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(ax-b)$$

$$-۳=-a-b \quad (۱)$$

همچنین

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to۲^-}(ax-b)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲-۱)$$

$$۲a-b=۳ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=۲$ و $b=۱$. پس $\frac{a}{b}=۲$.

۶۸۶- گزینهٔ ۳ مخرج نباید هیچ‌جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^۲-۶x+m+۱=۰$ منفی باشد:

$$\Delta=۳۶-۴(m+۱)<۰\Rightarrow m>۸$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۶۸۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x است که مخرج، یعنی $x^۲-ax+b$، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین ۳- و ۴ ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a=\text{مجموع ریشه‌ها}=۴-۳=۱$$

$$b=\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۴(-۳)=-۱۲$$

بنابراین $a+b=-۱۱$.

۶۸۸- گزینهٔ ۲ این تابع در تمام نقاطی که $۲x+\frac{۱}{۲}$ مقداری صحیح داشته باشد، ناپیوسته است:

$$۲x+\frac{۱}{۲}=k\,,\,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x=k-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۴}$$

پس در تمام نقاطی که به‌صورت $\frac{۲k-۱}{۴}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادلهٔ $-۱<x<۲$ را حل کنیم:

$$-۱<\frac{۲k-۱}{۴}<۲\Rightarrow -۴<۲k-۱<۸\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<k<\frac{۹}{۲}$$

$$k\in\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

بنابراین تابع f در شش نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ ناپیوسته است که این نقاط به‌صورت زیر هستند:

k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$

۶۸۹- گزینهٔ ۳ باید $x^۲+kx+۴\geq ۰$. در نتیجه $\Delta\leq ۰$، یعنی

$$k^۲-۱۶\leq ۰\Rightarrow -۴\leq k\leq ۴$$

بنابراین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

۶۹۰- گزینهٔ ۲ باید

$$۷-|x-۲|\geq ۰\Rightarrow |x-۲|\leq ۷\Rightarrow -۷\leq x-۲\leq ۷\Rightarrow -۵\leq x\leq ۹$$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۵,۹]$ پیوسته است.

۶۹۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=۰$ و در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۲- مقادیر تابع f منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۴}{f(x)}=-\infty$.

۶۹۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to۳}|x-۳|=۰$، و چون مقادیر $|x-۳|$ در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to۳}\frac{۳}{|x-۳|}=+\infty$.

۶۹۳- گزینهٔ ۳ اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و در نتیجه $[-x]=-۱$. بنابراین $\lim_{x\to۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$.

۶۹۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\pm ۲$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim_{x\to۰^-} f(x)=+\infty$. پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد چپ نامتناهی دارد. همین‌طور در نقطه‌های $x=-۲$ و $x=۲$ حد چپ تابع f نامتناهی است.

۶۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۳-x^۲}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۲(x-۱)}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{x(x-۱)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x\to۰^-} x(x-۱)=۰$ و اگر $x\to۰^-$، مقادیر $x(x-۱)$ مثبت هستند، پس $\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۳-x^۲}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{x(x-۱)}=+\infty$.

۶۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to\pi^+}\sin x=\lim_{x\to\pi^-}\sin x=۰$ و اگر $x\to\pi^+$، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x\to\pi^-$، مقادیر $\sin x$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to\pi^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$.

۶۹۷- گزینهٔ ۲ اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\cos x\to(-۱)^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\cos x]}{\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-۱}{\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۶۹۸- گزینهٔ ۲ حد مخرج $f(x)$ در $x=۲$ و $x=-۳$ باید برابر صفر باشد، یعنی $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲=۰$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$\begin{cases}۲\times(-۳)=\frac{۲}{a}\\ ۲+(-۳)=-\frac{b}{a}\end{cases}$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۳}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. پس

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{-\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۱}{۳}x+۲}\Rightarrow\lim_{x\to۱} f(x)=\frac{۱+۱}{-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+۲}=\frac{۳}{۲}$$

۶۹۹- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج وقتی $x\to۲$ صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین $x-۲$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+k)$. به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(۲x+k)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۲\times۲+k}{۲+۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow k=۶$$

اکنون می‌توان نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+۶)=۲x^۲+۲x-۱۲$. پس $m=۲$ و $n=-۱۲$، و در نتیجه $m-n=۱۴$.

۷۰۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{0^-3}{x-1}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4-3}{x-1}=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت زیر است:

۷۰۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to 4^-} f(x)=0$ و مقادیر f در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to 4^-}\frac{-2}{f(x)}=+\infty$. بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۷۰۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x^2+x)=0\,,\quad \lim_{x\to(-1)^+}(2x+1)=-1\,,$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(-1)^+$، مقادیر x^2+x منفی هستند $(x^2+x=\underbrace{x}_{\text{منفی}}(\underbrace{x+1}_{\text{مثبت}}))$، پس $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=+\infty$.

۷۰۳- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 2^+$، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x)=\frac{2}{x-2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$. اگر $x\to 2^-$، آن‌گاه $[x]=1$ و $f(x)=\frac{-1}{x-2}$ و نتیجه $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$.

۷۰۴- گزینهٔ ۱ در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=2$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2}{x-2}\,,\quad x\neq 1$$

پس $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$. بنابراین تابع فقط در $x=2$ حد چپ نامتناهی دارد.

۷۰۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq 1$، آن‌گاه

$$\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2}=\frac{x-2}{-2(x-1)}$$

بنابراین $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{-2(x-1)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$.

۷۰۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{1}{3})^+$، آن‌گاه

$$\pi x\to(\frac{\pi}{3})^+\Rightarrow\cos(\pi x)\to(\frac{1}{2})^-$$

بنابراین $\lim_{x\to(\frac{1}{3})^+}\frac{3x+1}{2\cos(\pi x)-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

۷۰۷- گزینهٔ ۳ باید علامت عبارت $2x-\sqrt{x+3}$ را در اطراف نقطهٔ $x=1$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=1$ تنها جواب معادلهٔ $2x-\sqrt{x+3}=0$ است.

$$2x=\sqrt{x+3}\Rightarrow 4x^2-x-3=0\Rightarrow x=1,\ x=-\frac{3}{4}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین علامت عبارت $2x-\sqrt{x+3}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=2$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $4-\sqrt{5}$ است که عددی مثبت است و اگر $x=0$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{3}$ است که عددی منفی است.

x		-3		1		$+\infty$
$2x-\sqrt{x+3}$		تعریف نشده	$-$	0	$+$	

در یک همسایگی چپ $x=1$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

در یک همسایگی راست $x=1$ مقدار عبارت مثبت است، پس

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

۷۰۸- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to 2}(x-3)=-1$، پس باید ax^2+6x+b در $x=2$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=2$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+6x+b=0$ باشد، یعنی این عبارت باید به‌صورت $a(x-2)^2$ باشد. چون $a<0$، پس

$$ax^2-4ax+4a=ax^2+6x+b\,,\quad -4a=6\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\,,\quad b=4a=-6$$

پس $ab=9$.

۷۰۹- گزینهٔ ۳ چون حد مخرج وقتی $x\to 1$ برابر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+b})=0\Rightarrow\sqrt{2+a}=\sqrt{1+b}\Rightarrow b=a+1$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+a+1}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+a+1}}{x-1}\times\frac{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}}{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}})$$
$$=\lim_{x\to 1}(\frac{2x+a-x-a-1}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}})=\frac{1}{2\sqrt{a+2}}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{a+2}}=\frac{1}{6}\Rightarrow\sqrt{a+2}=3\Rightarrow a=7$$

پس $b=8$ و در نتیجه $ab=56$.

۷۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}\,,\ x\neq 2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است:

۷۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim_{x\to 0}(f(x)-2)=0$ و مقادیر $f(x)-2$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر $f(x)$ کمتر از ۲ هستند. بنابراین $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)-2}=-\infty$.

۷۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}(x-۱)=-۱\ ,\quad \lim_{x\to ۰}(x^۳-۲x^۲)=۰$$

از طرف دیگر، چون $x^۳-۲x^۲=x^۲(x-۲)$، وقتی $x\to ۰$، مقادیر $x^۳-۲x^۲$ منفی هستند. پس $\lim_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x^۳-۲x^۲}=+\infty$.

۷۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to ۵^-}([x]^۲-۲۵)=۱۶-۲۵=-۹$ و $\lim_{x\to ۵^-}(x-۵)=۰$ و مقادیر $x-۵$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

بنابراین $\lim_{x\to ۵^-}\frac{[x]^۲-۲۵}{x-۵}=+\infty$.

۷۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هستند:

$$x-[x]=۰\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=۰$ و $x=۱$ ریشهٔ صورت $f(x)$ هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(x-۱)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}(x-۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(x-۱)}{x+۱}=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}x=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-x}{x}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

بنابراین تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۷۱۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{x}=t$. در این صورت اگر $x\to ۰^+$ آن‌گاه $t\to ۰^+$ و

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t^۳-t^۲}{t^۶-t^۳}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t-۱}{t(t^۳-۱)}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t(t^۲+t+۱)}=+\infty$$

۷۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{۲\sin x\cos x-۲\sin x}=\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}$$

عبارت $\cos x-۱$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x-۱\le ۰$. از طرف دیگر اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^-$ و اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=-\infty$$

۷۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)$$

$$=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

بنابراین در هر دو حالت $x\to ۱^+$ و $x\to ۱^-$:

$$(x-۱)^۲\to ۰^+\Rightarrow(x-۱)^۲(x-۲)\to ۰^-$$

پس $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$.

۷۱۸- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست $x=۲$ تساوی $[x]=۲$ برقرار است. پس $\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۶+k}{x-۲}=+\infty$.

چون $(x-۲)\to ۰^+$، پس $۶+k>۰$ و در نتیجه $k>-۶$.

در یک همسایگی چپ $x=۲$ تساوی $[x]=۱$ برقرار است. پس

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳+k}{x-۲}=+\infty$$

چون $(x-۲)\to ۰^-$، پس $۳+k<۰$ و درنتیجه $k<-۳$، بنابراین $-۶<k<-۳$.

۷۱۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(x)=\frac{\pi}{۴}\ ,\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin x-\cos x)=۰$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(\frac{\pi}{۴})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$ کوچک‌ترند، پس مقادیر $\sin x-\cos x$ منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{x}{\sin x-\cos x}=-\infty$$

۷۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\frac{۴}{۰^+}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-۲$ به‌صورت مقابل است.

۷۲۱- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to -\infty}f(x)=۱$ و $\lim_{x\to +\infty}f(x)=۱$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۷۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^-}(fof)(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(f(x))=\lim_{t\to -\infty}f(t)=-۲$$

۷۲۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۳x+\frac{۱}{x}+\frac{x^۲}{x-۱}}{۲x-\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{۳x^۲(x-۱)+x-۱+x^۳}{x(x-۱)}}{\frac{۲x^۲-۱}{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x^۳-۳x^۲+x-۱}{(۲x^۲-۱)(x-۱)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x^۳-۳x^۲+x-۱}{۲x^۳-۲x^۲-x+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۷۲۴- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنید که وقتـی $x\to-\infty$، مقادیر $1-3x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|1-3x|}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-(1-3x)}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{5x-3}=1$$

۷۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)^4(4x^2+1)^2}{(6x^4-2x^3+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^4x^4-\cdots)(4^2x^4+\cdots)}{6^2x^8+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^4\times4^2x^8-\cdots}{6^2x^8+\cdots}=\frac{3^4\times4^2}{6^2}=36$$

۷۲۶- گزینهٔ ۱ توجـه کنید که اگر n عددی طبیعی باشـد، $3n+4$ و $2n+6$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3n+4}+x+1}{x^{2n+6}-x+1}=\lim_{x\to+\infty}x^{3n+4-(2n+6)}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-2<0$، یعنی $n<2$، بنابراین فقط $n=1$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۷۲۷- گزینهٔ ۲ اگـر m عددی مثبت باشـد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $mx-1$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+2)x-2}{3x+1}=\frac{m+2}{3}$$

بنابرایـن $\frac{m+2}{3}=3$، پـس $m=7$. اگـر m عـددی منفـی باشـد، وقتـی $x\to+\infty$، مقادیر $mx-1$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-m)x}{3x+1}=\frac{2-m}{3}$$

بنابرایـن $\frac{2-m}{3}=3$، پـس $m=-7$. اگر $m=0$، حـد مورد نظـر برابر $\frac{2}{3}$ می‌شـود که درسـت نیسـت. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و -7 هسـتند و حاصل‌ضرب آن‌ها -49 است.

۷۲۸- گزینهٔ ۴ چـون حد مـورد نظر برابر $-\infty$ شـده اسـت، پس باید درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشـد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت بایـد منفی باشـد. برای اینکـه درجهٔ مخـرج از درجهٔ صورت کمتر باشـد، باید $a-5<0$، یعنـی $a=5$. توجه کنید که اگـر $a=5$، بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-x^2$ می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

۷۲۹- گزینهٔ ۳ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت این کسر جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to+\infty}\frac{(b+2)x^2-3x+4}{3x^2-1}=\frac{b+2}{3}$.

بنابراین $\frac{b+2}{3}=5$، پس $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

۷۳۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$.

از طـرف دیگـر اگـر $f(x)=\frac{x-1}{x+3}=1-\frac{4}{x+3}$، آن‌گاه $x\to+\infty$، پـس $\frac{4}{x+3}\to0^+$، پـس $\frac{4}{x+3}\to0^-$، آن‌گاه $x\to-\infty$. اگـر $f(x)<1$، پـس نمودار تابـع f پایین‌تر از خط $y=1$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=1$ قرار دارد.

۷۳۱- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=1-x$. در این صورت اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $t\to-\infty$. اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to+\infty}f(1-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=-2$$

۷۳۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنیـد که $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>2$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to2^+}f(t)=+\infty$$

۷۳۳- گزینهٔ ۲ ابتـدا توجـه کنیـد کـه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$. همچنیـن اگـر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>1$ و $[f(x)]=1$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-2$ و $[f(x)]=-3$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=1,\quad\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=-3$$

پس $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=-3-1=-4$.

۷۳۴- گزینهٔ ۲ ابتـدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to0^+$ و در نتیجه $[\frac{1}{x}]=0$، بنابراین $\lim_{x\to+\infty}(x[\frac{1}{x}])=\lim_{x\to+\infty}x(0)=\lim_{x\to+\infty}0=0$.

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x)=x[\frac{1}{x}]$ و تابع $g(x)=0$ مسـاوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر اسـت.

۷۳۵- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $2x$، x و $3x-1$ همگـی منفی‌انـد. بنابرایـن

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x|+|x|}{|3x-1|-|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-x}{1-3x-(-2x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x+1}=3$$

۷۳۶- گزینهٔ ۴ توجـه کنید کـه اگر $n=1$، آن‌گاه مقدار حـد برابر صفر اسـت که وجود دارد. اگر $n>1$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{n-1}-2x}{x^4-x+1}=\lim_{x\to+\infty}(3x^{n-1-4})=3\lim_{x\to+\infty}x^{n-5}$$

برای اینکه این حد وجود نداشـته باشد، باید $n-5\geq1$، یعنی $n\geq6$. بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ اسـت.

۷۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|mx|-2x+1}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|m||x|-2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-|m|-2)x}{-x}=|m|+2$$

بنابراین

$$|m|+2=6\Rightarrow|m|=4\Rightarrow m=\pm4$$

به این ترتیب، عددهای ۴ و -4 ویژگی مورد نظر را دارند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -16 است.

۷۳۸- گزینهٔ ۲ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۲$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۲$ باید صفر باشد، یعنی $a+۱=۰$، پس $a=-۱$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵x+۴}{(b-۲)x-۱}=\frac{-۵}{b-۲}$. بنابراین $\frac{-۵}{b-۲}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $b=-۸$. به این ترتیب، $ab=۸$.

۷۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، درنتیجه $۲a-۱=۰$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲-۱}{۲x^۲+x+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$.

در نتیجه $b=۲$ و $a+b=\frac{۵}{۲}$.

۷۴۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۰$.

همچنین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۰$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<۰$.

بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط $y=۰$ و در $-\infty$ پایین خط $y=۰$ قرار دارد.

۷۴۱- گزینهٔ ۴ **گزینهٔ (۱)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(۱-f(x))=۰$

واگر $x\to-\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

گزینهٔ (۲) $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$

گزینهٔ (۳) $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to۱^-}((x+۲)f(x))=-\infty$

گزینهٔ (۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(۱-f(x))=۰$

واگر $x\to+\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۷۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-۲\,,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$$

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۲$، بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-۲)^-}f(t)=-\infty$$

از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to۲^+}f(t)=+\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)-\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$

۷۴۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{۱}{x}\to۰^-$، و در نتیجه $[-\frac{۱}{x}]=-۱$، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{۱}{x}]-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

۷۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در صورت کسر برابر $-(۳x^۲)^۳=-۲۳x^۶$ است و جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر $x^۲(۳x^۲)^۲=۹x^۶$ است. پس حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲۳x^۶}{۹x^۶}=-\frac{۲۳}{۹}$.

۷۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $۳x^۲-۱$، $-۲x^۲-۳$ و $۵x^۲-x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|۳x^۲-۱|-|-۲x^۲-۳|}{|۵x^۲-x|-x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲-۱-۲x^۲+۳}{۵x^۲-x-x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{۴x^۲}=\frac{۱}{۴}$$

۷۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که باید $m\neq۰$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x+۱)^۵(mx+۲)^۷}{(۲mx-۱)^۴(۶x-۱)^۸}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳^۵x^۵+\cdots)(m^۷x^۷+\cdots)}{(۲^۴m^۴x^۴-\cdots)(۶^۸x^۸-\cdots)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^۵m^۷x^{۱۲}+\cdots}{۲^۴\times۶^۸m^۴x^{۱۲}+\cdots}=\frac{۳^۵m^۷}{۲^۴\times۶^۸m^۴}=\frac{m^۳}{۲^{۱۲}\times۳^۳}$$

بنابراین $\frac{m^۳}{۲^{۱۲}\times۳^۳}=-۱$، پس $m=-۴۸$.

۷۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $۳n+۲$ و $۲n+۵$ از ۲ بیشتر هستند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳n+۲}+x^۲+۱}{x^{۲n+۵}-x^۲+۱}=\lim_{x\to+\infty}x^{۳n+۲-(۲n+۵)}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۳}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-۳<۰$، یعنی $n<۳$، بنابراین فقط $n=۱$ و $n=۲$ ویژگی مورد نظر را دارند.

۷۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $۲a-۱=۰$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-۱}{۳x^۲+x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{۳x^۲}=۱$. در نتیجه $b=۱$ و $a+b=\frac{۳}{۲}$.

۷۴۹- گزینهٔ ۳ اگر $n>۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=۱$، اگر $n=۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۳+۴x^۳-۱}{x^۳-۲x^۳+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x^۳}{-x^۳}=-۵$. اگر $n<۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳}{-۲x^۳}=-۲$، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۷۵۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}}{ax+b}=\frac{\frac{۱}{a}}{a}=\frac{۱}{a^۲}$$

بنابراین $\frac{۱}{a^۲}=۱۶$. چون a منفی است، پس $a=-\frac{۱}{۴}$. به این ترتیب $f(x)=-\frac{۱}{۴}x+b$ و $f(۳)=۳$، پس $-\frac{۳}{۴}+b=۳$. در نتیجه $b=\frac{۱۵}{۴}$.

بنابراین $f(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱۵}{۴}$، پس $f(-۱)=۴$.

۷۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=\pi$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^-$، بنابراین $\cos\frac{x}{2}\to 0^+$، پس $\lim\limits_{x\to\pi^-}[\cos\frac{x}{2}]=0$ و $2x\to(2\pi)^-$، بنابراین $\sin 2x\to 0^-$، پس $\lim\limits_{x\to\pi^-}[\sin 2x]=-1$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(\sin\frac{x}{2}\times 0-\cos x\times(-1))=\cos\pi=-1$$

از طرف دیگر، اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^+$. بنابراین $\cos\frac{x}{2}\to 0^-$، پس $\lim\limits_{x\to\pi^+}[\cos\frac{x}{2}]=-1$ و $2x\to(2\pi)^+$. بنابراین $\sin 2x\to 0^+$، پس

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin 2x]=0$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}(\sin\frac{x}{2}\times(-1)-\cos x\times 0)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

پس $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=-1$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۵۲- گزینهٔ ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{ax+b}-2)=0\Rightarrow\sqrt{a+b}=2\Rightarrow a+b=4\Rightarrow b=4-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2})$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{(x-1)(x+1)}\times\frac{1}{2+2}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{x+1}\times\frac{1}{4}=\frac{a}{8}$$

بنابراین $\frac{a}{8}=\frac{3}{2}$ و در نتیجه $a=12$، پس $b=-8$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۵۳- گزینهٔ ۳ چون $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$. بنابراین باید مخرج کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=3$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2\Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-12x+18$$
$$a=-12, b=18\Rightarrow a+b=6$$

ریاضی - ۹۳

۷۵۴- گزینهٔ ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها $(\frac{1}{3}x-1)\in\mathbb{Z}$:

$$0<x<9\Rightarrow 0<\frac{1}{3}x<3\Rightarrow -1<\frac{1}{3}x-1<2$$
$$\xrightarrow{(\frac{1}{3}x-1)\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{3}x-1)\in\{0,1\}$$

ولی در نقطهٔ $x=3$ که به‌ازای آن $\frac{1}{3}x-1=0$، عامل صفر کنندهٔ $x-3$ موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطهٔ از بازهٔ $(0,9)$ ناپیوسته است. ریاضی - ۸۵

۷۵۵- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در $x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)\Rightarrow\frac{1}{a}=1-\frac{a}{4}\Rightarrow 4=4a-a^2$$
$$a^2-4a+4=0\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

خارج از کشور ریاضی- ۹۵

۷۵۶- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ باید برابر مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=5\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}(x^2+bx-1)=5\Rightarrow 4+2b-1=5\Rightarrow b=1$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=5\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}(ax+b)=5\Rightarrow 2a+b=5$$

چون $b=1$، در نتیجه $2a+1=5$، یعنی $a=2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۵۷- گزینهٔ ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$، پیوستگی آن در نقاط $x=\pm 1$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\times[1^-]=0\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=0$$
$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-a+b \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=(-1)\times[(-1)^+]=1\end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=1$$

بنابراین $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$. در نتیجه به‌ازای $|x|\geq 1$، $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$، پس $f(3)=-1$. ریاضی - ۹۰

۷۵۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$. بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ است و به‌ازای $a=-1$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است. ریاضی - ۹۶

۷۵۹- گزینهٔ ۲ در نقطهٔ $x=-1$، باید حد چپ و حد راست تابع با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1}=\frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-a+1$$

بنابراین

$$\frac{1}{4}=-a+1\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۷۶۰- گزینهٔ ۴ در نقطـهٔ $x=0$، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشـد. توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

بنابراین اگر $f(0)=a=2$، تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. تجربی - ۹۶

۷۶۱- گزینهٔ ۲ چـون حد مورد نظر برابـر عددی غیر صفر و حد صورت برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(ax+b)=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax-2a}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}=\frac{1}{a(2+2)}=\frac{1}{4a}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

چون $b=-2a$، پس $b=-1$. خارج از کشور تجربی - ۹۵

۷۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x^2-4)}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x+2)}=\frac{-(3)\times 8}{3\times 4}=-2$$

ریاضی - ۹۰

۷۶۳- گزینهٔ ۴ از فرض سـؤال نتیجه می‌شود $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^2|}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1$، پس $a=-1$. برای محاسـبهٔ حد راسـت عبارت در $x=-2$ دقت کنید که به ازای $-2<x<-2$، عبارت x^2-4 منفی اسـت، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{4-x^2}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{2-x}{-x+1}=\frac{4}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۷۶۴- گزینهٔ ۱ وقتـی $x\to(\frac{1}{6})^+$، $\cos\pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos\pi x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-\Rightarrow 4\cos^2\pi x\to 3^-\Rightarrow[4\cos^2\pi x]=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}(ax+b)=0\Rightarrow\frac{a}{6}+b=0\Rightarrow a=-6b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$، یعنی $b=4$. چون $a=-6b$، پس $a=-24$.

در نتیجه $a+b=-20$. خارج از کشور ریاضی- ۹۲

۷۶۵- گزینهٔ ۴ ابتـدا حـد چـپ و حد راسـت تابـع در نقطـهٔ $x=3$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax-3a-\frac{3}{8})=3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\times\frac{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(1-x)^2-(x+1)}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1-x-\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x(x-3)}{x-3}\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

از طـرف دیگـر $f(3)=-\frac{3}{8}$. بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۷۶۶- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسـته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{-\sqrt[3]{2}(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲-a=f(۲)$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x}\times\frac{۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}{۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{a(۱+۱-x)}{x(x-۲)\times(۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲})}=\frac{-a}{۶}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{۶}=۲-a\Rightarrow ۱۲-۶a=-a\Rightarrow ۱۲=۵a\Rightarrow a=۲/۴$$

ریاضی - ۹۴

۷۶۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$$

$$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=-\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ را بررسی می‌کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود:

$$f(۰)=۰,\quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)\right)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)=۰$$

$$f(۱)=-۱,\quad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)\right)=-۱$$

پس تابع در $x=۰$ پیوسته و در $x=۱$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۷۶۹- گزینهٔ ۳ نشان می‌دهیم تابع gof در $x=۰$ پیوسته است. حد چپ و حد راست تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to ۰^-: f(x)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} g(f(x))=\lim_{t\to(\frac{-۱}{۲})} g(t)=-۲\times\frac{-۱}{۲}=۱$$

$$x\to ۰^+: f(x)=۲x\to ۰^+\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} g(f(x))=\lim_{t\to ۰^+} g(t)=۱$$

با توجه به اینکه $g(f(۰))=۱$، تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهدهٔ خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۷۷۰- گزینهٔ ۲ با توجه به آنکه $f(x)=[x^۲-۳]=[x^۲]-۳$، باید $y=[x^۲]$ روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط $x=\pm\sqrt{n}$ (که $n\in\mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=۲$ و $x=\sqrt{۵}$ ناپیوسته است و در نتیجه بازهٔ مورد نظر $[۲,\sqrt{۵})$ است، بنابراین $k=\sqrt{۵}-۲$.

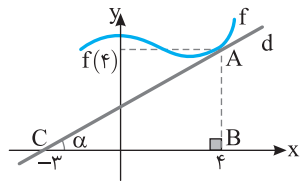
ریاضی - ۸۸

فصل چهارم

۷۷۱- گزینهٔ ۱ در نقـاط $x=b$ و $x=c$ شـیب خط مـمـاس بر نمودار تابع f صفر اسـت. در نقطهٔ $x=d$ شـیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطـهٔ $x=a$ شـیب خـط مماس بـر نمـودار تابع f منفـی اسـت. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک‌تر است.

۷۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(۴)$. از طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{f(۴)}{۷}$ است. به این ترتیب $f'(۴)=\frac{f(۴)}{۷}$، پس

$$f(۴)+f'(۴)=۲\Rightarrow f(۴)+\frac{f(۴)}{۷}=۲\Rightarrow f(۴)=\frac{۷}{۴}$$



۷۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\frac{۲(f(x)-f(۲))}{x-۲}=۲\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$
$$=۲f'(۲)=۶$$

۷۷۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر به جای ۲ در صورت کسـر داده شـده، $\sqrt{f(۲)}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}$$
$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}\times\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to۲}\frac{۱}{(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)})x}$$
$$=f'(۲)\times\frac{۱}{۲(\sqrt{f(۲)}+\sqrt{f(۲)})}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴\sqrt{f(۲)}}=\frac{۲\times۲}{۲-۱}\times\frac{۱}{۴\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حـل دوم از قاعدهٔ هوپیتال اسـتفاده می‌کنیم. (درس هشـتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to۲}\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}}{۲x-۲}=\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}(۴-۲)}=\frac{\frac{۲\times۲}{۲-۱}}{۲\times۲\times۲}=\frac{۱}{۲}$$

۷۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{۲h^۲+۳h}=\lim_{h\to۰}\left(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}\times\frac{۱}{۳+۲h}\right)$$
$$=f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۰}=\frac{۶}{۳}=۲$$

۷۷۶- گزینهٔ ۲ اگر $-h^۲=k$ و $h\to۰$، آن‌گاه $k\to۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۱-h^۲)-f(۱)}{h^۲}=\lim_{k\to۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{-k}$$
$$=-\lim_{k\to۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{k}=-f'_-(۱)=-۲$$

۷۷۷- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱}((x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲)=(۱+۱)^۲(۱+۱)^۲=۱۶$$

۷۷۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x}{|x|+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{|x|+۱}=۱$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۷۷۹- گزینهٔ ۴ با اسـتفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=+\infty$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=-\infty$$

۷۸۰- گزینهٔ ۱ مشـتق چپ و مشتق راسـت تابع f در $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^+}\sqrt[۳]{x}=۰$$
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^-}(-\sqrt[۳]{x})=۰$$

بنابراین $f'(۰)=۰$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.

۷۸۱- گزینهٔ ۲ شـیب خطـی کـه از نقطه‌هـای $A(-۱,۳)$ و $B(۴,۴)$ می‌گذرد، برابر است با $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطهٔ -۱ با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر است. بنابراین $f'(-۱)=\frac{۱}{۵}$.

۷۸۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to۳$، آن‌گاه شـیب خطی که نقطه‌های A و B را به هم وصل می‌کند، به شـیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین

$$۲=\lim_{x\to۳}\frac{k}{x}\Rightarrow ۲=\frac{k}{۳}\Rightarrow k=۶$$

۷۸۳- گزینهٔ ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(1)$ را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{f(x)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{f(x)-f(1)}=\frac{2}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۷۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)}{x^2-9}=3\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=3(\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3})(\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3})=3\times f'(3)\times\frac{1}{3+3}=3\times 4\times\frac{1}{6}=2$$

۷۸۵- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $x=2-h$، آن‌گاه $h\to 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}=\lim_{h\to 0}\frac{2-h-2}{f(2-h)-f(2)}=-\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(2-h)-f(2)}$$

$$=-\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}}=-\frac{1}{4}$$

۷۸۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به جای ۸ قرار می‌دهیم $f^3(1)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(1+h)-f(1))(f^2(1+h)+f(1)f(1+h)+f^2(1))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\lim_{h\to 0}(f^2(1+h)+2f(1+h)+4)$$

$$=f'(1)\times(f^2(1)+2f(1)+4)=(\sqrt[3]{1}+1)(4+4+4)=24$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3f'(1+h)f^2(1+h)}{1}=3f'(1)f^2(1)$$

$$=3\times(\sqrt[3]{1}+1)\times 2^2=24$$

۷۸۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(2)=0$. اکنون با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}((x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}})$$

$$=(2-1)\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

۷۸۸- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+|x|\sqrt[3]{x+8}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x\sqrt[3]{x+8}}{x}$$

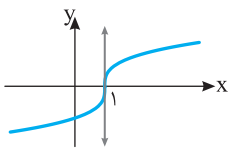
$$=\lim_{x\to 0^+}(1+\sqrt[3]{x+8})=1+2=3$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+|x|\sqrt[3]{x+8}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-x\sqrt[3]{x+8}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(1-\sqrt[3]{x+8})=1-2=-1$$

بنابراین $f'_+(0)-f'_-(0)=4$.

۷۸۹- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق ندارد، زیرا



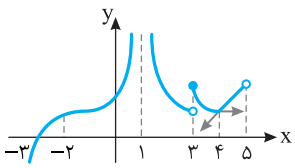
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$

ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.

۷۹۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. تابع در نقطهٔ ۴ نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیهٔ نقاط، دامنهٔ تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطهٔ $x=1$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.



۷۹۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f روی بازهٔ $[0,2]$ پاره‌خطی است که نقطه‌های $(0,0)$ و $(1,2)$ را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر $\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$ است، در نتیجه $f'(1)=\frac{1}{2}$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[2,4]$ پاره‌خطی است که شیب آن صفر است، پس $f'(3)=0$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[4,+\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های $(1,4)$ و $(5,6)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{5-1}{6-4}=2$ است، در نتیجه $f'(5)=2$. بنابراین $\frac{f'(1)+f'(3)}{f'(5)}=\frac{\frac{1}{2}+0}{2}=\frac{1}{4}$.

۷۹۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=3$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-3)(f(x)+3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+3}{x+2}=f'(2)\times\frac{f(2)+3}{2+2}$$

$$=3\times\frac{3+3}{4}=\frac{9}{2}$$

۷۹۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=6$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{3}(x)-27}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-3)(f^{2}(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}\times\lim_{x\to 1}((f^{2}(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1))$$

$$=f'(1)\times(f^{2}(1)+3f(1)+9)(1+1)=3\sqrt{1+3}(3^{2}+3\times 3+9)\times 2=324$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{3}(x)-27}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f'(x)f^{2}(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{3\times 3\sqrt{1+3}\times 3^{2}}{\frac{1}{2\times 1}}=324$$

۷۹۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $x=2-h$، آن‌گاه $h\to 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^{3}-8}{f(x)-f(2)}=\lim_{h\to 0}\frac{(2-h)^{3}-8}{f(2-h)-f(2)}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-12+6h-h^{2})}{f(2-h)-f(2)}$$

$$=\frac{1}{\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}}\times\lim_{h\to 0}(-12+6h-h^{2})=\frac{1}{4}\times(-12)=-3$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f'(2-h)}{1}=-f'(2)=4\Rightarrow f'(2)=-4$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^{3}-8}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^{2}}{f'(x)}=\frac{12}{f'(2)}=\frac{12}{-4}=-3$$

۷۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}=(2-(-1))f'(3)$$

بنابراین $3f'(3)=12$، در نتیجه $f'(3)=4$.

۷۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=1$ است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به‌صورت مستقیم هم می‌توان حاصل این حد را به‌دست آورد:

$$\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-2(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-2h-3}{h}=+\infty$$

۷۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g(0)=0$ و $\lim_{x\to 0}f(x)=-2$. پس

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x-2f(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2f(x)}=\frac{1}{4}$$

۷۹۸- گزینهٔ ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ $x=2$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{|x-2|[x]}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{|x-2|[x]}{x-2}=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

بنابراین $f'_{+}(2)-f'_{-}(2)=3$.

۷۹۹- گزینهٔ ۲ برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^{2}}$ تساوی‌های داده‌شده برقرار هستند:

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt[3]{x^{2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt[3]{x^{2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

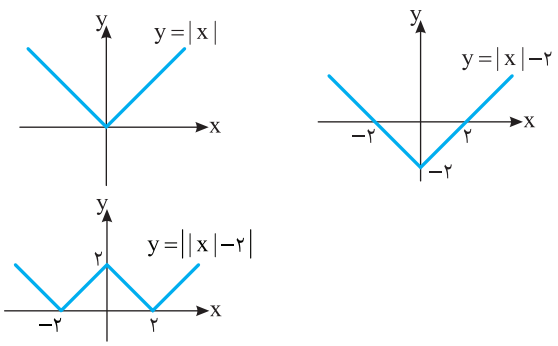
برای توابع دیگر توجه کنید که

(۱) گزینهٔ ۱: $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'_{+}(0)=f'_{-}(0)=+\infty$

(۳) گزینهٔ ۳: $f(x)=-\sqrt[3]{|x|}\Rightarrow f'_{+}(0)=-\infty, f'_{-}(0)=+\infty$

(۴) گزینهٔ ۴: $f(x)=-\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'_{+}(0)=f'_{-}(0)=-\infty$

۸۰۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط $x=0$، $x=2$ و $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است.

۸۰۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=3x^{2}-3$، پس

$$f'(\frac{1}{3})=3\times\frac{1}{9}-3=\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$$

۸۰۲- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=a(x-3)+ax+1=2ax-3a+1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}f'(1)=-a+1\\ f'(1)=5\end{cases}\Rightarrow a=-4$$

۸۰۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(x-4+x-2)x^{2}-2x(x-2)(x-4)}{x^{4}}$$

$$=\frac{(2x-6)x^{2}-2x(x-2)(x-4)}{x^{4}}$$

در نتیجه $f'(-2)=\frac{(-10)4+4(-4)(-6)}{16}=\frac{7}{2}$.

۸۰۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3x^{2}(x^{2}+k)-(2x)(x^{3})}{(x^{2}+k)^{2}}$.

در نتیجه

$$f'(-1)=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{3(1+k)-2}{(1+k)^{2}}=\frac{5}{8}\Rightarrow k=3, k=-\frac{1}{5}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۸۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$$

در نتیجه $f'(2^{-6})=\frac{1}{\sqrt{2^{-6}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}}=2^{3}+2^{4}=24$.

۸۰۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم، $(\frac{f}{g})'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$.

از طرف دیگر، $f(۱)=۱$، $g(۱)=-\frac{۱}{۲}$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲},\quad g'(x)=\frac{۱}{۲}(۲x)=x\Rightarrow g'(۱)=۱$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(۱)=\frac{\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲})-۱\times۱}{\frac{۱}{۴}}=-۵$.

۸۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۶\sqrt{x}-۲۴}{\sqrt[۳]{x}}=\frac{۶\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{x}}-\frac{۲۴}{\sqrt[۳]{x}}=۶x^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}-۲۴x^{-\frac{۱}{۳}}$$
$$=۶x^{\frac{۱}{۶}}-۲۴x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{۶}{۶}x^{-\frac{۵}{۶}}+\frac{۲۴}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}$، پس $f'(۱)=۱+۸=۹$.

۸۰۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ ۳ علامت عبارت $x-۴$ منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۳، $f(x)=-(x-۴)+۲x=x+۴$.

در نتیجه $f'(x)=۱$ و $f'(۳)=۱$.

۸۰۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$، $۱<\frac{x}{۲}+۱<۲$،

پس در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$، مقدار $[\frac{x}{۲}+۱]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x)=۳x^۲-۱\Rightarrow f'(x)=۶x\Rightarrow f'(\frac{۱}{۲})=۳$$

۸۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{x}-۸$ به‌ازای $x=۶۴$ برابر با صفر است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به‌ازای $x=۶۴$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است:

$$y=\sqrt{x}-۸\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۶۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۶۴$ برابر است با

$$\frac{۱}{۱۶}\times(\sqrt[۳]{۶۴}+۴)(\sqrt[۴]{۶۴})=\frac{۱}{۱۶}\times۸\times۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۸۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۳x^۲}{۳}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(۲x)+۲=x^۲+۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x+۲$$

بنابراین $f'(\sqrt{۲})=\sqrt{۲}^۲+۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})\sqrt{۲}+۲=۲+۲\sqrt{۶}-۴+۲=۲\sqrt{۶}$.

۸۱۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲+۱}$، در نتیجه

$$f'(x)=\frac{(۱)(x^۲+۱)-(۲x)(x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

در نتیجه، $f'(-۱)=\frac{۲-۴}{۴}=-\frac{۱}{۲}$.

۸۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{۲xf(x)-x^۲f'(x)}{f^۲(x)}$$

بنابراین $g'(۲)=\frac{۴f(۲)-۴f'(۲)}{f^۲(۲)}=\frac{۱۲-(-۸)}{۹}=\frac{۲۰}{۹}$.

۸۱۴- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۱)(x+a)-(۱)(x)}{(x+a)^۲}=\frac{a}{(x+a)^۲}$$

در نتیجه

$$f'(۰)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{a}{a^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=۳$$

۸۱۵- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^۲+۱)+(\sqrt{x}-۱)(۲x)$$

بنابراین $f'(۴)=\frac{۱}{۲\times۲}(۱۷)+(۲-۱)(۸)=\frac{۴۹}{۴}$.

۸۱۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-\sqrt{x})-(-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})^۲}$$

در نتیجه $f'(\frac{۱}{۴})=\frac{\frac{۲}{۲}(۱-\frac{۱}{۲})+\frac{۲}{۲}(۱+\frac{۱}{۲})}{(۱-\frac{۱}{۲})^۲}=۸$.

۸۱۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{۱}{۲}}(x^{\frac{۱}{۳}}+۲)=x^{\frac{۱۱}{۶}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۱۱}{۶}x^{\frac{۵}{۶}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱۱}{۶}+۳=\frac{۲۹}{۶}$$

۸۱۸- گزینهٔ ۲ چون $x^۳-۲x=x(x^۲-۲)$، در یک همسایگی نقطهٔ ۲ علامت عبارت $x^۳-۲x$ مثبت است، بنابراین

$$f(x)=x^۲+(x^۳-۲x)=x^۳+x^۲-۲x$$

در نتیجه $f'(x)=۳x^۲+۲x-۲$ و $f'(۲)=۱۴$.

۸۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۳}{۲}$ مقدار $[x]$ برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x)=\frac{x^۳}{x+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲(x+۵)-x^۳}{(x+۵)^۲}=\frac{۲x^۳+۱۵x^۲}{(x+۵)^۲}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱۶۲}{۱۶۹}$$

۸۲۰- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$، علامت عبارت $x^۲-۱$ منفی است و $۱<۲x<۲$، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$، $[۲x]=۱$. بنابراین

$$f(x)=\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=-(x-۱)$$

در نتیجه $f'(x)=-۱$ و $f'(\frac{۴}{۵})=-۱$.

۸۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=۳ax^۲-۲ax+۴$. بنابراین

$$f'(-۲)=۱۲\Rightarrow ۱۲a+۴a+۴=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $f'(x)=\frac{۳}{۲}x^۲-x+۴$. پس $f'(۱)=\frac{۹}{۲}$.

۸۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x^۲-۱)(x^۲-۲)=x^۵-۳x^۳+۲x\Rightarrow f'(x)=۵x^۴-۹x^۲+۲$$

بنابراین

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۵x^۴-۹x^۲+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲=\frac{۹+\sqrt{۴۱}}{۱۰}\\ x^۲=\frac{۹-\sqrt{۴۱}}{۱۰}\end{cases}$$

پس در نقاط $x=\pm\sqrt{\frac{۹+\sqrt{۴۱}}{۱۰}}$ و $x=\pm\sqrt{\frac{۹-\sqrt{۴۱}}{۱۰}}$ مشتق تابع f برابر صفر است. حاصل‌ضرب این اعداد برابر است با $\frac{۲}{۵}$.

۸۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-۱۰}+x^{-۹}+\cdots+x^{-۱}+۱+x+x^۲+\cdots+x^{۱۰}$$

بنابراین $f'(x)=-۱۰x^{-۱۱}-۹x^{-۱۰}-\cdots-x^{-۲}+۱+۲x+\cdots+۱۰x^۹$.

در نتیجه $f'(۱)=-۱۰-۹-\cdots-۱+۱+۲+\cdots+۱۰=۰$.

۸۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^۵+x^۲)-(x^۳+۱)}{x^۳+۱}=\frac{x^۲(x^۳+۱)-(x^۳+۱)}{x^۳+۱}=x^۲-۱\ (x\neq-۱)$$

در نتیجه برای هر $x\neq-۱$ مشتق تابع f برابر $۲x$ است و $f'(\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲})=\sqrt{۲}-۱$.

۸۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x-m)(x^۲+۵x+۳)-(۲x+۵)(x^۲-mx+۴)}{(x^۲+۵x+۳)^۲}$$

در نتیجه

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow(-۲-m)(۱-۵+۳)-(-۲+۵)(۱+m+۴)=۰\Rightarrow m=-\frac{۱۳}{۲}$$

۸۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}$ به‌ازای $x=۱$ برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow y'(۱)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۱۲}$.

۸۲۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{۱}{۳}}(xx^{\frac{۱}{۲}}+۱)=x^{\frac{۱۷}{۶}}+x^{\frac{۴}{۳}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۱۷}{۶}x^{\frac{۱۱}{۶}}+\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱۷}{۶}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۶}$$

۸۲۸- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^۲-۱}{۲x}$ قرار دهیم $x=-۱$، چون $f(-۱)=۱$، به‌دست می‌آید $g(-۱)=۰$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^۲(x)}=\frac{(۲x)(۲x)-۲(x^۲-۱)}{۴x^۲}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۱$، به‌دست می‌آید $\frac{g'(-۱)-۰}{۱}=۱$، بنابراین

$$g'(-۱)=۱$$

۸۲۹- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی $x=۲$ مقدار عبارت $x^۲-۳x$ منفی است و مقدار عبارت $x^۲+۳x$ مثبت است. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=-x^۲+۳x-x^۲-۳x=-۲x^۲$ است. بنابراین

$$f'(x)=-۴x\Rightarrow f'(۲)=-۸$$

۸۳۰- گزینهٔ ۳ اگر ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=(x^۲-۴۹)\underbrace{(x^۲-۵۰)(x^۲-۲۰)(x^۲-۲۱)\cdots(x^۲-۴۸)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^۲-۴۹)g(x)\Rightarrow f'(x)=۲xg(x)+(x^۲-۴۹)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(۷)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^۲-۴۹)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $۲xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(۷)=۲\times۷g(۷)=۲\times۷\times(۴۹-۵۰)(۴۹-۲۰)(۴۹-۲۱)\cdots(۴۹-۴۸)$$
$$=-۱۴\times۲۹!$$

۸۳۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-۲x+۳x^۲-۴x^۳+\cdots+۴۹x^{۴۸}-۵۰x^{۴۹}$$

بنابراین $f'(-۱)=۱+۲+۳+۴+\cdots+۴۹+۵۰=۱۲۷۵$.

۸۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+۱$ به‌ازای $x=-۱$ صفر است، پس مشتق عبارت $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(ax+۴)$ به‌ازای $x=-۱$ برابر است با $(-۱+۲)(-۱+۳)(-a+۴)=۸-۲a$. بنابراین

$$۸-۲a=۲\Rightarrow a=۳$$

۸۳۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f'(x)=a\Rightarrow f'(x)f(x)=a^۲x+ab=۴x-۸$$

بنابراین $a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$, $f'(۳)=a\Rightarrow f'(۳)=\pm۲$

۸۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+mx+۱}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۱)(x^۲+mx+۱)-(۲x+m)(x^۲-x+۱)}{(x^۲+mx+۱)^۲}$$

بنابراین $f'(۰)=\frac{(-۱)(۱)-(m)(۱)}{۱^۲}=-۱-m$. در نتیجه

$$-۱-m=۲m\Rightarrow m=-\frac{۱}{۳}$$

۸۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-۱}{x^۲+۱}\Rightarrow(x^۲+۱)f(x)=g(x)-۱$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$(۲x)f(x)+(x^۲+۱)f'(x)=g'(x)\Rightarrow ۲f(۱)+۲f'(۱)=g'(۱)\Rightarrow g'(۱)=۱۲$$

۸۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۲}{۳}\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۲h}=\frac{۲}{۳}f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=۲x^۲+۸x^{-۲}$، پس

$$f'(x)=۴x+۸(-۲)x^{-۳}=۴x-\frac{۱۶}{x^۳}$$

بنابراین $f'(۲)=۸-۲=۶$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{۲}{۳}\times۶=۴$.

۸۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+\sqrt{x}}{x^۳+\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^۲+\sqrt{x})'(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(x^۳+\sqrt[۳]{x})'(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

$$=\frac{(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(۳x^۲+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$، نتیجه می‌شود

$$f'(۱)=\frac{(۲+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-(۳+\frac{۱}{۳})(۱+۱)}{(۱+۱)^۲}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۸۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(f\times g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $f\times g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})^۹(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲})^۹$$

$$=((x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲}))^۹=(x^۴-x^۴-x^۲)^۹=-x^{۱۸}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=(-x^{۱۸})'=-۱۸x^{۱۷}\Rightarrow(f\times g)'(۱)=-۱۸\times ۱^{۱۷}=-۱۸$$

۸۳۹- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۱$ علامت عبارت $۲x-x^۲\sqrt{x}$ مثبت است و در یک همسایگی نقطهٔ $x=۴$ علامت این عبارت منفی است.

بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۱،

$$f(x)=۲x-x^۲\sqrt{x}=۲x-x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۲-\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(۱)=۲-\frac{۵}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

و در یک همسایگی نقطهٔ ۴،

$$f(x)=-۲x+x^۲\sqrt{x}=-۲x+x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=-۲+\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$f'(۴)=-۲+\frac{۵}{۲}\times ۸=۱۸$$

بنابراین $f'(۱)f'(۴)=-۹$.

۸۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۲۱}{۲}$ مقدار عبارت‌های x، $x-۱$، $x-۲$ و ... و $x-۱۰$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-۱۱$، $x-۱۲$، ... و $x-۲۰$ منفی است. بنابراین ضابطهٔ تابع در همسایگی این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x)=x+(x-۱)+(x-۲)+\cdots+(x-۱۰)-(x-۱۱)-(x-۱۲)-\cdots-(x-۲۰)$$

در نتیجه $f(x)=x+k$، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{۲۱}{۲})=۱$.

۸۴۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(۳x-۲)'(۳x-۲)^{۳-۱}-۴(۲x-۳)'(۲x-۳)^{۴-۱}$$

$$=۳(۳)(۳x-۲)^۲-۴(۲)(۲x-۳)^۳$$

در نتیجه $f'(-۱)=۹(-۳-۲)^۲-۸(-۲-۳)^۳=۹\times ۵^۲+۸\times ۵^۳=۴۹\times ۵^۲$

۸۴۲- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$،

$$f'(x)=((x^۲-۱)^۲)'(x+۲)^۴+(x^۲-۱)^۲((x+۲)^۴)'$$

$$=(۲(۲x)(x^۲-۱)^{۲-۱})(x+۲)^۴+(x^۲-۱)^۲(۴(۱)(x+۲)^{۴-۱})$$

$$=۴x(x^۲-۱)(x+۲)^۴+۴(x^۲-۱)^۲(x+۲)^۳$$

بنابراین $f'(۰)=۰+۴(۱)(۲)^۳=۳۲$.

۸۴۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ زنجیری، $(gof)'(۱)=f'(۱)g'(f(۱))$. از طرف دیگر، $f(x)=x^۳-x+۱$، در نتیجه $f'(x)=۳x^۲-۱$. بنابراین $f(۱)=۱$ و $f'(۱)=۲$. همچنین

$$g(x)=۲-x^۲\Rightarrow g'(x)=-۲x\Rightarrow g'(f(۱))=g'(۱)=-۲$$

بنابراین $(gof)'(۱)=۲\times(-۲)=-۴$.

۸۴۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=(-۳)(۳-\frac{۱}{x^۲})(۳x+\frac{۱}{x})^{-۴}$$

در نتیجه، $f'(۱)=(-۳)(۲)(۴)^{-۴}=\frac{-۳}{۱۲۸}$. بنابراین $۱۲۸f'(۱)=-۳$.

۸۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[۳]{g})'=\frac{g'}{۳\sqrt[۳]{g^۲}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲)^۲}}\Rightarrow f'(۵)=\frac{۱۰}{۲۷}$$

۸۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۷}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۴}{\sqrt{۹}}-\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۱۳}{۱۲}$$

۸۴۷- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(۲x)=-x^۲+۳x+۴$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(۲x)'f'(۲x)=-۲x+۳\Rightarrow ۲f'(۲x)=-۲x+۳$$

$$\xrightarrow{x=۲}۲f'(۴)=-۴+۳\Rightarrow f'(۴)=-\frac{۱}{۲}$$

۸۴۸- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(\frac{۱}{۳x-۱})'f'(\frac{۱}{۳x-۱})=۶x\Rightarrow\frac{-۳}{(۳x-۱)^۲}f'(\frac{۱}{۳x-۱})=۶x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید $\frac{-۳}{۴}f'(\frac{۱}{۲})=۶$.

پس $f'(\frac{۱}{۲})=-۸$.

۸۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$. از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$-f'(۱-x)=۶x+۱\xrightarrow{x=-۱}-f'(۲)=-۵\Rightarrow f'(۲)=۵$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۸۵۰- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f^۲(x^۳)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$g'(x)=۲(f(x^۳))'f(x^۳)=۲(۳x^۲)f'(x^۳)f(x^۳)=۶x^۲f'(x^۳)f(x^۳)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۲$، به‌دست می‌آید

$$g'(۲)=۶\times ۴\times f'(۸)f(۸)=۶\times ۴\times\frac{۱}{۶}=۴$$

۸۵۱- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(fog)'(-۱)=g'(-۱)f'(g(-۱))$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=x^۳-۳x\Rightarrow g'(x)=۳x^۲-۳\Rightarrow g'(-۱)=۰$$

بنابراین $(fog)'(-۱)=۰$.

۸۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(۱+(۲+x^۲)^۲)'(۱+(۲+x^۲)^۲)^{۳-۱}$$

$$=۳(۲(۲x)(۲+x^۲)^{۲-۱})(۱+(۲+x^۲)^۲)^۲=۱۲x(۲+x^۲)(۱+(۲+x^۲)^۲)^۲$$

بنابراین $f'(۱)=۱۲\times۱\times۳\times۱۰^۲=۳۶۰۰$.

۸۵۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(-\frac{۱}{x^۲}+\frac{۳}{x^۴}+۱)(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}+x)^۲$$

در نتیجه $f'(۱)=۹$.

۸۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[۳]{g})'=\frac{g'}{۳\sqrt[۳]{g^۲}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x-۳}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۳x+۱)^۲}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{-۱}{۳(۱)}=-\frac{۱}{۳}$$

۸۵۵- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(۲x+۳)\sqrt{x^۲+۳}+(x^۲+۳x)\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۳}}$$

بنابراین $f'(۱)=۵\times۲+۴\times\frac{۱}{۲}=۱۲$.

۸۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f^۲(x)=\frac{۲x+۱}{x+۲}$. اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$۲f'(x)f(x)=\frac{(۲)(x+۲)-(۱)(۲x+۱)}{(x+۲)^۲}\Rightarrow ۲f'(۱)f(۱)=\frac{۶-۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $f(۱)f'(۱)=\frac{۱}{۶}$.

۸۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g(۴)=\frac{۲+۱}{۳}=۱$ و

$$(fog)'(۴)=g'(۴)f'(g(۴))=g'(۴)f'(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{(۲x+۱)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-x^۲+۲x+۱}{(x^۲+۱)^۲},\quad f'(۱)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sqrt{x^۲-۷}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۷}}(\sqrt{x}+۱)}{x^۲-۷}$$

$$g'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}\times۳-\frac{۸}{۶}\times۳}{۹}=-\frac{۱۳}{۳۶}$$

بنابراین $(fog)'(۴)=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱۳}{۳۶}=\frac{-۱۳}{۷۲}$.

۸۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲ax)\sqrt{۳x+۱}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(ax^۲+a)}{۳x+۱}$$

بنابراین

$$f'(۱)=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow\frac{(۲a)(۲)-\frac{۳}{۲\times۲}(a+a)}{۴}=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow\frac{\frac{۵a}{۲}}{۴}=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow a=\frac{۲۱}{۵}$$

۸۵۹- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x)=g(x^۲+۲x)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $f'(x)=(۲x+۲)g'(x^۲+۲x)$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $f'(۳)=۸g'(۱۵)$، پس $g'(۱۵)=۹$.

۸۶۰- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $۴xf'(۲x^۲-۴)=۳f'(x-۳)+۵$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$۴f'(-۲)=۳f'(-۲)+۵\Rightarrow f'(-۲)=۵$$

۸۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲(\frac{۳x^۲(x^۲-۱)-۲x(x^۳-۱)}{(x^۲-۱)^۲})(\frac{x^۳-۱}{x^۲-۱})\Rightarrow f'(-۲)=۰$$

۸۶۲- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $(۲,۳)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(۲)=۳$. چون خط d از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۵,۰)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{۳-۰}{۲-۵}=-۱$. بنابراین $f'(۲)=-۱$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x)=f(۳x-۴)+x(۳f'(۳x-۴))$$

$$g'(۲)=f(۲)+۶f'(۲)=۳-۶=-۳$$

۸۶۳- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}(\sqrt{x+۴}-۱)+(\sqrt{x-۱}+۲)\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}$$

در نتیجه $f'(۵)=\frac{۱}{۲\times۲}(۲)+۴\times\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۷}{۶}$.

۸۶۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=((x^۳+۲)(\sqrt{x}+۲x))^۲$ و $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۲((۳x^۲)(\sqrt{x}+۲x)+(x^۳+۲)(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۲))(x^۳+۲)(\sqrt{x}+۲x)$$

در نتیجه $f'(۱)=۲(۳(۳)+۳(\frac{۱}{۲}+۲))(۳)(۳)=۲۹۷$.

۸۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۳x^۲+۳a}{۳\sqrt[۳]{(x^۳+۳ax)^۲}}$. بنابراین

$$f'(۲)=۰\Rightarrow ۳\times۲^۲+۳a=۰\Rightarrow a=-۴$$

۸۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۳+۱}$$

$$=\sqrt{x^۲-۱+۱}=\sqrt{x^۲}=|x|$$

بنابراین

$$g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)=(|x|)'=\frac{x}{|x|}$$

۸۶۷- گزینهٔ ۲ طبق قاعدهٔ مشتق تابع مرکب:

$$y=f(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow y'=(x+\sqrt{1+x^2})'f'(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۸۶۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که چون $g(-1)=2$، پس $f(2)=f(g(-1))$.

بنابراین

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(g(x))-f(2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(g(x))-f(g(-1))}{x-(-1)}$$

$$=(fog)'(-1)=g'(-1)f'(g(-1))=5\times f'(2)=5\times(-3)=-15$$

۸۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3)=\frac{x}{f(x^2)}\Rightarrow 3x^2g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{3x^2f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(8)=\frac{f(4)-8f'(4)}{12f^2(4)}=\frac{1-8\times\frac{13}{8}}{12\times 1}=-1$$

۸۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+k}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x)=(fof)(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(0)=f'(0)f'(f(0))=f'(0)f'(\frac{k}{2})$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{4}\times\frac{2-k}{(\frac{k}{2}+2)^2}=4\Rightarrow(2-k)^2=16(\frac{k}{2}+2)^2$$

$$\begin{cases}2-k=4(\frac{k}{2}+2)\\2-k=-4(\frac{k}{2}+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-2\\k=-10\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۸۷۱- گزینهٔ ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینهٔ (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسته است:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(2x)=2$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2)=3$. چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$، پس این تابع هم در نقطهٔ $x=1$ مشتق ندارد.

در گزینهٔ (۴) تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است و

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x\geq 1\\ 2x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}6x & x>1\\ 6x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین، $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(6x)=6$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(6x^2)=6$. چون $f'_+(1)=f'_-(1)$، پس تابع گزینهٔ (۴) در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۸۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'_+(-1)$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=-1$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(-1+h)^3-3}{h}=-\infty$$

۸۷۳- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)$$

$$-a+2=-a+2=1-b\Rightarrow a-b=1$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & x>-1\\ 2x+b & x<-1\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}(3ax^2)=3a\,,\,f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+b)=-2+b$$

$$f'_+(-1)=f'_-(-1)\Rightarrow 3a=b-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-b=1\\3a-b=-2\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{3}{2}$ و $b=-\frac{5}{2}$

و در نتیجه $a+b=-4$.

۸۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2)=3\\ f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3\end{cases}$$

بنابراین $f'(1)=3$. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=f'(1)\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۸۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(1)=2$ و

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^3+x)=2,\quad\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}4x=4$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(1)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x>1\\ 4 & x<1\end{cases}$$

بنابراین $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2+1)=4$.

۸۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع f در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲}$$
$$=\lim_{x\to۲^+}۲(x+۲)=۸$$

$$۲<x<۳\Rightarrow f(x)=۲x^۲\Rightarrow f'(x)=۴x\Rightarrow\lim_{x\to۲^+}f'(x)=۸$$

$$۱<x<۲\Rightarrow f(x)=x^۲\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow\lim_{x\to۲^-}f'(x)=۴$$

۸۷۷- گزینهٔ ۴ اگر $g(x)=(x+۱)(x-۲)^۲$، آن‌گاه $g(۲)=g'(۲)=۰$.

بنابراین تابع $f(x)=|g(x)|$ در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است.

۸۷۸- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی $x^۲+۴x+m^۲$ باید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta=۱۶-۴m^۲>۰\Rightarrow m^۲<۴\Rightarrow -۲<m<۲$$

۸۷۹- گزینهٔ ۲ تابع را به‌صورت $f(x)=(x-۲)|(x-۲)(x-۳)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-۲)(x-۳)|$ در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ مشتق ندارد، ولی عامل صفر کنندهٔ $(x-۲)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=۳$ مشتق ندارد.

۸۸۰- گزینهٔ ۱ عبارت داخل قدرمطلق $(x^۲-۴=(x-۲)(x+۲))$ دو ریشهٔ سادهٔ ۲ و -۲ دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید $x^۲+ax+b$ به ازای $x=-۲$ و $x=۲$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases}x=۲\Rightarrow ۲^۲+a\times ۲+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴\\ x=-۲\Rightarrow (-۲)^۲+a(-۲)+b=۰\Rightarrow -۲a+b=-۴\end{cases}$$

پس $a=۰$ و $b=-۴$، بنابراین $۳a+b=-۴$.

۸۸۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۴x-۳ & x<۳\\ ۹ & x>۳\end{cases}$. چون تابع f روی بازهٔ $[-\infty,۳]$ پیوسته و روی بازهٔ $(-\infty,۳)$ مشتق‌پذیر است، همین‌طور روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ پیوسته و روی بازهٔ $(۳,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to۳^-}f'(x)=\lim_{x\to۳^-}(۴x-۳)=۹ \quad (۱)$$
$$\lim_{x\to۳^+}f'(x)=\lim_{x\to۳^+}(۹)=۹ \quad (۲)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(۳)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(۳)$ است، و چون این دو مقدار برابرند، پس $f'(۳)=۹$.

۸۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۲\\ ۳x^۲ & x<۲\end{cases}$. بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}f'(x)=\lim_{x\to۲^+}(۲x+۲)=۴+۲=۶$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}f'(x)=\lim_{x\to۲^-}(۳x^۲)=۳\times ۴=۱۲$$

در نتیجه $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۶-۱۲=-۶$.

۸۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۲)=۳$ و

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+۱)=۵$$
$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x^۳-۱)=۷$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۸۸۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^-}f(x)$$
$$b=\lim_{x\to۲^+}(x^۳+ax)=\lim_{x\to۲^-}(cx^۲+c)\Rightarrow b=۸+۲a=۵c \quad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+a & x>۲\\ ۲cx & x<۲\end{cases}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(۳x^۲+a)=۱۲+a$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(۲cx)=۴c$$
$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲+a=۴c\Rightarrow a=۴c-۱۲$$
$$\xrightarrow{(I)}۸+۲(۴c-۱۲)=۵c\Rightarrow c=\frac{۱۶}{۳}$$
$$f(۲)=۵c=\frac{۸۰}{۳}$$

۸۸۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۴a & x>۲\\ ۳ax^۲+۲ & x<۲\end{cases}$$

پس

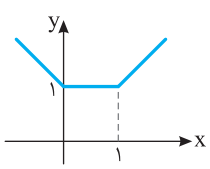
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}f'(x)=\lim_{x\to۲^+}(۲x+۴a)=۴+۴a$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}f'(x)=\lim_{x\to۲^-}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

چون تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴+۴a=۱۲a+۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f'(۴a)=f'(۱)=۳a+۲=\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۱۱}{۴}$.

۸۸۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل زیر است و در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.



۸۸۷- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x\geq 1\Rightarrow f(x)=x(x^2-x)=x^3-x^2$$

$$f'(x)=3x^2-2x\Rightarrow f'_+(1)=3-2=1$$

$$0\leq x\leq 1\Rightarrow f(x)=x(x-x^2)=x^2-x^3$$

$$f'(x)=2x-3x^2\Rightarrow f'_-(1)=2-3=-1$$

ولی در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x^2-x|}{x}=\lim_{x\to 0}|x^2-x|=0$$

توجه کنید که تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=0$ مشتق ندارد.

پس $y=|x^2-x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^2-x|$ به دلیل وجود عامل صفرکنندهٔ x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۸۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=|x^3-x^2|=|x^2(x-1)|=x^2|x-1|$$

بنابراین تابع فقط در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x=1$ دارد.

۸۸۹- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $y=x^2-2x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta\leq 0\Rightarrow 4-4m\leq 0\Rightarrow m\geq 1$$

۸۹۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-1$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1\Rightarrow a=-2$$

۸۹۱- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطهٔ $(2,f(2))$ می‌گذرد. پس معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از نقطهٔ $(2,\frac{3}{2})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{5}{4}$ باشد، یعنی

$$y-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}(x-2)\Rightarrow 5x-4y-4=0$$

۸۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(5,2)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(5)=\frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-5)\Rightarrow 4y-x=3$$

۸۹۳- گزینهٔ ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^4=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

بنابراین معادلهٔ فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۸۹۴- گزینهٔ ۴ شیب خط $y=9x-1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطهٔ مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x)=x^3-3x^2+15\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=9$$

$$3x^2-6x-9=0\Rightarrow x=-1\,(\text{غ.ق.ق.}),\ x=3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3)=27-27+15=15$$

۸۹۵- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x)=3x^2+m=0\Rightarrow m=-3x^2$$

$$f(x)=0\Rightarrow x^3+(-3x^2)x-54=0\Rightarrow x^3=-27\Rightarrow x=-3$$

بنابراین $m=-27$.

۸۹۶- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=-x+b$ برابر -1 است، بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=2$ برابر با -1 است:

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-(ax+3)}{(x+1)^2}=\frac{a-3}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{a-3}{(2+1)^2}=-1\Rightarrow a=-6$$

۸۹۷- گزینهٔ ۱ شیب خط $y=\frac{2}{9}x+1$ برابر $\frac{2}{9}$ است. بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=1$ برابر $\frac{2}{9}$ است.

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x+2)-(x^2-mx+1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(2-m)(3)-(2-m)}{(1+2)^2}=\frac{2(2-m)}{9}$$

بنابراین

$$\frac{2(2-m)}{9}=\frac{2}{9}\Rightarrow 2-m=1\Rightarrow m=1$$

۸۹۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=3x^2-2x=1\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\ \ (\text{غ.ق.ق.})\\ x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

بنابراین خط $y=x+k$ در نقطهٔ $A(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود و نقطهٔ A روی این خط قرار دارد. یعنی

$$-\frac{4}{27}=-\frac{1}{3}+k\Rightarrow k=\frac{5}{27}$$

۸۹۹- گزینهٔ ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین $a=f'(x)=3x^2-1$. واضح است که $3x^2-1\geq -1$ بنابراین $a\geq -1$.

۹۰۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-x^2$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به نمودار تابع $f(x)=-x^2+k$ تبدیل می‌شود $(k>0)$. می‌خواهیم خط $y=2x+3$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x)=-2x=2\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=1$$

پس نقطهٔ $A(-1,1)$ نقطهٔ مورد نظر است که باید روی نمودار تابع $f(x)=-x^2+k$ باشد. پس

$$-1+k=1\Rightarrow k=2$$

۹۰۱- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌ها $(0,3)$ و شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر $f'(0)$ است.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{4}$$

بنابراین معادلهٔ خطی با شیب $\frac{1}{4}$ را که از نقطهٔ $(0,3)$ عبور می‌کند، می‌نویسیم.

$$y-3=\frac{1}{4}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+3$$

۹۰۲- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(2)=\frac{3}{2}$ و $f'(2)$ برابر است با شیب خطی که از نقاط $(0,3)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، پس $f'(2)=\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=4f^2(x)+x\Rightarrow g'(x)=8f'(x)f(x)+1\Rightarrow g'(2)=8f'(2)f(2)+1$$

$$\text{شیب خط مماس}=g'(2)=8\times\frac{-3}{4}\times\frac{3}{2}+1=-8$$

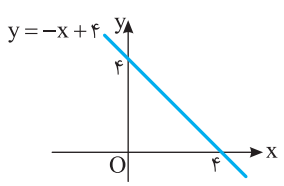
همچنین $g(2)=4f^2(2)+2=4(\frac{3}{2})^2+2=11$. بنابراین می‌خواهیم معادلهٔ خطی با شیب -8 را بنویسیم که از نقطهٔ $(2,11)$ می‌گذرد:

$$y-11=-8(x-2)\Rightarrow y=-8x+27$$

۹۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(1)=3$ و $f'(x)=-1-\frac{2}{x^2}$. بنابراین $f'(1)=-3$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(1,3)$ به‌صورت زیر است:

$$y-3=-(x-1)\Rightarrow y=-x+4$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(0,4)$ و $B(4,0)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{4\times 4}{2}=8$.



۹۰۴- گزینهٔ ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+bx+2$ است، پس عرض آن برابر است با $y=2$. چون خط d از نقطه‌های $(2,0)$ و $(0,3)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$. چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است، مقدار y' به‌ازای $x=0$ برابر با شیب خط d است:

$$y=-x^2+bx+2\Rightarrow y'=-2x+b\xrightarrow{x=0}b=-\frac{2}{3}$$

۹۰۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ تماس (x_0,y_0) باشد. در این صورت مقدار $f'(x_0)$ برابر با شیب خط $y=x+2$ است، یعنی $f'(x_0)=1$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=x^2+x-1\Rightarrow f'(x_0)=1\Rightarrow x_0^2+x_0-2=0\Rightarrow x_0=-2,x_0=1$$

اگر $x_0=-2$، چون نقطهٔ (x_0,y_0) روی خط $y=x+2$ است، پس $y_0=0$ و چون نقطهٔ $(-2,0)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$0=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2+k\Rightarrow k=-\frac{4}{3}$$

اگر $x_0=1$، آن‌گاه $y_0=3$ و نتیجه می‌شود $k=\frac{19}{6}$ که قابل قبول نیست زیرا طبق فرض سؤال باید $k<0$.

۹۰۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}x=-1\\y=3x+1\end{cases}\Rightarrow y=-2$$

بنابراین

$$f(-1)=-2\Rightarrow -a+b=-2\quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y=3x+1$ برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-1$ بر این خط مماس است، پس $f'(-1)=3$. در نتیجه

$$f'(x)=3ax^2+2bx+2\Rightarrow f'(-1)=3a-2b+2=3\Rightarrow 3a-2b=1\quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-5$. بنابراین $a+b=-8$.

۹۰۷- گزینهٔ ۳ شیب خط $2x+y=3$ برابر -2 است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس

$$f'(x)=\frac{5(x+2)-(5x+2)}{(x+2)^2}=\frac{8}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2=16\Rightarrow x=2,x=-6$$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{5\times 2+2}{2+2}=3$$

$$x=-6\Rightarrow f(-6)=\frac{5\times(-6)+2}{-6+2}=7$$

پس نقاط مورد نظر $A(2,3)$ و $B(-6,7)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(-6-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{80}$.

۹۰۸- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خطی که نقاط $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ را به هم وصل می‌کند، به‌صورت $y=۰$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x)=۴x^۳-۲x=۰\Rightarrow x=۰,\ x^۲=\frac{۱}{۲}$$

اگر $x=۰$، آن‌گاه $f(x)=۰$، پس نمودار تابع در $(۰,۰)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^۲=\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $f(x)=-\frac{۱}{۴}$، پس نمودار تابع در این نقاط بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۹۰۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha,۲\alpha-\alpha^۲)$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-(۲\alpha-\alpha^۲)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ است. چون $f'(\alpha)=۲-۲\alpha$، پس $y-(۲\alpha-\alpha^۲)=(۲-۲\alpha)(x-\alpha)$. نقطهٔ $(۴,۱)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$۱-(۲\alpha-\alpha^۲)=(۲-۲\alpha)(۴-\alpha)\Rightarrow ۱-۲\alpha+\alpha^۲=۸-۲\alpha-۸\alpha+۲\alpha^۲$$

$$\alpha^۲-۸\alpha+۷=۰\Rightarrow(\alpha-۱)(\alpha-۷)=۰\Rightarrow\alpha=۱,\quad \alpha=۷$$

اگر $\alpha=۱$، آن‌گاه $f'(\alpha)=۰$ و اگر $\alpha=۷$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-۱۲$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -۱۲ است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(۴,۱)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-۱}{\alpha-۴}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲x-x^۲\Rightarrow f'(x)=۲-۲x\Rightarrow f'(\alpha)=۲-۲\alpha$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-۱}{\alpha-۴}=۲-۲\alpha\Rightarrow\frac{۲\alpha-\alpha^۲-۱}{\alpha-۴}=۲-۲\alpha$$

$$۲\alpha-\alpha^۲-۱=۲\alpha-۸-۲\alpha^۲+۸\alpha\Rightarrow\alpha^۲-۸\alpha+۷=۰$$

$$(\alpha-۱)(\alpha-۷)=۰\Rightarrow\alpha=۱,\alpha=۷$$

اگر $\alpha=۱$، آن‌گاه $f'(\alpha)=۰$ و اگر $\alpha=۷$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-۱۲$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -۱۲ است.

۹۱۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha,\frac{۵\alpha+۱}{\alpha-۱})$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-\frac{۵\alpha+۱}{\alpha-۱}=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

چون $f'(\alpha)=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}$، پس $y-\frac{۵\alpha+۱}{\alpha-۱}=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}(x-\alpha)$.

نقطهٔ $(۰,۲)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$۲-\frac{۵\alpha+۱}{\alpha-۱}=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}(۰-\alpha)\Rightarrow\frac{۲(\alpha-۱)-(۵\alpha+۱)}{\alpha-۱}=\frac{-۶(-\alpha)}{(\alpha-۱)^۲}$$

$$\frac{۲\alpha-۲-۵\alpha-۱}{\alpha-۱}=\frac{۶\alpha}{(\alpha-۱)^۲}\Rightarrow-۳\alpha-۳=\frac{۶\alpha}{\alpha-۱}\Rightarrow-۳\alpha^۲-۶\alpha+۳=۰$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -۲ است.

راه‌حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x)=\frac{۵x+۱}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۶}{(x-۱)^۲}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(\alpha,f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-۲}{\alpha-۰}$. بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-۲}{\alpha}=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}\Rightarrow\frac{\frac{۵\alpha+۱}{\alpha-۱}-۲}{\alpha}=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}$$

$$\frac{۳\alpha+۳}{\alpha(\alpha-۱)}=\frac{-۶}{(\alpha-۱)^۲}\Rightarrow۳(\alpha+۱)(\alpha-۱)=-۶\alpha\Rightarrow\alpha^۲+۲\alpha-۱=۰$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -۲ است.

۹۱۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-۱,۲]$ برابر است با

$$\frac{f(۲)-f(-۱)}{۲-(-۱)}=\frac{۰-(-\frac{۳}{۲})}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

۹۱۲- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۱,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(۱)}{a-۱}=\frac{\frac{۱}{a}-۱}{a-۱}=\frac{۱-a}{a(a-۱)}=-\frac{۱}{a}$ است. بنابراین

$$-\frac{۱}{a}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۹۱۳- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۴,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(۴)}{a-۴}=\frac{\sqrt{a}-۲}{a-۴}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a}-۲}{a-۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow۶\sqrt{a}-۱۲=a-۴\Rightarrow۶\sqrt{a}=a+۸\Rightarrow۳۶a=a^۲+۱۶a+۶۴$$

$$a^۲-۲۰a+۶۴=۰\Rightarrow(a-۱۶)(a-۴)=۰\Rightarrow a=۱۶,\quad a=۴\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۹۱۴- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ در بازهٔ $[-a,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(-a)}{۲a}$ است:

$$\frac{f(a)-f(-a)}{۲a}=\frac{\frac{۱}{a-۴}-\frac{۱}{-a-۴}}{۲a}=\frac{-a-۴-a+۴}{۲a(۱۶-a^۲)}=\frac{۱}{a^۲-۱۶}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{a^۲-۱۶}=\frac{-۱}{۷}\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳,\quad a=-۳\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۹۱۵- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a-۱,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(a-۱)}{a-a+۱}$ است:

$$\frac{f(a)-f(a-۱)}{۱}=\frac{a-\frac{۱}{a}-(a-۱-\frac{۱}{a-۱})}{۱}=\frac{-۱}{a}+\frac{۱}{a-۱}+۱=۱+\frac{۱}{a^۲-a}$$

$$۱+\frac{۱}{a^۲-a}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{a^۲-a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

$$(a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow a=-۱,۲$$

۹۱۶- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-۳,۰]$ برابر است با

$$\frac{f(۰)-f(-۳)}{۰-(-۳)}=\frac{۰-(-۳۰)}{۳}=۱۰$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x)=۳x^۲+۱\Rightarrow f'(a)=۳a^۲+۱$$

بنابراین

$$۳a^۲+۱=۱۰\Rightarrow a^۲=۳\Rightarrow a=\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad a=-\sqrt{۳}$$

۹۱۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۱]$ برابر است با $\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=۱-k$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=۱$ برابر است با

$$f'(x)=۳x^۲-۲kx\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۳-۲k$$

بنابراین

$$۳-۲k=۱-k\Rightarrow k=۲$$

۹۱۸- گزینهٔ ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S=\pi r^۲\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}},\quad P=۲\pi r=۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}\Rightarrow P'(S)=۲\sqrt{\pi}\times\frac{۱}{۲\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(۴\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۹۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S=x(۶-x)\Rightarrow S(x)=۶x-x^۲\Rightarrow S'(x)=۶-۲x$$

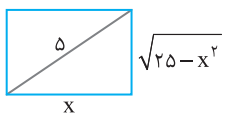
مقدار $S'(۲)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

۹۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس عرض مستطیل برابر است با $\sqrt{۲۵-x^۲}$. پس

$$P(x)=۲(x+\sqrt{۲۵-x^۲})$$

$$P'(x)=۲(۱-\frac{۲x}{۲\sqrt{۲۵-x^۲}})=۲-\frac{۲x}{\sqrt{۲۵-x^۲}}$$

مقدار $P'(۴)$ خواسته شده که برابر است با $P'(۴)=۲-\frac{۸}{\sqrt{۲۵-۱۶}}=-\frac{۲}{۳}$.



۹۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۲x+۱\Rightarrow f''(x)=۶x-۲$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲x+۱=۶x^۲-۲x$ را مشخص کنیم:

$$۳x^۲=۱\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x)=xf''(x)$ برقرار است.

۹۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}f'(x)=۴x^۳+۲ax+b\xrightarrow{x=۱}۱۴=۴+۲a+b\\ f''(x)=۱۲x^۲+۲a\xrightarrow{x=۱}۱۶=۱۲+۲a\end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۶$، پس $a+b=۸$.

۹۲۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=(x+k)^۲(x-۱)$$

$$f'(x)=۲(x+k)(x-۱)+(x+k)^۲$$

$$f''(x)=۲(x-۱)+۲(x+k)+۲(x+k)$$

$$f''(۲)=۲+۴(۲+k)\xrightarrow{f''(۲)=۲}۲+۴(۲+k)=۲\Rightarrow k=-۲$$

۹۲۴- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲+۴}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۲+۴-۲x^۲}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{-x^۲+۴}{(x^۲+۴)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(x^۲+۴)^۲-۴x(x^۲+۴)(-x^۲+۴)}{(x^۲+۴)^۴}$$

$$=\frac{-۲x(x^۲+۴)-۴x(-x^۲+۴)}{(x^۲+۴)^۳}=\frac{۲x^۳-۲۴x}{(x^۲+۴)^۳}$$

بنابراین

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۲x^۳-۲۴x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=\pm\sqrt{۱۲}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۹۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^۶}{x^۲}+\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{x^۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۴+x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=۴x^۳+۲x-\frac{۲}{x^۳}\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲+۲+\frac{۶}{x^۴}$$

$$f''(۱)=۱۲+۲+۶=۲۰$$

۹۲۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=(x^{\frac{۱}{۳}}-۱)(x^{\frac{۱}{۲}}+۱)=x^{\frac{۵}{۶}}+x^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۱}{۲}}-۱$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۶}x^{-\frac{۱}{۶}}+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$f''(x)=-\frac{۵}{۳۶}x^{-\frac{۷}{۶}}-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}+\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین $f''(۱)=-\frac{۵}{۳۶}-\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۹}$.

۹۲۷- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۱}-\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x^۲+۱}=\frac{x^۲+۱-x^۲}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{۱}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}$$

بنابراین $f''(\sqrt{۳})=\frac{۱}{(۳+۱)\sqrt{۳+۱}}=\frac{۱}{۸}$.

۹۲۸- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $2f'(2x-3)=3x^2+2ax+b$. اگر باز هم از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $4f''(2x-3)=6x+2a$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$4f''(-1)=6+2a\Rightarrow 4\times 4=6+2a\Rightarrow a=5$$

۹۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases},\quad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۹۳۰- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=4x^3+6ax^2+12x$$

$$f''(x)=12x^2+12ax+12=12(x^2+ax+1)$$

پس معادلهٔ $x^2+ax+1=0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=a^2-4<0\Rightarrow |a|<2$$

۹۳۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^7+1}=\lim_{x\to -1}\frac{5x^4}{7x^6}=\frac{5}{7}$$

۹۳۲- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^4+x^3+x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین باز هم از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+2}{12x^2+6x}=\frac{-6+2}{12-6}=-\frac{2}{3}$$

۹۳۳- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^4-(2x-3)^4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-1)^3-8(2x-3)^3}{2x}=\frac{4-8}{4}=-1$$

۹۳۴- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{2x}=\frac{n}{2}=10\Rightarrow n=20$$

۹۳۵- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-8}-2}{\sqrt{5x+10}-5}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+10}}}=\frac{\frac{4}{2\times 2}}{\frac{5}{2\times 5}}=2$$

۹۳۶- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{3x^2}=\frac{\frac{1}{3\times 4}}{3\times 4}=\frac{1}{144}$$

۹۳۷- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+14}-2x}{\sqrt[3]{x+25}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+14}}-2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+25)^2}}}=\frac{\frac{1}{8}-2}{\frac{1}{3\times 9}}=-\frac{405}{8}$$

۹۳۸- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2\times 2}=\frac{5}{12}$$

۹۳۹- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{2}}-x}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=6$$

۹۴۰- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+9}}}{1}=\frac{a}{2\sqrt{9}}=\frac{a}{6}$$

پس $\frac{a}{6}=4$ و در نتیجه $a=24$.

۹۴۱- گزینهٔ ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(2)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{1}{2}}\times\frac{-3-4}{(2x-3)^2}$$

بنابراین $f'(2)=\frac{3}{2}\times\sqrt{4}\times(-7)=-21$. تجربی - ۹۵

۹۴۲- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=-2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)$$

$$4a-2b+4=-8+2\Rightarrow 2a-b=-5$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x\geq -2\\ 3x^2-1 & x\leq -2\end{cases}\Rightarrow f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow -4a+b=11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}2a-b=-5\\ -4a+b=11\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-1$ و در نتیجه $f(1)=a+b+4=0$. تجربی - ۹۷

۹۴۳- گزینهٔ ۴ تابع باید در $x=1$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=2$. از طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{-1}{2}} & x\geq 1\\ ax^2+bx & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-x^{\frac{-3}{2}} & x>1\\ 2ax+b & x<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(1)=-1\\ f'_-(1)=2a+b\end{cases}\Rightarrow 2a+b=-1$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=-1\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=5$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

۹۴۴- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار جزء صحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=-3$ مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-3)^+\Rightarrow[x]=-3,\quad |x|=-x\Rightarrow f(x)=(x-3)\sqrt[3]{9x}$$

بنابراین $f'(x)=\sqrt[3]{9x}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(x-3)$. پس

$$f'_+(-3)=-3+\frac{9}{3\times 9}(-6)=-5$$

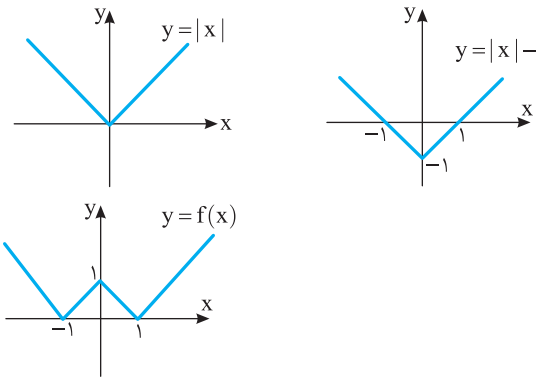
ریاضی - ۹۳

۹۴۵- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=0$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}|x|=0,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|-0}{x-0}=0$$

ریاضی - ۸۷

۹۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطهٔ گوشه‌ای (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۹۴۷- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2\Rightarrow f'(x)=2(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})$$

$$f'(-8)=2(-2-4)(-\frac{1}{4}+\frac{2}{6})=-1$$

ریاضی - ۸۸

۹۴۸- گزینهٔ ۲ به‌جای اینکه حاصل $f'(x)\times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=x$$

بنابراین $(gof)'(x)=1$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۴۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,6/25]$ برابر است با

$$\frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4}=\frac{\sqrt{6/25}-\sqrt{4}}{6/25-4}=\frac{2/5-2}{2/25}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{9}$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4},\quad \text{مقدار مورد نظر}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۹۵۰- گزینهٔ ۲ باید معادلهٔ برخورد خط و نمودار ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2+mx=2x-4\Rightarrow(m+3)x^2+(m-2)x+4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0}(m-2)^2-16(m+3)=0$$

$$m^2-20m-44=0\Rightarrow(m-22)(m+2)=0\Rightarrow m_1=22\ ,\ m_2=-2$$

ریاضی - ۹۰

۹۵۱- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$$

پس

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow f(4)=-7,\ f'(4)=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$y=\frac{1}{x}f(2x)\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f(2x)+2f'(2x)\times\frac{1}{x}$$

$$y'(2)=-\frac{1}{4}f(4)+2f'(4)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{6}{4}=\frac{1}{4}$$

ریاضی - ۹۶

۹۵۲- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a+b+1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{-1}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases},\quad \lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)\Rightarrow 2=2+a$$

از دو شرط $2=2+a$ و $a+b+1=0$ نتیجه می‌شود $a=0$ و $b=-1$، پس

$$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2+a(1-\sqrt{2})+b=3-2\sqrt{2}-1=2-2\sqrt{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۵۳- گزینهٔ ۳ چون $f(0)=0$، پس

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x<0$، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. بنابراین

$$f'_-(0)=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

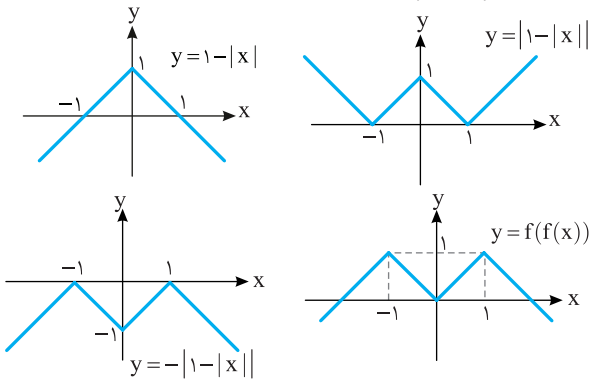
$$=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۹۵۴- گزینهٔ ۴ به دلیل حضور جزءصحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق‌ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x\in\mathbb{Z}$ یا $x+\frac{1}{3}\in\mathbb{Z}$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{1}{3}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازهٔ $(0,3)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{2}{3},1,\frac{5}{3},2,\frac{8}{3}\}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۹۵۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(f(x))=۱-\big|۱-|x|\big|$. اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، $y=۱-\big|۱-|x|\big|$ در سه نقطهٔ $x=۰$ و $x=\pm ۱$ مشتق‌ناپذیر است.

خارج از کشور ریاضی -۸۸

۹۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x\leq ۰\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۵x) & x\geq ۰\\ f(۳x) & x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$ و در نتیجه $(fog)'(x)=۳$.

تجربی - ۹۴

۹۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x+۱+(g(x))^۵\Rightarrow f'(x)=۱+۵g'(x)g^۴(x)\qquad (۱)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f'(۰)=۱+۵g'(۰)g^۴(۰)\Rightarrow ۱=۱+۵g'(۰)\Rightarrow g'(۰)=۰$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=۰+۵g''(x)g^۴(x)+۲۰g'^۲(x)g^۳(x)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f''(۰)=۵g''(۰)\times ۱^۴+۲۰\times ۰\times ۱=۵g''(۰)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۹۵۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۱,۱/۴۴]$ برابر است با $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۱/۴۴-۱}=\frac{\frac{۰/۴۴}{۱/۲}-۰}{۰/۴۴}=\frac{۵}{۶}$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۱$ نیز این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{۱}{۶}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۹۵۹- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خط مماس گذرنده از $(\alpha,\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱})$ را می‌نویسیم و مختصات $A(-۱,۰)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{۲+۱}{(x+۱)^۲}\Rightarrow m=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ مماس}} y-\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(x-\alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} -\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(-۱-\alpha)\Rightarrow ۲\alpha-۱=۳\Rightarrow\alpha=۲$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۹۶۰- گزینهٔ ۱ شیب خط $(m+۲)y=mx$ برابر $\frac{m}{m+۲}$ است. پس باید مشتق تابع $y=\sqrt{۱+x^۲}$ در نقطهٔ $x_۰$ واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+۲}$ باشد. یعنی

$$y'(x_۰)=\frac{x_۰}{\sqrt{۱+x_۰^۲}}=\frac{m}{m+۲}\Rightarrow\frac{x_۰^۲}{۱+x_۰^۲}=\frac{m^۲}{(m+۲)^۲}$$

$$m^۲x_۰^۲+m^۲=(m+۲)^۲x_۰^۲\Rightarrow x_۰^۲=\frac{m^۲}{۴(m+۱)}\geq ۰$$

بنابراین $m+۱>۰$ پس $m>-۱$.

ریاضی - ۹۵

۹۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ همان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴\times ۳-۵\times ۱}{(x+۳)^۲}$$

بنابراین $f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۹۶۲- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

شرط پیوستگی: $۳-۵=۱+a+b\Rightarrow a+b=-۳$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{۳}{x^۲} & x>۱\\ ۲x+a & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=-۳\\ f'_-(۱)=۲+a\end{cases}$$

$$۲+a=-۳\Rightarrow a=-۵\ ,\ b=۲$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۹۶۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $\sqrt{۲}$، $f(x)=x^۳-۴x$، پس در این همسایگی،

$$f'(x)=۳x^۲-۴\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲})=۳\times ۲-۴=۲$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۹۶۴- گزینهٔ ۳ با فرض $g(x)=f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ طبق قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود

$$g'(x)=f'(x+\sqrt{۱+x^۲})\times(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}})$$

$$=\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\times(\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}})=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

خارج از کشور ریاضی -۸۵

۹۶۵- گزینهٔ ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y=f(g(x))$ است. پس،

$$y=f(g(x))=\frac{x-۱-۲}{۱+x-۱}=\frac{x-۳}{x}\Rightarrow y'=\frac{۳}{x^۲}$$

ریاضی - ۹۲

۹۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x\leq 0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)x & x\leq 0\end{cases}$$

اکنون تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})\times 4x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)\times 2x & x\leq 0\end{cases}$$

در نهایت از تابع به‌دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(gof)'(x)=\begin{cases}4a+3 & x\geq 0\\ \frac{3}{2}-2a & x\leq 0\end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع gof در نقطهٔ $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$4a+3=\frac{3}{2}-2a\Rightarrow 6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۹۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[4,12]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x=4$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\frac{f(12)-f(4)}{12-4}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\frac{\frac{-2}{15}}{8}=\frac{-1}{60}\\ f'(x)=-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(4)=\frac{-1}{27}\end{cases}\Rightarrow \frac{-1}{60}-(\frac{-1}{27})=\frac{11}{540}$$

تجربی - ۹۳

۹۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(1,2)$ و $(-1,3)$ را می‌نویسیم:

$$y-2=\frac{3-2}{-1-1}(x-1)\Rightarrow y-2=\frac{-1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x+\frac{5}{2}$$

این خط در نقطهٔ $x=3$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(3)=\frac{-1}{2}\times 3+\frac{5}{2}=\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}=1,\quad f'(3)=\frac{-1}{2}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 3}\frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x}=\lim_{x\to 3}(\frac{f(x)-1}{x-3}\times\frac{f(x)+5}{-1})$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to 3}(-f(x)-5)$$
$$=f'(3)\times(-f(3)-5)=-\frac{1}{2}(-1-5)=3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۶۹- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=5x+a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای از تابع $f(x)=2x^2-3x+6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x)=4x-3=5\Rightarrow x=2$$

پس خط در نقطهٔ $(2,f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$f(2)=5\times 2+a\Rightarrow 2\times 2^2-3\times 2+6=10+a\Rightarrow 8=10+a\Rightarrow a=-2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۹۷۰- گزینهٔ ۱ دو نقطه عبارت‌اند از $A(1,3+a)$ و $B(-1,-3+a)$.
معادلهٔ خط گذرنده از A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{3+a-(-3+a)}{1-(-1)}=3$$

معادلهٔ AB: $y-(3+a)=3(x-1)\Rightarrow y=3x+a$

فرض کنید $f(x)=3x+a$ و $g(x)=x^3+ax^2+2x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x)=f'(x)\Rightarrow 3x^2+2ax+2=3$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow x^3+ax^2+2x=3x+a$$

$$x^2(x+a)-(x+a)=0\Rightarrow(x+a)(x^2-1)=0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x=-a$ یا $x=\pm 1$ که با جای‌گذاری این نتایج در معادلهٔ اول مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=\pm 1\Rightarrow 3\pm 2a=1\Rightarrow a=\pm 1\\ x=-a\Rightarrow 3a^2-2a^2=1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1\end{cases}\Rightarrow a=\pm 1$$

ریاضی - ۹۰

۹۷۱- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-1$ مورد نظر است. برای به‌دست آوردن مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-1$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}((x-2)\sqrt[3]{x^2-7x})=-6$$

ریاضی - ۹۲

۹۷۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow a+b=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & x\leq 1\\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x\geq 1\end{cases},\quad f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 4=3a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=1$.

ریاضی - ۹۲

۹۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به ضابطه، نقطهٔ مشتق‌ناپذیری تابع $x=0$ است. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x>0\\ \sqrt{1-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x>0\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(0)=\frac{1}{2}\\ f'_-(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=0\text{ در }f} f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۹۷۴- گزینهٔ ۴ اگر $x<-1$، آن‌گاه $\frac{1}{x}>-1>0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$.

پس تابع f روی بازهٔ $(-1,-\infty)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{1}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود.

همچنین در گزینهٔ (۳)، $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$. پس تابع f روی بازهٔ $[1,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۹۱

۹۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\mathbb{R}-\{-3\},\quad D_g=\mathbb{R}-\{4\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{4\}\,|\,\frac{x+2}{x-4}\in\mathbb{R}-\{-3\}\}$$

$$\frac{x+2}{x-4}=-3\Rightarrow x+2=-3x+12\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}-\{4,\frac{5}{2}\}$. پس تابع fog در نقاط $x=4$ و $x=\frac{5}{2}$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۸۴

۹۷۶- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h\to 0}(f(-2+h)+3)=0\Rightarrow\lim_{h\to 0}f(-2+h)=-3\Rightarrow f(-2)=-3$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-2$ است:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=f'(-2)=\frac{1}{2}$$

پس

$$g(x)=x^2f(x)\Rightarrow g'(x)=(x^2f(x))'=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)=12+2=14$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۹۷۷- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(2)=-\frac{1}{3}$. همچنین اگر فرض کنیم $g(x)=f(\sqrt{|x|+3})$، در یک همسایگی $x=-1$،

$$g(x)=f(\sqrt{3-x})\Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt{3-x})\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1)=-\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{12}$$

ریاضی - ۸۷

۹۷۸- گزینهٔ ۲ اگر $g(x)=f(xf(x))$، آن‌گاه طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$g'(x)=f'(xf(x))\times(f(x)+xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2)=f'(2f(2))\times(f(2)+2f'(2))$$

چون $f(2)=-\frac{1}{2}$ و $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$، پس $f'(2)=-\frac{1}{4}$. پس

$$f'(2f(2))=f'(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{-1+2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}+2\times\frac{-1}{4})=\frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۹۷۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[1,1/21]$ محاسبه می‌کنیم: $\frac{\sqrt{1/21}-\sqrt{1}}{1/21-1}=\frac{1/1-1}{0/21}=\frac{0/1}{0/21}=\frac{10}{21}$. اکنون آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطهٔ $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{21-20}{42}=\frac{1}{42}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۹۸۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** شیب نیمساز ناحیهٔ اول برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x)=2x^2+(m+1)x+m+6$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x)=1\Rightarrow 4x+m+1=1\Rightarrow x=-\frac{m}{4}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطهٔ $(-\frac{m}{4},-\frac{m}{4})$ بر نمودار تابع f مماس شده است. این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{4}=2(-\frac{m}{4})^2+(m+1)(-\frac{m}{4})+m+6$$

$$m^2-8m-48=0\Rightarrow(m-12)(m+4)=0\Rightarrow m=12,\ m=-4$$

$m=12$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطهٔ تماس $(-3,-3)$ می‌شود که در ناحیهٔ اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases}y=2x^2+(m+1)x+m+6\\ y=x\end{cases}\Rightarrow 2x^2+(m+1)x+m+6=x$$

$$2x^2+mx+m+6=0\xrightarrow{\Delta=0}m^2-8(m+6)=0$$

$$m^2-8m-48=0\Rightarrow(m-12)(m+4)=0\Rightarrow m=12,m=-4$$

$$\begin{cases}m=12\Rightarrow 2x^2+12x+18=0\Rightarrow x^2+6x+9=0\Rightarrow x=-3 & (\text{غ.ق.ق})\\ m=-4\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس باید طول نقطهٔ تماس مثبت باشد. پس $x=1$ و در نتیجه $m=-4$ قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

فصل پنجم

۹۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(3,4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۹۸۲- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-9x^2+9x-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۹۸۳- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x)\geq 0$.

مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $y=x^3-x+1 \Rightarrow y'=3x^2-1 \Rightarrow \Delta=12>0$

گزینهٔ (۲) $y=x^3+x^2+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x \Rightarrow \Delta=4>0$

گزینهٔ (۳) $y=x^3+x^2-x+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x-1 \Rightarrow \Delta=16>0$

گزینهٔ (۴) $y=x^3+x^2+x-1 \Rightarrow y'=3x^2+2x+1 \Rightarrow \Delta=-8<0$

واضح است که مشتق تابع گزینهٔ (۴) یعنی عبارت $3x^2+2x+1$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۹۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow f''(x)=2x-4$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(3,5)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۹۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که همواره $3x^2-x+1>0$، پس $D_f=\mathbb{R}$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۹۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{x}}-1=\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, f'(x)=0 \Rightarrow x=4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	∄	$+$	0	$-$	

یعنی تابع f روی بازهٔ $[4,+\infty)$ نزولی است و حداقل مقدار a برابر ۴ است.

۹۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4=8x \Rightarrow x=0, x=2$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	∄	$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(0,2]$ نزولی و روی بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۹۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-1,2]$ و

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$	∄	$+$	0	$-$	∄

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(0)>0$)

پس تابع f روی بازهٔ $[-1,\frac{1}{2}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{1}{2},2]$ نزولی است. در نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

۹۸۹- گزینهٔ ۱ مشتق تابع به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۹۹۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=3x^2-2ax+3$ است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta=4a^2-36\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq a\leq 3$$

۹۹۱- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۹۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-۳x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-(۳x-۲)(x-۱)$$

$$=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

بنابراین $D_f=[۲,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{۳x^۲-۸x+۵}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}=\frac{(۳x-۵)(x-۱)}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}$$

بنابراین f' ریشه‌ای در بازهٔ $[۲,+\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۹۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-\frac{۱}{x^۲}=\frac{\sqrt[۳]{x^۴}-۳}{۳x^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۴}=۳\Rightarrow x^۴=۲۷\Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{۲۷}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[۴]{۲۷}$		۰		$\sqrt[۴]{۲۷}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-\sqrt[۴]{۲۷}]$ و $[\sqrt[۴]{۲۷},+\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $[-\sqrt[۴]{۲۷},۰)$ و $(۰,\sqrt[۴]{۲۷}]$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[۴]{۲۷}$ است.

۹۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=۲x-\frac{۸}{۲\sqrt{x+۳}}=\frac{۲x\sqrt{x+۳}-۴}{\sqrt{x+۳}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x\sqrt{x+۳}-۴=۰\Rightarrow x\sqrt{x+۳}=۲\xrightarrow{x>۰}x^۲(x+۳)=۴$$

$$x^۳+۳x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۳-۱+۳x^۲-۳=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)+۳(x-۱)(x+۱)=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+۴x+۴)=۰\Rightarrow(x-۱)(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۲(\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	-۳		۱		$+\infty$
$f'(x)$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۹۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و برای هر $x>۰$

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{۲^۶}x^{-۳}=\frac{۱}{۳^۶}x^{-۴}$$

$$۳^{-۶}x^۳=۲^{-۶}x^۴\Rightarrow x=(\frac{۲}{۳})^۶$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

x	۰		$(\frac{۲}{۳})^۶$		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	۰	$+$	

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $f'(۱)>۰$) بنابراین تابع روی بازهٔ $[۰,(\frac{۲}{۳})^۶]$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $(\frac{۲}{۳})^۶$ است.

۹۹۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow۱=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	۰	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $f'(\sqrt{۸})=-\frac{۱}{۲}$)

پس تابع f روی بازه‌های $[-۱,-\infty)$ و $[۱,+\infty)$ نزولی و روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۹۹۷- گزینهٔ ۳ تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)-\sqrt{x}}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۱-۲x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$	۰	$-$	

بنابراین ابتدا تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ صعودی، سپس در بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است.

۹۹۸- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(۱,۳)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین $f'(x)>۰$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که $(f^۲)'(x)=۲f'(x)f(x)<۰$. پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۹۹۹- گزینهٔ ۳ به جز در ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع f،

$$f'(x)=\frac{(۲ax+۲)(۳x^۲+bx+۲b)-(۶x+b)(ax^۲+۲x+b)}{(۳x^۲+bx+۲b)^۲}$$
$$=\frac{(ab-۶)x^۲+۲b(۲a-۳)x+۴b-b^۲}{(۳x^۲+bx+۲b)^۲}$$

اگر f تابعی ثابت باشد، مشتق آن صفر است. بنابراین چندجمله‌ای صورت ضابطهٔ f' باید چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. در نتیجه ضریب‌های این چندجمله‌ای صفرند:

$$ab-۶=۰,\quad ۲b(۲a-۳)=۰,\quad ۴b-b^۲=۰$$

توجه کنید که $b\neq ۰$، زیرا اگر $b=۰$، تساوی $ab-۶=۰$ درست نیست. بنابراین از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $۲a-۳=۰$، یعنی $a=\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$\frac{۳}{۲}b-۶=۰$، یعنی $b=۴$. به این ترتیب، $a+b=\frac{۱۱}{۲}$.

۱۰۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+a^۲-۲x(x+a)}{(x^۲+a^۲)^۲}=\frac{-x^۲-۲ax+a^۲}{(x^۲+a^۲)^۲}$$

اگر مشتق تابع f نامنفی باشد، آن‌گاه تابع f اکیداً صعودی است. پس باید عبارت $-x^۲-۲ax+a^۲$ نامنفی باشد:

$$-x^۲-۲ax+a^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲+۲ax-a^۲\leq ۰\Rightarrow (x+a)^۲\leq ۲a^۲$$
$$-\sqrt{۲}a\leq x+a\leq \sqrt{۲}a\Rightarrow -(\sqrt{۲}+۱)a\leq x\leq (\sqrt{۲}-۱)a$$

پس باید $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ و $(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱$ تا تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی باشد که چون a عددی مثبت است، پس $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱\Rightarrow a\geq \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\Rightarrow a\geq \sqrt{۲}+۱$$

۱۰۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow ۴x^۲(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰, x=۳$$

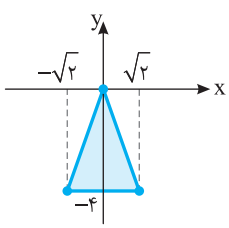
بنابراین تابع f در $x=۰$ و $x=۳$ نقطهٔ بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(۰)=۱,\quad f(۳)=-۲۶,\quad f(۰)+f(۳)=-۲۵$$

۱۰۰۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳-۸x=۴x(x^۲-۲)=۰\Rightarrow x=۰, x=\pm\sqrt{۲}$$

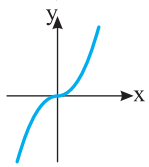
بنابراین $(۰,۰)$، $(\sqrt{۲},-۴)$ و $(-\sqrt{۲},-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با



$$\frac{۲\sqrt{۲}\times ۴}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

۱۰۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

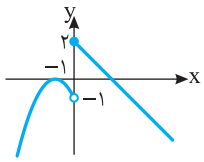
$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x\leq ۰\end{cases}$$



پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(۰)=۰$. پس $x=۰$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است.

۱۰۰۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. بنابراین $(۰,۲)$ و $(-۱,۰)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$



۱۰۰۵- گزینهٔ ۳ تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ گوشه‌ای دارد). عرض نقطهٔ بحرانی برابر است با $f(۰)=۳$.

۱۰۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\geq ۱\\ -x & ۰<x<۱\\ x^۲+۲x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & ۰<x<۱\\ ۲x+۲ & x<۰\end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases}f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(-۱)=-۱\\ f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(۲x+۲)=۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)\neq f'_-(۰)$$

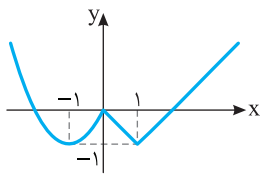
$$\begin{cases}f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}۱=۱\\ f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(-۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین نقطه‌های $(۱,-۱)$، $(۰,۰)$ و $(-۱,-۱)$ نقطه‌های بحرانی تابع f هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر -۲ است.

راه‌حل دوم نمودار تابع f به‌صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. پس $(۰,۰)$، $(۱,-۱)$ و $(-۱,-۱)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۲ است.



۱۰۰۷- گزینهٔ ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{\sqrt{x+۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{x+۱}}$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{x+۱}-۲=۰\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

پس $x=۳$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با -۵.

۱۰۰۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$.

تابع f در $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

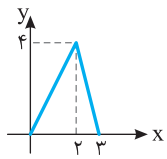
۱۰۰۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=|x^۲(x-۳)|=|x^۲||x-۳|=x^۲|x-۳|$$

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳\\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۶x & x>۳\\ -۳x^۲+۶x & x<۳\end{cases},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=۲$$

همچنین تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. پس $(۰,۰)$، $(۲,۴)$ و $(۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع‌اند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با



$$\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$

۱۰۱۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های $x=۰$، $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-x+x^۲-۱ & x\leq -۱\\ -x-x^۲+۱ & -۱<x\leq ۰\\ x-x^۲+۱ & ۰<x\leq ۱\\ x+x^۲-۱ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-۱+۲x & x<-۱\\ -۱-۲x & -۱<x<۰\\ ۱-۲x & ۰<x<۱\\ ۱+۲x & x>۱\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}, x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع f پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۱۱- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ هستند که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲ است.

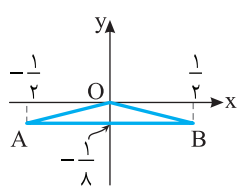
۱۰۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. از طرف دیگر

$$f'(x)=۸x^۳-۲x=۲x(۴x^۲-۱)\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=-\frac{۱}{۲}, x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقطه‌های بحرانی تابع f نقطه‌های $O(۰,۰)$، $A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB=۱,\quad OA=OB=\sqrt{\frac{۱}{۸^۲}+\frac{۱}{۲^۲}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $۱+۲\times\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}=۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$.



۱۰۱۳- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین تابع دو نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارد.

۱۰۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید $D_f=(۲,+\infty)$ و اگر $x\in D_f$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{(x-۱)(x-۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$$

بنابراین

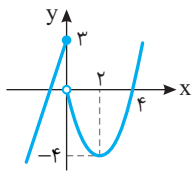
$$f'(x)=\frac{\frac{-(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۲}}}{(x^۲-۳x+۲)}=-\frac{۲x-۳}{۲(x^۲-۳x+۲)^{\frac{۳}{۲}}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

و چون $\frac{۳}{۲}$ در دامنهٔ تابع f نیست و تابع f در همهٔ نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

۱۰۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۴-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۴x-x^۲)^۲}}$. تابع f در $x=۰$ و $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=۲x+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$. تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۱۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت



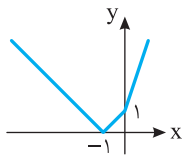
مقابل است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس $(۰,۳)$ و $(۲,-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۱ است.

۱۰۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\geq ۰\Rightarrow f(x)=|۲x+x+۱|=۳x+۱$$

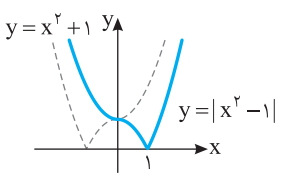
$$x\leq ۰\Rightarrow f(x)=|۲x-x+۱|=|x+۱|$$

پس نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و



این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=-۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و هیچ‌جا مشتق آن صفر نیست. پس تابع f دو نقطهٔ بحرانی دارد.

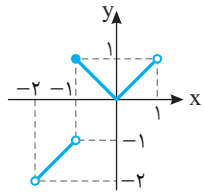
۱۰۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=|x^۲-۱|$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=|-x^۲-۱|=x^۲+۱$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۰۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x & -2<x<-1\\ -x & -1\le x<0\\ x & 0\le x<1\end{cases}$$

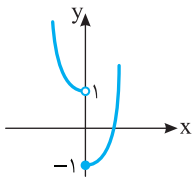
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع f در $x=0$ و $x=-1$ نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا در نقطهٔ $x=-1$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نیست و در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق‌پذیر نیست.



۱۰۲۱- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ به‌ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۰۲۲- گزینهٔ ۳ تابع f' در نقطه‌های -4، -1، ۲ و ۵ برابر صفر است و در نقطه‌های -4، -1 و ۲ تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۸ است.

۱۰۲۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که تابع فقط در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۰۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$		۱		۲		۳		۴		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	−	۰	+	۰	+	

چون $f'(3)=0$ و تغییر علامت تابع f' در نقطهٔ $x=3$ از منفی به مثبت است، پس تابع f در نقطهٔ $x=3$ مینیمم نسبی دارد.

۱۰۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^5-5x^3\Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ولی در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول‌های $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارد و حاصل‌ضرب طول آن‌ها برابر -3 است.

۱۰۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	

پس تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر $f(0)=-1$ است.

۱۰۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}},\quad f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1 & \text{(غ.ق.ق.)}\\ x=-1\end{cases}$$

پس $x=-1$ طول اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به‌صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین $f(-1)=\sqrt{2}$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۰۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}},\quad f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

پس $x=4$ طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(4)=-4$.

۱۰۲۹- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی تابع f جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f در نقطهٔ ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ ۳ مینیمم نسبی دارد. یعنی $a=3$ و $b=1$، پس $a-b=2$.

۱۰۳۰- گزینهٔ ۱ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. بنابراین $f'(1)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-a)(x+1)-(1)(x^2-ax)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1)=0\Rightarrow\frac{1+2-a}{4}=0\Rightarrow a=3$$

۱۰۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		-2		-1		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

تابع f' در نقطه‌های -2، -1 و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در نقطه‌های -2، -1 و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها -3 است.

۱۰۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=4x(x-1)(x-2)$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با $f(1)=-1$.

۱۰۳۳- گزینهٔ ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-3,\quad x=1$$

پس تابع f در نقاط $x=-3$ و $x=1$ اکسترمم نسبی دارد.

$$f(-3)f(1)=-\frac{2}{12}\times\frac{2}{4}=-\frac{1}{12}$$

۱۰۳۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(1)=-2$.

۱۰۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۰۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[\frac{1}{2},+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow 2x-1=1\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(1)=0$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	↘	min نسبی	↗	

۱۰۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^2+2ax+1$. ضریب x^2 در $f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x)\geq 0$، یعنی

$$\Delta\leq 0\Rightarrow 4a^2-4\leq 0\Rightarrow a^2\leq 1\Rightarrow -1\leq a\leq 1$$

۱۰۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=7$ مشتق‌پذیر است و برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(7)=0$. پس

$$f'(x)=a-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}\Rightarrow f'(7)=0\Rightarrow a-\frac{1}{3\sqrt[3]{8^4}}=0\Rightarrow a=\frac{1}{48}$$

۱۰۳۹- گزینهٔ ۲ چون $(-1,-1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f در نقطهٔ -1 مشتق‌پذیر است، پس $f(-1)=-1$ و $f'(-1)=0$. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$.

بنابراین

$$\begin{cases}f(-1)=-1\\ f'(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-a+b}{2}=-1\\ \frac{2a+2(-a+b)}{4}=0\end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=0$$

پس $a+b=2$.

۱۰۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{k\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(kx+1)}{x}=\frac{2kx-(kx+1)}{2x\sqrt{x}}=\frac{kx-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow kx=1\Rightarrow x=\frac{1}{k}$$

پس طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f برابر $\frac{1}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f(\frac{1}{k})=4\Rightarrow\frac{k\times\frac{1}{k}+1}{\sqrt{\frac{1}{k}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k}}}=4\Rightarrow 2\sqrt{k}=4\Rightarrow k=4$$

۱۰۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2),\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-1,x=2$$

چون f' در نقطه‌های $x=-1$ و $x=2$ تغییر علامت می‌دهد، پس نقاط $(-1,-1)$ و $(2,-28)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(2+1)^2+(-28+1)^2}=\sqrt{738}$.

۱۰۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$$

پس تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ اکسترمم نسبی دارد. حاصل‌جمع مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ را می‌خواهیم:

$$f(1)=2,f(-1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f(1)+f(-1)=\frac{8}{3}$$

۱۰۴۳- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$1=\frac{1+a}{1+b}\Rightarrow a=b\ ,\quad f(x)=\frac{x+a}{x^2+a}$$

از طرف دیگر چون تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی برابر صفر است:

$$f'(x)=\frac{x^2+a-2x(x+a)}{(x^2+a)^2}=\frac{-x^2-2ax+a}{(x^2+a)^2}$$

$$f'(1)=\frac{-1-a}{(a+1)^2}=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین $a=b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$.

۱۰۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{5x}{x^2+k^2}$$

$$f'(x)=\frac{5(x^2+k^2-2x^2)}{(x^2+k^2)^2}=\frac{5(k^2-x^2)}{(x^2+k^2)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=\pm k$$

پس نقاط $A(k,\frac{5}{2k})$ و $B(-k,\frac{-5}{2k})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با $|\frac{5}{2k}-\frac{-5}{2k}|$. بنابراین

$$|\frac{5}{k}|=10\Rightarrow|k|=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$$

۱۰۴۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f'(x)=3ax^2-b\Rightarrow f'(-1)=3a-b=0$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1)=4\Rightarrow -a+b+2=4\Rightarrow -a+b=2$$

بنابراین $a=1$ و $b=3$، در نتیجه $ab=3$.

۱۰۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳a^۲x^۲+۴ax+۱$ و چون تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس $f'(-۱)=۰$. در نتیجه

$$۳a^۲-۴a+۱=۰\Rightarrow a=۱,\quad a=\frac{۱}{۳}$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه $f'(x)=۳x^۲+۴x+۱$ و

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$$f'(x)=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x+۱$$ و

x	$-\infty$		-۳		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a=۱$ تنها مقدار ممکن برای a است.

۱۰۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(x-۳)=x\Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(۴)=۳$.

۱۰۴۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}-۱}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۱\Rightarrow x=-۱,\ x=-۳$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر است.

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

بنابراین $x=-۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $f(-۳)=۰$ است.

۱۰۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۳۶x=x(۴x^۲+۳ax+۳۶)$$

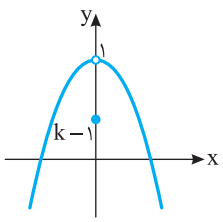
برای اینکه تابع f سه نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ در سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=۰$ سه جواب داشته باشد.

چون $x=۰$ یک جواب این معادله است، پس باید معادلهٔ $۴x^۲+۳ax+۳۶=۰$ دو جواب غیرصفر داشته باشد. پس

$$\Delta=۹a^۲-۱۶\times ۳۶>۰\Rightarrow a^۲>\frac{۳۶\times ۱۶}{۹}\Rightarrow |a|>۸$$

۱۰۵۰- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر است که نقطهٔ $(۰,k-۱)$ هرجایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطهٔ $(۰,۱)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین

$$k-۱<۱\Rightarrow k<۲$$



۱۰۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x=۳x(x-۴)=۰\Rightarrow x=۰,x=۴\ (\text{غ.ق.ق.})$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(۰)$، $f(۳)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم: $f(۰)=۰$، $f(-۱)=-۷$ و $f(۳)=-۲۷$. پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -۲۷ است.

۱۰۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(۱)=k-۲$، $f(-۱)=k+۲$ و $f(۲)=k+۲$.

پس $k+۲$ ماکزیمم مطلق و $k-۲$ مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ هستند. بنابراین

$$k+۲+k-۲=۴\Rightarrow k=۲$$

۱۰۵۳- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۲(x^۲+۱-۲x^۲)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲(۱-x^۲)}{(۱+x^۲)^۲},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

پس باید مقادیر $f(۲)$، $f(۱)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(۱)=۱$، $f(-۱)=-۱$ و $f(۲)=\frac{۴}{۵}$. پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱ و مینیمم مطلق آن برابر -۱ است و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۱ است.

۱۰۵۴- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۵x^۴-۴x^۳-۹x^۲=x^۲(۵x^۲-۴x-۹)$$

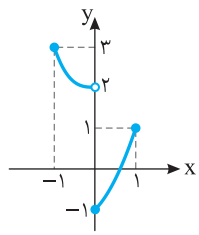
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\quad x=-۱,\quad x=\frac{۹}{۵}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-۲)$، $f(-۱)$ و $f(۱)$ را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطهٔ $x=۰$ تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار $f(۰)$ را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-۲)=-۱۵,\quad f(-۱)=۱۰,\quad f(۱)=۶$$

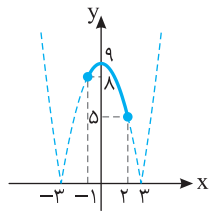
بنابراین $(-۱,۱۰)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۲,۱]$ است. بنابراین $a=-۱$، $b=۱۰$ و $a+b=۹$.

۱۰۵۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر ۱− است، پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



راه‌حل دوم تابع $y=2-x^3$ روی بازه $[-1,0)$ اکیداً نزولی است. $(y'=-3x^2<0)$ و مقادیرش در بازهٔ $[f(0),f(-1)]$ یعنی $[2,3]$ هستند. تابع $y=x^2+x-1$ روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی است $(y'=2x+1>0)$ و مقادیرش در بازهٔ $[f(0),f(1)]$ یعنی $[-1,1]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر ۱− است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۰۵۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نمودار تابع به‌صورت زیر است. مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[-1,2]$ برابر ۵ است.



راه‌حل دوم با توجه به اینکه در بازهٔ $[-1,2]$، مقدار x^2-9 منفی است، پس

$$f(x)=|x^2-9|=9-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(0)=9\ ,\quad f(-1)=8\ ,\quad f(2)=5$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[-1,2]$ برابر ۵ است.

۱۰۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & 0\le x\le 1\\ x^3+3x & -1\le x\le 0\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & 0<x<1\\ 3x^2+3 & -1<x<0\end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0)=0,\quad f(1)=-2,\quad f(-1)=-4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر ۴− است و مجموع این دو مقدار برابر ۴− است.

۱۰۵۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-(x^2+4x) & -1\le x<0\\ -(x^2-4x) & 0\le x\le 3\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-(2x+4) & -1<x<0\\ -(2x-4) & 0<x<3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که $f(-1)=3$، $f(0)=0$، $f(2)=4$ و $f(3)=3$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۰۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[0,8]$ و تابع f روی بازهٔ $(0,8)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{8-x}=\sqrt{x}\Rightarrow 8-x=x\Rightarrow x=4$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(8)$ و $f(4)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0)=\sqrt{8}\ ,\quad f(8)=\sqrt{8}\ ,\quad f(4)=4$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{8}$ به‌ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $8\sqrt{2}$ است.

۱۰۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-2,2]$ و تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=-x$$
$$\xrightarrow{x\le 0}4-x^2=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=-\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین باید $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-\sqrt{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شوند: $f(2)=2$، $f(-2)=-2$ و $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$. بنابراین $-2\sqrt{2}$ کمترین مقدار و ۲ بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۰۶۱- گزینهٔ ۴ f تابعی است که در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=3x^2-8x-3,\quad f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=-\frac{1}{3}\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(1)$، $f(3)$ و $f(4)$ را مقایسه کنیم تا مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[1,4]$ مشخص شوند:

$$f(1)=-5,\quad f(3)=-17,\quad f(4)=-11$$

بنابراین در بازهٔ داده شده ماکزیمم مطلق تابع ۵− و مینیمم مطلق آن ۱۷− است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۲ است.

۱۰۶۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=4x^3+32x,\quad f'(x)=0\Rightarrow 4x(x^2+8)=0\Rightarrow x=0$$

پس باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع را معین کنیم: $f(0)=1$، $f(1)=18$ و $f(-1)=18$. پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۰۶۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=۲+\frac{x^۲}{x+۱}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x}{(x+۱)^۲}$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=-۲ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{۱}{۲})$، $f(۰)$ و $f(۲)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲},\quad f(۰)=۲,\quad f(۲)=\frac{۱۰}{۳}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۲]$ برابر ۲ است.

۱۰۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳x^۲-۶x$. پس

$$۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰, x=۲$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ باید مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم. چون $f(۰)=a$، $f(-۱)=a-۴$ و $f(۲)=a-۴$، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر $a-۴$ است. پس

$$a-۴=۴\Rightarrow a=۸$$

۱۰۶۵- گزینهٔ ۲ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱۰x^۹-۱۰=۱۰(x^۹-۱)$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود: $f(۱)=-۸$، $f(-۱)=۱۲$ و $f(۲)=۱۰۰۵$. پس $(۱,-۸)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ است. بنابراین $a=۱$، $b=-۸$ و $a+b=-۷$.

۱۰۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۳mx^۲+۶mx$. چون

$$f''(x)=۶mx+۶m,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=-۱$$

پس تنها نقطهٔ بحرانی تابع f' نقطهٔ $x=-۱$ است و بیشترین مقدار تابع f' به‌ازای $x=-۱$ به‌دست می‌آید:

$$f'(-۱)=۱۲\Rightarrow ۳m-۶m=۱۲\Rightarrow m=-۴$$

۱۰۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۳x+۲ & ۲\le x\le ۳\\ -x^۲+۳x-۲ & ۰\le x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ۲<x<۳\\ -۲x+۳ & ۰<x<۲\end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(\frac{۳}{۲})=۰$. پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$، $f(۳)$ و $f(\frac{۳}{۲})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع به‌دست آیند: $f(۰)=-۲$، $f(۳)=۲$، $f(۲)=۰$ و $f(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۴}$. بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۰۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,۵]$ و تابع f روی بازهٔ $(۰,۵)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{۲\sqrt{۵-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۵-x}}$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۵-x}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(۵-x)=x\Rightarrow x=۴$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌دست آیند:

$$f(۰)=\sqrt{۵},\quad f(۴)=۵,\quad f(۵)=۲\sqrt{۵}$$

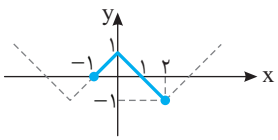
پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر است با ۵ و $\sqrt{۵}$.
بنابراین حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $۵\sqrt{۵}$ است.

۱۰۶۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۲x-\frac{۱۶}{x^۲}$، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$، پس کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۲)=۱۲$.

۱۰۷۰- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است و حداکثر مقدار تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۱ است.



۱۰۷۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=۴-x$ و در نتیجه $xy=x(۴-x)$. بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x)=۴x-x^۲$ روی بازهٔ $[۰,۱]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۴-۲x\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲ \text{ (غ.ق.ق.)}$$
$$f(۰)=۰,\quad f(۱)=۳=f_{max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

۱۰۷۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x+y+\frac{x}{۲}=۱۲۰$، یعنی $\frac{۳}{۲}x+y=۱۲۰$.

بنابراین

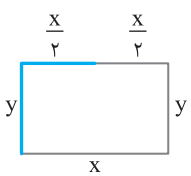
$$\text{مساحت باغچه}=xy=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۱۲۰-۳x,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۴۰$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به‌ازای $x=۴۰$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\text{مساحت باغچه}=۴۰\times ۶۰=۲۴۰۰$$



۱۰۷۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها r_1 و r_2 باشد. در این صورت

$$\text{مجموع محیط‌ها}=2\pi r_1+2\pi r_2=10\pi\Rightarrow r_1+r_2=5$$

از طرف دیگر،

$$\text{مجموع مساحت‌ها}=\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi(r_1^2+(5-r_1)^2)=\pi(2r_1^2-10r_1+25)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_1)=2r_1^2-10r_1+25$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_1)=4r_1-10\,,\quad f'(r_1)=0\Rightarrow r_1=\frac{5}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به‌دست می‌آید که $r_1=\frac{5}{2}$ و برابر است با $\frac{25}{2}$. در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل $\frac{25\pi}{2}$ است.

۱۰۷۴- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2+(x+6-3)^2}=\sqrt{5x^2+6x+9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{5x^2+6x+9}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $5x^2+6x+9>0$ و

$$f'(x)=\frac{10x+6}{2\sqrt{5x^2+6x+9}}\,,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{3}{5}$ به‌دست می‌آید.

۱۰۷۵- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ B به‌صورت (x,x^2) است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$$

اگر $y=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$، آن‌گاه $y'=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$ و در نتیجه

$$y'=0\Rightarrow 2x^3+x-3=0\Rightarrow 2(x^3-1)+(x-1)=0$$

$$(x-1)(2x^2+2x+3)=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(1,1)$ است.

۱۰۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(4,0)$ و $(0,4)$ گذشته است، پس معادله‌اش به‌صورت $y=4-x$ است. در نتیجه

$$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2(x^2-4x+8)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=2(x^2-4x+8)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=4x-8\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

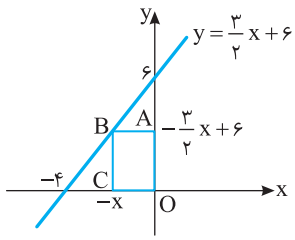
بنابراین کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۸.

۱۰۷۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ است. نقطهٔ B روی خطی است که از نقطه‌های $(-4,0)$ و $(0,6)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط $y=\frac{3}{2}x+6$ است.

بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $-\frac{3}{2}x+6$ است. به این ترتیب،

$$\text{مساحت مستطیل OABC}=x(-\frac{3}{2}x+6)$$

پس باید بیشترین مقدار تابع $y=x(-\frac{3}{2}x+6)$ را پیدا کنیم. چون $y'=-3x+6$، اگر $y'=0$، آن‌گاه $x=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل OABC به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2\times 3=6$.



۱۰۷۸- گزینهٔ ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C=100(xl)+60(2xh+2lh)=100xl+120h(x+l)$$

$$=100x(2x)+120h(x+2x)=200x^2+360xh \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{حجم مخزن}=10\Rightarrow x\times l\times h=10\Rightarrow x(2x)h=10\Rightarrow h=\frac{5}{x^2} \quad (2)$$

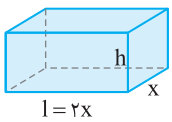
با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید

$$C(x)=200x^2+360x(\frac{5}{x^2})=200x^2+\frac{1800}{x}\,,\quad x\in(0,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم:

$$C'(x)=0\Rightarrow 400x-\frac{1800}{x^2}=0\Rightarrow\frac{400x^3-1800}{x^2}=0$$

$$400x^3-1800=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$



پس کمترین مقدار تابع C به ازای $x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ به‌دست می‌آید.

۱۰۷۹- گزینهٔ ۴ اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، آن‌گاه

هزینهٔ t ساعت حرکت: $C=2000t+(4v^2)t$

هزینهٔ x کیلومتر حرکت: $C=2000(\frac{x}{v})+4v^2(\frac{x}{v})$

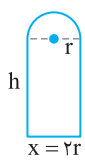
هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت: $C(v)=\frac{2000}{v}+4v$

بنابراین

$$C'(v)=-\frac{2000}{v^2}+4\,,\quad C'(v)=0\Rightarrow v^2=500\Rightarrow v=10\sqrt{5}$$

۱۰۸۰- گزینهٔ ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط}=9\Rightarrow 2h+x+\frac{1}{2}(2\pi r)=9\Rightarrow 2h+2r+\pi r=9$$



$$h=\frac{9}{2}-r-\frac{\pi r}{2}$$

مساحت پنجره: S=مساحت مستطیل+مساحت نیم‌دایره

$$S(r)=2r(\frac{9}{2}-r-\frac{\pi r}{2})+\frac{1}{2}\pi r^2=-(\frac{\pi+4}{2})r^2+9r$$

$$S'(r)=-(\pi+4)r+9\,,\quad S'(r)=0\Rightarrow r=\frac{9}{\pi+4}$$

۱۰۸۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $y=\frac{۴}{x}$ و در نتیجه $x+y=x+\frac{۴}{x}$.

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ با دامنهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲,\ x=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ باید مقادیر $f(\frac{۱}{۲})$، $f(۳)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم: $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۷}{۲}$، $f(۳)=\frac{۱۳}{۳}$ و $f(۲)=۴=f_{min}$.

پس کمترین مقدار $x+y$ برابر ۴ است.

۱۰۸۲- گزینهٔ ۲ چون $x-y=۲$، پس $y=x-۲$، در نتیجه

$$x^۳-y^۳=x^۳-(x-۲)^۳\Rightarrow f(x)=۶x^۲-۱۲x+۸\Rightarrow f'(x)=۱۲x-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱۲x-۱۲=۰\Rightarrow x=۱$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(۱)=۲$$

۱۰۸۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب برابر x و در امتداد شرق- غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy=۱۰۰۰۰$ و هزینهٔ نرده‌کشی برابر است با

$$S=۱۵۰۰۰(۲x)+۶۰۰۰(۲y)=۳۰۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰y=۳\times۱۰^۴x+\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x}$$

بنابراین $S'=۳\times۱۰^۴-\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x^۲}$ و اگر $S'=۰$، $x=۲۰۰$. بنابراین کمترین مقدار تابع S به‌ازای $x=۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰}=۵۰$.

بنابراین محیط زمین برابر است با $۲(۲۰۰+۵۰)=۵۰۰$.

۱۰۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۱$ و

$$x_۱x_۲=-(m^۲+m+۱)$$

بنابراین

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)((x_۱+x_۲)^۲-۳x_۱x_۲)$$

$$=-(۱+۳(m^۲+m+۱))=-۳m^۲-۳m-۴$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m)=-۳m^۲-۳m-۴$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(m)=-۶m-۳,\quad f'(m)=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{m\to-\infty} f(m)=\lim_{m\to+\infty} f(m)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱۳}{۴}$$

۱۰۸۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار تابع $۲y=x^۲$ باشد. در این صورت مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(x,\frac{x^۲}{۲})$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}$$

اگر $y=\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}$، آن‌گاه

$$y'=\frac{x-۴+x(\frac{x^۲}{۲}-۱)}{\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}}=\frac{\frac{x^۳}{۲}-۴}{\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow x=۲$$

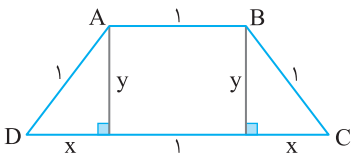
بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(۲,۲)$ است.

۱۰۸۶- گزینهٔ ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیهٔ فیثاغورس $y^۲+x^۲=۱$، پس $y=\sqrt{۱-x^۲}$. در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}y(۱+۱+۲x)=y(۱+x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{-x(۱+x)}{\sqrt{۱-x^۲}}+\sqrt{۱-x^۲}=\frac{-۲x^۲-x+۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\quad x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و در این صورت $CD=۲$.



۱۰۸۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\text{حجم استوانه}=۲\text{lit}=۲۰۰۰\text{cm}^۳\Rightarrow \pi r^۲h=۲۰۰۰\Rightarrow h=\frac{۲۰۰۰}{\pi r^۲}$$

$$\text{مساحت کل استوانه}=S=\text{مساحت قاعده}+\text{سطح جانبی}$$

$$S(r)=\pi r^۲+۲\pi rh=\pi r^۲+۲\pi r(\frac{۲۰۰۰}{\pi r^۲})=\pi r^۲+\frac{۴۰۰۰}{r}$$

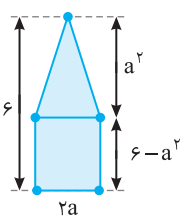
پس

$$S'(r)=۲\pi r-\frac{۴۰۰۰}{r^۲},\quad S'(r)=۰\Rightarrow r=\sqrt[۳]{\frac{۲۰۰۰}{\pi}}$$

۱۰۸۸- گزینهٔ ۳ این پنج‌ضلعی از یک مستطیل به ابعاد $۲a$، $a^۲-۶$ و یک مثلث به ارتفاع $a^۲$ و قاعدهٔ $۲a$ تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن برابر است با $S(a)=۲a(۶-a^۲)+\frac{۱}{۲}a^۲(۲a)=۱۲a-a^۳$. بنابراین

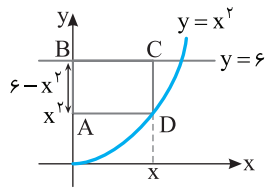
$$S'(a)=۱۲-۳a^۲,\quad S'(a)=۰\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=۲,\quad a=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

پس نقطهٔ $(۲,۱۶)$، نقطهٔ ماکزیمم تابع S است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت پنج‌ضلعی برابر ۱۶ است.



۱۰۸۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض آن برابر $x^۲$ است. به این ترتیب عرض نقطهٔ A هم برابر $x^۲$ است و در نتیجه $AB=۶-x^۲$. بنابراین محیط مستطیل $ABCD=۲(x+۶-x^۲)$. اگر $y=۲(x+۶-x^۲)$، آن‌گاه $y'=۲-۴x$ و در نتیجه $y'=۰$، پس $x=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل ABCD به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(\frac{۱}{۲}+۶-\frac{۱}{۴})=\frac{۲۵}{۲}$.



۱۰۹۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+۳$ است، پس عرض آن برابر $-x+۳$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+۳$ است و چون این نقطه روی خط $y=x+۵$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با $-(-x+۳)-۵$، یعنی $-x-۲$. به این ترتیب،

$$BC=x-(-x-۲)=۲x+۲$$

در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل ABCD}=BC\times CD=(۲x+۲)(-x+۳)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=(۲x+۲)(-x+۳)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=۲(-x+۳)+(-۱)(۲x+۲)=-۴x+۴\ ,\quad y'=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۴\times۲=۸$.

۱۰۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $y=۴-x$ و چون $y<۰$، پس $x>۴$ و باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x)=x^۲+(۴-x)^۳\ ,\quad x\in(۴,+\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x)=۲x-۳(۴-x)^۲=-۳x^۲+۲۶x-۴۸$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۶, x=\frac{۸}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x\to۴^+} f(x)=۱۶,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\quad f(۶)=۲۸$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۰۹۲- گزینهٔ ۳ چون $۲x+y=۸$، پس $y=۸-۲x$ و

$$xy^۳=x(۸-۲x)^۳=۸x(۴-x)^۳$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۸x(۴-x)^۳$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۸(۴-x)^۳-۲۴x(۴-x)^۲=۳۲(۴-x)^۲(۱-x)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۴, x=۱$$

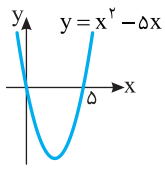
چون تابع f' در $x=۴$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=۱$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(۱)=۲۱۶$$

۱۰۹۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید نقطهٔ $P(x,y)$ باشد. چون نقطهٔ P روی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۵x$ است، پس نقطهٔ P به صورت $(x,x^۲-۵x)$ است و مجموع مختصات P برابر است با $x+x^۲-۵x=x^۲-۴x$.



البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $۰<x<۵$.

به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-۴x$ را روی بازهٔ $(۰,۵)$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲x-۴,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۴-۸=-۴$.

۱۰۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{۱}{۲}(۵-x)(۱۲+x^۲+۸x+۴)=\frac{۱}{۲}(۵-x)(x^۲+۸x+۱۶)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(۵-x)(x^۲+۸x+۱۶)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{۱}{۲}(x^۲+۸x+۱۶)+(۵-x)(x+۴)=-\frac{۳}{۲}x^۲-۳x+۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲, x=-۴\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که به‌ازای $x=-۴$، طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}(۳)(۳۶)=۵۴$.

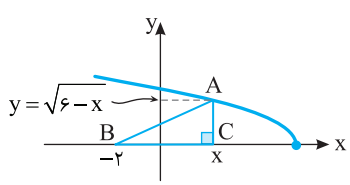
۱۰۹۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{۶-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{۶-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{۶-x}$. از طرف دیگر، $BC=x+۲$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث ABC}=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}+\frac{۱}{۲}(x+۲)\frac{-۱}{۲\sqrt{۶-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}=\frac{x+۲}{۴\sqrt{۶-x}}\Rightarrow ۶-x=\frac{x+۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$



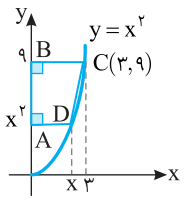
۱۰۹۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر $x^۲$ است. در نتیجه، عرض نقطهٔ A نیز برابر $x^۲$ است. از طرف دیگر عرض نقطهٔ B برابر عرض نقطهٔ C است، پس عرض نقطهٔ B برابر ۹ است. به این ترتیب، $BA=۹-x^۲$. بنابراین

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ ABCD}=\frac{۱}{۲}AB(BC+AD)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$$

اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۳}{۲}(۳+x)(۱-x)$، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱ \quad (x>۰ \text{ که توجه کنید})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با



$$\frac{۱}{۲}(۹-۱)(۳+۱)=۱۶$$

۱۰۹۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث x و y باشند. در این صورت $x^۲+y^۲=۴$. از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$ را پیدا کنیم $(۰<x<۲)$. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۲}-\frac{x^۲}{۲\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=\frac{x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}\Rightarrow ۴-x^۲=x^۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۰$، پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱$.

۱۰۹۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید (x,y) نقطه‌ای روی خط $y=۴x+۲$ باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۴x+۲)^۲}=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x)=\frac{۳۴x+۱۶}{۲\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۸}{۱۷}$$

پس $y=۴x+۲=\frac{۲}{۱۷}$، یعنی نقطهٔ مورد نظر $(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۲}{۱۷})$ است.

۱۰۹۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ A هم برابر $-x$ است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۳+۸$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر است با $۸-x^۳$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث OAB}=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$$

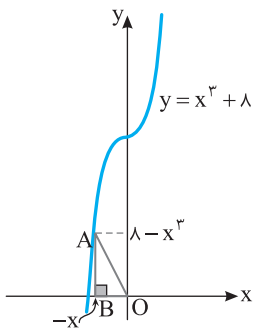
اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$، آن‌گاه $f(x)=۴x-\frac{x^۴}{۲}$، پس $f'(x)=۴-۲x^۳$.

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به‌دست می‌آید که $x=\sqrt[۳]{۲}$ و برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}(۶)=۳\sqrt[۳]{۲}$$



۱۱۰۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۲+۱$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر $x^۲+۱$ است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر $x^۲+۱$ است و در نتیجه

$$CD=۷-(x^۲+۱)=۶-x^۲$$

بنابراین $\text{مساحت مستطیل ABCD}=x(۶-x^۲)$.

اگر $f(x)=x(۶-x^۲)$، آن‌گاه $f(x)=۶x-x^۳$، در نتیجه

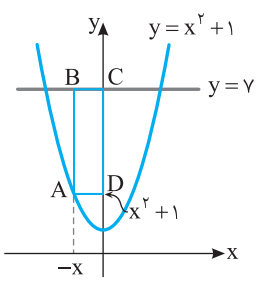
$$f'(x)=۶-۳x^۲$$

پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt{۲} \quad (x>۰ \text{ که توجه کنید})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید و برابر است با

$$\sqrt{۲}\times۴=۴\sqrt{۲}$$



۱۱۰۱- گزینهٔ ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x+۸=۴(x-۱)(x^۲+x-۲)=۴(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x_۱=۱,\quad x_۲=-۲$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗		↗	

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۱۰۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $(۱,-۲)$ روی نمودار تابع است، پس $f(۱)=-۲$، درنتیجه $a+b=-۲$. همچنین

$$f'(x)=-\frac{a}{x^۲}+۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} -a+۲b=۰ \xrightarrow{a+b=-۲}$$

$$۳b=-۲\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}, a=-\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{۴}{۳}(\frac{۱-x^۳}{x^۲})$.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$		↗	max	↘	

پس نقطهٔ $(-۲,۱)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. ریاضی - ۸۹

۱۱۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}(x-۱)^۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۱)^۲+۲(x-۱)x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\frac{(x-۱)^۲}{\sqrt[۳]{x}}+۲(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۲(x-۱)^۲+۶x(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(x-۱)(x-۱+۳x)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۲(x-۱)(۴x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\Rightarrow x=۱, x=\frac{۱}{۴}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۴}$		۱		$+\infty$
$۲(x-۱)(۴x-۱)$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$\sqrt[۳]{x}$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

با توجه به جدول، $x=\frac{۱}{۴}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x=۳$ جواب معادلهٔ $f'(x)=۰$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x)=ax^۴+۲x^۳+bx^۲$$

$$f'(x)=۴ax^۳+۶x^۲+۲bx=۲x(۲ax^۲+۳x+b)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\quad ۲ax^۲+۳x+b=۰$$

پس $x=۳$ باید جواب معادلهٔ $۲ax^۲+۳x+b=۰$ باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از $x=۰$ داشته باشد. بنابراین

$$x=۰\Rightarrow ۰+۰+b=۰\Rightarrow b=۰,\quad x=۳\Rightarrow ۱۸a+۹+۰=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

تجربی - ۹۲

۱۱۰۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۶x^۲+x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۷x^۲-۲۸}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و در نقطه‌های $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق آن صفر است. پس مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع f به‌صورت $\{-۲,۰,۲\}$ است. تجربی - ۸۳

۱۱۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین، $f(x)=|x||x^۲-۱|$. بنابراین نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ نیز نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر، $f(x)=\begin{cases}x^۳-x & -۱\le x\le ۰\\ -x^۳+x & ۰\le x\le ۱\\ x^۳-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & -۱<x<۰\\ -۳x^۲+۱ & ۰<x<۱\\ ۳x^۲-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$$. در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد. ریاضی - ۹۰

۱۱۰۷- گزینهٔ ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی هستند. از طرف دیگر، $f(x)=\begin{cases}x^۳-x & -۲\le x\le -۱\\ -x^۳+x & -۱\le x\le ۱\\ x^۳-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & -۲<x<-۱\\ -۳x^۲+۱ & -۱<x<۱\\ ۳x^۲-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۱۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x+۵\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۶x-۹$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳(x^۲-۲x-۳)=۰\Rightarrow ۳(x+۱)(x-۳)=۰$$

$$x=-۱,\ x=۳\ (\text{غ.ق.ق.})$$

اکنون مقادیر $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شود: $f(-2)=3$، $f(2)=-17$ و $f(-1)=10$.

پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است. تجربی - ۹۲

۱۱۰۹- گزینهٔ ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازهٔ $(-4,3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x \Rightarrow f'(x)=x^2-2x-15$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-5)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3, x=5$$

$x=5$ در بازهٔ مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=-\frac{64}{3}+44=\frac{68}{3}=22/\overline{6}$$

$$f(-3)=-\frac{27}{3}-9+45=-18+45=27$$

$$f(3)=\frac{27}{3}-9-45=-45$$

پس $f(-3)=27$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(3)=-45$ مینیمم مطلق تابع داده شده در بازهٔ مورد نظر است. تجربی - ۹۵

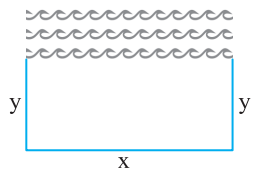
۱۱۱۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر،

$$x+2y=88 \Rightarrow x=88-2y$$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:

$$S(y)=(88-2y)y=-2y^2+88y$$

$$S'(y)=-4y+88=0 \Rightarrow y=22 \Rightarrow S_{max}=968m^2$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۱۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x=0$ جزء دامنهٔ تابع نیست و تنها باید $x=x_0$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همهٔ مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_0$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد. خارج از کشور ریاضی - ۸۹

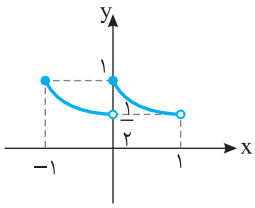
۱۱۱۲- گزینهٔ ۲ چون $x-[x]<1$، $0\le x-[x]$، پس $-1<f(x)\le 0$، بنابراین از اینکه تابع $g(x)=2^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-1)<g(f(x))\le g(0) \Rightarrow \frac{1}{2}<(gof)(x)\le 1$$

پس تابع gof مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازهٔ $(-1,1]$ توجه کنید.

$$-1\le x<0 \Rightarrow f(x)=-1-x \Rightarrow (gof)(x)=2^{-x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$0\le x<1 \Rightarrow f(x)=-x \Rightarrow (gof)(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$



ریاضی - ۹۱

۱۱۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x & x\le -\sqrt{3} \\ -x^3+3x & -\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3} \\ x^3-3x & x\ge \sqrt{3} \end{cases}$$

پس $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & x<-\sqrt{3} \\ -3x^2+3 & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \\ 3x^2-3 & x>\sqrt{3} \end{cases}$. در نتیجه

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ت ن	$-$	0	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۱۱۴- گزینهٔ ۳ اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.

خارج از کشور ریاضی ۹۰

۱۱۱۵- گزینهٔ ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطهٔ اکسترمم نسبی c موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$، پس گزینهٔ (۱) نیز عبارتی درست است. گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا هر نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x)=x^3$. ریاضی - ۹۰

۱۱۱۶- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{x^2-(x^2+1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

پس تابع f' ریشه ندارد و در همهٔ نقاط دامنهٔ f، تابع مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد. خارج از کشور ریاضی ۹۰

۱۱۱۷- گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=(x-1)|(x-1)(x+2)|$، $x=-2$ ریشهٔ ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=1$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی است. اکنون توجه کنید که

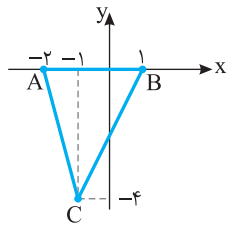
$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)\ge 0 \\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow ((x-1)^2(x+2))'=0$$

$$2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=(x-1)(3x+3)=0 \Rightarrow x=1,-1$$

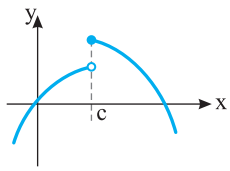
پس نقطهٔ بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-۱$ است. بنابراین
نقاط بحرانی: $A(-۲,۰)\ ,\ B(۱,۰)\ ,\ C(-۱,-۴)$

در نتیجه $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times$ ارتفاع $\times$ قاعده $=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$.



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۱۱۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینهٔ (۴) درست است، زیرا با توجه به اینکه تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=c$ تعریف شده است، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی - ۸۸

۱۱۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\sqrt[۳]{x^۳}-\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^۳-x^۲\le x^۳$، پس $\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}\le\sqrt[۳]{x^۳}$ و در نتیجه $f(x)\ge۰$. از طرف دیگر $f(۰)=۰$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی - ۹۲

۱۱۲۰- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین $m=f'(x)=-x^۲+۴x-۱$.
بیشترین مقدار $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m'=-۲x+۴\xrightarrow{m'=۰}x=۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y-f(۲)=۳(x-۲)\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۳x-۶$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=۰\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۰-۶\Rightarrow y=-\frac{۸}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۱۱۲۱- گزینهٔ ۲ طول پاره‌خط AB برابر است با $(a-1)-(2a+1)$. بنابراین

$$AB=2a+1-a+1=5\Rightarrow a=3$$

پس طول پاره‌خط BC برابر است با

$$BC=(5a-2)-(2a+1)=3a-3=6$$

۱۱۲۲- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2+(a\sqrt{3})^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=\sqrt{4a^2}=2|a|=6$$

بنابراین $a=\pm 3$.

۱۱۲۳- گزینهٔ ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+m}{2},\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط $2y+3x-1=0$ است، پس

$$2(\frac{-3m+1}{2})+3(\frac{2+m}{2})-1=0\Rightarrow -3m+1+3+\frac{3m}{2}-1=0$$

$$-\frac{3m}{2}=-3\Rightarrow m=2$$

بنابراین M نقطهٔ $(\frac{2+2}{2},\frac{-3\times 2+1}{2})$، یعنی $(2,-\frac{5}{2})$ است.

۱۱۲۴- گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است. در نتیجه

$$\frac{3}{k}\times\frac{-(k-5)}{2}=-1\Rightarrow 3(k-5)=2k\Rightarrow k=15$$

۱۱۲۵- گزینهٔ ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر -1 است:

$$m_{AB}=\frac{6-4}{7-4}=\frac{2}{3},\quad m_{BC}=\frac{4-a^2}{4-2a}$$

توجه کنید که اگر $a=2$، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست نیست. بنابراین $a\neq 2$ و در نتیجه $m_{BC}=\frac{2+a}{2}$. به این ترتیب

$$m_{AB}\times m_{BC}=-1\Rightarrow\frac{2}{3}(\frac{2+a}{2})=-1\Rightarrow a=-5$$

۱۱۲۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** وسط پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-3,10)$ و $(-9,-2)$ نقطهٔ $(\frac{-3-9}{2},\frac{10-2}{2})$، یعنی $(-6,4)$ است. چون نقطهٔ $(-1,2m)$ روی عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است، پس حاصل‌ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(-1,2m)$ و $(-6,4)$ می‌گذرد و شیب خطی که از نقطه‌های $(-3,10)$ و $(-9,-2)$ می‌گذرد برابر -1 است:

$$\frac{2m-1-4}{4m+6}\times\frac{10+2}{-3+9}=-1\Rightarrow\frac{2m-5}{4m+6}\times 2=-1\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم چون نقطهٔ $P(4m,2m-1)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $A(-3,10)$ و $B(-9,-2)$ است، پس

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(4m+3)^2+(2m-1-10)^2}=\sqrt{(4m+9)^2+(2m-1+2)^2}$$

$$(4m+3)^2+(2m-11)^2=(4m+9)^2+(2m+1)^2$$

$$16m^2+24m+9+4m^2-44m+121=16m^2+72m+81+4m^2+4m+1$$

$$96m=48\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

۱۱۲۷- گزینهٔ ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادلهٔ خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $(-1,2)$ بگذرد می‌نویسیم:

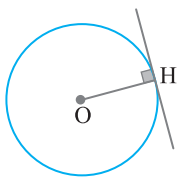
$$y-2=2(x+1)\Rightarrow y=2x+4\Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

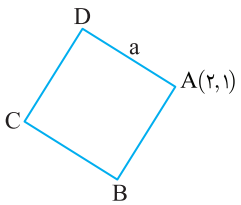
۱۱۲۸- گزینهٔ ۴ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $6x+8y+1=0$ است: $R=\frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}}=\frac{1}{10}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با

$$S=\pi R^2=\frac{\pi}{100}$$



۱۱۲۹- گزینهٔ ۲ چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط داده شده صدق نمی‌کنند، پس $y=2x-1$ معادلهٔ AD و AB نیست. پس یا معادلهٔ BC است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,1)$ تا خط $y=2x-1$ را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$2x-y-1=0,\quad a=\frac{|4-1-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

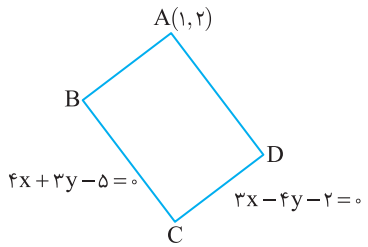


بنابراین مساحت مربع ABCD برابر است با $S=a^2=\frac{4}{5}$.

۱۱۳۰- گزینهٔ ۳ رأس A روی هیچ‌کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبهٔ طول و عرض مستطیل کافی است فاصلهٔ A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB=\frac{|4+6-5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{5}{5}=1,\quad AD=\frac{|3-8-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{7}{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S=1\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$.



۱۱۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|۲m-(m-۱)|=|m+۱|$$
$$BC=|x_C-x_B|=|۳m+۱-۲m|=|m+۱|$$

بنابراین

$$۲|m+۱|-|m+۱|=۳\Rightarrow|m+۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}m+۱=۳\Rightarrow m=۲\\m+۱=-۳\Rightarrow m=-۴\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -۲.

۱۱۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$
$$a^۲-a+\frac{۱}{۴}+۴a^۲+۱۲a+۹=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow ۵a^۲+۱۱a+۶=۰$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله، یعنی $-\frac{۱۱}{۵}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

۱۱۳۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطهٔ وسط پاره‌خط AC همان نقطهٔ وسط پاره‌خط BD است.

بنابراین $(\frac{-۲+x}{۲},\frac{-۳+y}{۲})=(\frac{۷-x-۱}{۲},\frac{۲-y+۳}{۲})$. در نتیجه

$$-۲+x=۶-x\Rightarrow x=۴,\quad -۳+y=۵-y\Rightarrow y=۴$$

یعنی C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

راه‌حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB\|CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow\frac{-۳-۲+y}{-۲-۷+x}=\frac{y-۳}{x+۱}\Rightarrow\frac{-۵+y}{-۹+x}=\frac{y-۳}{x+۱}$$
$$-۵x-۵+yx+y=-۹y+۲۷+xy-۳x\Rightarrow -x+۵y=۱۶$$

به همین ترتیب،

$$AD\|BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}\Rightarrow\frac{-۳-۳}{-۲+۱}=\frac{۲-y-y}{۷-x-x}$$
$$۶=\frac{۲-۲y}{۷-۲x}\Rightarrow ۴۲-۱۲x=۲-۲y\Rightarrow ۶x-y=۲۰$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}-x+۵y=۱۶\\۶x-y=۲۰\end{cases}$ به دست می‌آید $x=۴$ و $y=۴$.

بنابراین C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

۱۱۳۴- گزینهٔ ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۶,-۱)$ و $(-۳,-۲)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۶+۳}{-۱+۲}=۹$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{۱}{۹}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $-\frac{۱}{۹}$ است و از نقطهٔ $(۰,-۵)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-(-۵)=-\frac{۱}{۹}(x-۰)\Rightarrow x+۹y+۴۵=۰$$

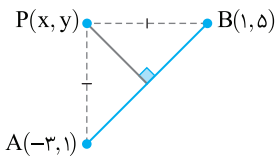
۱۱۳۵- گزینهٔ ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$. پس شیب ارتفاع CH برابر -۱ است، زیرا $CH\perp AB$. اکنون معادلهٔ خطی را که از رأس C با شیب -۱ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-y_C=m_{CH}\times(x-x_C)\Rightarrow y+۱=-(x-۳)\Rightarrow y=-x+۲$$

۱۱۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطهٔ $M(-۱,۳)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمودمنصف برابر -۱ است. در نتیجه معادلهٔ این خط به‌صورت $y-۳=-۱(x+۱)$ یا به طور ساده‌تر $x+y=۲$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x,y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۵)^۲}$$
$$(x+۳)^۲+(y-۱)^۲=(x-۱)^۲+(y-۵)^۲$$
$$x^۲+۶x+۹+y^۲-۲y+۱=x^۲-۲x+۱+y^۲-۱۰y+۲۵$$
$$۸x+۸y=۱۶\Rightarrow x+y=۲$$



۱۱۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر -۲ است.

بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)$$
$$y-۲=-۲(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+۴$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ H کافی است محل تقاطع دو خط $y=-۲x+۴$ و $۲x-۴y+۱=۰$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}y=-۲x+۴\\۲x-۴y+۱=۰\end{cases}\xrightarrow{y=-۲x+۴}۲x-۴(-۲x+۴)+۱=۰$$
$$۱۰x=۱۵\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-۲(\frac{۳}{۲})+۴\Rightarrow y=۱$$

پس H نقطهٔ $(\frac{۳}{۲},۱)$ است.

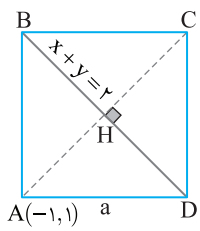
۱۱۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، اندازهٔ AH را حساب می‌کنیم:

$$AH=\frac{|-۱+۱-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^۲+a^۲=(۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow ۲a^۲=۸$$
$$a^۲=۴\Rightarrow a=۲$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۱۱۳۹- گزینهٔ ۴ چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{۲}=-۳$، پس $a=۶$. اگر دو طرف معادلهٔ خط دوم را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $۶x+۲y+۲k=۰$ درمی‌آید. چون فاصلهٔ این دو خط $\sqrt{۱۰}$ است، پس

$$\frac{|۲k+۶|}{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{k>۰}\frac{۲k+۶}{\sqrt{۴۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=۷$$

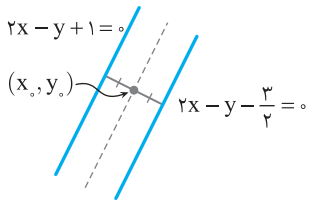
بنابراین $a+k=۱۳$.

۱۱۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ خط دوم را به صورت $۲x-y-\frac{۳}{۲}=۰$ می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی خط مورد نظر باشد. فاصلهٔ این نقطه از دو خط باید برابر باشد

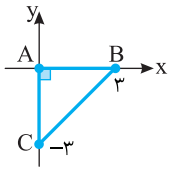
$$\frac{|۲x_۰-y_۰+۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow|۲x_۰-y_۰+۱|=|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|$$

$$\begin{cases}۲x_۰-y_۰+۱=۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱=-\frac{۳}{۲}\ (غ.ق.ق.)\\ ۲x_۰-y_۰+۱=-۲x_۰+y_۰+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴x_۰-۲y_۰-\frac{۱}{۲}=۰\end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در معادلهٔ $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ صدق می‌کنند، یعنی معادلهٔ خط مورد نظر $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ است.



۱۱۴۱- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مقابل واضح است که $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=AC=۳$. بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



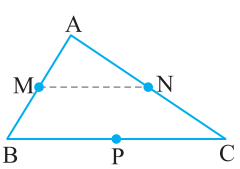
۱۱۴۲- گزینهٔ ۱ چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-۱-۴}{-۲-۵}=\frac{۵}{۷}$$

معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ با شیب $\frac{۵}{۷}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+۴=\frac{۵}{۷}(x+۳)\Rightarrow ۷y=۵x-۱۳$$

پس معادلهٔ خطی که BC روی آن قرار دارد، $۷y=۵x-۱۳$ است.



۱۱۴۳- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

بنابراین طول میانهٔ BM برابر است با

$$BM=\sqrt{(m-۳)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۴}$$

چون $BM=۲$، پس

$$\sqrt{(m-۳)^۲+۴}=۲\Rightarrow(m-۳)^۲+۴=۴\Rightarrow(m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۱۱۴۴- گزینهٔ ۲ خط $۳x+y=۴$ بر خط $x-ay=۷$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$-۳\times\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

خط $x-۳y=۷$ بر خط $bx+۲y=-۵$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها نیز -۱ است:

$$\frac{۱}{۳}\times(-\frac{b}{۲})=-۱\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $a+b=۹$.

۱۱۴۵- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ H وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H=\frac{۱-۳}{۲}=-۱,\quad y_H=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

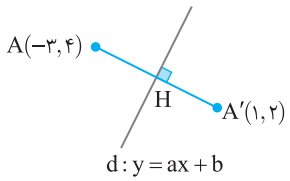
با توجه به شکل زیر مختصات نقطهٔ H در معادلهٔ خط $y=ax+b$ صدق می‌کنند. پس

$$۳=a(-۱)+b\Rightarrow b=a+۳$$

از طرف دیگر عکس و قرینهٔ شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a، شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{۲-۴}{۱-(-۳)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۵$ و در نتیجه $ab=۱۰$.



۱۱۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۸۰},\quad AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۸۵}$$

واضح است که تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۵}=۱۰$$

۱۱۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا خط‌ها را به‌صورت $۲x-y+k=۰$ و $x-۲y-۱=۰$ می‌نویسیم. اکنون اگر فاصلهٔ A از دو خط به‌ترتیب برابر AH و AH' باشد، آن‌گاه

$$AH=\frac{|۲k+۱+k|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۳k+۱|}{\sqrt{۵}},\quad AH'=\frac{|k+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|k+۱|}{\sqrt{۵}}$$

$$AH=۲AH'\Rightarrow|۳k+۱|=۲|k+۱|\Rightarrow\begin{cases}۳k+۱=۲k+۲\Rightarrow k=۱\\ ۳k+۱=-۲k-۲\Rightarrow k=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

۱۱۴۸- گزینهٔ ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط $(۰,۱)$ و $(۲,۰)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ آن $y-۰=\frac{۰-۱}{۲-۰}(x-۲)$ یا $x+۲y-۲=۰$ است. طول ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصلهٔ A از BC است: $\frac{|۲\times۴-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$.

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۴\times\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$.

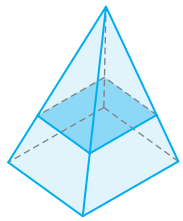
۱۱۴۹- گزینهٔ ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC=\sqrt{(۵-۳)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

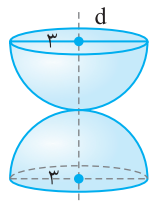
معادلهٔ خط گذرنده از نقاط B و C به‌صورت $y-۳=\frac{۴-۳}{۵-۳}(x-۳)$ یا $x-۲y-۳=۰$ است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصلهٔ A از خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|۲(۱)-(-۷)-۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{۶}{\sqrt{۵}}\times\sqrt{۵}=۶$.

۱۱۵۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ خطهای موازی $۳x+۴y+۶=۰$ و $۳x+۴y-۶=۰$ برابر است با $\frac{|۶+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$. در نتیجه، چون مساحت مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

۱۱۵۱- گزینهٔ ۳ همان‌گونه که در شکل مقابل دیده می‌شود، سطح مقطع حاصل یک مربع است.



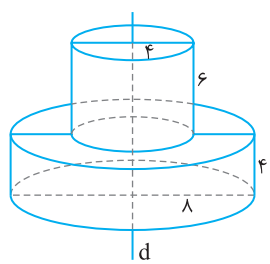
۱۱۵۲- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو نیم‌کره هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم آن برابر است با $۲\times\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times۳^۳\right)\right)=۳۶\pi$.



۱۱۵۳- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۲ و ارتفاع ۴ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۴ از آن حذف شده است. بنابراین حجم آن برابر است با $\pi\times۱۲^۲\times۴-\pi\times۲^۲\times۴=۵۶۰\pi$.

۱۱۵۴- گزینهٔ ۳ از دوران هر نیم‌دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود. پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

۱۱۵۵- گزینهٔ ۴ جسم مورد نظر از دو استوانه درست شده است. یکی به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با $\pi\times۸^۲\times۴+\pi\times۴^۲\times۶=۳۵۲\pi$.

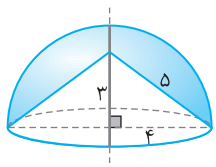


۱۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس شعاع ربع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$۵^۲=۳^۲+r^۲\Rightarrow r=۴$$

جسم حاصل نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با

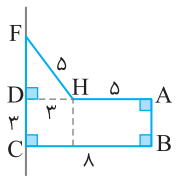
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times۴^۳\right)-\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=\frac{۸۰\pi}{۳}$$

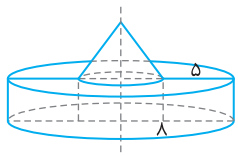


۱۱۵۷- گزینهٔ ۳ به شکل زیر توجه کنید. برای به‌دست آوردن FD از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

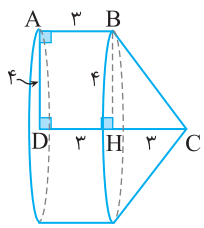
$$FD^۲=FH^۲-DH^۲\Rightarrow FD=\sqrt{۲۵-۹}=۴$$

بنابراین جسم مورد نظر از یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با $\pi\times۸^۲\times۳+\frac{\pi\times۳^۲\times۴}{۳}=۲۰۴\pi$.





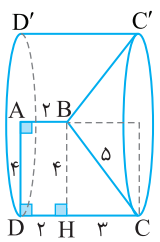
۱۱۵۸- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ به آن اضافه شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر است با $\pi\times۴^۲\times۳+\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=۶۴\pi$.



۱۱۵۹- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید. برای به‌دست آوردن HC از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$HC^۲=BC^۲-BH^۲\Rightarrow HC=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$$

بنابراین جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم حاصل برابر است با $\pi\times۴^۲\times۵-\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=۶۴\pi$.

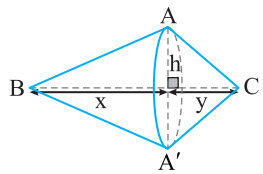


۱۱۶۰- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده درست شده است. شعاع قاعدهٔ هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع BC مثلث ABC است. اگر ارتفاع‌های آن‌ها برابر x و y باشد، آن‌گاه $x+y=BC=۶$. اکنون توجه کنید که

$$S_{ABC}=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}h\times BC=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}h\times۶=۱۲\Rightarrow h=۴$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\frac{\pi h^۲x}{۳}+\frac{\pi h^۲y}{۳}=\frac{\pi h^۲}{۳}(x+y)=\frac{\pi\times۴^۲\times۶}{۳}=۳۲\pi$$



۱۱۶۱- گزینهٔ ۲ مرکز بیضی وسط پاره‌خط FF′، یعنی نقطهٔ $(\frac{۶+۶}{۲},\frac{۴-۲}{۲})$ است، که می‌شود نقطهٔ $(۶,۱)$.

۱۱۶۲- گزینهٔ ۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر ۲a است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=\sqrt{(-۶+۶)^۲+(۵-۰)^۲}+\sqrt{(-۶-۶)^۲+(۵-۰)^۲}$$
$$=۵+۱۳=۱۸$$

پس طول قطر بزرگ بیضی برابر ۱۸ است.

۱۱۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طبق فرض،

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳\ ,\quad ۲b=۳\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۹=\frac{۹}{۴}+c^۲\Rightarrow c=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

به این ترتیب، فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $۲c=۳\sqrt{۳}$.

راه‌حل دوم چون $a^۲=b^۲+c^۲$، پس $۴a^۲=۴b^۲+۴c^۲$. در نتیجه $(۲a)^۲=(۲b)^۲+(۲c)^۲$. پس

$$۶^۲=۳^۲+(۲c)^۲\Rightarrow(۲c)^۲=۲۷\Rightarrow۲c=۳\sqrt{۳}$$

۱۱۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۲c=FF'=۶$، پس $c=۳$. طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است، پس $۲a=۱۰$، یعنی $a=۵$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۲۵=b^۲+۹\Rightarrow b=۴$$

در نتیجه، طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۸$.

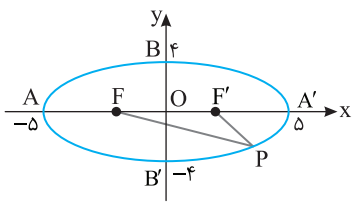
۱۱۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث }PFF'=(PF+PF')+FF'=۲a+۲c$$

از طرف دیگر $a=OA'=۵$ و $b=OB=۴$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۵^۲=۴^۲+c^۲\Rightarrow c=۳$$

بنابراین محیط مثلث PFF′ برابر است با $۲a+۲c=۱۶$.



۱۱۶۶- گزینهٔ ۳ محل برخورد خط $y=۲x+۴$ با محور x نقطهٔ $(-۲,۰)$ است. پس F نقطهٔ $(-۲,۰)$ است. در نتیجه $c=OF=۲$. محل برخورد خط $y=۲x+۴$ با محور y نقطهٔ $(۰,۴)$ است، پس $b=OB=۴$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲=۲۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $۲a=۴\sqrt{۵}$.

۱۱۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=FO=F'O=۲$ و در نتیجه $a=AO=۳+۲=۵$. بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۵}$.

۱۱۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است. بنابراین $۲a=۱۶$، پس $a=۸$. از طرف دیگر، خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{c}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۶۴=b^۲+۱۶\Rightarrow b^۲=۴۸\Rightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

طول قطر کوچک بیضی برابر ۲b است، پس برابر است با $۸\sqrt{۳}$.

راه‌حل دوم چون $a=۸$ و $e=\frac{۱}{۲}$، پس

$$e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{۶۴}}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=۱-\frac{b^۲}{۶۴}\Rightarrow b^۲=۴۸\Rightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۸\sqrt{۳}$.

۱۱۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=OF=۱۲$ و چون $۲b=۱۸$، پس $b=۹$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}$.

۱۱۷۰- گزینهٔ ۱ نقطه‌های F′ و B به ترتیب محل برخورد خط $y=-۲x+۱$ با محور x و محور y هستند. بنابراین F′ نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۰)$ و B نقطهٔ $(۰,۱)$ است. در نتیجه $b=OB=۱$ و $c=OF'=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$.

۱۱۷۱- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر ۲a است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۰$، پس $a=۵$.
فاصلهٔ هر سر قطر کوچک بیضی تا هر یک از کانون‌های بیضی برابر a است. پس $B'F'=a=۵$.

۱۱۷۲- گزینهٔ ۳ طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است، پس $۲a=AA'=۸$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر ۲a است. در نتیجه $MF+MF'=NF+NF'=۲a=۸$.
بنابراین محیط چهارضلعی FMF′N برابر است با $۸+۸=۱۶$.

۱۱۷۳- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $۲c$. بنابراین $۲c=۸$، یعنی $c=۴$. طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b$. بنابراین $۲b=۴$، یعنی $b=۲$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲=۴+۱۶=۲۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $۴\sqrt{۵}$.

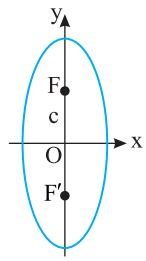
۱۱۷۴- گزینهٔ ۳ طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به‌ترتیب برابر $۲a$ و $۲b$ هستند. بنابراین

$$۲a=۱۲\Rightarrow a=۶,\quad ۲b=۱۰\Rightarrow b=۵$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۶^۲=۵^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۱۱}$$

بنابراین $OF'=c=\sqrt{۱۱}$، در نتیجه کانون‌های بیضی نقطه‌های $(۰,\sqrt{۱۱})$ و $(۰,-\sqrt{۱۱})$ هستند.



۱۱۷۵- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۲۶$، $a=۱۳$.

همین‌طور، $۲b=BB'=۲۴$، پس $b=۱۲$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۳^۲=۱۲^۲+c^۲\Rightarrow c=۵$$

در نتیجه $AF=a-c=۱۳-۵=۸$.

۱۱۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور x از وسط پاره‌خط FF' می‌گذرد و بر آن عمود است. بنابراین BB' قطر کوچک بیضی مورد نظر است. در نتیجه $BF=BF'=a$. اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFF' بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BF^۲+BF'^۲=FF'^۲\Rightarrow a^۲+a^۲=۸^۲\Rightarrow ۲a^۲=۶۴\Rightarrow a=۴\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $۲a=۸\sqrt{۲}$.

۱۱۷۷- گزینهٔ ۳ از شرط‌های مسئله نتیجه می‌شود که قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی روی محورهای مختصات هستند. بنابراین $b=\sqrt{۱۳}$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۴$، پس $a=۷$.

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴۹=۱۳+c^۲\Rightarrow c=۶$$

بنابراین، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۶}{۷}$.

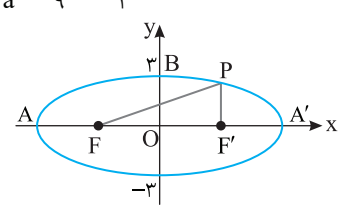
۱۱۷۸- گزینهٔ ۱ چون محور y عمودمنصف FF' است، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است. در نتیجه $b=OB=۳$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۱۸\Rightarrow a=۹$$

در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۹^۲=۳^۲+c^۲\Rightarrow c=۶\sqrt{۲}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۹}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

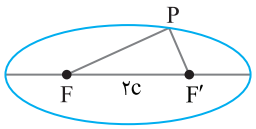


۱۱۷۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$، پس $c=\frac{a}{۲}$ و $۲b=۱۲$، پس $b=۶$، بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۳۶+\frac{a^۲}{۴}\Rightarrow a=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین $c=\frac{a}{۲}=۲\sqrt{۳}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=PF+PF'+FF'=۲a+۲c=۱۲\sqrt{۳}$$



۱۱۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=OF=۵$، پس $FF'=۲c=۱۰$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $۲a$. در نتیجه $PF+PF'=۲a$. اکنون توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'\Rightarrow ۲۴=۲a+۱۰\Rightarrow a=۷$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۵}{۷}$.

۱۱۸۱- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=KF+KF'=۱۳+۷=۲۰\Rightarrow a=۱۰$$

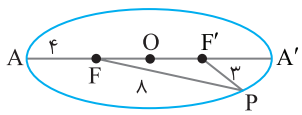
از طرف دیگر، فاصلهٔ هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی تا کانون‌های بیضی برابر a است، پس $BF'=۱۰$.

۱۱۸۲- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۸+۳=۱۱$$

از طرف دیگر $AA'=۲a$ و $A'F'=AF=۴$، پس

$$FF'=AA'-AF-A'F'=۱۱-۴-۴=۳$$



۱۱۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲a=AA'=۱۰$، پس $a=۵$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$PF+PF'=۲a\Rightarrow ۴+PF'=۱۰\Rightarrow PF'=۶$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PFF'

$$PF^۲+FF'^۲=PF'^۲\Rightarrow ۱۶+FF'^۲=۳۶\Rightarrow FF'=۲\sqrt{۵}$$

۱۱۸۴- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۱+۵=۱۶$، پس $a=۸$.

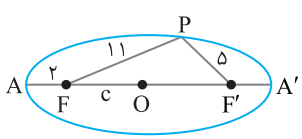
اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$AO=AF+FO\Rightarrow a=۲+c\Rightarrow ۸=۲+c\Rightarrow c=۶$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۶۴=b^۲+۳۶\Rightarrow b=۲\sqrt{۷}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۴\sqrt{۷}$.



۱۱۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $BF=BF'=a$، پس $2a=20$، یعنی $a=10$. از طرف دیگر، $c=OF'=OA'-F'A'=10-4=6$. اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 100=b^2+36\Rightarrow b=8$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b=16$.

۱۱۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2b=BB'=6\Rightarrow b=3\quad ,\quad 2a=AA'=8\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 4^2=3^2+c^2\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF'، $\cos\alpha=\frac{OF'}{BF'}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

۱۱۸۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. همچنین، $FF'=2c$. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'=2a+2c$$

$$18=2(a+c)\Rightarrow a+c=9$$

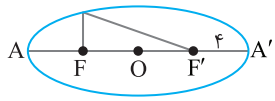
از طرف دیگر، اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$A'O=A'F'+F'O\Rightarrow a=4+c\Rightarrow a-c=4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=(a-c)(a+c)=36\Rightarrow b=6$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b=12$.



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن b، از رابطهٔ $AF'=a+c$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$2a=AA'=AF'+F'A'\Rightarrow 2a=9+4=13$$

$$a=\frac{13}{2}\xrightarrow{a+c=9}c=\frac{5}{2}$$

بنابراین $b=\sqrt{(\frac{13}{2})^2-(\frac{5}{2})^2}=6$، پس $2b=12$.

۱۱۸۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله $\frac{2a}{2b}=\frac{13}{12}$، پس $\frac{a}{b}=\frac{13}{12}$، یعنی $b=\frac{12}{13}a$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2=(\frac{12}{13}a)^2+c^2\Rightarrow a^2-\frac{144}{169}a^2=c^2$$

$$\frac{25}{169}a^2=c^2\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}$ و چون $\frac{2a}{2b}=\frac{13}{12}$، پس $\frac{b}{a}=\frac{12}{13}$، بنابراین

$$e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\sqrt{\frac{169-144}{169}}=\frac{5}{13}$$

۱۱۸۹- گزینهٔ ۴ نقطه‌های A و B به ترتیب محل برخورد خط $2x-3y+6=0$ با محور x و محور y هستند. بنابراین A نقطهٔ $(-3,0)$ و B نقطهٔ $(0,2)$ است. بنابراین $a=OA=3$ و $b=OB=2$. در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 3^2=2^2+c^2\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

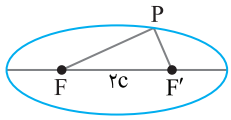
بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

۱۱۹۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$، پس $c=\frac{a}{3}$ و $2b=8$، پس $b=4$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=16+\frac{a^2}{9}\Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

بنابراین $c=\frac{a}{3}=\sqrt{2}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=PF+PF'+FF'=2a+2c=8\sqrt{2}$$



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن a و c از $e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3}=\sqrt{1-\frac{16}{a^2}}\Rightarrow\frac{1}{9}=1-\frac{16}{a^2}\Rightarrow\frac{8}{9}=\frac{16}{a^2}\Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

از طرفی $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$، پس $c=\sqrt{2}$.

۱۱۹۱- گزینهٔ ۲ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ (α,β) و شعاعش r است به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $(x+1)^2+(y-3)^2=5$ است.

۱۱۹۲- گزینهٔ ۳ اندازهٔ شعاع دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$. بنابراین $r=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-3)^2-4(-3)}=\frac{5}{2}$.

۱۱۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(2x-1)^2+(2y+3)^2=k+1\Rightarrow 4(x-\frac{1}{2})^2+4(y+\frac{3}{2})^2=k+1$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{k+1}{4}$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\sqrt{\frac{k+1}{4}}$ است. پس

$$\sqrt{\frac{k+1}{4}}=5\Rightarrow\frac{k+1}{4}=25\Rightarrow k+1=100\Rightarrow k=99$$

۱۱۹۴- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطه‌های $(-1,3)$ و $(2,5)$ است، پس $r=\sqrt{(2+1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}$. به این ترتیب، چون مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-1,3)$ است، معادله‌اش به‌صورت زیر است:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=13\Rightarrow x^2+y^2+2x-6y-3=0$$

۱۱۹۵- گزینهٔ ۳ برای اینکه $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره باشد باید $a^2+b^2-4c>0$، در نتیجه باید $k^2+2^2>4\times 3$، بنابراین $k^2>8$ و در نتیجه $|k|>2\sqrt{2}$.

۱۱۹۶- گزینهٔ ۳ مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

$A(2,-2)$: $4+4-8-12=-12<0$, $B(4,0)$: $16+0-16+0=0$

$C(3,1)$: $9+1-12+6=4>0$, $D(1,-2)$: $1+4-4-12=-11<0$

بنابراین A و D درون دایره، B روی دایره و C بیرون دایره است.

۱۱۹۷- گزینهٔ ۲ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ از نقطهٔ $A(۳,-۲)$ است، در نتیجه $r=OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}=۲$. پس معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴$ است. مختصات نقاط برخورد این دایره با محورهای مختصات به صورت زیر به دست می‌آیند:

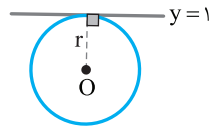
$$x=۰\Rightarrow ۱+(y+۲)^۲=۴\Rightarrow (y+۲)^۲=۳\Rightarrow y=-۲\pm\sqrt{۳}$$

$$y=۰\Rightarrow (x-۱)^۲+۴=۴\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$$

سه نقطهٔ برخورد عبارت‌اند از:

$$(۰,-۲+\sqrt{۳}),\quad (۰,-۲-\sqrt{۳}),\quad (۱,۰)$$

۱۱۹۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $O(-\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})$، یعنی $O(-۲,-۱)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از این خط است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲,-۱)$ از خط $y-۱=۰$ برابر $\frac{|-۱-۱|}{۱}=۲$ است. شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۲^۲-۴k}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}$. در نتیجه



$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}=۲\Rightarrow \sqrt{۲۰-۴k}=۴\Rightarrow k=۱$$

راه‌حل دوم چون خط $y=۱$ بر دایره مماس است، اگر در معادلهٔ دایره قرار دهیم $y=۱$، باید معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس

$$۳+k=۴\Rightarrow k=۱$$

۱۱۹۹- گزینهٔ ۴ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین شیب خطی که از مرکز و نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد (یعنی خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(۳,۵)$ روی آن قرار دارد) برابر است با $\frac{۵-۲}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$. چون خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس m باشد،

$$m\times\frac{۳}{۲}=-۱\Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}$$

بنابراین خط مماس خطی است که شیب آن $-\frac{۲}{۳}$ است، از نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۵=-\frac{۲}{۳}(x-۳)\Rightarrow ۲x+۳y=۲۱$$

۱۲۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴y=۵$ مرکز نقطهٔ $O(۰,-\frac{۴}{۲})$، یعنی $O(۰,-۲)$ و شعاع برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۴^۲-۴(-۵)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۲۰}=۳$$

همچنین در دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$ مرکز نقطهٔ $O'(۲,-۱)$ و شعاع برابر $r'=۳$ است. بنابراین $OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$، $r+r'=۳+۳=۶$ و $r-r'=۰$. پس $r-r'<OO'<r+r'$ و در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند.

۱۲۰۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ دایرهٔ موردنظر به‌صورت $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲^۲$ است که به‌صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱=۰$$

۱۲۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا دو طرف معادلهٔ دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا به‌صورت $x^۲+y^۲+۲x-۳y-\frac{۳}{۴}=۰$ نوشته شود. بنابراین مرکز این دایره نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۳}{۲})$ یعنی $(-۱,\frac{۳}{۲})$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲-۴(-\frac{۳}{۴})}=۲$$

۱۲۰۳- گزینهٔ ۴ مرکز دایره نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-b)$ است. بنابراین

$$-\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۴,\quad -b=-۴\Rightarrow b=۴$$

پس معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲-۴x+۸y=۵$ است و شعاع آن برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۸^۲-۴(-۵)}=۵$.

۱۲۰۴- گزینهٔ ۴ در معادلهٔ دایره جملهٔ شامل xy وجود ندارد. بنابراین ضریب xy باید صفر باشد، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر، در معادلهٔ دایره ضریب جمله‌های شامل $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. اگر طرفین معادلهٔ داده شده را بر ۶ تقسیم کنیم، معادلهٔ $x^۲+\frac{۲a-b}{۶}y^۲+\frac{۲}{۳}x-\frac{۵}{۶}=۰$ به‌دست می‌آید. بنابراین $\frac{۲a-b}{۶}=۱$، یعنی $۲a-b=۶$. اکنون توجه کنید که

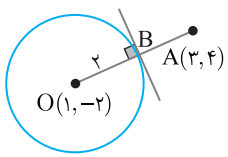
$$\begin{cases} a+b=۰ \\ ۲a-b=۶ \end{cases}\Rightarrow a=۲, b=-۲\Rightarrow a-b=۴$$

۱۲۰۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر معادلهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y+a=۰$ مربوط به یک دایره باشد، باید $۴^۲+(-۲)^۲>۴a$، پس $a<۵$. اکنون اگر مختصات نقطهٔ $A(-۱,۲)$ را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل، عددی مثبت شود:

$$x^۲+y^۲+۴x-۲y+a>۰\xrightarrow{x=-۱,\ y=۲}۱+۴-۴-۴+a>۰\Rightarrow a>۳$$

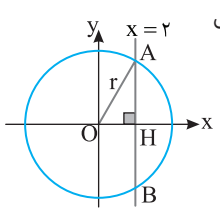
بنابراین $۳<a<۵$.

۱۲۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ A بیرون دایره قرار دارد. مطابق شکل، کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره مربوط به پاره‌خط AB است. بنابراین



$$OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}\xrightarrow{OB=r=۲}AB=۲\sqrt{۱۰}-۲$$

۱۲۰۷- گزینهٔ ۳ با نمادگذاری شکل زیر $AB=۴\sqrt{۳}$، پس $AH=۲\sqrt{۳}$ و در نتیجه $r=\sqrt{OH^۲+AH^۲}=\sqrt{۲^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=۴$. از طرف دیگر شعاع دایره برابر $\sqrt{۳k+۱}$ است. پس



$$r=\sqrt{۳k+۱}=۴\Rightarrow k=۵$$

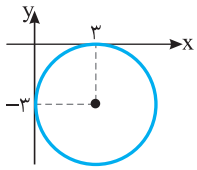
۱۲۰۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{۴}{۲})$، یعنی $(-۱,-۲)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از این خط است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,-۲)$ از خط $x=-۴$ برابر ۲ است و شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۲^۲-۴k}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}$.

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}=۲\Rightarrow\sqrt{۲۰-۴k}=۴\Rightarrow k=۱$$

راه‌حل دوم اگر در معادلهٔ دایره قرار دهیم $x=-۴$، معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس معادلهٔ $y^۲+۲y+k=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. در نتیجه $k=۱$.

۱۲۰۹- گزینهٔ ۱ از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۳,-۳)$ است.



۱۲۱۰- گزینهٔ ۳ اگر دو دایره مماس بیرونی باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر مجموع شعاع‌های آن‌هاست. مرکز دایره‌ها نقطه‌های $(۳,-۵)$ و $(۷,-۲)$ و شعاع آن‌ها ۷ و r است. بنابراین $\sqrt{(۳+۲)^۲+(-۵-۷)^۲}=۱۳$. $۷+r=۱۳$ پس $r=۶$.

۱۲۱۱- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۶}{۲})$، یعنی نقطهٔ $(۳,-۱)$ است. قطر مورد نظر از مبدأ می‌گذرد، پس معادله‌اش به صورت $y=mx$ است و چون مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۳,-۱)$ روی این قطر است، پس $m(۳)=-۱$، یعنی $m=-\frac{۱}{۳}$. بنابراین معادلهٔ این قطر به صورت $y=-\frac{۱}{۳}x$، یعنی $۳y+x=۰$ است.

۱۲۱۲- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+(۲a)^۲-۴(-۹)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲+۳۶}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲+۳۶}=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\sqrt{۵a^۲+۳۶}=۹\Rightarrow۵a^۲+۳۶=۸۱\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+۳x+۶y-۹=۰$ است که مرکز آن نقطهٔ $(-\frac{۶}{۲},-\frac{۳}{۲})$، یعنی نقطهٔ $(-۳,-\frac{۳}{۲})$ است.

۱۲۱۳- گزینهٔ ۳ در معادلهٔ گستردهٔ دایره باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند. پس

$$a=۲a+۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$-x^۲-y^۲-x+y=-۱\Rightarrow x^۲+y^۲+x-y-۱=۰$$

پس شعاع دایرهٔ برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱+۴}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۲۱۴- گزینهٔ ۴ مرکز دایره وسط پاره‌خط بین دو سر قطر است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{-۸}{۲},-\frac{-۴}{۲})$، یعنی $(۴,۲)$ است. اگر سر دیگر قطر مورد نظر نقطهٔ (x,y) باشد، وسط این قطر نقطهٔ $(\frac{x-۳}{۲},\frac{y+۲}{۲})$ است. بنابراین

$$(\frac{x-۳}{۲},\frac{y+۲}{۲})=(۴,۲)\Rightarrow\frac{x-۳}{۲}=۴,\quad\frac{y+۲}{۲}=۲$$

بنابراین $x=۱۱$ و $y=۲$. پس نقطهٔ مورد نظر $(۱۱,۲)$ است.

۱۲۱۵- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. چون مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند، پس $۹+۳b+c=۰$، $۴۹+۷b+c=۰$ و $۱-a+c=۰$. از معادله‌های اول و دوم $b=-۱۰$ و $c=۲۱$ به دست می‌آید. بنابراین از معادلهٔ سوم $a=۲۲$ به دست می‌آید. اکنون توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ یعنی نقطهٔ $(-۱۱,۵)$ است.

۱۲۱۶- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل مقداری منفی شود:

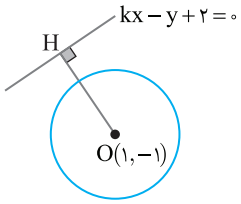
$$x^۲+y^۲+ax+y-۱<۰\xrightarrow{x=۲,y=-۱}۴+۱+۲a-۱-۱<۰$$

$$۲a<-۳\Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

۱۲۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که نقطهٔ $(-۱,۱)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر ۳ است. چون دایره و خط متقاطع نیستند، پس یا خط بر دایره مماس است یا خارج آن قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره نیست. مطابق شکل زیر $OH=\frac{|k+۱+۲|}{\sqrt{k^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|k+۳|}{\sqrt{k^۲+۱}}\geq ۳$. بنابراین

$$(k+۳)^۲\geq۹(k^۲+۱)\Rightarrow k^۲+۶k+۹-۹k^۲-۹\geq۰$$

$$-۸k^۲+۶k\geq۰\Rightarrow k(۴k-۳)\leq۰\Rightarrow۰\leq k\leq\frac{۳}{۴}$$

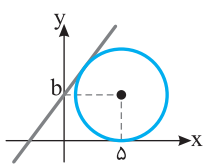


۱۲۱۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,b)$ باشد. در این صورت از روی شکل زیر معلوم است که شعاع این دایره برابر b است. از طرف دیگر، فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس $۴x-۳y+۱۲=۰$ برابر شعاع دایره است. پس

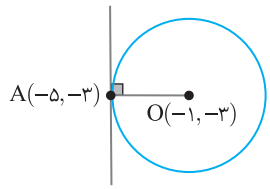
$$\frac{|۴\times۵-۳b+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=b\Rightarrow|۳۲-۳b|=۵b$$

$$۳۲-۳b=۵b\Rightarrow b=۴,\quad ۳۲-۳b=-۵b\Rightarrow b=-۱۶\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,۴)$ و شعاع آن هم ۴ است، پس معادله‌اش $(x-۵)^۲+(y-۴)^۲=۱۶$ است.



۱۲۱۹- گزینهٔ ۱ نقطهٔ $O(-\frac{۲}{۲},-\frac{۶}{۲})$، یعنی $O(-۱,-۳)$ مرکز دایره است. مطابق شکل زیر شیب OA برابر است با $\frac{-۳+۳}{-۵+۱}=۰$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره که عمود بر خط OA است، تعریف نمی‌شود و این خط موازی محور y است و معادلهٔ آن به‌صورت $x=-۵$ است. پس $a=۱$ و $b=۰$ و در نتیجه $a+b=۱$.



۱۲۲۰- گزینهٔ ۱ اگر دو دایره مماس درونی باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر قدرمطلق تفاضل شعاع‌های آن‌هاست. مراکز دایره‌ها نقطه‌های $(۱,۲)$ و $(-۲,۶)$ و شعاع‌های آن‌ها ۶ و r است. بنابراین $|۶-r|=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۲-۶)^۲}=۵$، پس

$$\begin{cases} ۶-r=-۵\Rightarrow r=۱۱ \\ ۶-r=۵\Rightarrow r=۱ \end{cases}$$

۱۲۲۱- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ داده‌شده نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۶}{۲})$، یعنی $(-۱,۳)$ است. شعاع این دایره هم برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۶)^۲-۴(-۶)}=۴$.

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۱,۳)$ و شعاعش برابر ۲ است. در نتیجه معادله‌اش به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۴$ است.

۱۲۲۲- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ داده شده، یعنی نقطهٔ $(-۱,۳)$ باید روی خط $۲x+by-۷=۰$ باشد. در نتیجه

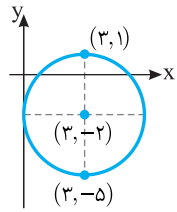
$$-۲+۳b-۷=۰\Rightarrow b=۳$$

۱۲۲۳- گزینهٔ ۴ محل برخورد دو خط داده‌شده، مرکز دایره است. بنابراین مختصات مرکز دایره جواب‌های دستگاه معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases} x+y=۶ \\ x+۲y=۴ \end{cases}\Rightarrow x=۸, y=-۲$$

بنابراین شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۸,-۲)$ از نقطهٔ $(۶,۲)$ است. پس شعاع دایره $=\sqrt{(۸-۶)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۲۰}$.

۱۲۲۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ $(-\frac{۴}{۲},-\frac{-۶}{۲})$، یعنی $(-۲,۳)$ مرکز دایره است و اندازهٔ شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۴^۲-۴(۴)}=۳$ است. مطابق شکل زیر، بیشترین و کمترین مقدار عرض نقاط روی دایره مربوط به نقاط $(۳,۱)$ و $(۳,-۵)$ است. پس حاصل‌ضرب کمترین و بیشترین مقدار y برابر -۵ است.



۱۲۲۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $mx-y=۰$ برابر شعاع دایره، یعنی $\sqrt{۵}$ است. بنابراین

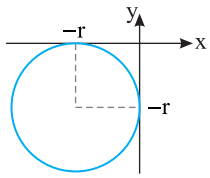
$$\frac{|۳m-۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}=\sqrt{۵}\Rightarrow(۳m-۴)^۲=۵(m^۲+۱)$$
$$۹m^۲-۲۴m+۱۶=۵m^۲+۵$$
$$۴m^۲-۲۴m+۱۱=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}\ ,\ m=\frac{۱۱}{۲}$$

راه‌حل دوم برای اینکه خط $y=mx$ بر دایرهٔ $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۵$ مماس باشد، باید معادلهٔ زیر ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$(x-۳)^۲+(mx-۴)^۲=۵\Rightarrow(۱+m^۲)x^۲-۲(۳+۴m)x+۲۰=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta=۰}۴(۳+۴m)^۲-۸۰(۱+m^۲)=۰\Rightarrow۴m^۲-۲۴m+۱۱=۰$$
$$m=\frac{۱}{۲},\quad m=\frac{۱۱}{۲}$$

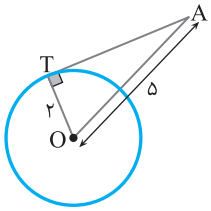
۱۲۲۶- گزینهٔ ۴ اگر شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر r باشد، از روی شکل زیر معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-r,-r)$ است. چون $r=۳$، پس مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۳,-۳)$ و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-(-۳))^۲+(y-(-۳))^۲=۹\Rightarrow x^۲+y^۲+۶x+۶y+۹=۰$$



۱۲۲۷- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $O(۱,-۲)$ و شعاعش برابر $r=۲$ است. از طرف دیگر $OA=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTA:

$$AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}\Rightarrow AT=\sqrt{۲۵-۴}\Rightarrow AT=\sqrt{۲۱}$$

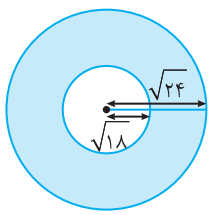


۱۲۲۸- گزینهٔ ۱ در معادلهٔ دایره y را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$x^۲+۰+۳x+۰-۴=۰\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۴, x=۱$$

بنابراین $AB=۱-(-۴)=۵$.

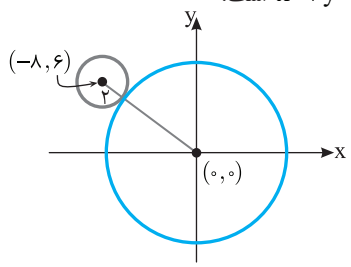
۱۲۲۹- گزینهٔ ۳ ناحیهٔ $x^۲+y^۲<۲۴$ ناحیهٔ درون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۴$ و ناحیهٔ $x^۲+y^۲>۱۸$ ناحیهٔ بیرون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۸$ است. این دایره‌ها هم‌مرکزاند و شعاع آن‌ها $\sqrt{۲۴}$ و $\sqrt{۱۸}$ است. بنابراین مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل زیر $\pi(\sqrt{۲۴})^۲-\pi(\sqrt{۱۸})^۲=۶\pi$.



۱۲۳۰- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ $(x+۸)^۲+(y-۶)^۲=۴$ نقطهٔ $(-۸,۶)$ و شعاعش برابر ۲ است. اگر دایره‌ای با این دایره مماس بیرونی باشد، طول خط‌المرکزین این دایره‌ها برابر با مجموع شعاع‌های آن‌هاست. توجه کنید که

$$\text{طول خط‌المرکزین}=\sqrt{(۰-(-۸))^۲+(۰-۶)^۲}=۱۰$$

در نتیجه، اگر شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر r باشد، باید $r+۲=۱۰$، یعنی $r=۸$. معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاعش برابر ۸ است به‌صورت $x^۲+y^۲=۶۴$ است.



۱۲۳۱- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ دایره، ضریب جمله‌های شامل $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. بنابراین ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $۳k-۲$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $۳k-۲\neq ۰$):

$$x^۲+\frac{k+۲}{۳k-۲}y^۲+\frac{۴k}{۳k-۲}x-\frac{۸k}{۳k-۲}y-\frac{۱۶}{۳k-۲}=۰$$

بنابراین $\frac{k+۲}{۳k-۲}=۱$، پس $k=۲$ و معادلهٔ دایره می‌شود

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$$

و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲-۴(-۴)}=۳$$

۱۲۳۲- گزینهٔ ۲ چون مرکز دایره روی خط $y=۲x$ و در ناحیهٔ اول است، پس به‌صورت $(k,۲k)$ است $(k>۰)$. چون دایرهٔ مورد نظر از مبدأ مختصات می‌گذرد و شعاعش $۲\sqrt{۵}$ است، پس فاصلهٔ مرکزش از مبدأ مختصات برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\sqrt{(k-۰)^۲+(۲k-۰)^۲}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{k^۲+۴k^۲}=۲\sqrt{۵}$$
$$|k|=۲\Rightarrow k=۲$$

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۲,۴)$ و شعاعش $۲\sqrt{۵}$ است، در نتیجه معادله‌اش به‌صورت $(x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است.

۱۲۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون مرکز دایره روی محور y است، پس مختصات آن به‌صورت $O(۰,\alpha)$ است. فرض کنید شعاع دایره r باشد. نقطه‌های $A(۰,-۱)$ و $B(۳,۰)$ روی دایره قرار دارند، پس $r=OA=OB$.

از طرف دیگر $OB=\sqrt{۹+\alpha^۲}$ و $OA=\sqrt{(\alpha+۱)^۲}$.

بنابراین

$$\alpha^۲+۲\alpha+۱=۹+\alpha^۲\Rightarrow\alpha=۴$$

و در نتیجه $r=OA=\sqrt{۵^۲}=۵$.

راه‌حل دوم اگر معادلهٔ گستردهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، مرکزش نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است که چون روی محور y است، پس $-\frac{a}{۲}=۰$، یعنی $a=۰$.

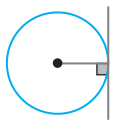
بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲+by+c=۰$ در می‌آید. چون نقطه‌های $(-۱,۰)$ و $(۳,۰)$ روی این دایره‌اند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ این دایره صدق می‌کنند:

$$\begin{cases}(۳,۰):۹+c=۰\\(۰,-۱):۱-b+c=۰\end{cases}$$

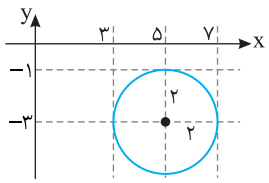
پس $c=-۹$ و $b=-۸$. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲-۸y-۹=۰$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(-۸)^۲-۴(-۹)}=۵$$

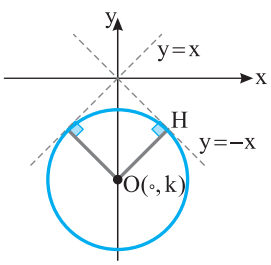
۱۲۳۴- گزینهٔ ۴ اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۷,۲)$ و شعاع آن برابر r است. از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ $(۷,۲)$ تا خط $۴x-۳y+۸=۰$ برابر است با $\frac{|۴\times۷-۳\times۲+۸|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۳۰}{۵}=۶$. بنابراین $r=۶$.



۱۲۳۵- گزینهٔ ۲ شعاع دایرهٔ مورد نظر نصف فاصلهٔ خط‌های $x=۳$ و $x=۷$ است. چون این فاصله برابر ۴ است، پس شعاع دایرهٔ مورد نظر ۲ است. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که طول مرکز دایره برابر ۵ و عرض آن برابر -۳ است، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,-۳)$ است. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۵)^۲+(y+۳)^۲=۴$ است.



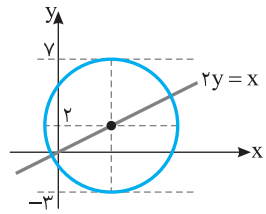
۱۲۳۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر مرکز دایره باید روی محور y باشد. اگر $O(۰,k)$ مرکز دایره باشد، آن‌گاه $r=OH=\frac{|۰+k|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|k|}{\sqrt{۲}}=۲$. پس $|k|=۲\sqrt{۲}$ و چون k منفی است، $k=-۲\sqrt{۲}$.



۱۲۳۷- گزینهٔ ۲ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $x+۲y+۴=۰$ است. بنابراین $r=\frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۳\sqrt{۵}$. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۴۵\Rightarrow x^۲+y^۲-۶x-۸y-۲۰=۰$$

۱۲۳۸- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با نصف فاصلهٔ خط‌های $y=-۳$ و $y=۷$ است. فاصلهٔ این خط‌ها برابر است با $۷-(-۳)=۱۰$، پس شعاع دایره برابر ۵ است. عرض مرکز دایره روی خطی موازی با خطوط $y=۷$ و $y=-۳$ است و از این دو خط به یک فاصله است، یعنی روی خط $y=\frac{۷-۳}{۲}=۲$ قرار دارد، در نتیجه طول مرکز دایره برابر است با $x=۲y=۴$، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۴,۲)$ و شعاع آن برابر ۵ است. در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$ است.



۱۲۳۹- گزینهٔ ۳ چون دایره‌ها متقاطع‌اند، طول خط‌المرکزین آن‌ها از مجموع شعاع‌های دایره‌ها کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاع‌ها بیشتر است:

$$|r-۲|<\sqrt{(۱-(-۳))^۲+(۰-r)^۲}<r+۲$$

$$|r-۲|<\sqrt{۱۶+r^۲}<r+۲$$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} r^۲-۴r+۴<۱۶+r^۲<r^۲+۴r+۴\Rightarrow -۴r<۱۲<۴r$$

نابرابری سمت چپ همواره درست است و نابرابری سمت راست یعنی اینکه $r>۳$.

۱۲۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقاط A و B در معادلهٔ هر دو دایره صدق می‌کنند. پس مختصات این نقاط از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۳x+۱=۰ & (۱) \\ x^۲+y^۲+۳y+۱=۰ & (۲) \end{cases}$$

اگر معادلهٔ (۲) را از معادلهٔ (۱) کم کنیم، به معادلهٔ $۳x-۳y=۰$ می‌رسیم. بنابراین نقاط A و B روی خط $y=x$ قرار دارند و باید نقاط تقاطع این خط و یکی از دایره‌ها را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} y=x \\ x^۲+y^۲+۳x+۱=۰ \end{cases}\Rightarrow x^۲+x^۲+۳x+۱=۰$$

$$۲x^۲+۳x+۱=۰\Rightarrow x=-۱, x=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ را به‌دست بیاوریم:

$$AB=\sqrt{(-۱+\frac{۱}{۲})^۲+(-۱+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۴۱- گزینهٔ ۳ معادلهٔ خط دوم را به شکل $۲x-۲y+۲=۰$ می‌نویسیم. طول ضلع مربع برابر فاصلهٔ دو خط موازی $۲x-۲y-۳=۰$ و $۲x-۲y+۲=۰$ است. در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{|-۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$.

تجربی - ۹۲

۱۲۴۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,a-۱)$ که روی خط $y=x-۱$ قرار دارد از خط $۲x-۳y-۵=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد. در این صورت

$$\frac{|۲a-۳(a-۱)-۵|}{\sqrt{۴+۹}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow|-a-۲|=۱۳\Rightarrow\begin{cases} a+۲=۱۳ \\ a+۲=-۱۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۱۱ \\ a=-۱۵ \end{cases}$$

تجربی - ۸۹

۱۲۴۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۱)$ و $C(-۲,۴)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A: ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$B: ۴+۱+۲a+b+c=۰\Rightarrow ۲a+b=-۵$$

$$C: ۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰\Rightarrow -۲a+۴b=-۲۰$$

پس $a=۰$ و $b=-۵$. در نتیجه شعاع دایره برابر است با

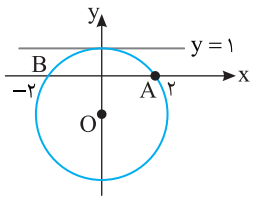
$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰+۲۵-۰}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

تجربی - ۹۱

۱۲۴۴- گزینهٔ ۳ با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره روی محور y است. پس $O(۰,\beta)$ را مرکز دایره فرض می‌کنیم. توجه کنید که

فاصلهٔ O تا خط مماس = فاصلهٔ OA

از طرف دیگر فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا خط مماس $|۱-\beta|$ است و فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا نقطهٔ A برابر $\sqrt{(۰-۲)^۲+\beta^۲}$ است، پس



$$\sqrt{(۰-۲)^۲+(\beta)^۲}=|۱-\beta|$$

$$۴+\beta^۲=۱-۲\beta+\beta^۲\Rightarrow\beta=\frac{-۳}{۲}$$

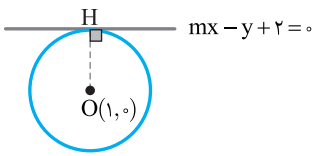
بنابراین $R=|۱-\beta|=|۱-(-\frac{۳}{۲})|=\frac{۵}{۲}$.

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۲۴۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ نقطهٔ $O(۱,۰)$ و شعاع آن برابر $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰-۴(-۳)}=۲$ است. اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است:

$$OH=\frac{|m\times ۱-۰+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=۲\Rightarrow\frac{|m+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=۲\Rightarrow\frac{(m+۲)^۲}{m^۲+۱}=۴$$

$$m^۲+۴m+۴=۴m^۲+۴\Rightarrow ۳m^۲-۴m=۰\Rightarrow m=۰ \text{ یا } m=\frac{۴}{۳}$$



راه‌حل دوم ابتدا در معادلهٔ دایره به جای y قرار می‌دهیم $mx+۲$:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۲x=۳ \\ y=mx+۲ \end{cases}\Rightarrow x^۲+(mx+۲)^۲-۲x=۳$$

$$x^۲+m^۲x^۲+۴mx+۴-۲x-۳=۰\Rightarrow(m^۲+۱)x^۲+(۴m-۲)x+۱=۰$$

معادلهٔ به‌دست آمده باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=(۴m-۲)^۲-۴(m^۲+۱)(۱)=۱۶m^۲-۱۶m+۴-۴m^۲-۴$$

$$=۱۲m^۲-۱۶m=۰\Rightarrow ۳m^۲-۴m=۰\Rightarrow m=۰ \text{ یا } m=\frac{۴}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۲۴۶- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ خط‌های $y=x$ و $y=x+۴$ برابر است با شعاع دایرهٔ مورد نظر نصف این فاصله است، یعنی برابر $\frac{|۴-۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=۲\sqrt{۲}$ است. اگر مرکز دایره نقطهٔ $(-۱,y)$ باشد، فاصله‌اش از خط $y=x$ برابر $\sqrt{۲}$ است. پس

$$\frac{|y+۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|y+۱|=۲\Rightarrow y=۱, y=-۳$$

اگر $y=-۳$، آن‌گاه نقطهٔ $(-۱,-۳)$ بین دو خط $y=x$ و $y=x+۴$ نیست. پس $y=-۳$ قابل قبول نیست. بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $(-۱,۱)$ و شعاع آن $\sqrt{۲}$ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

ریاضی - ۸۹

۱۲۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ است و شعاع آن برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$. فرض کنید شعاع دایرهٔ دیگر r' و مرکز آن $O'(-۲,۲)$ باشد. چون دو دایره بر هم مماس بیرونی هستند، پس $OO'=r+r'$. از طرف دیگر،

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

بنابراین

$$r+r'=۵\Rightarrow ۲+r'=۵\Rightarrow r'=۳$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

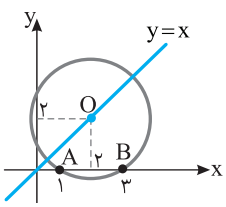
۱۲۴۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha,\alpha)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از دو نقطهٔ $A(۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس $OA=OB$، در نتیجه

$$\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-۰)^۲}$$

$$۲\alpha^۲-۶\alpha+۹=۲\alpha^۲-۲\alpha+۱\Rightarrow ۴\alpha=۸\Rightarrow\alpha=۲$$

بنابراین $r=OA=\sqrt{(۲-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$.

راه‌حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره برابر $\frac{۱+۳}{۲}=۲$ و در نتیجه عرض آن نیز برابر ۲ است و شعاع دایره برابر $OA=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$ است.



خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۲۴۹- گزینهٔ ۳ چون خط‌های $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ موازی‌اند، پس فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\frac{|۰-۱۰|}{\sqrt{۱+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{۵}$. مرکز دایره روی خطی موازی دو خط داده شده است که فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است. معادلهٔ این خط $y=۲x+\frac{۱۰}{۲}=۲x+۵$ است.

فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha,۲\alpha+۵)$ باشد. چون دایره از مبدأ می‌گذرد، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲=۵\Rightarrow ۵\alpha^۲+۲۰\alpha+۲۰=۰$$

$$\alpha^۲+۴\alpha+۴=۰\Rightarrow\alpha=-۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $(-۲,۱)$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۲۵۰- گزینهٔ ۱ شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y-۸=۰$ برابر است با $r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶+۳۲}=۳\sqrt{۲}$ و مرکز این دایره نقطهٔ $O_۱(۱,-۳)$ است.

شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۸x-۴y+۱۲=۰$ برابر است با

$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۱۶-۴۸}=۲\sqrt{۲}$$

و مرکز این دایره نقطهٔ $O_۲(-۴,۲)$ است.

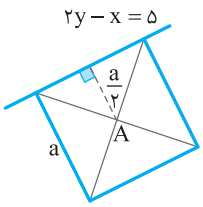
پس

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۱+۴)^۲+(-۳-۲)^۲}=۵\sqrt{۲},\quad r_۱+r_۲=۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

بنابراین دو دایره مماس برون هستند.

تجربی - ۸۷

۱۲۵۱- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $۲y-x-۵=۰$ برابر نصف طول ضلع مربع است:



$$\frac{a}{۲}=\frac{|۲(-۱)-۳-۵|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow a=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S=a^۲=۸۰$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۲۵۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای محاسبهٔ مساحت مثلث داده شده طول ضلع AB را به‌دست آورده سپس فاصلهٔ نقطهٔ C تا خط AB را محاسبه می‌کنیم. پس

$$AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۲۶},\quad m_{AB}=\frac{۰-۵}{۳-۲}=-۵$$

$$y-y_A=m_{AB}(x-x_A)$$

$$y-۵=-۵(x-۲)\Rightarrow ۵x+y-۱۵=۰$$

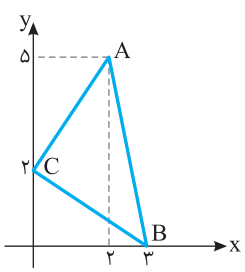
$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ C تا خط AB}=\frac{|۵\times۰+۲-۱۵|}{\sqrt{۵^۲+۱^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۲۶}}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{\sqrt{۲۶}\times\frac{۱۳}{\sqrt{۲۶}}}{۲}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$.

راه‌حل دوم ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم

$$AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۲۶},\ AC=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

$$BC=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۱۳}$$



واضح است که تساوی

$$AC^۲+BC^۲=AB^۲$$

بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BC=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۲۵۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۱)$ و $C(۱,-۲)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A: ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$B: ۴+۱+۲a+b+c=۰\Rightarrow ۲a+b=-۵$$

$$C: ۱+۴+a-۲b+c=۰\Rightarrow a-۲b=-۵$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $a=-۳$، $b=۱$ و $c=۰$. بنابراین شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۱-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

تجربی - ۹۳

۱۲۵۴- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ باشد. مختصات نقطهٔ O در خط $x-y=۲$ صدق می‌کنند، پس مرکز دایره نقطهٔ $O(\alpha,\alpha-۲)$ است. همچنین، O از نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ به یک فاصله است:

$$OA=OB\Rightarrow\sqrt{\alpha^۲+(\alpha-۳)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۲)^۲}$$

$$\alpha^۲+\alpha^۲+۹-۶\alpha=\alpha^۲+۹-۶\alpha+\alpha^۲+۴-۴\alpha$$

$$\alpha=۱\Rightarrow O(۱,-۱)\Rightarrow R=OA=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۰

۱۲۵۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است. پس مرکز دایره به‌صورت (α,α) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶,۳)$ و خط $۲x-y=۰$ یکسان است:

$$\sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۳)^۲}=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}$$

$$\alpha^۲+۳۶-۱۲\alpha+\alpha^۲+۹-۶\alpha=\frac{\alpha^۲}{۵}$$

$$۲\alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=\frac{\alpha^۲}{۵}\Rightarrow ۹\alpha^۲-۱۸\times۵\alpha+۴۵\times۵=۰$$

$$\alpha^۲-۱۰\alpha+۲۵=۰\Rightarrow(\alpha-۵)^۲=۰\Rightarrow\alpha=۵$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(۵,۵)$ است و شعاع دایره برابر است با

$$r=OA=\sqrt{(۵-۶)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

ریاضی - ۹۲

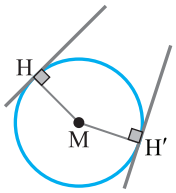
۱۲۵۶- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},b)$ از دو خط مماس برابر است. فرض کنید نقاط تماس H و H' باشند. در این صورت

$$MH=MH'\Rightarrow\frac{|۲\sqrt{۵}-۲b|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|b-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\begin{cases}۲\sqrt{۵}-۲b=b-۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})\\ ۲\sqrt{۵}-۲b=-b+۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=-۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})\end{cases}$$

اگر نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r=MH=\frac{|۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۵}}=۶$$



بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر ۲ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۵۷- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,-۱)$ از خط $x-y-۱=۰$ برابر است با $r=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$.

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲$$

در معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم $y=۰$ تا محل تقاطع این دایره را با محور x به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲+(۰+۱)^۲=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱\Rightarrow x-۲=\pm۱\Rightarrow x=۳\ ,\ x=۱$$

تجربی - ۹۵

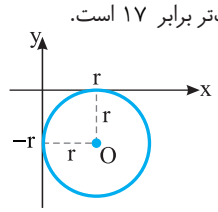
۱۲۵۸- گزینهٔ ۳ چون نقطهٔ $(۲,-۹)$ در ربع چهارم قرار دارد و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. فرض کنید شعاع این دایره r باشد. با توجه به شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $O(r,-r)$ است. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$$

دایره از نقطهٔ $(۲,-۹)$ می‌گذرد، پس مختصات آن در معادلهٔ بالا صدق می‌کنند:

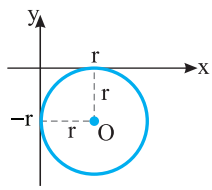
$$(۲-r)^۲+(-۹+r)^۲=r^۲\Rightarrow r^۲-۲۲r+۸۵=۰\Rightarrow r=۵\ \text{یا}\ r=۱۷$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.



ریاضی - ۹۵

۱۲۵۹- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(-۲,۱)$ در ناحیهٔ چهارم است و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. اگر شعاع این دایره برابر r باشد، از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $(r,-r)$ است.



بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$ است. چون نقطهٔ $(۱,-۲)$ روی این دایره است، پس

$$(۱-r)^۲+(-۲+r)^۲=r^۲\Rightarrow r^۲-۶r+۵=۰$$

$$(r-۱)(r-۵)=۰\Rightarrow r=۱\ ,\ r=۵$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۲۶۰- گزینهٔ ۱ مطابق شکل اگر دو دایره مماس خارج باشند، باید

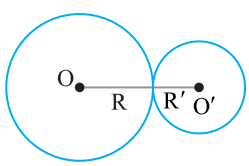
$$OO'=R+R'\qquad(۱)$$

بنابراین

$$x^۲+y^۲+۴x=۰\Rightarrow O(-۲,۰)\ ,\ R=۲$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۸y+a\Rightarrow O'(۱,-۴)\ ,\ R'=\sqrt{۱۷-a}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید



$$\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۲+\sqrt{۱۷-a}$$

$$۵=۲+\sqrt{۱۷-a}\Rightarrow ۳=\sqrt{۱۷-a}\Rightarrow a=۸$$

ریاضی - ۹۰

فصل هفتم

۱۲۶۱- گزینهٔ ۴ برای اینکه عمل ضرب پرانتزهای داده شده را انجام دهیم، از هر پرانتز یک جمله انتخاب و جمله‌های انتخابی را در هم ضرب می‌کنیم. برای انتخاب یک جمله از پرانتز اول، دو حالت، از پرانتز دوم، سه حالت و از پرانتز سوم، پنج حالت وجود دارد. یعنی در نهایت $۲\times۳\times۵=۳۰$ جمله تولید می‌شود.

۱۲۶۲- گزینهٔ ۲ ۵ رقم زوج داریم که از صفر نمی‌توان به عنوان اولین رقم از سمت چپ استفاده کرد. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

$$۲۰=\underset{۴}{\text{ارقام غیر صفر زوج}}\times\underset{۵}{\text{تمام ارقام زوج}}\times\underset{۱}{\text{رقم مشابه صدگان}}$$

۱۲۶۳- گزینهٔ ۴ برای رقم هزارگان می‌توانیم هر یک از ارقام به جز صفر را انتخاب کنیم. بنابراین سه حالت برای نوشتن هزارگان وجود دارد. هر یک از رقم‌های صدگان، دهگان و یکان را می‌توان به چهار حالت انتخاب کرد. بنابراین $۳\times۴\times۴\times۴$ عدد یعنی ۱۹۲ عدد چهار رقمی با شرایط سؤال وجود دارد.

۱۲۶۴- گزینهٔ ۳ یکان عدد می‌تواند ۱، ۳ یا ۵ باشد، پس سه حالت برای انتخاب یکان وجود دارد. صدگان عدد می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد، پس پنج حالت برای انتخاب صدگان وجود دارد. دهگان عدد هم می‌تواند هر یک از ارقام عضو مجموعه باشد یعنی شش حالت برای انتخاب دهگان وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب $۵\times۶\times۳=۹۰$ عدد با شرایط مسئله وجود دارد.

۱۲۶۵- گزینهٔ ۱ عدد ۲ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۸ و ۹ را در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۳,۴,۵,۶,۷\}$ را حساب کنیم که برابر است با $۲^۶=۶۴$.

۱۲۶۶- گزینهٔ ۳ هر تابع با ویژگی مورد نظر به‌صورت $f=\{(۱,x),(۲,y),(۳,z)\}$ است که x، y و z می‌توانند هر یک از پنج رقم ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ باشند، یعنی x، y و z هر کدام پنج مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند. پس $۵\times۵\times۵=۱۲۵$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۱۲۶۷- گزینهٔ ۱ هر مسافر می‌تواند در یکی از ۲۰ طبقه پیاده شود. پس تعداد انتخاب‌های مسافر اول ۲۰ تا، مسافر دوم ۲۰ تا، ... و مسافر دهم ۲۰ تاست. بنابراین $\underbrace{۲۰\times۲۰\times۲۰\times\cdots\times۲۰}_{\text{۱۰تا}}=۲۰^{۱۰}$ حالت برای پیاده شدن مسافران وجود دارد.

۱۲۶۸- گزینهٔ ۳ هر سؤال چهار گزینه دارد که دانش‌آموز می‌تواند یکی از آن‌ها را انتخاب نماید. همچنین دانش‌آموز می‌تواند به سؤال پاسخ ندهد. پس برای پاسخ‌گویی به هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به ۲۰ سؤال برابر $\underbrace{۵\times۵\times\cdots\times۵}_{\text{۲۰تا}}$ یعنی $۵^{۲۰}$ است.

۱۲۶۹- گزینهٔ ۲ می‌توان مهره را در هر یک از خانه‌ها به‌جز خانه‌های ابتدا و انتها قرار داد یا قرار نداد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۲^۵=۳۲$.

۱۲۷۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم تعداد اعضای مجموعه n باشد. در این صورت این مجموعه ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو به مجموعه اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+۳$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{n+۳}$ می‌شود. بنابراین تساوی $۲^{n+۳}=۲^n+۲۲۴$ درست است. در نتیجه

$$۲^n\times۲^۳-۲^n=۲۲۴\Rightarrow۷\times۲^n=۲۲۴\Rightarrow۲^n=۳۲$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ جدید $۲۵۶=۳۲+۲۲۴=۲^n+۲۲۴$ است.

۱۲۷۱- گزینهٔ ۲ برای رفتن از شهر A به شهر C تعداد مسیرها $۴\times۳=۱۲$ تا است. برای برگشتن از شهر C به شهر A نیز ۱۲ مسیر وجود دارد که یکی از آن‌ها همان مسیر رفت است. پس ۱۱ مسیر برگشت باقی می‌ماند. پس برای رفت و برگشت $۱۲\times۱۱=۱۳۲$ مسیر مختلف وجود دارد.

۱۲۷۲- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D برابر است با $۳\times۵\times۲=۳۰$. در مسیر برگشت از یکی از راه‌های بین هر دو شهر نمی‌توان عبور کرد. بنابراین تعداد راه‌های برگشت از شهر D به شهر A برابر است با $۱\times۴\times۲=۸$. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۳۰\times۸=۲۴۰$.

۱۲۷۳- گزینهٔ ۲ جایگاه هر یک از ارقام را با یک دایره نشان می‌دهیم و سپس تعیین می‌کنیم که در هر یک از این جایگاه‌ها چند رقم می‌تواند قرار بگیرد. در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد حالات ممکن برای قرار دادن ارقام در دایره‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\underset{\text{فقط ۲}}{(۱)}\times\underset{\text{۲ یا ۵}}{(۲)}\times\underset{\text{۲ یا ۵}}{(۲)}\times\underset{\text{۲ یا ۵}}{(۲)}\times\underset{\text{۲ یا ۵}}{(۲)}=۱۶$$

۱۲۷۴- گزینهٔ ۲ بنابراین اصل متمم، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با تعداد کل عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت، منهای تعداد عددهای سه رقمی با این ارقام که رقم تکراری ندارند.

یکان	دهگان	صدگان		یکان	دهگان	صدگان
۳	۴	۴	−	۳	۳	۲

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر = $۳\times۴\times۴-۳\times۳\times۲=۴۸-۱۸=۳۰$.

۱۲۷۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** دقت کنید که رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند. حالا باید تعداد همهٔ عددهای یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی با ویژگی مورد نظر را پیدا کنیم.

تعداد عددهای سه رقمی: یکان ۳ (۰، ۱، ۲، ۳)، دهگان ۴، صدگان ۱ $\Rightarrow۱\times۴\times۶=۲۴$

تعداد عددهای دو رقمی: یکان ۶، دهگان ۵ $\Rightarrow۵\times۶=۳۰$

تعداد عددهای یک رقمی: یکان ۶ $\Rightarrow۶$

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $۲۴+۳۶+۳۶+۳۰+۶=۱۳۲$.

راه‌حل دوم ابتـدا توجه کنید که اعداد دو رقمی مانند ۲۳ را می‌توان به‌صورت ۰۲۳ نوشت و اعداد یک رقمی مانند ۷ را می‌توان به‌صورت ۰۰۷ نوشت. اکنون برای نوشتن اعداد کوچک تر از ۳۴۰، دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱:

۳	۶	۶

$\Rightarrow ۳\times۶\times۶=۱۰۸$

۰،۱،۲ ۰تا۶ ۰تا۶

حالت ۲:

۱	۴	۶

$\Rightarrow ۱\times۴\times۶=۲۴$

۳ ۰،۱،۲،۳ ۰تا۶

پس در کل تعداد اعداد ایجاد شده برابرند با $۱۳۲=۲۴+۱۰۸$.

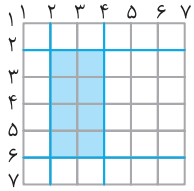
۱۲۷۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم مجموعهٔ اصلی n عضو داشته است. در این صورت، این مجموعه 2^n زیرمجموعه دارد. اگر چهار عضو از این مجموعه کم کنیم، تعداد اعضای آن $n-۴$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $2^{n-۴}$ می‌شود. بنابراین تساوی $2^{n-۴}=2^n-۴۸۰$ برقرار است. در نتیجه

$$2^n-2^{n-۴}=۴۸۰\Rightarrow 2^n-\frac{2^n}{۲۴}=۴۸۰\Rightarrow \frac{۱۵}{۱۶}\times 2^n=۴۸۰\Rightarrow 2^n=۵۱۲$$

پس

$$2^{n-۴}=2^n-۴۸۰\xrightarrow{2^n=۵۱۲}2^{n-۴}=۵۱۲-۴۸۰=۳۲$$

۱۲۷۷- گزینهٔ ۴ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از هفت خط افقی و هفت خط عمودی شکل زیر به‌وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها ۲×۴ باشند، باید فاصلهٔ دو خط موازی دو واحد و فاصلهٔ دو خط موازی دیگر ۴ واحد باشد. در مستطیل‌های افقی، اگر یکی از هفت خط عمودی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصلهٔ ۴ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۳ را می‌توان انتخاب کرد و دو خط عمودی را رسم کرد. همچنین اگر یکی از هفت خط افقی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصلهٔ ۲ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۵ را می‌توان انتخاب کرد. پس ۳×۵ یعنی ۱۵ مستطیل افقی ۲×۴ داریم. به همین ترتیب ۱۵ مستطیل عمودی ۴×۲ داریم و جمعاً ۳۰ مستطیل با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.



۱۲۷۸- گزینهٔ ۲ عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ یا ۷ است از عدد ۵۹۷۳۱ بزرگ‌ترند. تعداد این عددها برابر است با

۲	۴	۳	۲	۱

$۲\times۴\times۳\times۲\times۱=۴۸$

۷،۹

بعد از این‌ها بزرگ‌ترین عدد ۵۹۷۳۱ است، بنابراین عدد ۵۹۷۳۱، ۴۹ اُمین عددی است که نوشته‌ایم.

۱۲۷۹- گزینهٔ ۳ اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو به ترتیب ۶ و ۱۰ باشند، عضوهای دیگر زیرمجموعه می‌توانند اعداد ۷، ۸ و ۹ باشند که می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها $2^۳$ است. به همین ترتیب اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۷ و ۹ باشند، عدد ۸ می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. یعنی ۲ زیرمجموعه به این شکل وجود دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب سؤال ۱۰تاست.

۱۲۸۰- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد دو رقمی کمتر از ۵۰ برابر ۴۰ است. از این اعداد، ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۴۴ ارقام مشابه دارند، پس ۳۶ عدد ارقام متمایز دارند. بنابراین مجموعهٔ A، ۳۶ عضو و $2^{۳۶}$ زیرمجموعه دارد. بنابراین

$$2^{۳۶}=۱۶^a\Rightarrow 2^{۳۶}=(2^۴)^a\Rightarrow 2^{۳۶}=2^{۴a}\Rightarrow ۳۶=۴a\Rightarrow a=۹$$

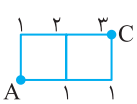
۱۲۸۱- گزینهٔ ۱ از دو طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت:

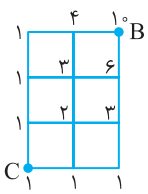
مسیر ABD: $۲\times۲=۴$ ، مسیر ABCD: $۲\times۳\times۳=۱۸$

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۱۸+۴=۲۲$.

۱۲۸۲- گزینهٔ ۳ از ۲ راه می‌توان مستقیماً از شهر A به شهر C رفت و می‌توان با ۳×۲ راه از شهر B عبور کرد و به شهر C رفت. بنابراین $۲+۶=۸$ راه برای رفت وجود دارد. از یک راه می‌توان مستقیماً از شهر C به شهر A برگشت و از ۲×۲ راه می‌توان از شهر B عبور کرد و به شهر A برگشت. پس $۵\times۸=۴۰$ راه برای رفت و برگشت موجود است. پس طبق اصل ضرب $۱+۴=۵$ راه برای برگشت وجود دارد.

۱۲۸۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** به کمک اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به نقطهٔ C از نقطهٔ A مطابق شکل به‌دست می‌آید که برابر ۳ است.

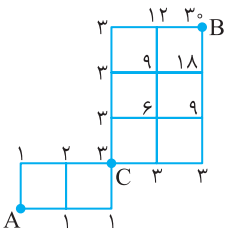




تعداد راه‌های رسیدن به نقطهٔ B از نقطهٔ C نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آید. که مطابق شکل به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۱۰ است.

توجه کنید که ابتدا باید با ۳ راه از نقطهٔ A به نقطهٔ C برویم. سپس با ۱۰ راه از نقطهٔ C به نقطهٔ B برویم. بنابراین $۳\times۱۰=۳۰$ راه با شرایط مسئله وجود دارد.

راه‌حل دوم چون باید ابتدا به C برویم، راه‌هایی را که از آن‌ها نمی‌توان به نقطهٔ C رسید حذف می‌کنیم. پس باید روی راه‌های شکل زیر حرکت کنیم، که به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۳۰ به‌دست می‌آید.



۱۲۸۴- گزینهٔ ۴ رقم صدگان باید ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول رقم صدگان ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۴	۶	۵

$۴\times۶\times۵=۱۲۰$

۳،۴،۵،۶

حالت دوم رقم صدگان ۲ باشد. در این صورت رقم دهگان باید ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۱	۳	۵

$۱\times۳\times۵=۱۵$

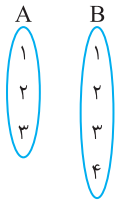
۲ ۴،۵،۶

توجه کنید که در حالت دوم یکی از عددها ۲۴۰ است که باید این عدد را از مجموع تعداد عددهای حاصل کم کنیم. در نتیجه تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $۱۲۰+۱۵-۱=۱۳۴$.

۱۲۸۵- گزینهٔ ۲ عددهای ۲ و ۳ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۴، ۵ و ۶ را به یک حالت کنار می‌گذاریم و در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم، پنج عدد دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعه قرار دهیم یا قرار ندهیم، یعنی هر کدام از آن‌ها دو حالت دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط سؤال برابر است با $2^۵=۳۲$.

۱۲۸۶- گزینهٔ ۲ هر مقسوم‌علیه طبیعی عدد a به‌صورت $2^x\times3^y\times5^z$ است که x ، y و z اعدادی حسابی هستند. چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه، زوج باشد پس باید حداقل یک عامل ۲ داشته باشد و چون می‌خواهیم بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشد، پس نباید عامل ۵ داشته باشد. بنابراین باید $1\le x\le3$، $0<y\le4$ و $z=0$، یعنی برای x سه حالت، برای y پنج حالت و برای z یک حالت وجود دارد. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با $3\times5\times1=15$.

۱۲۸۷- گزینهٔ ۳ هر عضو مجموعهٔ A را می‌توانیم به یکی از اعضای مجموعهٔ B با یک پیکان وصل کنیم. همچنین می‌توانیم این عضو A را به هیچ عضوی از B وصل نکنیم، یعنی برای خارج کردن یک پیکان از هر عضو A، پنج حالت وجود دارد. پس $5\times5\times5=125$ تابع می‌توان نوشت که دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ A و برد آن زیرمجموعهٔ B است. یکی از این توابع تهی است که در آن دامنهٔ تابع تهی است. بنابراین ۱۲۴ تابع غیرتهی وجود دارد.



۱۲۸۸- گزینهٔ ۲ هر تابع به‌صورت $f=\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$ مطلوب مسئله است که در آن b ، c و d می‌توانند ۱ تا ۴ باشند (چهار انتخاب دارند) ولی a می‌تواند ۲ تا ۴ باشد (سه انتخاب دارد). بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با $4\times4\times4\times3=192$.

۱۲۸۹- گزینهٔ ۴ تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ است، برابر است با

۱	۴	۳	۲	۱

$1\times4\times3\times2\times1=24$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۸ است، برابر است با

۱	۴	۳	۲	۱

$1\times4\times3\times2\times1=24$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۶ است، برابر است با

۱	۴	۳	۲	۱

$1\times4\times3\times2\times1=24$

تعداد این عددها برابر است با $24+24+24=72$، پس هفتاد و دومین عددی که نوشته‌ایم کوچک‌ترین عددی است که با ارقام داده شده می‌توان نوشت به شرط آنکه اولین رقم سمت چپ آن برابر ۶ باشد. این عدد ۶۲۴۸۹ است.

۱۲۹۰- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید.

شمارهٔ پرتاب‌ها: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰

۱ ، ۲ ، ۳: یکی رو و دوتا پشت — ۴: رو — ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰: پشت یا رو

پرتاب چهارم باید رو بیاید، پس ۱ حالت دارد. یکی از سه پرتاب اول باید رو بیاید که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که ۱ حالت دارد. پرتاب‌های پنجم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت دارند و کلاً 2^6 حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال $3\times2^6=192$ است.

۱۲۹۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{(n+1)!+(n-1)!}{n^3-1}=120\Rightarrow\frac{(n-1)!(n(n+1)+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}=120$$

$$\frac{(n-1)(n-2)!(n^2+n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}=120\Rightarrow(n-2)!=120=5!\Rightarrow n=7$$

۱۲۹۲- گزینهٔ ۲ حروف صدادار a ، o و i هستند که به $3!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند. این بستهٔ حروف صدادار به همراه شش حرف بی‌صدای دیگر هفت شیء متمایز هستند که به $7!$ حالت می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر سؤال برابر $3!\times7!$ یا $6\times7!$ است.

۱۲۹۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** کافی است بنابر اصل متمم، تعداد حالت‌هایی را که ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده‌اند از تعداد کل حالت‌های ایستادن این شش نفر کم کنیم. اگر ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده باشند، می‌توان آن‌ها را یک نفر در نظر گرفت، که البته به $2!$ طریق می‌توانند کنار هم بایستند. بنابراین تعداد صف‌ها در این حالت برابر است با $2\times5!=240$. تعداد صف‌هایی که بدون محدودیت می‌توان تشکیل داد برابر است با $6!=720$. بنابراین تعداد صف‌های مورد نظر برابر است با $720-240=480$.

راه‌حل دوم ارغوان و اردوان را کنار می‌گذاریم. ابتدا تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر در یک صف قرار می‌گیرند، محاسبه می‌کنیم که برابر با $4!$ خواهد بود. در ابتدا و انتها صف و در بین این ۴ نفر، ۵ مکان وجود دارد که از این ۵ مکان ۲ تا را انتخاب می‌کنیم که ارغوان و اردوان در آن‌ها بایستند. پس تعداد کل صف‌ها برابر است با $P(5,2)\times4!=20\times24=480$.

۱۲۹۴- گزینهٔ ۳ اگر f تابعی با ویژگی مورد نظر باشد، معلوم است که $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ جایگشتی از عددهای ۵، ۶، ۷ و ۸ هستند. بنابراین تعداد تابع‌هایی مانند f برابر است با $4!=24$.

۱۲۹۵- گزینهٔ ۲ کتاب‌های ریاضی را به $4!$ طریق می‌توان در یک ردیف چید. اکنون کتاب‌های فیزیک را می‌توان فقط در جاهای مشخص شده در سطر زیر گذاشت.

ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی

این کار به $3!$ طریق ممکن است. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $4!\times3!=144$

۱۲۹۶- گزینهٔ ۴ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$72P(n,r)=P(n+2,r+2)\Rightarrow72\times\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{(n+2)!}{(n+2-r-2)!}$$

$$\frac{72n!}{(n-r)!}=\frac{n!(n+1)(n+2)}{(n-r)!}\Rightarrow(n+1)(n+2)=72=8\times9\Rightarrow n=7$$

بنابراین $P(n-1,n-2)=P(6,5)=\frac{6!}{(6-5)!}=720$.

۱۲۹۷- گزینهٔ ۴ کتاب‌های ریاضی را می‌توان به $4!$ طریق کنار هم چید. بین این کتاب‌ها ۳ جای خالی وجود دارد که باید کتاب‌های فیزیک را در آن‌ها بگذاریم. این کار هم به $3!$ حالت ممکن است.

ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی

کل این مجموعه و ۲ کتاب شیمی را می‌توان ۳ کتاب در نظر گرفت و آن‌ها را به $3!$ حالت مرتب کرد. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $4!3!3!$.

۱۲۹۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ۴ کتاب فیزیک به $4!$ طریق و ۳ کتاب ادبیات به $3!$ طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. حال کتاب‌های فیزیک را در یک بسته و کتاب‌های ادبیات را در بستهٔ دیگری درنظر می‌گیریم. این دو بسته به $2!$ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. بنابراین تعداد حالات مورد نظر برابر است با $2!\times3!\times4!=2\times6\times24=288$.

۱۲۹۹- گزینهٔ ۴ ابتدا حرف a را قرار می‌دهیم که برای آن ۳ انتخاب داریم: حرف اول، دوم یا سوم. سپس ۲ حرف از ۴ حرف باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد کلمات مورد نظر برابر است با $3P(4,2)$.

۱۳۰۰- گزینهٔ ۱ ۳ گلابی را باید بین ۳ پسر از ۵ پسر توزیع کنیم که این کار به $P(5,3)$ حالت امکان‌پذیر است. سپس باید ۲ سیب را بین ۲ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده توزیع کنیم که این کار به $P(8,2)$ حالت امکان‌پذیر است. پس

جواب مسئله برابر است با $P(5,3)P(8,2)=\frac{5!}{2!}\times\frac{8!}{6!}=\frac{5!\times8!}{2\times6\times5!}=\frac{8!}{12}$.

۱۳۰۱- گزینهٔ ۲ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{90}\Rightarrow\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{90}$$

$$n(n+1)=90\Rightarrow n^2+n-90=0\Rightarrow(n+10)(n-9)=0$$

$$n=-10\,(\text{غ.ق.ق.}),\Rightarrow n=9$$

بنابراین $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{9!}{7!}=\frac{9\times8\times7!}{7!}=72$.

۱۳۰۲- گزینهٔ ۱ باید تعداد حالت‌هایی را که در آن‌ها عبارت log دیده می‌شود، از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. عبارت log و شش حرف a، r، i، t، h و m هفت شیء متمایز هستند که به $7!$ حالت می‌توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد کل جایگشت‌ها نیز برابر $9!$ است. بنابراین تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با $9!-7!=7!(9\times8-1)=7!\times71$.

۱۳۰۳- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌های ایستادن ۵ نفر در یک صف $5!$ است. در نیمی از این حالات احمد در مکان جلوتری نسبت به محمد ایستاده است و در نیم دیگر حالات محمد در مکان جلوتری نسبت به احمد ایستاده است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال برابر است با $\frac{5!}{2}=60$.

۱۳۰۴- گزینهٔ ۲ به دو روش می‌توان حروف را چید طوری که حروف a یکی در میان باشند:

a ◯ a ◯ a ◯

◯ a ◯ a ◯ a

در هر دو روش، سه حرف p، n و m را به $3!$ حالت می‌توان در جاهای خالی قرار داد. پس تعداد حالت‌های مورد نظر $2\times3!=12$ است.

۱۳۰۵- گزینهٔ ۲ تعداد همهٔ عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با شش رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نوشت برابر است با $P(6,4)=360$.

از طرف دیگر، تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که در آن‌ها هیچ‌یک از رقم‌های ۱ و ۵ نیامده است، برابر است با تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با رقم‌های ۲، ۳، ۴ و ۶ نوشت. تعداد این عددها برابر است با $4!=24$. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

$$360-24=336$$

۱۳۰۶- گزینهٔ ۴ تعداد کل جایگشت‌های شش حرفی کلمهٔ نه حرفی logarithm برابر $P(9,6)$ است. تعداد جایگشت‌های شش حرفی که هیچ‌کدام از حروف m و t را ندارند برابر $P(7,6)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(9,6)-P(7,6)=\frac{9!}{3!}-\frac{7!}{1!}=\frac{9\times8\times7!}{6}-7!=12\times7!-7!=11\times7!$$

۱۳۰۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تعداد کل جایگشت‌های چهارحرفی هشت حرف این کلمه برابر $P(8,4)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف t وجود ندارد برابر است با $P(7,4)$. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حرف t دارند می‌شود $P(8,4)-P(7,4)$ که برابر است با

$$P(8,4)-P(7,4)=\frac{8!}{4!}-\frac{7!}{3!}=8\times7\times6\times5-7\times6\times5\times4$$
$$=7\times6\times5(8-4)=7\times6\times5\times4=840$$

راه‌حل دوم ابتدا حرف t را به ۴ حالت در یکی از چهارخانهٔ خالی در نظر گرفته شده برای جایگشت قرار می‌دهیم. سپس سه خانهٔ خالی وجود دارد که باید با ۷ حرف باقی‌مانده پر شوند که تعداد حالت‌های پر شدن آن‌ها $P(7,3)$ است.

بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t وجود دارد برابر است با

$$4P(7,3)=4\times\frac{7!}{4!}=4\times7\times6\times5=840$$

۱۳۰۸- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار n را از تساوی داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{n!}{(n-3)!}-\frac{3n!}{(n-2)!}=30\Rightarrow n(n-1)(n-2)-3n(n-1)=30$$

$$n^3-6n^2+5n-30=0\Rightarrow n^2(n-6)+5(n-6)=0$$

$$(n-6)(n^2+5)=0\Rightarrow n=6$$

بنابراین $P(n,4)=P(6,4)=\frac{6!}{2!}=6\times5\times4\times3=360$.

۱۳۰۹- گزینهٔ ۲ عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اکنون توجه کنید که از شش رقم داده شده، اگر فقط ۰ یا ۳ را حذف کنیم، مجموع پنج رقم دیگر بر ۳ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر،

عددهای پنج رقمی بدون رقم صفر:

۵	۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow5!=120$

عددهای پنج رقمی بدون رقم ۳:

۴	۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow4\times4\times3\times2\times1=96$

۱، ۲، ۴، ۵

بنابراین، پاسخ سؤال برابر است با $120+96=216$.

۱۳۱۰- گزینهٔ ۱ تعداد کل جایگشت‌های ۸ حرفی این کلمه $8!$ است. ابتدا تعداد حالت‌هایی را که هیچ دو حرف صداداری کنار یکدیگر قرار ندارند حساب می‌کنیم، سپس آن را از $8!$ کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که حداقل دو حرف صدادار کنار یکدیگر قرار دارند، به‌دست آید. برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار ندارند، ابتدا پنج حرف بی‌صدا را کنار هم قرار می‌دهیم که این کار به $5!$ حالت انجام‌پذیر است. سپس در شش جای خالی مطابق شکل زیر ۳ حرف صدادار را قرار می‌دهیم که این کار به $P(6,3)$ حالت امکان‌پذیر است.

—□—□—□—□—□—

پس تعداد حالت‌های مطلوب مسئله $8!-5!P(6,3)$ است که برابر است با

$$8!-5!\times\frac{6!}{3!}=8!-20\times6!=6!(56-20)=36\times6!$$

۱۳۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}=\frac{\frac{(n+1)n!}{k(k-1)!}}{\frac{n!}{(k-1)!}}=\frac{n+1}{k}$$

۱۳۱۲- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های انتخاب دو توپ از جعبهٔ A برابر $\binom{3}{2}$ و از جعبهٔ B برابر $\binom{9}{2}$ است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{3}{2}\binom{9}{2}=3\times\frac{9\times8}{2}=108$$

۱۳۱۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید فرد A یکی از این دوازده نفر باشد. اگر پنج نفر از یازده نفر دیگر را انتخاب کنیم و با A یک تیم شش نفره درست کنیم، شش نفر باقی‌مانده هم یک تیم شش نفرهٔ دیگر تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب $\binom{۱۱}{۵}$ است.

۱۳۱۴- گزینهٔ ۲ اگر هر سه نقطه از این پنج نقطه را به هم وصل کنیم، یک مثلث تشکیل خواهند داد. پس تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{۵}{۳}$ یعنی ۱۰تا است.

۱۳۱۵- گزینهٔ ۳ در یک صفحهٔ شطرنجی ۷×۴ تعداد خط‌های افقی ۵تا و تعداد خط‌های عمودی ۸تاست. از تقاطع هر دو خط عمودی و دو خط افقی یک مستطیل رسم می‌شود. پس باید دو خط از پنج خط افقی و دو خط از هشت خط عمودی را انتخاب کنیم، یعنی تعداد مستطیل‌ها برابر است با $\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۲}=۲۸۰$.

۱۳۱۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم:

الف) صفر مرد و سه زن را به $\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۳}=۱\times۱۰=۱۰$ طریق انتخاب می‌کنیم.

ب) یک مرد و دو زن را به $\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۲}=۷\times۱۰=۷۰$ طریق انتخاب می‌کنیم.

پ) دو مرد و یک زن را به $\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}=۲۱\times۵=۱۰۵$ طریق انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۳}+\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۰+۷۰+۱۰۵=۱۸۵$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌های انتخاب سه نفر از بین ۱۲ نفر برابر است با $\binom{۱۲}{۳}$.

همچنین تعداد حالت‌هایی که در آن سه مرد انتخاب شوند برابر $\binom{۷}{۳}$ است.

پس بنابر اصل متمم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{۱۲}{۳}-\binom{۷}{۳}=۲۲۰-۳۵=۱۸۵$$

۱۳۱۷- گزینهٔ ۳ هر حالت پرتاب هفت سکه، یک رشتهٔ هفت حرفی مانند «ر پ ر ر پ پ ر» درست می‌کند. اگر جای ۳تا «رو» را در این رشته انتخاب کنیم، جای ۴تا «پشت» خودبه‌خود معلوم می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۷}{۳}=۳۵$.

۱۳۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ۷ حرف دیگر را به $۷!$ طریق در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس در دو مکان از ۸ مکان به وجود آمده، دو حرف e را قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{۸}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد کل حالت‌ها $\binom{۸}{۲}\times۷!$ است که می‌شود $۲۸\times۷!$.

۱۳۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر اصل متمم، باید از تعداد کل زیرمجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، یک عضوی و دو عضوی را کم کنیم. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$۲^۸-\binom{۸}{۰}-\binom{۸}{۱}-\binom{۸}{۲}=۲۵۶-۱-۸-۲۸=۲۱۹$$

راه‌حل دوم تعداد زیرمجموعه‌های دست کم سه عضوی برابر با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی، چهار عضوی، ... و هشت عضوی مجموعه است. پس

$$\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}+\binom{۸}{۷}+\binom{۸}{۸}=۵۶+۷۰+۵۶+۲۸+۸+۱=۲۱۹$$

۱۳۲۰- گزینهٔ ۳ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی یک مجموعهٔ n عضوی به‌ترتیب $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{۲}$ است. بنابراین

$$\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}=۴۵\Rightarrow n+\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵$$

$$n^۲+n-۹۰=۰\Rightarrow n=۹, n=-۱۰ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین مجموعهٔ مورد نظر ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن برابر است با $\binom{۹}{۳}=۸۴$.

۱۳۲۱- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!(n+۱-(n-۱))!}=۶\Rightarrow\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!۲!}=۶$$

$$\frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!\times۲}=۶\Rightarrow n(n+۱)=۱۲\Rightarrow n=۳$$

بنابراین باید $\binom{۵}{۳}$ را محاسبه کنیم که برابر است با $\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=۱۰$.

۱۳۲۲- گزینهٔ ۱ دو نفر دیگر را می‌توان از میان هفت نفر دیگر به $\binom{۷}{۲}$ طریق انتخاب کرد. پنج نفر را هم می‌توان به $۵!$ طریق در یک صف مرتب کرد. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۷}{۲}\times۵!=۲۱\times۱۲۰=۲۵۲۰$.

۱۳۲۳- گزینهٔ ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و آن‌ها را به همراه A و B در یک تیم پنج‌نفره قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم دیگر را تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب مسئله $\binom{۸}{۳}$ است.

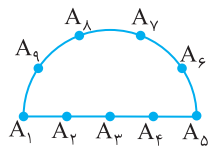
$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳\times۲\times۵!}=۸\times۷=۵۶$$

۱۳۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به شکل زیر توجه کنید.

به سه روش می‌توان مثلث را رسم کرد. در روش اول دو رأس مثلث را از نقاط $A_۱$ تا $A_۵$ انتخاب می‌کنیم و یک رأس دیگر را از بین نقاط $A_۶$ تا $A_۹$ انتخاب می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=۴۰$ است. در روش دوم، یک رأس مثلث را از نقاط $A_۱$ تا $A_۵$ و دو رأس دیگر را از نقاط $A_۶$ تا $A_۹$ انتخاب می‌کنیم.

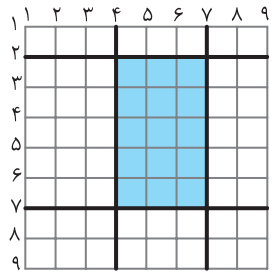
تعداد این مثلث‌ها $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۳۰$ اسـت و در روش سوم، هر سه رأس مثلث را از نقاط $A_۶$ تا $A_۹$ انتخاب می‌کنیم که تعداد این مثلث‌ها $\binom{۴}{۳}=۴$ است.

پس در مجموع $۴+۳۰+۴۰=۷۴$ مثلث وجود دارد.



راه‌حل دوم تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۹ نقطه برابر $\binom{۹}{۳}$ اسـت که اگر هر سه نقطه روی یک خط نباشند، می‌توانند رأس‌های یک مثلث باشند. پس تعداد حالت هایی را که سـه نقطه روی یک خط هسـتند، یعنی $\binom{۵}{۳}$ را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم: $\binom{۹}{۳}-\binom{۵}{۳}=۷۴$.

۱۳۲۵- گزینهٔ ۳ هر مسـتطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شـکل زیر به‌وجود می‌آید. برای اینکه مسـتطیل‌ها ۵×۳ یـا ۳×۵ باشـند، بایـد فاصلهٔ دو خط مـوازی ۳ واحـد و فاصلهٔ دو خط موازی دیگر ۵ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های ۵×۳ یکی از خطوط ۱ تا ۶ افقـی را می‌توانیم به $\binom{۶}{۱}$ روش انتخـاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۳ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۴ را می‌توانیم به $\binom{۴}{۱}$ روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۵ واحد رسم می‌شـود. بنابراین $۶\times۴=۲۴$ مستطیل ۳×۵ وجود دارد. به‌همین ترتیب ۲۴ مستطیل ۵×۳ وجود دارد. پس جمعاً ۴۸ مستطیل با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد.



۱۳۲۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

الف) یک بازیکن از تیم A و دو بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}=۶\times۱۰=۶۰$ طریق انتخاب کنیم.

ب) دو بازیکن از تیم A و یک بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۵\times۵=۷۵$ طریق انتخاب کنیم.

پ) سه بازیکن از تیم A و صفر بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۰}=۲۰\times۱=۲۰$ طریق انتخاب کنیم.

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۰}=۱۵۵$$

راه‌حل دوم تعداد راه‌های انتخاب سـه نفر از یـازده نفر بازیکن هر دو تیم برابر $\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$ است و تعداد راه‌هایی که در آن‌ها هیچ بازیکنی از تیم A انتخاب نشـود برابر با $\binom{۵}{۳}=۱۰$ است. پس بنابر اصل متمم، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳}-\binom{۵}{۳}=۱۵۵$$

۱۳۲۷- گزینهٔ ۴ شـش جای خالی در نظر بگیرید کـه می‌خواهیم در آن‌ها ارقام ۱ تا ۵ را بنویسـیم. ابتدا ۴ جای خالی را از این ۶ جا انتخاب می‌کنیم و در آن‌ها یکی از ارقام ۱، ۳ یا ۵ را می‌نویسـیم. سـپس در ۲ جای باقی‌مانده یکی از ارقام ۲ یا ۴ را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\substack{\text{انتخاب جای}\\ \text{ارقام فرد}}}\times\overbrace{۳\times۳\times۳\times۳}^{\substack{\text{نوشتن ارقام فرد در}\\ \text{۴ جای انتخاب شده}}}\times\underbrace{۲\times۲}_{\substack{\text{نوشتن ارقام ۲ یا ۴}\\ \text{در ۲ جای باقی مانده}}}=۴۸۶۰$$

۱۳۲۸- گزینهٔ ۲ اعداد ۱ و ۲ را باید در زیرمجموعه قرار دهیم. اعداد ۳، ۴ و ۵ را کنار می‌گذاریم تا عضو زیرمجموعه نباشند. دو عضو دیگر زیرمجموعه را از بین اعـداد ۶ تـا ۲۰ بـه $\binom{۱۵}{۲}=۱۰۵$ حالـت انتخـاب می‌کنیـم. بنابرایـن تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط مسئله برابر است با

$$\binom{۱۵}{۲}=۱۰۵$$

۱۳۲۹- گزینهٔ ۱ توجـه کنید که $۲\times۳\times۵\times۷=۲۱۰$. اکنـون اگر دو تا از عددهـای ۲، ۳، ۵ و ۷ را انتخـاب کنیـم، حاصل‌ضـرب آن‌هـا و دو عدد دیگر، ویژگی مورد نظر را دارند. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۴}{۲}=۶$.

۱۳۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا یک جفت کفش را از ۶ جفت کفش به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخـاب می‌کنیـم. اکنون بایـد ۳ لنگه کفش را از بین ۵ جفـت کفش باقیمانده انتخـاب کنیـم طوری که هیچ دو لنگـه‌ای متعلق به یک جفت نباشـند. به این منظـور ابتـدا ۳ جفت کفش را از بیـن ۵ جفت کفش بـه $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر جفت کفش انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم که ایـن کار به $۲\times۲\times۲$ حالت امکان‌پذیر اسـت. پس تعـداد حالت‌های مورد نظر مسئله $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۳}\times۲^۳=۴۸۰$ است.

۱۳۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}}=\frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}}=\frac{n-r+1}{r}$$

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r+1}}=\frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!}}=\frac{r+1}{n-r}$$

بنابراین

$$\begin{cases}\frac{n-r+1}{r}=\frac{84}{36}=\frac{7}{3}\\ \frac{r+1}{n-r}=\frac{84}{126}=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3n-10r+3=0\\ 2n-5r-3=0\end{cases}\Rightarrow n=9, r=3$$

پس $n+r=12$.

۱۳۳۲- گزینهٔ ۲ چون ۲ معلم خاص باید حتماً در تیم باشند، پس باید تیمی ۳ نفره انتخاب کنیم که ۲ دانش‌آموز خاص در آن نباشند. این ۲ دانش‌آموز را حذف می‌کنیم. بنابراین باید تیمی ۳ نفره از میان ۹ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{9}{3}=84$.

۱۳۳۳- گزینهٔ ۲ هر نقطهٔ برخورد مربوط به دو قطر و در نتیجه مربوط به ۴ رأس است. بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{7}{4}=35$$

۱۳۳۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** به دو روش می‌توان مثلث را رسم کرد:

روش اول دو رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

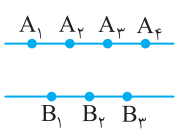
$$\binom{4}{2}\binom{3}{1}=6\times3=18$$

روش دوم دو رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{3}{2}\binom{4}{1}=3\times4=12$$

بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}=18+12=30$$



راه‌حل دوم ابتدا تعداد مثلث‌های قابل رسم با ۷ نقطه را محاسبه می‌کنیم. سپس تعداد مثلث‌هایی را که با ۴ نقطهٔ A_1، A_2، A_3 و A_4 و با ۳ نقطهٔ B_1، B_2 و B_3 قابل رسم هستند از آن کم می‌کنیم. پس

$$\binom{7}{3}-\binom{4}{3}-\binom{3}{3}=35-4-1=30$$

۱۳۳۵- گزینهٔ ۳ اگر سه سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید سه سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{5}{3}\binom{5}{3}=10\times10=100$ است. اگر چهار سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید دو سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{5}{4}\binom{5}{2}=5\times10=50$ است. اگر پنج سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم باید یک سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{5}{5}\binom{5}{1}=1\times5=5$ است. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{5}{3}\binom{5}{3}+\binom{5}{4}\binom{5}{2}+\binom{5}{5}\binom{5}{1}=100+50+5=155$$

۱۳۳۶- گزینهٔ ۴ اگر هیچ مردی را انتخاب نکنیم، تعداد راه‌های انتخاب اعضای تیم برابر است با $\binom{6}{4}=15$ و اگر یک مرد و سه زن انتخاب کنیم، تعداد راه‌ها برابر است با $\binom{4}{1}\binom{6}{3}=4\times20=80$. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب تیمی چهار نفره که حداکثر یک مرد عضو آن باشد (بدون انتخاب مدیر) برابر است با $\binom{6}{4}+\binom{4}{1}\binom{6}{3}=15+80=95$. تعداد راه‌های انتخاب مدیر هم برابر است با $\binom{4}{1}$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{4}{1}\left(\binom{6}{4}+\binom{4}{1}\binom{6}{3}\right)=4\times95=380$$

۱۳۳۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف t وجود دارد ولی حرف a وجود ندارد برابر است با $\binom{6}{4}\times5!=15\times5!$.

به همین ترتیب، تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف a وجود دارد ولی حرف t وجود ندارد برابر است با $15\times5!$. حال تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها هر دو حرف a و t وجود دارند برابر است با $\binom{6}{3}\times5!=20\times5!$

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی مورد نظر برابر است با

$$15\times5!+15\times5!+20\times5!=50\times5!$$

راه‌حل دوم تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی حروف کلمهٔ هشت حرفی triangle برابر $P(۸,۵)$ است. تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که هیچ‌کدام از حروف a و t را ندارند، برابر $P(۶,۵)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(۸,۵)-P(۶,۵)=\frac{۸!}{۳!}-\frac{۶!}{۱!}=\frac{۸!}{۶}-۶!=۶!(\frac{۷\times۸-۶}{۶})=۵!\times۵۰$$

۱۳۳۸- گزینهٔ ۳ عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ را بر حسب زوج یا فرد بودن‌شان به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

عددهای دستهٔ اول: ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹

عددهای دستهٔ دوم: ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰

برای اینکه مجموع چهار عدد مورد نظر زوج باشد، یا باید هر چهار عدد را از دستهٔ اول انتخاب کنیم، یا باید دوتا از دستهٔ اول و دوتا از دستهٔ دوم انتخاب کنیم، یا باید هر چهار تا را از دستهٔ دوم انتخاب کنیم. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۴}=۵+۱۰\times۱۰+۵=۱۱۰$.

۱۳۳۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا یک زوج را از شش زوج به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم. حالا باید دو نفر را از بین پنج زوج باقی‌مانده انتخاب کنیم به‌طوری که هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند. به این منظور ابتدا دو زوج را از بین پنج زوج به $\binom{۵}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر زوج انتخاب شده یک نفر را انتخاب می‌کنیم که این کار به ۲×۲ طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد راه‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\times۲^۲=۶\times۱۰\times۴=۲۴۰$$

راه‌حل دوم ابتدا یک زوج را از میان شش زوج به $\binom{۶}{۱}$ طریق انتخاب می‌کنیم و برای انتخاب دو نفر دیگر، دو نفر را از ده نفر باقی‌مانده به $\binom{۱۰}{۲}$ طریق انتخاب می‌کنیم و پنج حالتی را که ممکن است این دو نفر زن و شوهر باشند، از انتخاب‌هایمان کم می‌کنیم. بنابراین تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\times(\binom{۱۰}{۲}-۵)=۶\times(۴۵-۵)=۲۴۰$$

۱۳۴۰- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

۴ و ۵: دوتا رو و دوتا پشت

۶: رو

۷ تا ۱۰: پشت یا رو

پرتاب پنجم باید رو بیاید پس یک حالت دارد. دو تا از چهار پرتاب اول باید رو بیایند که این کار به $\binom{۴}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که یک حالت دارد. پرتاب‌های ششم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت و کلاً $۲^۵$ حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسئله برابر است با $\binom{۴}{۲}\times۲^۵=۶\times۳۲=۱۹۲$.

۱۳۴۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$n(S)=۲^۳=۸,\quad n(A)=\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۳+۳+۱=۷$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۸}$.

راه‌حل دوم احتمال اینکه سکه هر سه بار پشت بیاید، برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$ است. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، $P(A)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$.

۱۳۴۲- گزینهٔ ۱ تعداد اعداد دو رقمی برابر $n(S)=۹۰$ است. اعداد دو رقمی مربع کامل عبارت‌اند از $۴^۲$، $۵^۲$، $۶^۲$، $۷^۲$، $۸^۲$ و $۹^۲$ که تعداد آن‌ها برابر $n(A)=۶$ است. بنابراین احتمال مربع کامل بودن عدد انتخاب شده برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹۰}=\frac{۱}{۱۵}$.

۱۳۴۳- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶\times۶=۳۶$ عضو دارد و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),$$
$$(۵,۱),(۵,۵),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۶)\}$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$.

۱۳۴۴- گزینهٔ ۳ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۴ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ که تعداد آن‌ها $n(S)=۸$ است. تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و زوج ۲۴ برابر $n(A)=۶$ است. بنابراین احتمال زوج بودن مقسوم‌علیه انتخاب شده $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ است.

۱۳۴۵- گزینهٔ ۴ تعداد کل حالت‌های ممکن برای چیدن ۸ کتاب در یک قفسه برابر $۸!$ است. اگر بخواهیم کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند، ابتدا کتاب‌های ادبیات را به $۵!$ حالت کنار هم می‌چینیم. سپس کتاب‌های ریاضی را به $۳!$ حالت کنار هم می‌چینیم و در آخر به $۲!$ حالت این دو دسته کتاب را در قفسه قرار می‌دهیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=۵!۳!۲!$، پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!۳!۲!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$.

۱۳۴۶- گزینهٔ ۲ تعداد کل مسیرهایی که از شهر A به شهر C می‌روند، برابر است با $۴\times۳+۲=۱۴$. دو مسیر مستقیم از شهر A به شهر C است که از شهر B عبور نمی‌کنند، ۱۲ مسیر دیگر از شهر B عبور می‌کنند. بنابراین احتمال اینکه در مسیرمان از شهر B عبور کنیم، برابر $\frac{۱۲}{۱۴}=\frac{۶}{۷}$.

۱۳۴۷- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از ده مهره برابر است با $\binom{۱۰}{۳}$ و تعداد راه‌های انتخاب سه مهرهٔ سفید از پنج مهرهٔ سفید برابر است با $\binom{۵}{۳}$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۲}$.

۱۳۴۸- گزینهٔ ۳ چون A و B ناسازگارند، $P(A\cap B)=0$. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{9}+\frac{5}{6}=\frac{17}{18}$$

۱۳۴۹- گزینهٔ ۴ چون A و B ناسازگارند، پس $P(A\cap B)=0$. از طرف دیگر $P(B)=1-P(B')=\frac{1}{4}$. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

۱۳۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0/6=P(A)+P(B)-0/2\Rightarrow P(A)+P(B)=0/8$$

بنابراین

$$P(A')+P(B')=(1-P(A))+(1-P(B))$$

$$=2-(P(A)+P(B))=2-0/8=1/2$$

۱۳۵۱- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای آزمایش ۶×۶ عضو دارد و پیشامد مطلوب برابر است با $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$.

۱۳۵۲- گزینهٔ ۳ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز که رقم‌های آن عضو مجموعهٔ $\{0,2,3,4,5,6\}$ باشند برابر است با ۴×۵×۵، یعنی $n(S)=100$. توجه کنید که اگر رقم صفر را انتخاب کنیم نمی‌توان عدد سه رقمی با شرایط گفته شده نوشت. پس از ۵ رقم دیگر سه رقم را انتخاب می‌کنیم. با این سه رقم انتخاب شده فقط به یک طریق می‌توانیم یک عدد با شرایط خواسته شده بنویسیم بنابراین اگر A پیشامد این باشد که رقم‌ها صعودی باشند، آن‌گاه $n(A)=\binom{5}{3}=10$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$.

۱۳۵۳- گزینهٔ ۲ تعداد کل اعداد سه رقمی برابر ۹×۱۰×۱۰ است. اگر بخواهیم رقم تکراری نداشته باشیم، تعداد اعداد برابر ۸×۹×۹ خواهد بود. بنابراین احتمال اینکه عدد نوشته شده دارای رقم‌های تکراری نباشد یعنی رقم‌های آن متفاوت باشند، برابر است با $\frac{9\times9\times8}{9\times10\times10}=0/72$.

۱۳۵۴- گزینهٔ ۱ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ هفت حرفی society برابر با $7!$ است. سه حرف صدادار کلمهٔ society را یک حرف در نظر می‌گیریم. در این صورت پنج حرف داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر $5!$ است و چون تعداد جایگشت‌های حروف صدادار هم $3!$ است، پس تعداد جایگشت‌هایی که حروف صدادار کنار هم هستند برابر $5!\times3!$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{5!\times3!}{7!}=\frac{1}{7}$.

۱۳۵۵- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای این آزمایش $7!$ عضو دارد، یعنی $n(S)=7!$. اگر A پیشامد مطلوب مسئله باشد، تعداد اعضای A برابر است با $n(A)=4!\times3!$. (ابتدا کتاب‌های ریاضی را به $4!$ حالت در ○ها می‌چینیم، سپس در مکان‌های بین آن‌ها کتاب‌های فیزیک را به $3!$ حالت در □ها می‌چینیم.)

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$$

۱۳۵۶- گزینهٔ ۲ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ برابر 2^6-1 است و تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر $\binom{6}{2}$ است. بنابراین احتمال دو عضوی بودن زیرمجموعهٔ انتخاب شده برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6-1}=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$$

۱۳۵۷- گزینهٔ ۳ انتخاب سه مهره از ۹ مهره به $\binom{9}{3}$ حالت امکان‌پذیر است و تعداد راه‌هایی که دو تا از آن‌ها سفید باشند برابر است با

$$\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}=18$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{18}{\binom{9}{3}}=\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$.

۱۳۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6},\quad P(B)=1-P(B')=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

۱۳۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A)+P(B)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$P(A')+P(B')=1-P(A)+1-P(B)=2-(P(A)+P(B))=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

۱۳۶۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $P(B)=1-P(B')=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$.

از طرف دیگر،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{1}{2}=P(A)+\frac{1}{10}-P(A\cap B)$$

بنابراین $P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$.

۱۳۶۱- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است که در ۶ عضو آن به‌صورت $(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)$ عددهای روی دو تاس برابر هستند و در بقیه برابر نیستند. پس در ۳۰ حالت عدد روی تاس‌ها فرق دارند. بنابراین احتمال پیشامد مطلوب $\frac{30}{36}$ یا همان $\frac{5}{6}$ است.

۱۳۶۲- گزینهٔ ۲ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز برابر است با $۹\times۹\times۸$. پس $n(S)=۹\times۹\times۸$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=۸\times۸\times۵$. بنابراین

$$P(A)=\frac{۸\times۸\times۵}{۹\times۹\times۸}=\frac{۴۰}{۸۱}$$

۱۳۶۳- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش به شکل زیر است:

$$S=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

پیشامد اینکه حاصل جمع دو عدد ۵ باشد به شکل $A=\{(۲,۳),(۳,۲)\}$ است. بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$.

۱۳۶۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فضای نمونه‌ای $۲^۵$ عضو دارد، پس $n(S)=۲^۵=۳۲$. اگر تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد، باید تعداد فرزندان دختر ۵، ۴ یا ۳ باشد. پس تعداد اعضای این پیشامد برابر است با $n(A)=\binom{۵}{۵}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۳}=۱۶$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۳۲}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم چون تعداد کل فرزندان خانواده فرد است، پس در نیمی از حالات تعداد دختران بیشتر از تعداد پسران و در نیمی دیگر از حالات برعکس است. همچنین، هرگز تعداد دختران و پسران این خانواده برابر نمی‌شود. بنابراین $P(A)=\frac{۱}{۲}$.

۱۳۶۵- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های انتخاب دو عدد از میان ده عدد داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر باشد $A=\{\{۱,۳\},\{۲,۴\},\ldots,\{۸,۱۰\}\}$. پس $n(A)=۸$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۴۵}$$

۱۳۶۶- گزینهٔ ۴ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای سه عضوی از مجموعهٔ هفت عضوی داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. برای اینکه حاصل‌ضرب عضوهای زیرمجموعهٔ انتخاب شده منفی باشد، باید یک عضوش منفی باشد و دو عضو دیگرش مثبت باشند یا هر سه عضوش منفی باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۱۰$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۵}=\frac{۲}{۷}$.

۱۳۶۷- گزینهٔ ۴ تعداد کل مهره‌های کیسه برابر ۱۴ است و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۴ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۴}{۳}$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً یک مهرهٔ سبز انتخاب شود، دو مهرهٔ دیگر را باید از هفت مهرهٔ آبی یا قرمز انتخاب کنیم. بنابراین $n(A)=\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲}$.

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۴}{۳}}=\frac{۲۱}{۵۲}$$

۱۳۶۸- گزینهٔ ۳ با توجه به رابطهٔ $P(A)=۱-P(A')$،

$$P(A)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\quad,\quad P(B)=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۱۷}{۲۴}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}$$

در نتیجه $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۵}{۲۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۵}{۶}$.

۱۳۶۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض کنید $n(S)=s$. در این صورت

$$P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow n(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}s\ ,\quad P(A')=\frac{۵}{۸}\Rightarrow n(A')=\frac{۵}{۸}s$$

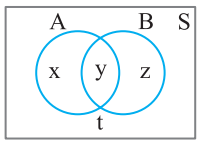
از روی نمودار ون زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

$$y=\frac{۵}{۲۴}s\ ,\quad z+t=\frac{۵}{۸}s$$

اکنون توجه کنید که

$$x+y+z+t=s\Rightarrow x+\frac{۵}{۲۴}s+\frac{۵}{۸}s=s\Rightarrow x=s-\frac{۵}{۲۴}s-\frac{۵}{۸}s=\frac{۱}{۶}s$$

به این ترتیب



$$P(A\cap B')=\frac{n(A\cap B')}{n(S)}=\frac{x}{s}=\frac{۱}{۶}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=(۱-\frac{۵}{۸})-\frac{۵}{۲۴}=\frac{۳}{۸}-\frac{۵}{۲۴}=\frac{۴}{۲۴}=\frac{۱}{۶}$$

۱۳۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌دانیم $۰\le P(A)\le ۱$، پس

$$۰\le\frac{k}{۳}\le ۱\Rightarrow ۰\le k\le ۳\quad (۱)$$

چون A و B ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{k}{۳}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}-\frac{k}{۳}$$

از طرفی $۰\le P(B)\le ۱$، در نتیجه

$$۰\le\frac{۱}{۲}-\frac{k}{۳}\le ۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}\le-\frac{k}{۳}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{۳}{۲}\le k\le\frac{۳}{۲}\quad (۲)$$

با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $۰\le k\le\frac{۳}{۲}$.

راه‌حل دوم چون $A\subseteq A\cup B$ پس $P(A)\le P(A\cup B)$ $۰\le P(A)$.

بنابراین $\frac{۱}{۲}\le\frac{k}{۳}\le ۰$، پس $۰\le k\le\frac{۳}{۲}$.

۱۳۷۱- گزینهٔ ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد. اگر A پیشامد این باشد که مجموع عددهای رو شده در تاس‌ها بیشتر از ۸ باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),$$
$$(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$.

۱۳۷۲- گزینهٔ ۳ در اینجا $n(S)=۴\times۳\times۲=۲۴$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{\{۱,-۱,۰\},\{۲,-۲,۰\},\{۳,۰,-۳\},\{۴,-۱,-۳\}\}$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۲۴}=\frac{۱}{۶}$.

۱۳۷۳- گزینهٔ ۴ چون می‌دانیم عدد رو شده روی دو تاس، اول است، پس هریک از تاس‌ها می‌توانند ۲، ۳ یا ۵ بیایند. بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای ۳×۳ حالت است یعنی $n(S)=۹$. فقط در یک حالت که عدد روی هر دو تاس ۲ بیاید، عدد روی هر دو تاس زوج خواهد بود. پس $n(A)=۱$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۹}$$

۱۳۷۴- گزینهٔ ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۸!$ و تعداد حالت‌هایی که دو برادر در ابتدا و انتهای صف می ایستند برابر $۲\times۶!$ است. بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با $\frac{۲\times۶!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$.

۱۳۷۵- گزینهٔ ۲ تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمهٔ نُه حرفی logarithm برابر $P(۹,۵)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که هیچ‌کدام از حروف t و g را ندارند برابر $P(۷,۵)$ است، پس تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با $P(۹,۵)-P(۷,۵)$. بنابراین احتمال اینکه در جایگشت انتخاب شده حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته باشد، برابر است با

$$\frac{P(۹,۵)-P(۷,۵)}{P(۹,۵)}=۱-\frac{P(۷,۵)}{P(۹,۵)}=۱-\frac{\frac{۷!}{۲!}}{\frac{۹!}{۴!}}=۱-\frac{۷!\times۴!}{۹!\times۲!}=۱-\frac{۴\times۳}{۸\times۹}=\frac{۵}{۶}$$

۱۳۷۶- گزینهٔ ۳ در کل تعداد افراد برابر است با $۲\times۵=۱۰$، در نتیجه تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از این ده نفر برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. برای اینکه از این سه نفر هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند، باید از هر زوج حداکثر یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی باید ابتدا سه زوج را انتخاب کنیم و سپس از هر زوج، یک نفر را انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، $n(A)=\binom{۵}{۳}\times۲\times۲\times۲$. به این ترتیب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۳}\times۲^۳}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۸۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

۱۳۷۷- گزینهٔ ۱ تعداد کل مهره‌ها برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$ و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۲ مهره برابر است با

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

اگر A پیشامد این باشد که مهره‌ها به سه رنگ مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}=۶۰$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۲۲۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

۱۳۷۸- گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش $\binom{n}{۲}$ عضو دارد. اگر A پیشامد سفید بودن هر دو مهره باشد، تعداد اعضای A برابر $\binom{۴}{۲}$ است.

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{n}{۲}}=\frac{۶}{\frac{n(n-۱)}{۲}}=\frac{۱۲}{n(n-۱)}=\frac{۲}{۱۵}$$

پس

$$n(n-۱)=۹۰\Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰\Rightarrow(n-۱۰)(n+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۱۰\\ n=-۹\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

۱۳۷۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $P(B')=۳P(A')$ نتیجه می‌شود

$$۱-P(B)=۳(۱-P(A))\Rightarrow۱-P(B)=۳-۳P(A)\Rightarrow P(B)=۳P(A)-۲$$

با توجه به اینکه $P(A)=۲P(B)$، در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $۲P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B)=۶P(B)-۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و در نتیجه $P(A)+P(B)=\frac{۶}{۵}$.

۱۳۸۰- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۶}\le\frac{k}{۳}\le\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\times۳}\frac{۱}{۲}\le k\le۲$$

۱۳۸۱- گزینهٔ ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶^۴$ است. یعنی $n(S)=۶^۴$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً در دو پرتاب عدد ۶ ظاهر شود، آن‌گاه $n(A)=\binom{۴}{۲}\times۱\times۱\times۵^۲$ (توجه کنید که کافی است دو پرتاب از چهار پرتاب را انتخاب کنیم که در آن‌ها به یک حالت عدد ۶ ظاهر می‌شود و در دو پرتاب باقی‌مانده به پنج حالت عددهای دیگری ظاهر شوند). بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}\times۵^۲}{۶^۴}=\frac{۲۵}{۲۱۶}$$

۱۳۸۲- گزینهٔ ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از میان ۲۰ عدد داده شده برابر است با $n(S)=\binom{20}{2}=190$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\ldots,\{19,20\}\}$$

پس $n(A)=19$ و در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$.

۱۳۸۳- گزینهٔ ۳ در اینجا $n(S)=\binom{25}{2}=300$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هر دو خانه در یک سطر یا یک ستون باشند. همچنین، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه از یک سطر یا دو خانه از یک ستون هر کدام برابر است با $\binom{5}{2}$ و چون ۵ سطر و ۵ ستون داریم، پس

$$n(A')=5\times\binom{5}{2}+5\times\binom{5}{2}=5\times10+5\times10=100$$

بنابراین $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$، پس

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۱۳۸۴- گزینهٔ ۲ تعداد مهره‌ها $2n-2$ است، پس $n(S)=\binom{2n-2}{2}$.

اگر A پیشامد غیرهمرنگ بودن مهره باشد، $n(A)=\binom{n}{1}\binom{n-2}{1}$. زیرا باید یک مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ قرمز انتخاب کنیم. بنابراین

$$P(A)=\frac{\binom{n}{1}\binom{n-2}{1}}{\binom{2n-2}{2}}=\frac{n(n-2)}{\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}}=\frac{n(n-2)}{(n-1)(2n-3)}=\frac{8}{15}$$

پس

$$15n(n-2)=8(n-1)(2n-3)\Rightarrow15n^2-30n=16n^2-40n+24$$

$$n^2-10n+24=0\Rightarrow(n-6)(n-4)=0\Rightarrow n=6 \quad \text{یا} \quad n=4$$

تعداد کل مهره‌ها $2n-2$ است، پس تعداد مهره‌ها در کیسه ۶ یا ۱۰ تاست.

۱۳۸۵- گزینهٔ ۱ اگر A را پیشامد مضرب ۳ بودن عدد و B را پیشامد مضرب ۸ بودن آن در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$n(A)=\frac{69-3}{3}+1=23\Rightarrow P(A)=\frac{23}{70}$$

$$n(B)=\frac{64-8}{8}+1=8\Rightarrow P(B)=\frac{8}{70}$$

اعدادی که مضرب ۳ و ۸ باشند، مضرب ۲۴ هستند.

$$A\cap B=\{24,48\}\Rightarrow n(A\cap B)=2\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{70}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{23}{70}+\frac{8}{70}-\frac{2}{70}=\frac{29}{70}$$

۱۳۸۶- گزینهٔ ۲ در مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$، تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند، ۳۳ تا $(3,6,9,\ldots,96,99)$ و تعداد اعدادی که بر ۷ بخش‌پذیرند، ۱۴ تا $(7,14,21,\ldots,91,98)$ است. پس اگر A را پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد بر ۳ و B را پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد بر ۷ بنامیم، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{33}{100},\ P(B)=\frac{14}{100}\Rightarrow P(B')=1-\frac{14}{100}=\frac{86}{100}$$

تعداد اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۷ بخش‌پذیر هستند، ۴ تا $(21,42,63,84)$ است. پس تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیر هستند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیستند، برابر ۴-۳۳ تا است. پس

$$n(A\cap B')=29\Rightarrow P(A\cap B')=\frac{29}{100}$$

می‌خواهیم $P(A\cup B')$ را محاسبه کنیم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{33}{100}+\frac{86}{100}-\frac{29}{100}=\frac{90}{100}$$

۱۳۸۷- گزینهٔ ۲ کل حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۲ نفر برابر $\binom{12}{4}$ است. یعنی $n(S)=\binom{12}{4}$. تعداد حالت‌هایی که کمیته شامل هیچ زنی نیست برابر است با $\binom{9}{4}$. بنابراین اگر A پیشامد این باشد که کمیته شامل هیچ زنی نباشد آن‌گاه $n(A)=\binom{9}{4}$. بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}}=\frac{14}{55}$.

پیشامد اینکه کمیته حداقل شامل یک زن باشد، متمم A است. پس

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$$

۱۳۸۸- گزینهٔ ۴ چون باید چهار نفر را از میان دوازده نفر انتخاب کنیم، پس $n(S)=\binom{12}{4}=495$. توجه کنید که باید یک زوج انتخاب شوند، سپس باید دو زوج از پنج زوج دیگر انتخاب شوند و از هر کدام یک نفر انتخاب شوند. چون از هر یک از این زوج‌ها می‌توانیم زن یا شوهر را انتخاب کنیم، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $\binom{5}{2}\binom{6}{1}2^2=6\times10\times4=240$.

به این ترتیب، احتمال موردنظر برابر است با $\frac{16}{33}$.

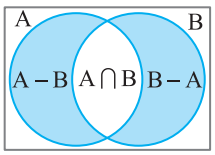
۱۳۸۹- گزینهٔ ۳ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌گیریم $P(A)=\frac{1}{8}$، $P(B)=\frac{1}{12}$ و $P(C)=\frac{1}{20}$. چون A، B و C پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار هستند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{31}{120}$$

۱۳۹۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر $A\cup B$ است. پس

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۱۰}+P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)$$



چون $P(A\cup B)\le ۱$، پس

$$\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)\le ۱\Rightarrow P(A\cap B)\le\frac{۱}{۲}$$

یعنی بیشترین مقدار $P(A\cap B)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۳۹۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=۰/۳+۰/۲-۰/۵=۰$$

بنابراین $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰$.

۱۳۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A|B)=۴P(B|A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۴P(A\cap B)}{P(A)},\quad P(A\cap B)\neq ۰$$

$$۴P(B)=P(A)\Rightarrow\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{۱}{۴}$$

۱۳۹۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول عضو تیم باشد و B پیشامد این باشد که نفر دوم نیز عضو تیم باشد. توجه کنید که $P(A)=\frac{۲}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}$. از طرف دیگر $P(B|A)=\frac{۱}{۲۳}$، پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۲۳}=\frac{۱}{۲۷۶}$$

راه‌حل دوم فضای نمونه‌ای این آزمایش انتخاب دو دانش‌آموز از ۲۴ دانش‌آموز این کلاس است که تعداد عضوهای آن برابر است با

$$n(S)=\binom{۲۴}{۲}=۲۷۶$$

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۲}{۲}=۱$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲۷۶}$$

۱۳۹۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که اختلاف عددهایی که آمده‌اند ۳ باشد و B پیشامد این باشد که دست‌کم یک بار ۲ آمده باشد. در این صورت

$$A=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۵,۲),(۶,۳)\}$$

$$B=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),$$
$$(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$$

به این ترتیب، $A\cap B=\{(۲,۵),(۵,۲)\}$ و در نتیجه

$$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳۹۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A)=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶},\quad P(B)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(B')=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزند» برابر $A'\cup B'$ است که چون A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A')P(B')=\frac{۵}{۶}+\frac{۲}{۵}-\frac{۵}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۹}{۱۰}$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر دو فرد تیر را به هدف بزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون زدن تیر دو شخص به هدف پیشامدهایی مستقل هستند، پس $P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

۱۳۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B=\varnothing,\quad A\cap C=\{۲\},\quad A\cap D=\{۱\},\quad A\cap E=\{۱,۲\}$$

بنابراین A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap B)=۰,\quad P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

A و C مستقل از هم هستند، زیرا

$$P(A\cap C)=\frac{۱}{۴},\quad P(A)\times P(C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap D)=\frac{۱}{۴},\quad P(A)\times P(D)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

A و E مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap E)=\frac{۱}{۲},\quad P(A)\times P(E)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

۱۳۹۷- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$P(A)=۱-P(A')=۰/۶,\quad P(B)=۱-P(B')=۰/۸$$

در نتیجه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$، بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۸-۰/۴۸=۰/۹۲$$

۱۳۹۸- گزینهٔ ۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه A' و B نیز مستقل از هم هستند. بنابراین $P(B|A)=P(B)=\frac{۱}{۳}$ و

$$P(A'|B)=P(A')=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۵}$$

و در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۵}$$

۱۳۹۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید A و B به‌ترتیب پیشامد این باشند که آقای فیضی و آقای تقوی در روز پنج‌شنبه سرکار بیایند. در این صورت $P(A\cup B)$ را می‌خواهیم. توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

۱۴۰۰- گزینهٔ ۱ بایـد احتمال متمم این پیشـامد را که عمـل برای هر دو ناموفق باشد، بیابیم.

احتمال عدم موفقیت برای هر دو نفر $=۰/۲\times۰/۳=۰/۰۶$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $۱-۰/۰۶=۰/۹۴$.

۱۴۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B)+P(A')-P(B\cup A')}{P(A')}$$

$$=\frac{۱-P(B')+۱-P(A)-P(B\cup A')}{۱-P(A)}=\frac{۰/۲+۰/۳-۰/۴}{۰/۳}=\frac{۰/۱}{۰/۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$=(۱-۰/۳)+(۱-۰/۴)-۰/۵=۰/۸$$

از طرف دیگر،

$$P(B|A\cup B')=\frac{P(B\cap(A\cup B'))}{P(A\cup B')}$$

$$=\frac{P(B)+P(A\cup B')-\overbrace{P(B\cup(A\cup B'))}^{S}}{۰/۸}=\frac{۰/۴+۰/۸-۱}{۰/۸}=\frac{۰/۲}{۰/۸}=\frac{۱}{۴}$$

۱۴۰۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B)=۱۶P(B)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۱۶(B)\Rightarrow P(A\cap B)=۱۶(P(B))^۲$$

$$P(B|A)=۴P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۴P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=۴(P(A))^۲$$

بنابراین

$$۱۶(P(B))^۲=۴(P(A))^۲\Rightarrow\frac{(P(A))^۲}{(P(B))^۲}=۴\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=۲$$

۱۴۰۴- گزینهٔ ۲ اگـر A را پیشـامد مبتـلا شـدن فرد بـه بیمـاری و B را پیشامد بهبود یافتن فرد مبتلا شده در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$P(A)=۰/۰۷,\quad P(B|A)=۰/۶$$

بنابراین

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۶=\frac{P(A\cap B)}{۰/۰۷}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۴۲$$

پس احتمال اینکه فردی از این جامعه به بیماری مبتلا شـود، سـپس بهبود یابد برابر ۰/۰۴۲ است.

۱۴۰۵- گزینهٔ ۱ اگر A را پیشـامد «مضرب ۵ بودن عدد» و B را پیشامد «زوج بودن عدد» در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$n(A)=\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰,\quad n(A\cap B)=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰$$

زیرا عددی که زوج و مضرب ۵ باشد، مضرب ۱۰ است. بنابراین

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴۰۶- گزینهٔ ۴ پیشامدهای A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap B=\{۲,۵\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

پیشامدهای A و C مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap C=\{۲\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)\times P(C)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۴}$$

پیشامدهای A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap D=\{۲,۳\}\Rightarrow P(A\cap D)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(D)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

پیشامدهای A و E مستقل از هم هستند، زیرا

$$A\cap E=\{۲,۳\}\Rightarrow P(A\cap E)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(E)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۰۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید A پیشـامد این باشد که نفر اول به هدف بزند و B پیشـامد این باشـد که نفر دوم به هدف بزند. توجه کنید که $P(A)=۰/۷۵$ و $P(B)=۰/۸$. پیشـامدهای A و B مسـتقل‌اند و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۷۵+۰/۸-۰/۷۵\times۰/۸=۰/۹۵$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هیچ یک از این دو نفر به هدف نزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون به هدف زدن دو نفر پیشامدهای مستقل هستند، بنابراین به هدف نزدن آن‌ها نیز دو پیشامد مستقل هستند، پس $P(A)=۰/۲۵\times۰/۲=۰/۰۵$، بنابراین

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۵=۰/۹۵$$

۱۴۰۸- گزینهٔ ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)(\frac{۱}{۴}-P(A))=\frac{۱}{۴}P(A)-P^۲(A)$$

اگـر فـرض کنیـم $P(A)=x$ آن‌گاه $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}x-x^۲$. حداکثـر مقـدار عبارت $-x^۲+\frac{۱}{۴}x$ به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۲(-۱)}=\frac{۱}{۸}$ به‌دسـت می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۶۴}=(\frac{۱}{۸})^۲+\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۸})-$. پس حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ برابر $\frac{۱}{۶۴}$ است.

۱۴۰۹- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشـامد این باشد که مهرهٔ بیرون آمده از کیسـهٔ اول سفید باشد و B پیشامد این باشد که مهرهٔ بیرون آمده از کیسهٔ دوم سـفید باشد. در این صورت $P(A)=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$. توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل‌اند. پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۴۱۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشـامد این باشـد کـه در روز مورد نظر، دانشجوی اول در کلاس حاضر باشد و B پیشامد این باشد که در روز مورد نظر، دانشـجوی دوم در کلاس حاضـر باشـد. در ایـن صـورت $P(A)=۰/۸$ و $P(B)=۰/۶$. توجه کنید که پیشـامدهای A و B مستقل‌اند، بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=۰/۸+۰/۶-(۰/۸)(۰/۶)=۰/۹۲$$

۱۴۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۳=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۲$$

اکنون مقدار $P(B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow ۰/۸=\frac{۰/۱۲}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۰/۱۲}{۰/۸}=۰/۱۵$$

۱۴۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B\subset A\cup B\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cap B)=A\cap B$$

بنابراین

$$P(A\cup B|A\cap B)=\frac{P((A\cup B)\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=۱$$

۱۴۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۶}{۵}P(A\cap B)$$

بنابراین باید حداکثر و حداقل مقدار $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۶}-P(A\cup B)=\frac{۴۹}{۳۰}-P(A\cup B)$$

چون $P(A\cup B)\le ۱$، پس $P(A\cap B)\ge \frac{۴۹}{۳۰}-۱=\frac{۱۹}{۳۰}$، همچنین $P(A\cap B)\le P(A)$، در نتیجه حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ برابر است با $\frac{۴}{۵}$ است. بنابراین $\frac{۱۹}{۳۰}\le P(A\cap B)\le \frac{۴}{۵}$. در نتیجه

$$\frac{۶}{۵}\times\frac{۱۹}{۳۰}\le P(A|B)\le \frac{۶}{۵}\times\frac{۴}{۵}\Rightarrow \frac{۱۹}{۲۵}\le P(A|B)\le\frac{۲۴}{۲۵}$$

بنابراین اختلاف بیشترین مقدار ممکن $P(A|B)$ و کمترین مقدار ممکن آن برابر است با $\frac{۲۴}{۲۵}-\frac{۱۹}{۲۵}=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$.

۱۴۱۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که دست‌کم یک دستیار انتخاب شده باشد و B پیشامد این باشد که دقیقاً دو پزشک انتخاب شوند. توجه کنید که A' پیشامد این است که هیچ دستیاری انتخاب نشود، یعنی هر چهار نفر از میان هفت نفر پزشک انتخاب شده‌اند. بنابراین

$$P(A')=\frac{\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=\frac{۵}{۶}$$

از طرف دیگر، $A\cap B$ پیشامد این است که دو نفر پزشک و دو نفر دستیار انتخاب شده باشند. بنابراین

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۳}{۱۰}$$

در نتیجه $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۹}{۲۵}$.

۱۴۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B=\{۲\},\quad A\cap C=\{۲\},\quad B\cap C=\{۲,۵\}$$

از طرف دیگر

$$P(A)=\frac{۲}{۵},\quad P(B)=\frac{۳}{۵},\quad P(C)=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۵},\quad P(A)\times P(B)=\frac{۶}{۲۵}\ne P(A\cap B)$$

$$P(A\cap C)=\frac{۱}{۵},\quad P(A)\times P(C)=\frac{۶}{۲۵}\ne P(A\cap C)$$

$$P(B\cap C)=\frac{۲}{۵},\quad P(B)\times P(C)=\frac{۹}{۲۵}\ne P(B\cap C)$$

بنابراین هیچ دوتایی از پیشامدهای A، B و C مستقل نیستند.

۱۴۱۶- گزینهٔ ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

اگر فرض کنیم $P(A)=x$، آن‌گاه

$$\frac{۲}{۳}=x+\frac{۳}{۲}x-x(\frac{۳}{۲}x)\Rightarrow ۹x^۲-۱۵x+۴=۰$$

$$(۳x-۱)(۳x-۴)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\ x=\frac{۴}{۳}$$

چون $۰\le P(A)\le ۱$، پس $x=\frac{۴}{۳}$ غیرقابل قبول است، بنابراین $P(A)=\frac{۱}{۳}$.

۱۴۱۷- گزینهٔ ۱ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

فرض می‌کنیم $P(A)=x$ و در نتیجه

$$P(A\cup B)=\frac{۱}{۸}-x(\frac{۱}{۸}-x)=x^۲-\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۸}$$

حداقل مقدار عبارت $x^۲-\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۸}$ به‌ازای $x=-\frac{-\frac{۱}{۸}}{۲\times ۱}=\frac{۱}{۱۶}$ به‌دست می‌آید که برابر است با $\frac{۱}{۱۶}^۲-\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۱۶})+\frac{۱}{۸}=\frac{۳۱}{۲۵۶}$.

بنابراین حداقل مقدار $P(A\cup B)$ برابر $\frac{۳۱}{۲۵۶}$ است.

۱۴۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند. بنابراین

$$P(A)=P((A-B)\cup(A\cap B))=P(A-B)+P(A\cap B)$$

بنابراین $P(A)-P(A-B)=P(A\cap B)$ و چون A و B مستقل از هم هستند، پس $P(A)-P(A-B)=P(A)\times P(B)$.

۱۴۱۹- گزینهٔ ۴ پیشامد A را تنها به مسافرت رفتن علی و پیشامد B را تنها به مسافرت رفتن محسن تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A)=۰/۲,\quad P(B)=۰/۲۵$$

اکنون باید $P(A\cap B')$ را حساب کنیم. می‌دانیم این دو پیشامد مستقل هستند. در نتیجه

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=P(A)(۱-P(B))$$

$$=\frac{۲}{۱۰}\times(۱-۰/۲۵)=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=۰/۱۵=٪۱۵$$

۱۴۲۰- گزینهٔ ۴ احتمال قبولی مهدی در ریاضی را با $P(A)$ و احتمال قبولی در فیزیک را با $P(B)$ نشان می‌دهیم. با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$P(B\cap A')=۰/۱۸$$

می‌دانیم این دو پیشامد (قبولی در فیزیک و ریاضی) مستقل از یکدیگرند. در نتیجه

$$P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=P(B)(۱-P(A))=P(B)(۱-۰/۶)=۰/۱۸$$

بنابراین $P(B)=۰/۴۵$. در نتیجه $P(B')=۱-P(B)=۰/۵۵$.

۱۴۲۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در اینجا فضای نمونه‌ای $S=\{ق\,ق, ق\,آ, آ\,ق, آ\,آ\}$ است. فرض کنید $B_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم آبی و $R_۱$ و $B_۱$ به‌ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B_۲)=P(R_۱)P(B_۲|R_۱)+P(B_۱)P(B_۲|B_۱)$$

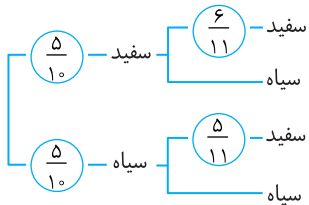
$$=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۰}{۴۲}=\frac{۵}{۷}$$

۱۴۲۲- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که توپی که در کیسهٔ ۲ گذاشته‌ایم، سفید باشد و B پیشامد این باشد که توپی که از کیسهٔ ۲ بیرون آورده‌ایم، سفید باشد. روشن است که $P(A)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$. بنابر قانون احتمال کل،

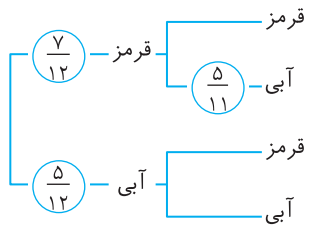
$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۶}$$

۱۴۲۳- گزینهٔ ۳ پیشامد اگر سفید بودن مهرهٔ آخر را با A نشان دهیم، با توجه به نمودار درختی زیر می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۱}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۱}=۰/۵$$



۱۴۲۴- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۱۴۲۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید B_i پیشامد انتخاب جعبهٔ i ام، $i=۱,۲,۳$ و A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۸}=\frac{۵}{۱۸}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۰+۶+۹}{۳۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

۱۴۲۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبهٔ اول برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبهٔ دوم برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم.

توجه کنید که اگر سه مهرهٔ سیاه به جعبهٔ اول اضافه شود، این جعبه شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرهٔ انتخابی از این جعبه برابر $\frac{۵}{۱۰}$ می‌شود، یعنی $P(A|B)=\frac{۵}{۱۰}$، به طور مشابه $P(A|B')=\frac{۲}{۸}$.

طبق قانون احتمال کل،

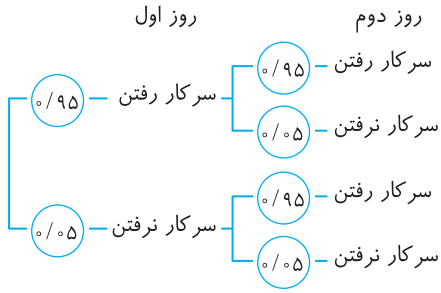
$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

۱۴۲۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید B پیشامد «رو» آمدن سکه و A پیشامد سفید بودن همهٔ مهره‌های خارج شده از ظرف باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=\underset{\text{سکه «رو» بیاید}}{P(B)}\ \underset{\text{انتخاب دو مهرهٔ سفید}}{P(A|B)}+\underset{\text{سکه «پشت» بیاید}}{P(B')}\ \underset{\text{انتخاب سه مهرهٔ سفید}}{P(A|B')}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳۵}=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۳۵}=\frac{۷}{۳۵}=\frac{۱}{۵}$$

۱۴۲۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



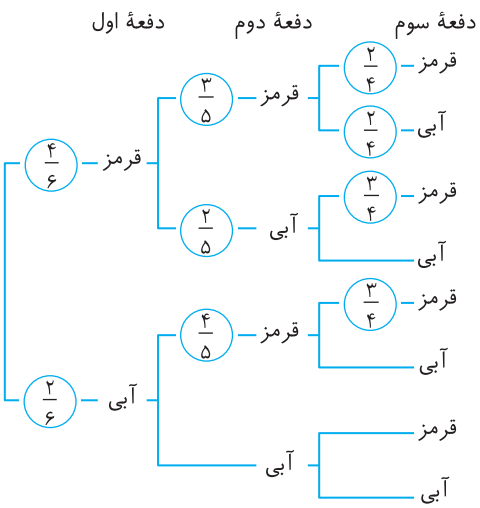
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$۰/۹۵\times۰/۹۵+۰/۹۵\times۰/۰۵+۰/۰۵\times۰/۹۵=۰/۹۹۷۵$$

راه‌حل دوم اگر A را پیشامد سرکار نرفتن حاج داود در آن دو روز متوالی در نظر بگیریم: $P(A)=(۱-\frac{۹۵}{۱۰۰})\times(۱-\frac{۹۵}{۱۰۰})=۰/۰۰۲۵$. پس احتمال آنکه حاج داود حداقل یک روز از آن دو روز را سرکار برود برابر است با

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۰۲۵=۰/۹۹۷۵$$

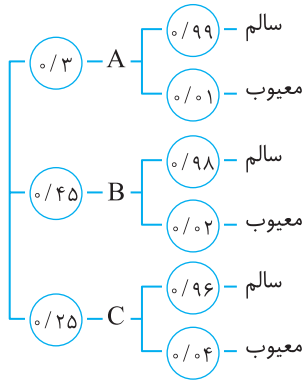
۱۴۲۹- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۴}{۵}$$

۱۴۳۰- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.



راه‌حل اول

$$P(\text{سالم})=\text{انتخاب‌شده}=۰/۳\times۰/۹۹+۰/۴۵\times۰/۹۸+۰/۲۵\times۰/۹۶=۰/۹۷۸$$

راه‌حل دوم اگر A را پیشامد معیوب بودن محصول را در نظر بگیریم:

$$P(A)=۰/۳\times۰/۰۱+۰/۴۵\times۰/۰۲+۰/۲۵\times۰/۰۴=۰/۰۲۲$$

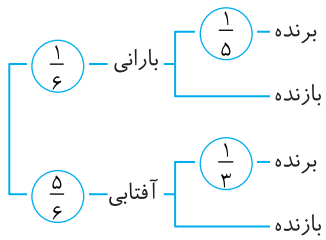
بنابراین احتمال سالم بودن این محصول برابر است با

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۲۲=۰/۹۷۸$$

۱۴۳۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید})$$
$$=P(\text{انتخاب جعبهٔ اول})P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید}|\text{انتخاب جعبهٔ اول})+$$
$$P(\text{انتخاب جعبهٔ دوم})P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید}|\text{انتخاب جعبهٔ دوم})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۷+۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۱۵+۲۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۷}{۲۴}+\frac{۵}{۲۴}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

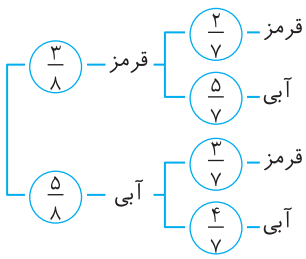
۱۴۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲۸}{۹۰}=\frac{۱۴}{۴۵}$$

۱۴۳۳- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



راه‌حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$P(\text{دست‌کم یکی آبی باشد})=۱-P(\text{هر دو قرمز باشند})=۱-\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

۱۴۳۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید B این پیشامد باشد که فردا باران ببارد و A این پیشامد باشد که فردا برق قطع شود. باید $P(A')$ را حساب کنیم. ابتدا $P(A)$ را به کمک قانون احتمال کل به‌دست می‌آوریم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$
$$=۰/۸\times۰/۱۵+(۱-۰/۸)\times۰/۰۵=۰/۱۲+۰/۰۱=۰/۱۳$$

در نتیجه

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۱۳=۰/۸۷$$

۱۴۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(\text{مطلوب})=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}\right)+\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)=\frac{۳}{۲۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۹}{۱۳۲}$$

(احتمال انتخاب جعبهٔ A: $\frac{۱}{۲}$، احتمال زوج بودن مهرهٔ اول: $\frac{۶}{۱۱}$، احتمال زوج بودن مهرهٔ دوم: $\frac{۵}{۱۰}$؛ احتمال انتخاب جعبهٔ B: $\frac{۱}{۲}$، احتمال زوج بودن مهرهٔ اول: $\frac{۴}{۹}$، احتمال زوج بودن مهرهٔ دوم: $\frac{۳}{۸}$)

۱۴۳۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخابی باشد و B پیشامد آن باشد که مهرهٔ انتخابی جزء مهره‌های اولیهٔ داخل ظرف باشد. در این صورت B' پیشامد آن است که مهرهٔ انتخابی جزء ۵ مهرهٔ سفید اضافه شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

چون مهرهٔ انتخابی از بین ۱۰تا از مهره‌های اولیه و ۵ مهرهٔ اضافه شده انتخاب شده است، پس $P(B)=\frac{۱۰}{۱۵}$ و $P(B')=\frac{۵}{۱۵}$. همچنین اگر مهرهٔ انتخابی از مهره‌های اولیه باشد، احتمال سفید بودن آن برابر $\frac{۵}{۱۴}$ است و اگر از مهره‌های اضافه شده باشد، احتمال سفید بودن آن برابر ۱ است.

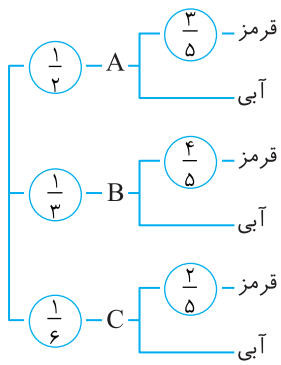
بنابراین

$$P(A|B)=\frac{۵}{۱۴},\quad P(A|B')=۱$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{۱۰}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}+\frac{۵}{۱۵}\times۱=\frac{۵}{۲۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵+۷}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

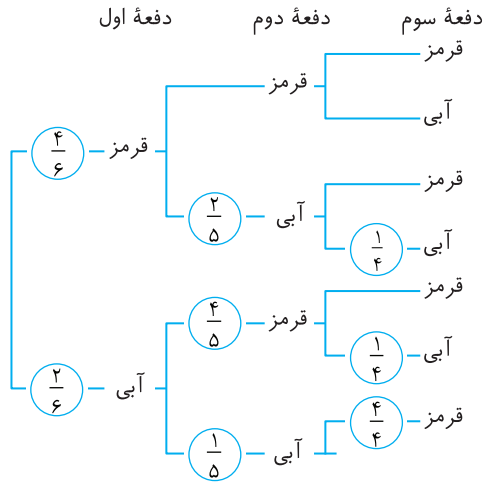
۱۴۳۷- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱۹}{۳۰}$$

۱۴۳۸- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

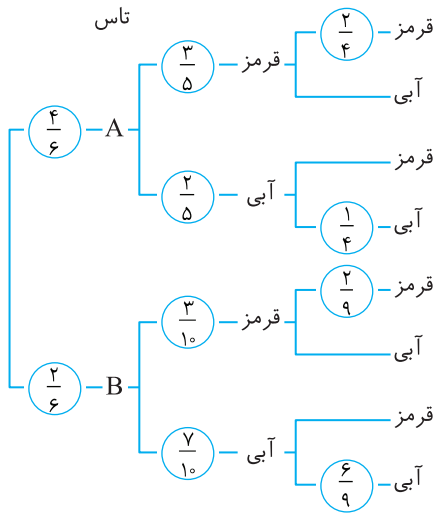
۱۴۳۹- گزینهٔ ۴ از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی ابتدا احتمال این را که رنگ مهره‌ها یکسان باشد، پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. حالا اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکسان باشد یعنی اینکه یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید:

$$P(\text{رنگ‌ها یکسان باشد})=P(\text{هر دو سبز})+P(\text{هر دو سفید})$$

$$=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$$

$$P(\text{رنگ‌ها متفاوت باشد})=۱-\frac{۱۳}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۴۴۰- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



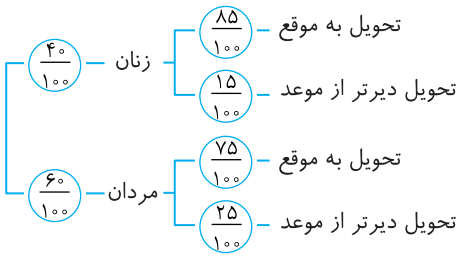
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

۱۴۴۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید R پیشامد قرمز بودن مهره و B پیشامد آبی بودن مهره باشد. در این صورت، اگر A پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(R)P(A|R)+P(B)P(A|B)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۱۴۴۲- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۲۱}{۱۰۰}=۰/۲۱$$

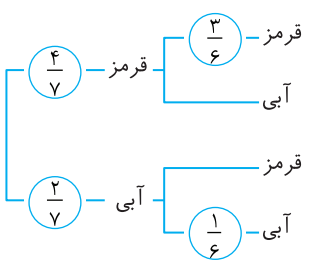
۱۴۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(\text{دو مهره همرنگ باشند})=۱-P(\text{دو مهره همرنگ نباشند})$$

بنابراین کافی است احتمال این را که دو مهره همرنگ باشند، حساب کنیم. توجه کنید که چون فقط یک مهرهٔ سبز در جعبه وجود دارد، امکان ندارد دو مهره سبز رنگ باشند. اکنون نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید. از روی این نمودار معلوم است که

$$P(\text{دو مهره همرنگ باشند})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱۴}{۴۲}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$.



۱۴۴۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول و A پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهرهٔ اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

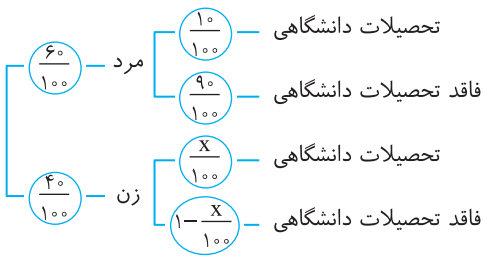
توجه کنید که اگر مهرهٔ اول سفید باشد، مهرهٔ دوم از بین ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B)=\frac{۵}{۷}$ و اگر مهرهٔ اول سیاه باشد، مهرهٔ دوم از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B')=\frac{۴}{۷}$.

۱۴۴۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که عددهای برابر نیایند (که از این‌ها (۱,۳) و (۳,۱) مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که عددهای دو تاس برابر بیایند (که از اینها (۱,۱) و سپس بار دیگر (۱,۱) مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۴ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{۳۰}{۳۶}\times\frac{۲}{۳۰}+\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۳۶^۲}=\frac{۷۲+۱}{۳۶^۲}=\frac{۷۳}{۳۶^۲}$$

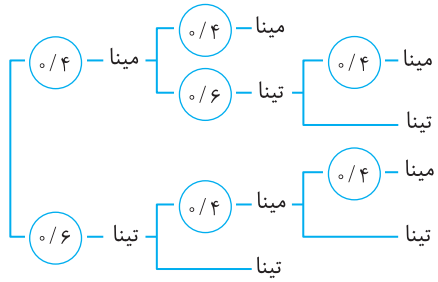
۱۴۴۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید x درصد زنانی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به فرض مسئله،

$$\left(\frac{60}{100}\times\frac{10}{100}\right)+\left(\frac{40}{100}\times\frac{x}{100}\right)=\frac{92}{1000}\Rightarrow 0/06+0/004x=0/092\Rightarrow x=8$$

۱۴۴۷- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



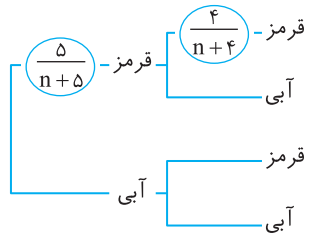
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$0/4\times0/4+0/4\times0/6\times0/4+0/6\times0/4\times0/4=\frac{352}{1000}=\frac{44}{125}$$

۱۴۴۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید A_1، A_2 و A_3 به‌ترتیب پیشامد این باشند که دانش‌آموز انتخاب شده در پایهٔ دهم، یازدهم یا دوازدهم باشد و A پیشامد این باشد که این دانش‌آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)$$
$$=0/4\times0/3+0/3\times0/4+0/3\times0/2=0/3$$

۱۴۴۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{5}{n+5}\times\frac{4}{n+4}=\frac{2}{11}\Rightarrow(n+5)(n+4)=11\times10\Rightarrow n^2+9n-90=0$$
$$(n-6)(n+15)=0\Rightarrow n=6\ ,\ n=-15\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

۱۴۵۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد تیراندازی با این کمان‌ها باشند و D پیشامد اصابت تیر به هدف باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{85}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{10}=\frac{255}{300}=0/85$$

۱۴۵۱- گزینهٔ ۱

۱۴۵۲- گزینهٔ ۲

۱۴۵۳- گزینهٔ ۴

۱۴۵۴- گزینهٔ ۱

۱۴۵۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\bar{x}$. در این صورت

$$\frac{3x_1-2+\cdots+3x_n-2}{n}=3\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)-2=3\bar{x}-2=13$$

بنابراین $\bar{x}=5$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{5x_1+2+\cdots+5x_n+2}{n}=5\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+2=5\bar{x}+2=27$$

۱۴۵۶- گزینهٔ ۴ برای تعیین میانه، ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. سپس اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو دادهٔ وسط را به عنوان میانه برمی‌گزینیم. پس

$$3,8,10,12,14,20\Rightarrow m=\frac{10+12}{2}=11$$

۱۴۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم

$$5,10,12,13,14,14,15,15,15,16,17,17,18,18,19,20$$

در نتیجه میانهٔ داده‌ها برابر است با ۱۵. برای داده‌های قبل و بعد از میانه، میانه‌ها برابر هستند با ۱۳/۵ و ۱۷/۵:

$$\underbrace{5,10,12,13,14}_{13/5},14,15,15 \qquad 15,16,\underbrace{17,17}_{17/5},18,18,19,20$$

۱۴۵۸- گزینهٔ ۲ واریانس داده‌ها تنها زمانی صفر است که همگی برابر باشند. فرض کنید $x_1=x_2=\cdots=x_5=a$. در نتیجه با افزودن سه عدد جدید، $\bar{x}=6=\frac{5a+5+8+10}{8}=\frac{5a+23}{8}$. در نتیجه $a=5$. بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2=\frac{6\times(5-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{8}=\frac{6+4+16}{8}=\frac{26}{8}=3/25$$

۱۴۵۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\bar{x}$. در نتیجه میانگین عددهای $2-\frac{x_1}{4},\ldots,2-\frac{x_n}{4}$ برابر با $2-\frac{\bar{x}}{4}$ است. بنابراین

$$\sigma_1^2=\frac{(2-\frac{x_1}{4}-2+\frac{\bar{x}}{4})^2+\cdots+(2-\frac{x_n}{4}-2+\frac{\bar{x}}{4})^2}{n}$$

در نتیجه

$$(1/2)^2=\frac{1}{16}\times\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$
$$\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=16\times(1/2)^2$$

همچنین با استدلال مشابه می‌توان دید

$$\sigma_2^2=\frac{(x_1-2-\bar{x}+2)^2+\cdots+(x_n-2-\bar{x}+2)^2}{n}$$
$$=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=16\times(1/2)^2$$

بنابراین $\sigma_2=4\times1/2=4/8$.

۱۴۶۰- گزینهٔ ۱ اگـر به هر داده، $\bar{x}$ را اضافه کنیم، میانگین نیز به اندازهٔ $\bar{x}$ اضافه می‌شود اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. بنابراین

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\bar{x}+\bar{x}=۲\bar{x}\ ,\quad CV_{\text{جدید}}=\frac{\sigma}{۲\bar{x}}=\frac{۱}{۲}CV_{\text{قدیم}}=\frac{۱}{۲}\times ۱/۲=۰/۶$$

۱۴۶۱- گزینهٔ ۱

۱۴۶۲- گزینهٔ ۲

۱۴۶۳- گزینهٔ ۳

۱۴۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\bar{x}=\frac{\text{مجموع نمرات ۸ درس}}{۸}=۱۲/۵$$

$$\text{مجموع نمرات ۸ درس}=۱۲/۵\times ۸=۱۰۰$$

$$\bar{x'}=\frac{۱۰۰+۱۴+۱۶}{۱۰}=\frac{۱۳۰}{۱۰}=۱۳$$

۱۴۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$. بنابراین

$$\bar{x'}=\frac{(x_۱+\bar{x})+(x_۲+۲\bar{x})+\cdots+(x_n+n\bar{x})}{n}$$

$$=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}+\bar{x}\left(\frac{۱+۲+\cdots+n}{n}\right)$$

$$=\bar{x}+\bar{x}\frac{n(n+۱)}{۲n}=\bar{x}+\left(\frac{n+۱}{۲}\right)\bar{x}=\bar{x}\left(\frac{n+۳}{۲}\right)$$

۱۴۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\text{میانگین}:\bar{x}=\frac{۵+۲+۸}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵,\quad \sigma^۲=\frac{(۵-۵)^۲+(۲-۵)^۲+(۸-۵)^۲}{۳}=۶$$

۱۴۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۱۰+۳\times ۱۲+۲\times ۱۳}{۶}=۱۲,\quad \sigma=\sqrt{\frac{(۱۰-۱۲)^۲+۳\times ۰+۲\times ۱}{۶}}=۱$$

۱۴۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\bar{x}=\frac{۸+۶+۵+۴+۲}{۵}\Rightarrow \bar{x}=۵$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(۸-۵)^۲+(۶-۵)^۲+(۵-۵)^۲+(۴-۵)^۲+(۲-۵)^۲}{۵}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{۲۰}{۵}}=\sqrt{۴}=۲\ ,\quad CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow CV=\frac{۲}{۵}$$

۱۴۶۹- گزینهٔ ۳ اگر انحراف معیار داده‌ها برابر با صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند، پس

$$x_۱=x_۲=x_۳=۱۰$$

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+۲۰}{۴}=\frac{۱۰+۱۰+۱۰+۲۰}{۴}=\frac{۵۰}{۴}=۱۲/۵$$

۱۴۷۰- گزینهٔ ۳ می‌دانیم واریانس پانزده دادهٔ اول برابر ۱۴ و واریانس ده دادهٔ دوم برابر ۷/۹ است. از طرف دیگر میانگین هر دو گروه یکسان است، بنابراین

$$\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۱۵}-\bar{x})^۲}{۱۵}=۱۴$$

$$\frac{(y_۱-\bar{x})^۲+(y_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(y_{۱۰}-\bar{x})^۲}{۱۰}=۷/۹$$

واریانس همهٔ این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۱۵}-\bar{x})^۲}{۲۵}$$

$$+\frac{(y_۱-\bar{x})^۲+(y_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(y_{۱۰}-\bar{x})^۲}{۲۵}$$

$$=\frac{۱۴\times ۱۵+۷/۹\times ۱۰}{۲۵}=\frac{۲۱۰+۷۹}{۲۵}=\frac{۲۸۹}{۲۵}\Rightarrow\sigma=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴$$

۱۴۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $n(S)=۶\times ۶=۳۶$. از طرف دیگر، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۱,۳),(۲,۲),(۲,۶),(۳,۱),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲),(۶,۶)\}$$

بنابراین $n(A)=۹$، در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$.

تجربی - ۹۷

۱۴۷۲- گزینهٔ ۲ توجـه کنیـد کـه $n(S)=\binom{۱۲}{۳}$. بایـد از هـر رنـگ یک مهره انتخاب کنیم. در نتیجه اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳}{۱۱}$$

تجربی - ۹۶

۱۴۷۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجـه کنید که $n(S)=\binom{۱۰}{۲}$. برای اینکه دو مهره همرنگ نباشند باید یکی سفید یکی سیاه، یکی سفید یکی قرمز، یا یکی سیاه و یکی قرمز باشد. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}=۳۱$$

بنابراین $P(A)=\frac{۳۱}{۴۵}$.

راه‌حل دوم اگر پیشـامد مورد نظر A باشـد، A' پیشامد این است که هر دو مهره همرنگ باشند. بنابراین

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=۱-\frac{۳+۱+۱۰}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

تجربی - ۹۴

۱۴۷۴- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید که $n(S)=۵!=۱۲۰$. فـرض کنید ابتدا عددی زوج خارج شود. در این صورت امکان ندارد که دو عدد فرد کنار هم نباشند.

ف ف ز ف ز

اگـر ابتدا عددی فرد خارج شـود، عددهای فرد را بـه $۳!$ طریق می‌توان خارج کرد و عددهای زوج را هم به $۲!$ طریق.

ف ز ف ز ف

بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=۳!\times ۲!=۱۲$، پس

$$P(A)=\frac{۱۲}{۱۲۰}=۰/۱$$

تجربی - ۹۲

۱۴۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=۲^۲\times۶=۲۴$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۳,ر,ر),(۶,ر,ر),(۳,پ,ر),(۳,ر,پ),(۶,ر,پ),(۶,پ,ر)\}$$

پس $n(A)=۶$ و $P(A)=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۴۷۶- گزینهٔ ۴

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۴۷۷- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $y_i=۲x_i-۷$، بنابراین

$$CV_y=\frac{۳}{۲}CV_x \xrightarrow[\sigma_y=۲\sigma_x]{\bar{y}=۲\bar{x}-۷} \frac{۲\sigma_x}{۲\bar{x}-۷}=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\times\frac{۳}{۲}$$

$$۴\bar{x}=۶\bar{x}-۲۱\Rightarrow \bar{x}=\frac{۲۱}{۲}$$

اکنون از اینکه $\bar{x}=\frac{۲۱}{۲}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۰}}{۲۰}=\frac{۲۱}{۲}\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۰}=۲۱۰$$

ریاضی - ۸۶

۱۴۷۸- گزینهٔ ۲ داده‌ها را بدون در نظر گرفتن x مرتب می‌کنیم:

$$۵۰,۶۳,۶۴,۶۵,۶۶,۷۰,۷۷$$

در حال حاضر میانه ۶۵ است. اگر عدد x را خود ۶۵ در نظر بگیریم،

$$\bar{x}=\frac{۵۰+۶۳+۶۴+۶۵+۶۵+۶۶+۷۰+۷۷}{۸}$$

$$=۶۵+\frac{-۱۵-۲-۱+۰+۰+۱+۵+۱۲}{۸}$$

$$=۶۵+\frac{-۱۸+۱۸}{۸}\Rightarrow \bar{x}=۶۵$$

پس $x=۶۵$ قابل قبول است.

خارجی از کشور ریاضی - ۹۳

۱۴۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های x_i را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵}=۳,\quad \overline{x^۲}=\frac{۱+۴+۹+۱۶+۲۵}{۵}=\frac{۵۵}{۵}=۱۱$$

$$\sigma_x^۲=۱۱-(۳)^۲=۲\Rightarrow \sigma_x=\sqrt{۲}$$

اکنون برای داده‌های u_i به‌دست می‌آید

$$\bar{u}=۱۲\bar{x}+۶=۱۲\times۳+۶=۴۲,\quad \sigma_u=۱۲\times\sigma_x=۱۲\sqrt{۲}$$

$$(CV)_u=\frac{\sigma_u}{\bar{u}}=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۷}\simeq\frac{۲\times۱/۴}{۷}=۰/۴$$

ریاضی - ۹۵

۱۴۸۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم واریانس ۱۵ دادهٔ اول برابر ۱۲ و واریانس ۱۰ دادهٔ دوم برابر ۷/۶ است، بنابراین

$$\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_n-\bar{x})^۲}{۱۵}=۱۲$$

$$\frac{(y_۱-\bar{y})^۲+(y_۲-\bar{y})^۲+\cdots+(y_n-\bar{y})^۲}{۱۰}=۷/۶$$

بنابراین از آنجا که $\bar{x}=\bar{y}$، واریانس همهٔ این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{((x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_n-\bar{x})^۲)}{۲۵}$$

$$+\frac{((y_۱-\bar{y})^۲+(y_۲-\bar{y})^۲+\cdots+(y_n-\bar{y})^۲)}{۲۵}$$

$$=\frac{۷۶+۱۸۰}{۲۵}=\frac{۲۵۶}{۲۵}\Rightarrow\sigma=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

ریاضی - ۸۹

۱۴۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$. باید دو مهره از یک رنگ و یک مهره از رنگ دیگر انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}=۷۹$$

در نتیجه $P(A)=\frac{۷۹}{۱۲۰}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۴۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $P(A)=۰/۹$ و $P(B)=۰/۸$. چون پیشامدهای A و B مستقل‌اند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=۰/۹+۰/۸-۰/۹\times۰/۸=۱/۷-۰/۷۲=۰/۹۸$$

تجربی - ۹۵

۱۴۸۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۴}{۴}$. اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}=۲۸۰$.

بنابراین

$$P(A)=\frac{۲۸۰}{\binom{۱۴}{۴}}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۴۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$. باید سه مهره از ۴ مهرهٔ سفید یا سه مهره از ۵ مهرهٔ سیاه انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}=۴+۱۰=۱۴$. پس

$$P(A)=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۴۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۱}{۳}$. فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هیچ‌کدام از موش‌ها سفید نباشد، یعنی هر سه موش سیاه هستند. بنابراین

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=۱-\frac{۴}{۳۳}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۴۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۸۰+۸۱+۸۵+۹۲+۹۴+۹۶+۹۷+۱۰۰+۱۰۰+۱۰۳+۱۰۴+۱۰۸}{۱۲}=۹۵$$

اگر داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس با ۴۰- جمع کنیم، میانگین هم سه برابر شده و با ۴۰- جمع می‌شود. در نتیجه $\bar{x}_{\text{جدید}}=۳\times۹۵-۴۰=۲۴۵$.

ریاضی - ۹۲

۱۴۸۷- گزینهٔ ۴ با توجه به $n=۲۵$ ، $\bar{x}=۳۰$ و $\sigma=۸$،

$$۶۴=\frac{\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}}{۲۵}$$

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}=۲۵\times۶۴=۱۶۰۰$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ نیز دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i-۳۰$	-۲۰	-۱۵	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌های دور افتاده برابر است با

$$۴۰۰+۲۲۵+۲۲۵+۴۰۰=۱۲۵۰$$

اکنون واریانس ۲۱ دادهٔ باقی‌مانده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\sigma^۲=\frac{۶۴\times۲۵-۱۲۵۰}{۲۵-۴}=\frac{۱۶۰۰-۱۲۵۰}{۲۱}=\frac{۳۵۰}{۲۱}=\frac{۵۰}{۳}\simeq۱۶/۶۶$$

تجربی - ۹۳

۱۴۸۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا میانگین داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow\bar{y}=۲۵$$

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۲۱}-\bar{x})^۲}{۲۱}$$

$$=\frac{۱۸\times۹+(۲۰-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۸-۲۵)^۲}{۲۱}=\frac{۲۰۰}{۲۱}\simeq۹/۵۲$$

دقت کنید که برای ۱۸ دادهٔ اولیه مجموع مربع اختلاف مقادیر داده‌ها از میانگین برابر ۱۸×۹ است.

راه‌حل دوم ابتدا میانگین داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم

$$\bar{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow\bar{y}=۲۵$$

برای محاسبهٔ واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{n}-(\bar{x})^۲\Rightarrow۹=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{۱۸}-۶۲۵$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=۱۸\times۶۳۴=۱۱۴۱۲$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برای ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با $A=۱۱۴۱۲+۲۰^۲+۲۷^۲+۲۸^۲=۱۳۳۲۵$. در نتیجه

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{A}{۲۱}-(۲۵)^۲=\frac{۱۳۳۲۵}{۲۱}-۶۲۵\simeq۹/۵۲$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۴۸۹- گزینهٔ ۴ میانگین ۳ دادهٔ ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با $\frac{۱۶+۲۴+۲۶}{۳}=۲۲$. بنابراین میانگین ۱۱ دادهٔ دیگر نیز ۲۲ است و چون واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{(۲۲-۲۲)^۲+(۲۲-۲۲)^۲+\cdots+(۲۲-۲۲)^۲}{۱۴}$$

$$+\frac{(۱۶-۲۲)^۲+(۲۴-۲۲)^۲+(۲۶-۲۲)^۲}{۱۴}=\frac{۳۶+۴+۱۶}{۱۴}=۴$$

بنابراین انحراف معیار برابر $\sigma=۲$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۴۹۰- گزینهٔ ۱ برای مقایسهٔ دقت عمل این دو دستگاه کافی است که ضریب تغییرات آن‌ها را مقایسه کنیم

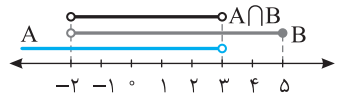
$$\begin{cases}CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{۳/۶}{۱۵۰}=۰/۰۲۴\\ CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{۳/۸۴}{۱۶۰}=۰/۰۲۴\end{cases}\Rightarrow CV_A=CV_B$$

با توجه به برابری ضریب تغییرات دو دستگاه A و B، دقت عمل هر دو پیرامون میانگین یکسان است.

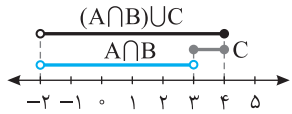
خارج از کشور ریاضی - ۹۵

فصل هشتم

۱۴۹۱- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $A\cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:

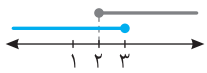


پس $A\cap B=(-2,3)$. اجتماع دو مجموعهٔ $A\cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A\cap B)\cup C=(-2,4]$.

۱۴۹۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $(-\infty,3)\cup[2,+\infty)=\mathbb{R}$، بنابراین می‌خواهیم $\mathbb{R}-(1,4]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$ است.



۱۴۹۳- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{1}{4}$ باید از $\frac{1}{n+3}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+3}<\frac{1}{4}\Rightarrow n+3>4\Rightarrow n>1$$

عدد $\frac{1}{4}$ نباید از $\frac{1}{n+1}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{4}\Rightarrow n+1\leq 4\Rightarrow n\leq 3$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۴۹۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{2a^2+1+(-a^2)}{2}=\frac{a^2+1}{2}=5\Rightarrow a^2=9$$

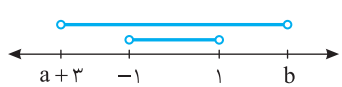
بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-9,19]$ است و طول این بازه برابر است با

$$19-(-9)=28$$

۱۴۹۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases}a+3\leq -1\\ b\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leq -4\\ b\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\geq 4\\ b\geq 1\end{cases}$$

بنابراین $b-a\geq 1+4=5$. در ضمن اگر $a=-4$ و $b=1$، شرط داده شده در مسئله برقرار است.



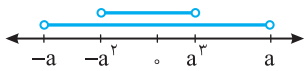
۱۴۹۶- گزینهٔ ۱ طول بازهٔ $(a,b+2)$ برابر است با $b+2-a=b-a+2$ و طول بازهٔ $(2a-1,2b+3)$ برابر است با

$$2b+3-(2a-1)=2(b-a+2)$$

بنابراین طول بازهٔ $(a,b+2)$ نصف طول بازهٔ $(2a-1,2b+3)$ است.

۱۴۹۷- گزینهٔ ۳ چون $0<a<1$، پس $a^3<a$ و $-a<-a^2$، بنابراین

$$(-a,a)\cap(-a^2,a^3)=(-a^2,a^3)$$



۱۴۹۸- گزینهٔ ۲ مجموعه‌های A_2، A_3، ... و A_{10} به شکل زیر هستند:

$$A_2=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],\quad A_3=[\frac{2}{3},\frac{4}{3}],\quad \dots,\quad A_{10}=[\frac{9}{10},\frac{11}{10}]$$

واضح است که مجموعهٔ A_2 شامل همهٔ مجموعه‌های دیگر است. یعنی همهٔ مجموعه‌های دیگر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A_2 هستند. پس اجتماع همهٔ این مجموعه‌ها همان A_2 است.

۱۴۹۹- گزینهٔ ۴ از تساوی $(-1,1]\cap[a,b)=[0,1]$ معلوم می‌شود $a=0$ و $b\geq 1$. از تساوی $(-1,1]\cup[a,b)=(-1,4)$ معلوم می‌شود $b=4$. بنابراین

$$a+b=4$$

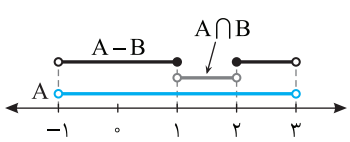
۱۵۰۰- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-2a+1,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+4]$ منطبق باشد. در نتیجه

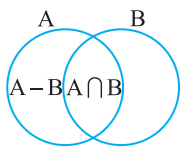
$$-2a+1=a+4\Rightarrow a=-1$$

۱۵۰۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی با ۲ هستند و مجموعهٔ مورد نظر شامل اعضای A نیست، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B-A=(0,4)-[-2,2]=(2,4]$.

۱۵۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A-B=A-(A\cap B)=(-1,3)-(1,2)=(-1,1]\cup[2,3)$$





۱۵۰۳- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس $2a-1<a<3-3a$. از نابرابری $2a-1<a$ نتیجه می‌شود $a<1$ و از نابرابری $a<3-3a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{3}{4}$. بنابراین باید $a<\frac{3}{4}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(2a-1,3-3a)$ بازه باشد این است که $2a-1<3-3a$، یعنی $a<\frac{4}{5}$، که اگر $a<\frac{3}{4}$، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{3}{4})$ است.

۱۵۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول بازهٔ $(a-5,2a+1)$ برابر است با $(2a+1)-(a-5)$. بنابراین $2a+1-a+5\leq 4$، پس $a\leq -2$.

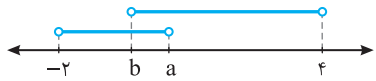
از طرف دیگر طول بازهٔ $(a-6,3a-1)$ برابر است با

$$(3a-1)-(a-6)=2a+5$$

چون $a\leq -2$، پس $2a\leq -4$ و در نتیجه $2a+5\leq 1$. پس حداکثر طول بازهٔ مورد نظر برابر ۱ است.

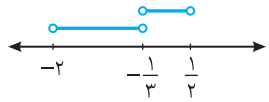
۱۵۰۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$



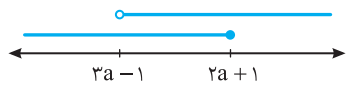
بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$



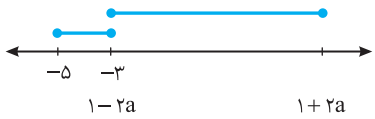
۱۵۰۶- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد -۲ شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $a+۲=-۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به‌صورت $[-۲,۱]\cap[-۲,b]=[-۴,۲]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۱<۲$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۱۵۰۷- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $(-\infty,۲a+۱]\cup(۳a-۱,+\infty)=\mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $۳a-۱\leq ۲a+۱$، یعنی $a\leq ۲$.



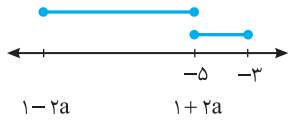
۱۵۰۸- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول



$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱-۲a<۱+۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۱۵۰۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $I=(\frac{۱}{n},\frac{n+۲}{۲})$، بنابراین به ازای $n=۱$

$$I=(۱,\frac{۳}{۲})\Rightarrow$$ شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.

به‌ازای $n=۲$،

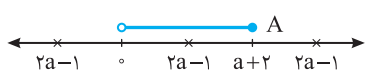
$$I=(\frac{۱}{۲},۲)\Rightarrow ۱\in I$$

به ازای $n=۳$،

$$I=(\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲})\Rightarrow ۱,۲\in I$$

به این ترتیب به ازای $n\geq ۳$، بازهٔ I حداقل شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ است. پس فقط به ازای $n=۲$، بازهٔ داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۱۵۱۰- گزینهٔ ۳ اگر به بازهٔ A دقت کنید معلوم می‌شود که $a+۲>۰$، پس $a>-۲$. از روی محور زیر، برحسب اینکه $۲a-۱$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A\cap B$ را به‌دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



	حالت (۱)	حالت (۲)	حالت (۳)
$A\cap B$	$(۰,a+۲]$	$(۲a-۱,a+۲]$	$\varnothing$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A\cap B\not\subseteq(۱,۳]$. در حالت (۲) باید $۲a-۱\leq ۱$ و $a+۲\leq ۳$. از نابرابری اول به‌دست می‌آید $a\leq ۱$ و از نابرابری دوم به‌دست می‌آید $a\leq ۱$ پس $a=۱$. در حالت (۳) باید $a+۲\leq ۲a-۱$ و در نتیجه $a\geq ۳$. در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ است. پس $a\in[۳,+\infty)\cup\{۱\}$.

۱۵۱۱- گزینهٔ ۴ چون A نامتناهی است و $A\subseteq B$، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۱۵۱۲- گزینهٔ ۱ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعهٔ مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست.

۱۵۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,\ldots\},\quad C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\ldots\}$$

بنابراین $B\cap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,\ldots\}$ و در نتیجه $A-(B\cap C)=\{۱,۵\}$.

۱۵۱۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{\ldots,۰,۱,۹,۱۰,\ldots\}$. در نتیجه $A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$.

یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,||x-۵|>۳\}$، پس $A'=\{x\,||x-۵|\leq ۳\}$.

از نابرابری $|x-۵|\leq ۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\leq x-۵\leq ۳\Rightarrow ۲\leq x\leq ۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس $A'=\{۲,۳,\ldots,۸\}$، بنابراین $n(A')=۷$.

۱۵۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰$$

$$n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۵۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)\Rightarrow ۲۴=۳n(B)\Rightarrow n(B)=۸$$

۱۵۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

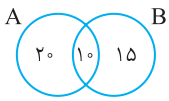
$$۱۶=۲۴-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$۱۶=n(A-B)+۸+۳\Rightarrow n(A-B)=۱۶-۱۱=۵$$

۱۵۱۸- گزینهٔ ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با ۲۰-۳۰، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر ۲۵=۲۰-۴۵ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.



۱۵۱۹- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۱ را با A و مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A)=۶۵,\quad n(B)=۴۵,\quad n(A\cap B)=۲۰$$

در نتیجه $n(A\cup B)=۶۵+۴۵-۲۰=۹۰$. یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند، پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۵۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳k-۱+۳-(k-۲)=۲k+۴$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)\Rightarrow k-۲\le ۳\Rightarrow k\le ۵$$

بنابراین $n(A\cup B)=۲k+۴\le ۲\times ۵+۴=۱۴$.

۱۵۲۱- گزینهٔ ۳ گزینهٔ (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال، $A=(۰,۱]$ و $B=[۱,۲)$ نامتناهی هستند، اما $A\cap B=\{۱\}$ متناهی است.

۱۵۲۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{۳,۵\}$، پس

$$(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۶\},\quad C\cap(A\cap B)'=\{۱,۲\}$$

۱۵۲۳- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A'، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty),\quad B'=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty),\quad C'=[۰,+\infty)$$

بنابراین $A'-B'=(-۱,۱]$ و در نتیجه $(A'-B')-C'=(-۱,۰)$.

۱۵۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{۱,۲,۳,\dots,۹\}$ است، پس $B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$. در نتیجه

$$A\cap B'=\{۱,۶\}\Rightarrow(A\cap B')\cup C=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

$n((A\cap B')\cup C)=۷$، بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

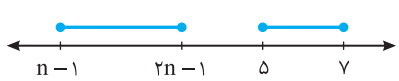
$$A\cap B'=A-B=\{۱,۶\},\quad C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

بنابراین $(A\cap B')\cup C=\{۱,۶\}\cup\{۲,۳,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$.

پس مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

۱۵۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-۱,۲n-۱]$ بازه باشد، باید $n>۰$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$۲n-۱<۵\Rightarrow n<۳$$

حالت دوم

$$n-۱>۷\Rightarrow n>۸$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۵۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$$

به این ترتیب

$$\begin{cases}n(A)+n(B)=۲۴\\ n(A)-n(B)=۴\end{cases}\Rightarrow n(B)=۱۰$$

۱۵۲۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$، پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

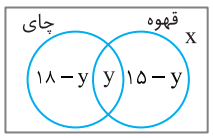
۱۵۲۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۵۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $۳۰-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+۱۸-y+y+۱۵-y=۳۰\Rightarrow x=y-۳$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\ge ۰,\ y\ge ۰,\quad ۱۵-y\ge ۰\Rightarrow y\le ۱۵\Rightarrow ۰\le y\le ۱۵$$

پس

$$۰\le y-۳\le ۱۲\Rightarrow ۰\le x\le ۱۲$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\ge n(B)=۱۵$، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\le ۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۵۳۰- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)$$

اکنون توجه کنید که $۱۴=n(A)+۲n(B)\le n(B)+۲n(B)=۳n(B)$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\ge ۵$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(B)\ge ۵$$

۱۵۳۱- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل nاُم دارای $۳(n-۱)+۴$ چوب کبریت است. یعنی $۳n+۱$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۵۳۲- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $۴(n-۱)+۵$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $۴n+۱$ چوب کبریت در شکل nاُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۵۳۳- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله nاُم به تعداد $۴\times(n-۱)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $۴(n-۱)+۵=۴n+۱$، یعنی شکل nاُم، $۴n+۱$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۵۳۴- گزینهٔ ۱ در شکل nاُم تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰\Rightarrow(n-۹)(n+۸)=۰$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۹$، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۱۵۳۵- گزینهٔ ۴ در شکل nاُم، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد که $(n+۱)$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+۱)^۲-(n+۱)$ است که برابر است با $n^۲+n$.

۱۵۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=۳n^۲-n+۲a_۱\xrightarrow{n=۱}a_۱=۳-۱+۲a_۱\Rightarrow a_۱=-۲$$

بنابراین $a_۴=۳\times۱۶-۴+۲(-۲)=۴۰$.

۱۵۳۷- گزینهٔ ۳ با حل معادلهٔ $a_n=\frac{۱}{۸۰}$ مقدار n را که شمارهٔ جملهٔ مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^۲+۱}{۸۱n^۲-۱}=\frac{۱}{۸۰}\Rightarrow۸۰n^۲+۸۰=۸۱n^۲-۱\Rightarrow n^۲=۸۱\Rightarrow n=۹$$

بنابراین $a_۹$ برابر $\frac{۱}{۸۰}$ است.

۱۵۳۸- گزینهٔ ۲ باید ببینیم نامعادلهٔ $a_n<۳/۹$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{۴n-۱}{n+۶}<\frac{۳۹}{۱۰}\Rightarrow۴۰n-۱۰<۳۹n+۳۹\times۶\Rightarrow n<۲۴۴$$

بنابراین $n\le۲۴۳$، یعنی ۲۴۳ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۳/۹ هستند.

۱۵۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۷۲<a_n<۱۶۰\Rightarrow۷۲<n^۲+۲n-۸<۱۶۰$$

بنابراین

$$n^۲+۲n-۸<۱۶۰\Rightarrow(n-۱۲)(n+۱۴)<۰\Rightarrow۱\le n<۱۲\Rightarrow۱\le n\le۱۱$$

$$n^۲+۲n-۸>۷۲\Rightarrow(n-۸)(n+۱۰)>۰\Rightarrow n>۸\Rightarrow n\ge۹$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۵۴۰- گزینهٔ ۱ عدد آخر دستهٔ اول ۵، عدد آخر دستهٔ دوم ۳×۵، عدد آخر دستهٔ سوم ۵×۵،... و عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $۵\times(۲n-۱)$ است. پس عدد آخر دستهٔ چهل‌ونهم $۴۸۵=۵\times(۲\times۴۹-۱)$ است. پس عدد اول دستهٔ پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۵۴۱- گزینهٔ ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $۹(n-۱)+۴$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۵۴۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	...	$n+(n+۲)+n$

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۵۴۳- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+n$$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$.

بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۱۵۴۴- گزینهٔ ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$. به این ترتیب $\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۸}{۱۷}$. پس $n=۱۷$.

۱۵۴۵- گزینهٔ ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۱۵۴۶- گزینهٔ ۳ چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow ۲۶-۱۳k=۳۲-۸k\Rightarrow ۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.

۱۵۴۷- گزینهٔ ۲ چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $۲,۳,۴,۵,\ldots$ گزینهٔ (۲) $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$

گزینهٔ (۳) $۲,۳,۱۰,۲۳,\ldots$ گزینهٔ (۴) $۲,۳,۸,۱۷,\ldots$

بنابراین فقط $n^۲-(-۱)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۱۵۴۸- گزینهٔ ۲ به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad a_۴=\frac{۳}{۴}a_۳=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{۱}{n}$، پس $a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$.

۱۵۴۹- گزینهٔ ۴ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-۳x^۲+۱۲x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر $a_۲$ است. در نتیجه

$$a_۲=۸\Rightarrow -۳\times۴+۱۲\times۲+c=۸\Rightarrow c=-۴$$

۱۵۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_۱=\log_۲\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۲=\log_۲\frac{۲}{۳}\ ,\quad a_۳=\log_۲\frac{۳}{۴}\ ,\quad \ldots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_۲\frac{۱}{۲}+\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۴}+\cdots+\log_۲\frac{n-۱}{n}+\log_۲\frac{n}{n+۱}$$

$$=\log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}\times\frac{n}{n+۱})=\log_۲\frac{۱}{n+۱}=-\log_۲(n+۱)$$

بنابراین

$$-\log_۲(n+۱)=-۳\Rightarrow n+۱=۲^۳=۸\Rightarrow n=۷$$

۱۵۵۱- گزینهٔ ۳ چون $a_{n+۱}-a_n=-۲$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -۲ است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_۵=a_۱+۴d=۳+۴(-۲)=-۵\ ,\quad a_{۱۰}=a_۱+۹d=۳+۹(-۲)=-۱۵$$

بنابراین $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}=\frac{-۱۵}{-۵}=۳$.

۱۵۵۲- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$۳(a_۱+۳d)+۴(a_۱+۴d)-۷(a_۱+۸d)=۱۲۴$$

پس $-۳۱d=۱۲۴$ و در نتیجه $d=-۴$.

۱۵۵۳- گزینهٔ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$۳x-۴-(۳x-۱)=-۳$$

بنابراین

$$۴x-۲=(۳x-۴)-۳\Rightarrow x=-۵$$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $۴(-۵)-۲=-۲۲$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-۲۲-۳=-۲۵$.

۱۵۵۴- گزینهٔ ۲ چون $a_۱=-۱$ و $d=۲-(-۱)=۳$، پس $a_n=-۱+۳(n-۱)$ یعنی $a_n=۳n-۴$. بنابراین $a_k=۳k-۴=۲۱۸$، پس $k=۷۴$.

۱۵۵۵- گزینهٔ ۲ چون $a_۱=۲$ و $d=۴$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=۲+۴(n-۱)=۴n-۲$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<۵۰۰$ باشد. یعنی

$$۴n-۲<۵۰۰\Rightarrow n<\frac{۵۰۲}{۴}\Rightarrow n\le۱۲۵$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۵۵۶- گزینهٔ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر ۱۸۰° است. پس

$$a-d+a+a+d=۱۸۰^\circ\Rightarrow a=۶۰^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر ۶۰° است.

۱۵۵۷- گزینهٔ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-۲d,a-d,a,a+d,a+۲d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر ۵۴۰° است، پس

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵۴۰^\circ$$

بنابراین $۵a=۵۴۰^\circ$ و در نتیجه $a=۱۰۸^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه ۸۶° است، پس $a-۲d=۸۶^\circ$ و در نتیجه $d=۱۱^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+۲d$ برابر است با $۱۰۸^\circ+۲\times۱۱^\circ=۱۳۰^\circ$.

۱۵۵۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $a_۱=\sqrt{۳}-۵$ و $a_۶=\sqrt{۳}+۵$، پس

$$a_۶=a_۱+۵d\Rightarrow\sqrt{۳}+۵=\sqrt{۳}-۵+۵d\Rightarrow d=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{۳}-۵+۲$ یا همان $\sqrt{۳}-۳$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{۳}+۵)-(\sqrt{۳}-۵)}{۴+۱}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{۳}-۵)+۲=\sqrt{۳}-۳$$

۱۵۵۹- گزینهٔ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=۱۵\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$$

از طرف دیگر،

$$(a-d)\times a\times(a+d)=۴۵\Rightarrow a(a^۲-d^۲)=۴۵$$

چون $a=۵$، پس

$$۵(۲۵-d^۲)=۴۵\Rightarrow d^۲=۱۶\Rightarrow d=\pm۴$$

۱۵۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_۱=d\ ,\quad a_n=a_۱+(n-۱)d=d+(n-۱)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_۱a_۲a_۳\ldots a_۹=۱۰^۸\times۱۰!\Rightarrow d(۲d)(۳d)\cdots(۹d)=۱۰^۸\times۱۰!$$

$$d^۹\times۹!=۱۰^۹\times۹!\Rightarrow d=۱۰$$

بنابراین $a_{۱۰}=۱۰d=۱۰۰$.

۱۵۶۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=۱$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۱=۱$. با قرار دادن $n=۲$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=\frac{۱}{۳}$.

بنابراین $d=a_۲-a_۱=-\frac{۲}{۳}$. پس $a_۱-d=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول $a_۱$ به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۲}{۳}n+\frac{۵}{۳}$. پس

$$a_۱-d=\frac{۵}{۳}$$

۱۵۶۲- گزینهٔ ۲ از $a_۱+a_۳=۱۶$ نتیجه می‌شود

$$a_۱+a_۱+۲d=۱۶\Rightarrow a_۱+d=۸$$

چون $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$، پس

$$a_۱+d+a_۱+۴d+a_۱+۷d=۵۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۲d=۵۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_۱+d=۸\\ ۳a_۱+۱۲d=۵۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=۳$.

۱۵۶۳- گزینهٔ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$۲a-۱=\frac{a+۱-۳a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $d=(۲a-۱)-a=a-۱=-\frac{۱}{۲}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۱)=۱-\frac{n}{۲}$$

۱۵۶۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{۲}\Rightarrow ۲(a+c)=a+۲b+c\Rightarrow a+c=۲b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۱۵۶۵- گزینهٔ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت زیر است

$$a_n=۱۹۶-۴(n-۱)=۲۰۰-۴n$$

بنابراین $a_{۵۰}=۰$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -۴ است، پس

$$a_{۴۷}=۱۲,\quad a_{۴۸}=۸,\quad a_{۴۹}=۴,\quad a_{۵۰}=۰$$

۱۵۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۰}-a_۲}{۱۰-۲}=-\frac{۳۲}{۸}=-۴$$

بنابراین $a_۴=a_۱+۳d=a_۱-۱۲=۱۵$ و در نتیجه $a_۱=۲۷$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=۲۷-۴(n-۱)=۳۱-۴n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>۰\Rightarrow ۳۱-۴n>۰\Rightarrow n\le ۷$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۱۵۶۷- گزینهٔ ۲ چون $x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$۶,۲,a\Rightarrow\frac{۶+a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲,\quad ۲,۶,a\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰$$

$$۶,a,۲\Rightarrow\frac{۶+۲}{۲}=a\Rightarrow a=۴,\quad ۲,a,۶\Rightarrow\frac{۲+۶}{۲}=a\Rightarrow a=۴$$

$$a,۶,۲\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰,\quad a,۲,۶\Rightarrow\frac{a+۶}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۵۶۸- گزینهٔ ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$$

۱۵۶۹- گزینهٔ ۳ چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۱۵۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس $m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$.

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با

$$d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$$

۱۵۷۱- گزینهٔ ۱ دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۱۵۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۱۵۷۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله x_1 و x_2 باشند. در این صورت

$$\frac{x_1+x_2}{2}=۴/۵\Rightarrow x_1+x_2=۹\ ,\quad \sqrt{x_1x_2}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_1x_2=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$.

۱۵۷۴- گزینهٔ ۳ از تساوی $a_1a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود

$$a_1\times a_1r^۵=۲۷\Rightarrow a_1^۲r^۵=۲۷$$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید

$$a_1r\times a_1r^۳=۹\Rightarrow a_1^۲r^۴=۹$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1^۲r^۵}{a_1^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_1=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_1=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_1r^۴=\frac{۱}{۳}\times ۳^۴=۲۷$.

۱۵۷۵- گزینهٔ ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_1r^۴+a_1r^۷=a_1r^۴(۱+r^۳)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_۷+a_۸=a_1r^۶+a_1r^۷=a_1r^۶(۱+r)$$

بنابراین $\frac{a_۵+a_۸}{a_۷+a_۸}=\frac{a_1r^۴(۱+r^۳)}{a_1r^۶(۱+r)}=\frac{۱+r^۳}{r^۲(۱+r)}=\frac{۱-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲})}=۷$.

۱۵۷۶- گزینهٔ ۳ این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^۲},\frac{a}{r},a,ar,ar^۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲=۱۰۲۴\Rightarrow a^۵=۲^{۱۰}=۴^۵$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۱۵۷۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt۲,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۱۶\sqrt۲$$

پس $a_1=\sqrt۲$ و $a_۹=۱۶\sqrt۲$. بنابراین

$$a_1r^۸=۱۶\sqrt۲\Rightarrow\sqrt۲r^۸=۱۶\sqrt۲\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

در نتیجه $a_۳=a_1r^۲=۲\sqrt۲$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{۷+۱}=\frac{۱۶\sqrt۲}{\sqrt۲}\Rightarrow r^۸=۱۶=۲^۴\Rightarrow r=\pm\sqrt۲$$

$$a_۳=a_1r^۲=\sqrt۲\times(\pm\sqrt۲)^۲=۲\sqrt۲$$

۱۵۷۸- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $-\frac{۹۵}{۸}-(-۱۲)=\frac{۱}{۸}$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-۱۲+\frac{۱}{۸}(n-۱)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{۸۹}=-۱۲+\frac{۱}{۸}\times(۸۹-۱)=-۱$. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه $۲۴۳r^۵=(۳r)^۵$ = جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی. بنابراین

$$(۳r)^۵=-۱\Rightarrow ۳r=-۱\Rightarrow r=-\frac{۱}{۳}$$

۱۵۷۹- گزینهٔ ۱ چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=۱۶\Rightarrow b=۱۶-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+۴$ می‌شود. بنابراین $۶۴=a(b+۴)=a(۱۶-a+۴)=۲۰a-a^۲$.

پس $a^۲-۲۰a+۶۴=۰$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>۰$).

۱۵۸۰- گزینهٔ ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow ۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+۵d}{a+d}=\frac{۳d+۵d}{۳d+d}=\frac{۸d}{۴d}=۲$.

۱۵۸۱- گزینهٔ ۲ چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt۲$، پس $\frac{a_1r^۷}{a_1r^۵}=\sqrt۲$. در نتیجه $r^۲=\sqrt۲$. بنابراین $\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_1r^۶}{a_1r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt۲^۲=۲$.

۱۵۸۲- گزینهٔ ۳ چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow ۲^{۱۲x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow ۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$.

۱۵۸۳- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{۱۶}a}{\log_۴a}=\frac{\frac{\log a}{\log ۱۶}}{\frac{\log a}{\log ۴}}=\frac{\log ۴}{\log ۱۶}=\frac{\log ۴}{۲\log ۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$a_۷=a_1r^۶\Rightarrow\frac{۱}{۳۲}=\log_۴a\times\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\log_۴a=۲\Rightarrow a=۴^۲=۱۶$$

۱۵۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۵-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_1r^۴-a_1=۱۳۰\Rightarrow a_1(r^۴-۱)=۱۳۰$$

$$a_۴-a_۲=۲۵\Rightarrow a_1r^۳-a_1r=۲۵\Rightarrow a_1r(r^۲-۱)=۲۵$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^۴-۱}{r(r^۲-۱)}=\frac{۱۳۰}{۲۵}\Rightarrow\frac{(r^۲-۱)(r^۲+۱)}{r(r^۲-۱)}=\frac{۲۶}{۵}\Rightarrow\frac{r^۲+۱}{r}=\frac{۲۶}{۵}$$

$$۵(r^۲+۱)=۲۶r\Rightarrow ۵r^۲-۲۶r+۵=۰\Rightarrow r=۵\ ,\ r=\frac{۱}{۵}\ (\text{غ.ق.ق})$$

به این ترتیب،

$$a_1r(r^۲-۱)=۲۵\Rightarrow a_1\times۵\times۲۴=۲۵\Rightarrow a_1=\frac{۵}{۲۴}$$

در نتیجه $a_۲=a_1r=\frac{۲۵}{۲۴}$.

۱۵۸۵- گزینهٔ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^۶=\frac{b}{a}$.

در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^۵=(۲r)^۵=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^۶=(۲r)^۵\Rightarrow r^۶=۳۲r^۵\Rightarrow r=۳۲$$

۱۵۸۶- گزینهٔ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم.

پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=۶۴\Rightarrow a^۳=۶۴\Rightarrow a=۴$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=۱۴\Rightarrow a(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴$$

$$۴(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴\Rightarrow ۲r^۲-۵r+۲=۰\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}, r=۲$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{۱}{۲}$، به‌صورت $۸, ۴, ۲$ و به ازای $r=۲$، به‌صورت $۲, ۴, ۸$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۵۸۷- گزینهٔ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و $ar^۲$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^۲+(ar)^۲=(ar^۲)^۲$. بنابراین

$$a^۲(۱+r^۲)=a^۲r^۴\Rightarrow r^۴-r^۲-۱=۰\Rightarrow r^۲=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$$

۱۵۸۸- گزینهٔ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}۲y+x=۲x+y\Rightarrow y=x\\ ۲y+x=x+۴\Rightarrow ۲y=۴\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

پس $x=y=۲$، بنابراین $x+۲y=۶$.

۱۵۸۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a_۳=a-۳,\quad a_۵=a-۵,\quad a_۶=a-۶$$

بنابر فرض، $(a-۵)^۲=(a-۳)(a-۶)$. بنابراین

$$a^۲-۱۰a+۲۵=a^۲-۹a+۱۸\Rightarrow a=۷$$

در نتیجه $a_{۱۰}=۷-۱۰=-۳$.

۱۵۹۰- گزینهٔ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+۲d$، $a+۴d$ و $a+۷d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۴d)^۲=(a+۲d)(a+۷d)\Rightarrow ۲d^۲=ad\Rightarrow a=۲d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $۴d, ۶d, ۹d, \ldots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{۲۷}{۲}d$ است زیرا $r=\frac{۳}{۲}$ و $۹d\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۷}{۲}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت زیر است:

$$a_n=a+(n-۱)d=۲d+(n-۱)d=(n+۱)d$$

به این ترتیب $a_{۱۲}=۱۳d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{۲۷}{۲}d}{۱۳d}=\frac{۲۷}{۲۶}$.

۱۵۹۱- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ $a_n=۲a_{n-۱}+۱$ و جملهٔ اول $a_۱=۱$، جملهٔ هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_۲=۲\times۱+۱=۳,\quad a_۳=۲\times۳+۱=۷,\quad a_۴=۲\times۷+۱=۱۵$$

$$a_۵=۲\times۱۵+۱=۳۱,\quad a_۶=۲\times۳۱+۱=۶۳$$

$$a_۷=۲\times۶۳+۱=۱۲۷,\quad a_۸=۲\times۱۲۷+۱=۲۵۵$$

تجربی - ۹۵

۱۵۹۲- گزینهٔ ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$$a_۱=۳,\quad a_۲=۲\times۳-۲=۴,\quad a_۳=۲\times۴-۲=۶$$

$$a_۴=۲\times۶-۲=۱۰,\quad a_۵=۲\times۱۰-۲=۱۸,\quad a_۶=۲\times۱۸-۲=۳۴$$

$$a_۷=۲\times۳۴-۲=۶۶,\quad a_۸=۲\times۶۶-۲=۱۳۰$$

بنابراین $a_۸-a_۷=۱۳۰-۶۶=۶۴$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۵۹۳- گزینهٔ ۱ عدد $۴\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی ۲^a و ۲^b است، پس

$$(۴\sqrt{۲})^۲=۲^a\times۲^b\Rightarrow ۲^۵=۲^{a+b}\Rightarrow a+b=۵$$

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{۲}$، یعنی $\frac{۵}{۲}=۲/۵$ است.

ریاضی - ۸۷

۱۵۹۴- گزینهٔ ۴ جملات را به‌صورت $a, a+۳d, a+۱۰d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+۳d)^۲=a(a+۱۰d)\Rightarrow a^۲+۹d^۲+۶ad=a^۲+۱۰ad$$

$$۹d^۲=۴ad\Rightarrow d=\frac{۴}{۹}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a, \frac{۷}{۳}a, \frac{۴۹}{۹}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{۷}{۳}a}{a}=\frac{۷}{۳}$.

تجربی - ۹۲

۱۵۹۵- گزینهٔ ۱ جملات $a_۴$، $a_۶$ و $a_{۱۲}$ از دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جملهٔ ششم واسطهٔ هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_۶^۲=a_۴\times a_{۱۲}\Rightarrow(a_۱+۵d)^۲=(a_۱+۳d)(a_۱+۱۱d)$$

$$a_۱^۲+۱۰a_۱d+۲۵d^۲=a_۱^۲+۱۴a_۱d+۳۳d^۲$$

$$۴a_۱d=-۸d^۲\Rightarrow a_۱=-۲d$$

بنابراین $r=\frac{a_۶}{a_۴}=\frac{a_۱+۵d}{a_۱+۳d}=\frac{-۲d+۵d}{-۲d+۳d}=۳$.

ریاضی - ۸۱

۱۵۹۶- گزینهٔ ۴ شرط اینکه سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند این است که $۲b=a+c$. بنابراین

$$۲(۳p+۴)=(۲p+۳)+(۵p-۱)\Rightarrow p=۶$$

$$d=۳p+۴-۲p-۳=p+۱\xrightarrow{p=۶}d=۷$$

ریاضی - ۸۴

۱۵۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۵^۲=a_۱a_{۱۱}\Rightarrow(a_۱+۴d)^۲=a_۱(a_۱+۱۰d)$$

$$a_۱^۲+۸a_۱d+۱۶d^۲=a_۱^۲+۱۰a_۱d\Rightarrow ۱۶d^۲=۲a_۱d\Rightarrow a_۱=۸d$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۱۲d, a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۱۸d\Rightarrow r=\frac{a_{۱۱}}{a_۵}=\frac{۱۸d}{۱۲d}=\frac{۳}{۲}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۵۹۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید t_3، t_7 و t_9 جملات دنبالهٔ حسابی و a_1، a_2 و a_3 جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow t_7^2=t_3t_9\Rightarrow(t_1+6d)^2=(t_1+2d)(t_1+8d)$$

$$t_1^2+12t_1d+36d^2=t_1^2+8dt_1+2t_1d+16d^2$$

$$2t_1d+20d^2=0\Rightarrow 2d(t_1+10d)=0\xrightarrow{d\neq 0}t_1+10d=0$$

بنابراین جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۵۹۹- گزینهٔ ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases}a_{12}-a_{10}=5\\ a_{12}+a_{10}=25\end{cases}\Rightarrow a_{12}=15, a_{10}=10\Rightarrow d=\frac{a_{12}-a_{10}}{12-10}=\frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d=\frac{a_{21}-a_{10}}{21-10}\Rightarrow a_{21}=a_{10}+11d=10+11\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{75}{2}=37/5$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۶۰۰- گزینهٔ ۲ سه جمله را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$$

$$\frac{a}{r}+a+ar=19\Rightarrow\frac{6}{r}+6+6r=19\Rightarrow 6r^2-13r+6=0$$

$$(3r-2)(2r-3)=0\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{2}{3}\Rightarrow\text{سه جملهٔ متوالی: } 9,6,4\\ r=\frac{3}{2}\Rightarrow\text{سه جملهٔ متوالی: } 4,6,9\end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۶۰۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $0<a<b$، آن‌گاه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.

بنابراین

$$5<9\Rightarrow\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{5}<3\Rightarrow\sqrt{5}-3<0$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3)=3-\sqrt{5}$. از طرف دیگر، $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}=\sqrt{3}-2$. همین‌طور

$$4<5\Rightarrow\sqrt{4}<\sqrt{5}\Rightarrow 2<\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5}-2>0$$

بنابراین $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$. به این ترتیب عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{3}-1-\sqrt{5}+2+\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=-3$.

۱۶۰۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[7]{8\sqrt[4]{4}}=\sqrt[7]{2^3\sqrt[4]{2^2}}=\sqrt[7]{2^3\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{7}}\times 2^{\frac{1}{14}}=2^{\frac{3}{7}+\frac{1}{14}}=2^{\frac{7}{14}}=\sqrt{2}$$

۱۶۰۳- گزینهٔ ۴ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{27}}-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=\frac{3-3}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=0$$

۱۶۰۴- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای گویا می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt{2}}}=3^{\frac{1}{1}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{5}{8}}$$

$$2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}=2^{\frac{1}{1}}\times 3^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{5}{8}}$$

بنابراین $A=\frac{3^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{5}{8}}}=\frac{3^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}$.

۱۶۰۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\times\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{20}}$$

$$=x^{\frac{30+10+20+5+15+3}{60}}=x^{\frac{83}{60}}=x^{1+\frac{23}{60}}=x\sqrt[60]{x^{23}}$$

۱۶۰۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[n]{9\times\sqrt[2n]{3}}=9^{\frac{1}{n}}\times 3^{\frac{1}{2n}}=3^{\frac{2}{n}}\times 3^{\frac{1}{2n}}=3^{\frac{5}{2n}}=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$$

پس

$$\frac{5}{2n}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=5$$

در نتیجه $\sqrt[n]{37-n}=\sqrt[5]{37-5}=\sqrt[5]{32}=2$.

۱۶۰۷- گزینهٔ ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=3\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{x^2\times x}}=3\Rightarrow\sqrt[6]{x^3}=3\Rightarrow\sqrt{x}=3$$

بنابراین $x=9$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt{9\sqrt[3]{9}}=\sqrt{9\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[6]{3^2}=3\sqrt[3]{3}$$

۱۶۰۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^{\frac{5}{2}}=32\Rightarrow(x^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}=(2^5)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=2^2$$

بنابراین

$$x^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=2^{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{2}$$

۱۶۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا x، y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x=a^{\frac{3}{4}},\quad y=a^{\frac{4}{3}},\quad z=a^{\frac{10}{12}}=a^{\frac{5}{6}}$$

از طرف دیگر، $\frac{4}{3}>\frac{5}{6}>\frac{3}{4}$ و چون $0<a<1$، پس

$$a^{\frac{4}{3}}<a^{\frac{5}{6}}<a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow y<z<x$$

۱۶۱۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اولاً واضح است که $\sqrt[4]{0}=0$ و ریشهٔ چهارم عدد صفر در بازهٔ مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم مثبت آن در بازهٔ $(0,4)$ قرار دارد. یعنی

$$0<\sqrt[4]{a}<4\Rightarrow 0<(\sqrt[4]{a})^4<4^4\Rightarrow 0<a<256$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم منفی آن در بازهٔ $(-3,0)$ قرار دارد. یعنی

$$-3<-\sqrt[4]{b}<0\Rightarrow 0<\sqrt[4]{b}<3\Rightarrow 0<(\sqrt{b})^4<3^4\Rightarrow 0<b<81$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشهٔ چهارم در بازهٔ $(-3,4)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$-3<\sqrt[4]{x}<4\Rightarrow-\sqrt[4]{81}<\sqrt[4]{x}<\sqrt[4]{256}\Rightarrow 0\le x<256$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

۱۶۱۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x<0$.

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{(-x)x^4}=\sqrt[4]{-x}\times\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{-x}\times|x|=-x\sqrt[4]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x<0$، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-1$ می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{1}=1$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=-1$ برابر ۱ است.

۱۶۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}=\sqrt[4\times 5]{81}=\sqrt[5]{\sqrt[4]{81}}=\sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{2^5\times 3}=\sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{3}=2\sqrt[5]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{81}}=\frac{3}{\sqrt[5]{3^4}}\times\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}}=\frac{3\times\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{3\sqrt[5]{3}}{3}=\sqrt[5]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3}=-2\sqrt[5]{3}$.

۱۶۱۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $\sqrt[6]{2}=a$، در این صورت

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^3=a^3\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}=a^3\Rightarrow \sqrt{2}=a^3$$

و

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^2=a^2\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}=a^2\Rightarrow \sqrt[3]{2}=a^2$$

بنابراین $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{a^3+a^2}{1+a}=\frac{a^2(a+1)}{1+a}=a^2=\sqrt[3]{2}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2}+1)}{1+\sqrt[6]{2}}=\sqrt[3]{2}$$

۱۶۱۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^7}}\right)=\sqrt[7]{x^7\left(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^7}\right)}=\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^8}-\frac{x^7}{x^7}}=\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}$$

در نتیجه $\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$، پس

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{128}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow x\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

۱۶۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{9x}}=\sqrt[6]{9x}\Rightarrow(\sqrt[4]{3})^{12}=(\sqrt[6]{9x})^{12}$$

$$3^3=(9x)^2\Rightarrow 3\sqrt{3}=9x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۶۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x>0$. می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3^2}}}$$

$$x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{12}}\times x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{24}}\Rightarrow x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

$$x^{\frac{9}{24}}=3^{\frac{9}{12}}\Rightarrow x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow(x^2)^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=9$$

۱۶۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^{3x-6}}=\sqrt[6]{(3^2)^{3(x-2)}}=3^{\frac{6(x-2)}{6}}=3^{x-2}$$

$$\sqrt[3]{27^{4x-2}}=\sqrt[3]{3^{3(4x-2)}}=3^{\frac{3(4x-2)}{3}}=3^{4x-2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{3^{x-2}}{3^{4x-2}}=27\Rightarrow 3^{x-2-(4x-2)}=3^3\Rightarrow 3^{-3x}=3^3\Rightarrow -3x=3\Rightarrow x=-1$$

۱۶۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $a>0$. در تساوی داده شده اعداد را با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow\frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}=3\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow(a^{\frac{1}{2}})^2=3^2$$

بنابراین $a=9$.

۱۶۱۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}},\quad \sqrt[3]{b\sqrt{a}}=b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{6}}\times b^{\frac{3}{6}}=(a^4)^{\frac{1}{6}}\times(b^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$=(a^4b^3)^{\frac{1}{6}}=(27)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم فرض کنید $a=1$ و $b=3$. در این صورت

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3}$$

۱۶۲۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $0<a<1$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt[4]{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}>a$. همچنین از فرض $0<a<1$ نتیجه می‌شود $a^9>a^8$ و در نتیجه $\sqrt[12]{a^9}>\sqrt[12]{a^8}$، یعنی $\sqrt[4]{a^3}>\sqrt[3]{a^2}$. ولی $\sqrt{a^3}>\sqrt[3]{a^2}$ درست نیست، زیرا

$$0<a<1\Rightarrow a^9<a^4\Rightarrow\sqrt[6]{a^9}<\sqrt[6]{a^4}\Rightarrow\sqrt{a^3}<\sqrt[3]{a^2}$$

راه‌حل دوم چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{2}}$ و چون $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$، پس $0<a<1$.

بررسی گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱)

$$\frac{1}{4}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{4}}>a\Rightarrow\sqrt[4]{a}>a$$

گزینهٔ (۲)

$$\frac{1}{2}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}>a\Rightarrow\sqrt{a}>a$$

گزینهٔ (۳)

$$\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}<a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\sqrt{a^3}<\sqrt[3]{a^2}$$

گزینهٔ (۴)

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}>\sqrt[4]{a^3}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۶۲۱- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $x+y=4$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2+y^2+2xy=16$$

چون $xy=2$، پس

$$x^2+y^2+4=16\Rightarrow x^2+y^2=12$$

حال، طرفین رابطهٔ اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=144\Rightarrow x^4+y^4+2(xy)^2=144$$

$$x^4+y^4+2\times 4=144\Rightarrow x^4+y^4=136$$

۱۶۲۲- گزینهٔ ۳ اعداد $14+6\sqrt{5}$ و $14-6\sqrt{5}$ مربع کامل هستند. زیرا $14+6\sqrt{5}=9+5+2\times 3\sqrt{5}=3^2+\sqrt{5}^2+2(3\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})^2$. به همین ترتیب $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$. بنابراین

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

۱۶۲۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=(x+11)-(x+3)=8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=8\Rightarrow\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3}=4\sqrt{2}$$

۱۶۲۴- گزینهٔ ۱ ابتدا عبارت را به‌صورت $\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}-\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}$ می‌نویسیم. اکنون با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴})-(\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴})}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}\times\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}=\frac{-۸}{\sqrt{(\sqrt{۲۴})^۲-۴^۲}}=\frac{-۸}{\sqrt{۸}}=-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۶۲۵- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$$

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab+۲ac-۲bc$$

بنابراین

$$A=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc-۳a^۲-۳b^۲-۳c^۲$$

$$+۶ab-۶ac+۶bc+۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲$$

$$=۸ab-۸ac+۴bc=۴(۲ab-۲ac+bc)$$

۱۶۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x^۲-۲x)^۳-۲x^۴=x^۶-۶x^۵+۱۲x^۴-۸x^۳-۲x^۴$$

$$=x^۶-۶x^۵+۱۰x^۴-۸x^۳$$

بنابراین ضریب $x^۴$ برابر ۱۰ است.

۱۶۲۷- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۴}$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a-b-۳\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})=۴\Rightarrow a-b-۳\sqrt[۳]{ab}(\sqrt[۳]{۴})=۴$$

$$a-b-۳\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{۴}=۴\Rightarrow a-b-۳(۲)=۴\Rightarrow a-b=۱۰$$

۱۶۲۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{b^۲})=۴(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{b^۲})\quad (۱)$$

از طرف دیگر، $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۲+\frac{۲}{ab}=۴^۲+\frac{۲}{۳}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۴(۱۶+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳})=۶۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطهٔ $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴$ را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۳=۴^۳\Rightarrow\frac{۱}{a^۳}-\frac{۳}{a^۲b}+\frac{۳}{ab^۲}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴$$

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}-\frac{۳}{ab}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})=۶۴$$

$$\xrightarrow{ab=۳,\ \frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴}\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴+\frac{۳}{۳}\times۴=۶۸$$

۱۶۲۹- گزینهٔ ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۳^۲}-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲^۲})}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳^۳}+\sqrt[۳]{۲^۳}}=\frac{۵}{۳+۲}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۱۶۳۰- گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=x(x-۱)(x+۱)(x-۲)+۱=(x^۲-x)(x^۲-x-۲)+۱$$

$$=(x^۲-x)((x^۲-x)-۲)+۱=(x^۲-x)^۲-۲(x^۲-x)+۱$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(x^۲-x-۱)^۲$$

۱۶۳۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۲+\frac{۴}{۹x^۲}=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-۲(x)(\frac{۲}{۳x})$$

$$=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-\frac{۴}{۳}=۳^۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین $۳x^۲+\frac{۴}{۳x^۲}=۳(x^۲+\frac{۴}{۹x^۲})=۳\times\frac{۲۳}{۳}=۲۳$.

۱۶۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $a>۰$، در نتیجه $\frac{۱}{a}=۲+|a|>۰$.

بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{۱}{a}-a=۲$ درمی‌آید. اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{a}+|a|=\frac{۱}{a}+a>۰$. از طرف دیگر، $(a-\frac{۱}{a})^۲-(a+\frac{۱}{a})^۲=۴$. بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a})^۲=۴+۴=۸\xrightarrow{a+\frac{۱}{a}>۰}a+\frac{۱}{a}=۲\sqrt{۲}$$

۱۶۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{۲}-۱)^۲=۳-۲\sqrt{۲}$. بنابراین

$$(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}-۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱)^۳$$

و در نتیجه

$$\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۶۳۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A=(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$.

دو طرف این تساوی را در $۳^{\frac{۱}{۸}}-۱$، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)A=(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$

$$=((۳^{\frac{۱}{۸}})^۲-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=(۳^{\frac{۱}{۴}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$

$$=(۳^{\frac{۱}{۲}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=۳-۱=۲$$

بنابراین $A=\frac{۲}{۳^{\frac{۱}{۸}}-۱}=\frac{۲}{a}$.

۱۶۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲bc+۲ac$$

بنابراین

$$۱۰^۲=۶۶-۲(ab+bc-ca)\Rightarrow ۳۴=-۲(ab+bc-ca)$$

پس $ab+bc-ca=-۱۷$.

۱۶۳۶- گزینهٔ ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^۳-a^۳+b^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳-a^۳+b^۳$$

$$=-۳ab(a-b)=-۳ab(\frac{۳}{ab})=-۹$$

۱۶۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a^۳+b^۳=(a+b)((a+b)^۲-۳ab)$$

از طرف دیگر،

$$a+b=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳-۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$ab=\frac{۱}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{۳-۲}=۱$$

بنابراین $a^۳+b^۳=۲\sqrt{۳}(۴\times۳-۳)=۱۸\sqrt{۳}$.

۱۶۳۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^۲=a^۲+b^۲-۲ab\Rightarrow۲۵=۱۷-۲ab\Rightarrow ab=-۴$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+b^۲+ab)=۵(۱۷-۴)=۶۵$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a=۴$ و $b=-۱$ در تساوی‌های داده شده صدق می‌کنند، در این صورت $a^۳-b^۳=۶۵$.

۱۶۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=۷\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{a^۲b^۲}=۷\xrightarrow{ab=۱}a^۲+b^۲=۷$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab=۷+۲=۹$$

چون a و b عددهایی منفی‌اند، پس $a+b$ نیز منفی است، در نتیجه $a+b=-۳$. به این ترتیب، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)=(-۳)(۷-۱)=-۱۸$$

۱۶۴۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)(a^{۱۰}+a^۵+۱)=(a^۵-۱)(a^{۱۰}+a^۵+۱)$$

$$=(a^۵-۱)((a^۵)^۲+a^۵\times۱+۱)=(a^۵)^۳-۱=a^{۱۵}-۱$$

$$=(\sqrt[۵]{۳})^{۱۵}-۱=۳^۳-۱=۲۶$$

۱۶۴۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}=\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^۲+۲\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۸^۲+۲=۶۶$$

۱۶۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a+\frac{۱}{a+۱}=۴\Rightarrow a+۱+\frac{۱}{a+۱}=۵$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a+۱+\frac{۱}{a+۱})^۲=۵^۲\Rightarrow(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}+۲(a+۱)\times\frac{۱}{a+۱}=۲۵$$

$$(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}+۲=۲۵\Rightarrow(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}=۲۵-۲=۲۳$$

۱۶۴۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مقدار $(a-b)^۲$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^۲=(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}-\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}})^۲$$

$$=۳-۲\sqrt{۲}+۳+۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}=۶-۲=۴$$

بنابراین

$$(a-b)^۶=((a-b)^۲)^۳=۴^۳=۶۴$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$$

$$b=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$$

پس $(a-b)^۶=(\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}-۱)^۶=(-۲)^۶=۶۴$.

۱۶۴۴- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم $(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+۱$. بنابراین

$$x-a-x=a+۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۱۶۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(bc-ab-ac)$$

پس $(a-b-c)^۲=۲۸+۲(۴)=۳۶$. بنابراین $a-b-c=\pm۶$.

۱۶۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$.

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$x^۳=(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲})^۳+(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲})^۳$$

$$+۳\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲}\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲}(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲}+\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲})$$

$$=\sqrt{۳}-۲+\sqrt{۳}+۲+۳\sqrt[۳]{۳-۴}(x)=۲\sqrt{۳}-۳x$$

بنابراین $x^۳+۳x=۲\sqrt{۳}$.

۱۶۴۷- گزینهٔ ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^۳+۳ab^۲+b^۳+۳a^۲b=۱۲۵\Rightarrow(a+b)^۳=۱۲۵\Rightarrow a+b=۵$$

$$a^۳+۳ab^۲-b^۳-۳a^۲b=۲۷\Rightarrow(a-b)^۳=۲۷\Rightarrow a-b=۳$$

بنابراین $\frac{a+b}{a-b}=\frac{۵}{۳}$.

۱۶۴۸- گزینهٔ ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a+\frac{۱}{a}-۲=۲\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۴$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}+۳a+\frac{۳}{a}=۶۴$$

به این ترتیب $a^۳+\frac{۱}{a^۳}=۶۴-۳(۴)=۵۲$.

۱۶۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۳]{۲\times۹}+\sqrt[۳]{۲\times۱۵}+\sqrt[۳]{۲\times۲۵}=\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۵}+\sqrt[۳]{۲۵})$$

$$=\sqrt[۳]{۲}((\sqrt[۳]{۳})^۲+\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۵})^۲)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab=(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۵})((\sqrt[۳]{۳})^۲+\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۵})^۲)(\sqrt[۳]{۲})$$

$$=((\sqrt[۳]{۳})^۳-(\sqrt[۳]{۵})^۳)(\sqrt[۳]{۲})=(۳-۵)\sqrt[۳]{۲}=-۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۶۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=(x-۲y)(x^۴+۲x^۳y+۴x^۲y^۲+۸xy^۳+۱۶y^۴)$$
$$=(x-۲y)(x^۴+x^۳(۲y)+x^۲(۲y)^۲+x(۲y)^۳+(۲y)^۴)$$
$$=x^۵-(۲y)^۵=x^۵-۳۲y^۵$$

بنابراین به‌ازای $x=۲\sqrt[۵]{۲}$ و $y=\sqrt[۵]{۴}$ مقدار A برابر است با

$$A=(۲\sqrt[۵]{۲})^۵-۳۲(\sqrt[۵]{۴})^۵=۳۲\times۲-۳۲\times۴=-۶۴$$

۱۶۵۱- گزینهٔ ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab}}=\sqrt{\frac{۸ab+۲ab}{۸ab-۲ab}}=\sqrt{\frac{۱۰ab}{۶ab}}=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

۱۶۵۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه $x\neq۰$، دو طرف تساوی داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{۱}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{x}+\frac{۱}{x}=۴\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۴$$

برای محاسبهٔ مقدار $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^۴+۱}{x^۲}=\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲=۴^۲-۲=۱۴$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۱}{۱۴}$.

راه‌حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۴}$ نتیجه می‌شود

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲=۴x-۱$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^۴=۱۶x^۲-۸x+۱$. به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۴x-۱$:

$$x^۴=۱۶(۴x-۱)-۸x+۱=۶۴x-۸x-۱۵=۵۶x-۱۵$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۴x-۱}{۵۶x-۱۴}=\frac{۴x-۱}{۱۴(۴x-۱)}=\frac{۱}{۱۴}$.

۱۶۵۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳}\times\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۲)^۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۲(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۳}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt{(\sqrt{۵})^۲-۲^۲}=\sqrt{۵-۴}=۱$$

۱۶۵۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^۲=۳+\sqrt{۸}+۳-\sqrt{۸}+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸})}=۶+۲\sqrt{۹-۸}=۸$$

بنابراین $a=\sqrt{۸}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt{۲}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ یا همان ۴ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$$
$$\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$$
$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt{۲}$$

پس $(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}-۱)\sqrt{۲}=۴$.

۱۶۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})^۲=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca})$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c=۶abc\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}=۶\Rightarrow\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca}=۶$$

بنابراین $۵^۲=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(۶)$. در نتیجه $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=۱۳$.

۱۶۵۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$۱=(\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵})^۳=a+۵-(a-۵)-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}\underbrace{(\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵})}_{۱}$$

در نتیجه $\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}=۳$ و در نتیجه $۱=۱۰-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}$. بنابراین

$$a^۲-۲۵=۲۷$$

۱۶۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۲=a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲$ مقدار $a-\frac{۱}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{۱}{a})^۲=۱۸-۲=۱۶\Rightarrow a-\frac{۱}{a}=\pm۴$$

از $a<۱$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۱}{a}$. بنابراین $a-\frac{۱}{a}=-۴$ درست است. اکنون با استفاده از اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(a-\frac{۱}{a})$ مقدار $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ را حساب می‌کنیم:

$$(-۴)^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(-۴)\Rightarrow a^۳-\frac{۱}{a^۳}=-۷۶$$

۱۶۵۸- گزینهٔ ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳})(\underbrace{(\sqrt[۳]{۵})^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۳})^۲}_{a})=(\sqrt[۳]{۵})^۳+(\sqrt[۳]{۳})^۳=۵+۳=۸$$

بنابراین $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}=\frac{۸}{a}$.

۱۶۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a^۲-۲ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)^۲=(a-b)^۲(a^۲+ab+b^۲)^۲$$
$$=((a-b)(a^۲+ab+b^۲))^۲=(a^۳-b^۳)^۲$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۵a^۳-۵b^۳=۱۵\Rightarrow a^۳-b^۳=۳$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۶۶۰- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه $x\neq\pm1$، دو طرف معادلهٔ داده شده را در $x^۲-۱$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^۲-۱)(۱+x+\cdots+x^۵)=x^۶+x^۷-x^۲+۱$$

$$(x+۱)(x-۱)(۱+x+\cdots+x^۵)=x^۶+x^۷-x^۲+۱$$

$$(x+۱)(x^۶-۱)=x^۶+x^۷-x^۲+۱$$

$$x^۷+x^۶-x-۱=x^۶+x^۷-x^۲+۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

$$(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۶۶۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۶x^۲+۷x-۳=۶x^۲-۲x+۹x-۳=۲x(۳x-۱)+۳(۳x-۱)$$

$$=(۳x-۱)(۲x+۳)$$

پس عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A=۶x^۲+۷x-۳\Rightarrow ۶A=۳۶x^۲+۴۲x-۱۸=(۶x-۲)(۶x+۹)$$

$$=۲\times۳(۳x-۱)(۲x+۳)$$

بنابراین $A=(۳x-۱)(۲x+۳)$ و عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ وجود دارد.

۱۶۶۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۲-۲x+۴y-y^۲-۳=x^۲-۲x+۱-(y^۲-۴y+۴)=(x-۱)^۲-(y-۲)^۲$$

$$=(x-۱-(y-۲))(x-۱+y-۲)=(x-y+۱)(x+y-۳)$$

بنابراین $x-y+۱$ عاملی از عبارت است.

۱۶۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^۴+۱۶x^۲+۱۰۰=(x^۴+۲۰x^۲+۱۰۰)-۴x^۲=(x^۲+۱۰)^۲-۴x^۲$$

$$=(x^۲+۱۰-۲x)(x^۲+۱۰+۲x)$$

بنابراین $x^۲-۲x+۱۰$ عامل $x^۴+۱۶x^۲+۱۰۰$ است.

۱۶۶۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x^۳+۲x^۲+۲x+۱=(x^۳+۱)+۲x^۲+۲x$$

$$=(x+۱)(x^۲-x+۱)+۲x(x+۱)$$

$$=(x+۱)(x^۲-x+۱+۲x)=(x+۱)(x^۲+x+۱)$$

بنابراین $x^۲+x+۱$ عامل $x^۳+۲x^۲+۲x+۱$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$x^۳+۲x^۲+۲x+۱=(x^۳+x^۲)+(x^۲+۲x+۱)$$

$$=x^۲(x+۱)+(x+۱)^۲=(x+۱)(x^۲+x+۱)$$

بنابراین $x^۲+x+۱$ عامل $x^۳+۲x^۲+۲x+۱$ است.

۱۶۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=x^۴+y^۴+x^۲y^۲=(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲+x^۲y^۲=(x^۲+y^۲)^۲-x^۲y^۲$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A=(x^۲+y^۲-xy)(x^۲+y^۲+xy)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $x^۲+y^۲-xy$ وجود دارد.

۱۶۶۶- گزینهٔ ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)$$

$$۲x^۲+۳x-۵=۲x^۲+۵x-۲x-۵=x(۲x+۵)-(۲x+۵)=(۲x+۵)(x-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{x^۲+x+۱}{x(۲x+۵)}\times\frac{(۲x+۵)(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۱}{x}$.

۱۶۶۷- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x^۳+x}=\frac{x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x(x^۲+۱)}=\frac{x^۲+۱}{x(x^۲+۱)}=\frac{۱}{x}$$

۱۶۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^۶-a^۴+a^۲-۱}{-a^۲+a^۴}=\frac{a^۵(a-\frac{۱}{a})+a(a-\frac{۱}{a})}{a^۳(a-\frac{۱}{a})}=\frac{a^۵+a}{a^۳}$$

$$=a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a-\frac{۱}{a})^۲+۲=۳^۲+۲=۱۱$$

۱۶۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^۶-a^۴-a^۲+۱=a^۴(a^۲-۱)-(a^۲-۱)=(a^۲-۱)(a^۴-۱)$$

$$a^۳-a^۲-a+۱=a^۲(a-۱)-(a-۱)=(a-۱)(a^۲-۱)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{(a^۴-۱)(a^۲-۱)}{(a-۱)(a^۲-۱)}=\frac{a^۴-۱}{a-۱}$. چون $a^۴=(\sqrt{۲})^۴=۴$، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=۳\sqrt{۲}+۳$$

۱۶۷۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $A=\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}$. در این صورت، بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^۳=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})^۳=a-b-۳\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})$$

$$=۷۶-۳\sqrt[۳]{ab}(A)=۷۶-۳A$$

بنابراین

$$A^۳+۳A-۷۶=۰\Rightarrow A^۳-۶۴-۱۲+۳A=۰\Rightarrow A^۳-۴^۳+۳(A-۴)=۰$$

$$(A-۴)(A^۲+۴A+۱۶)+۳(A-۴)=۰\Rightarrow(A-۴)(A^۲+۴A+۱۹)=۰$$

چون $A^۴+۴A+۱۹=(A+۲)^۲+۱۵\neq۰$. پس $A-۴=۰$، در نتیجه $A=۴$.

۱۶۷۱- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۲a^۲-۳ab-۲b^۲=(۲a^۲-۴ab)+(ab-۲b^۲)=۲a(a-۲b)+b(a-۲b)$$

$$=(a-۲b)(۲a+b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $a-۲b$ وجود دارد.

۱۶۷۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $x^۲-x=A$. در این‌صورت

$$(x^۲-x)^۲-۱۴(x^۲-x)+۲۴=A^۲-۱۴A+۲۴=(A-۲)(A-۱۲)$$

اکنون توجه کنید که

$$A-۲=x^۲-x-۲=(x+۱)(x-۲)$$

$$A-۱۲=x^۲-x-۱۲=(x-۴)(x+۳)$$

بنابراین $x+1$ ، $x-2$ ، $x-4$ و $x+3$ عامل‌های عبارت مورد نظر هستند.

اکنون توجه کنید که

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)\ ,\quad x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)\ ,\quad x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

بنابراین x^2-2x-3 عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه‌حل دوم با توجه به عامل‌های عبارت‌های ذکر شده در گزینه‌ها، که در راه‌حل اول نوشته‌ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام‌یک از عبارت‌های $x+1$ ، $x+3$ ، $x-3$ ، $x-2$ و $x-4$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x)=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$. در این‌صورت

$$P(-1)=4-28+24=0\ ,\quad P(-3)=144-168+24=0$$

$$P(3)=36-84+24=-24\neq 0$$

پس $x-3$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینهٔ (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۶۷۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$4x^4+3x^2+1=(4x^4+4x^2+1)-x^2=(2x^2+1)^2-x^2$$

$$=(2x^2+1-x)(2x^2+1+x)$$

بنابراین عامل‌های $4x^4+3x^2+1$ عبارت‌های $2x^2-x+1$ و $2x^2+x+1$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای -1 و 1 هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -1 است.

۱۶۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$4x^4-16x^2y^2+9y^4=4x^4-12x^2y^2+9y^4-4x^2y^2$$

$$=(2x^2-3y^2)^2-4x^2y^2$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(2x^2-2xy-3y^2)(2x^2+2xy-3y^2)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $2x^2-2xy-3y^2$ وجود دارد.

۱۶۷۵- گزینهٔ ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$3a^3-3ab^2-2a^2b+2b^3=3a(a^2-b^2)-2b(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(3a-2b)=(a-b)(a+b)(3a-2b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $3a-2b$ وجود دارد.

۱۶۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\ ,\quad x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-x+1}=x+3$$

۱۶۷۷- گزینهٔ ۳ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2-2x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2}{x+1}$$

۱۶۷۸- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2}-\frac{2}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{2(\sqrt{x}+2)-2(\sqrt{x}-2)-2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{8-2x}{x-4}=-\frac{2(x-4)}{x-4}=-2$$

۱۶۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}\ ,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}\div\frac{a^2+b^2+ab}{ab}=\frac{a^3-b^3}{(a^2+b^2+ab)ab}=\frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(a^2+b^2+ab)ab}$$

$$=\frac{a-b}{ab}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=-2\sqrt{2}$$

۱۶۸۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2$$

$$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}=a^3-1=5-1=4$$

راه‌حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+1)$ ضرب کنیم، می‌توان نوشت

$$\frac{(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}=\frac{(a^2-1)(a^4+a^2+1)}{a^3+1}$$

$$=\frac{a^6-1}{a^3+1}=\frac{(a^3-1)(a^3+1)}{(a^3+1)}=a^3-1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a=\sqrt[3]{5}$ برابر است با $(\sqrt[3]{5})^3-1=4$.

۱۶۸۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{4}}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

۱۶۸۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}+\frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}+\frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=-1-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}=2$$

راه‌حل دوم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}+7-7\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{10-8\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}}=\frac{2(5-4\sqrt{2})}{(5-4\sqrt{2})}=2$$

۱۶۸۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}{(\sqrt[۴]{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt[۴]{۲}+۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $۱=\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۲}+۱$.

راه‌حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}-\sqrt[۴]{۲}=\frac{\sqrt{۲}-۱-\sqrt[۴]{۲}(\sqrt[۴]{۲}-۱)}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}+\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=۱$$

۱۶۸۴- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}$ را در $\sqrt[۴]{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم: $\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}$. بنابراین

$$\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$$
$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

۱۶۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{۸\sqrt{۵}-۸}{\sqrt{۵}+۱}=۸\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}=۸\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{۸(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}=۲(\sqrt{۵}-۱)^۲$$
$$\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{(\sqrt{۵}-۲)^۲}{۵-۴}=(\sqrt{۵}-۲)^۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲(\sqrt{۵}-۱)^۲-(\sqrt{۵}-۲)^۲=۲(۶-۲\sqrt{۵})-(۹-۴\sqrt{۵})=۳$$

۱۶۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$ را گویا می‌کنیم. برای این کار صورت و مخرج را در $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$
$$=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$

بنابراین $x=۱+\sqrt{۲}$ و در نتیجه $(x-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$.

۱۶۸۷- گزینهٔ ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$$
$$=\frac{(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲}{(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^۲-(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲}$$
$$=\frac{۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}}{۲+\sqrt{۳}-(۲-\sqrt{۳})}$$
$$=\frac{۴+۲\sqrt{۴-۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۱۶۸۸- گزینهٔ ۳ چون در مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$ ریشهٔ سوم وجود دارد، برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt[۳]{۳^۲}+\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{(\sqrt[۳]{۳})^۳-(\sqrt[۳]{۲})^۳}$$
$$=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{۳-۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}-(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}-\sqrt[۳]{۴})=۲\sqrt[۳]{۴}$$

۱۶۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۲-\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

بنابراین

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۲}+۱)}$$
$$=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^۳-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۲})^۳+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}$$
$$=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱-\sqrt[۳]{۲}-۱=\sqrt[۳]{۴}$$

۱۶۹۰- گزینهٔ ۳ چون $\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱=\sqrt[۳]{۳}^۲+۱\times\sqrt[۳]{۳}+۱^۲$. برای اینکه مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج آن را در $\sqrt[۳]{۳}-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}^۲+\sqrt[۳]{۳}+۱^۲}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}$$
$$=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{\sqrt[۳]{۳}^۳-۱^۳}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{۳-۱}=\sqrt[۳]{۳}-۱$$

به همین ترتیب،

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}^۲-\sqrt[۳]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{\sqrt[۳]{۲}^۳+۱^۳}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}+۱=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}-۱+۱=\sqrt[۳]{۳}-۱+\sqrt[۳]{۲}+۱$.

۱۶۹۱- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲)=۲^۵-۳(۲)^۳+۳(۲)^۲-۲+۲=۲۰$.

۱۶۹۲- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ برابر است با $P(۱)=۳-۴a-۱=-۴a+۲$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-۴a+۲=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۶۹۳- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ برابر با $P(۴)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(۴)=۱۶$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{۱۳}+bx^{۹۷}-۵\Rightarrow P(۴)=a(۴)^{۱۳}+b(۴)^{۹۷}-۵$$

$$۱۶=۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b-۵\Rightarrow ۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=۲۱$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر با $P(-۴)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-۴)=-۴^{۱۳}a-۴^{۹۷}b-۵\xrightarrow{۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=۲۱}-۲۱-۵=-۲۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -۲۶ است.

۱۶۹۴- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه $P(-۳)=(-۳)^{۸}+۳(-۳)^{۷}+a(-۳)^{۲}-۹=۰$. بنابراین $a=۱$ و $P(x)=x^{۸}+۳x^{۷}+x^{۲}-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲-۱)=P(۱)$. اکنون توجه کنید که $P(۱)=۱+۳+۱-۹=-۴$.

۱۶۹۵- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر با ۴ است، پس $P(۲)=۴$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(۲x-۴)$ بر $x-۳$ برابر است با $P(۲\times۳-۴)=P(۲)=۴$.

۱۶۹۶- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۳$ برابر است با $P(۳+۱)=P(۴)$. از طرف دیگر،

$$P(x-۲)=x^{۲}-۳x+۲\xrightarrow{x=۶}P(۴)=(۶)^{۲}-۳(۶)+۲=۲۰$$

۱۶۹۷- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ است، پس $P(۲-۱)=۱۲$، یعنی $P(۱)=۱۲$. در نتیجه

$$P(۱)=۱+a+۶+b+۱۰=۱۲\Rightarrow a+b=-۵$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۲)$ بر $x+۳$ برابر است با $P(-۳+۲)=P(-۱)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-۱)=۱-a+۶-b+۱۰=۱۷-(a+b)=۱۷-(-۵)=۲۲$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۶۹۸- گزینهٔ ۱ چون $x^{۲}-۱=(x-۱)(x+۱)$، پس چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای‌های $x-۱$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{cases}P(۱)=۰\\P(-۱)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+۱-۲=۰\\a+b-۱-۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۱\end{cases}$$

در نتیجه، $P(x)=۲x^{۶}-x^{۵}+x-۲$. به این ترتیب، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-۲$ برابر است با

$$P(۲)=۲\times۲^{۶}-۲^{۵}+۲-۲=۹۶$$

۱۶۹۹- گزینهٔ ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+۱)$ و $Q(x+۱)$ بر $x-۲$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(۲+۱)=۳\Rightarrow P(۳)=۳\ ,\quad Q(۲+۱)=۵\Rightarrow Q(۳)=۵$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)Q(x-۱)$ بر $x-۴$ برابر است با $P(۴-۱)Q(۴-۱)=P(۳)Q(۳)=۳\times۵=۱۵$.

۱۷۰۰- گزینهٔ ۳ بنابر فرض مسئله،

$$x^{۴}-۳x^{۳}+۴x^{۲}+۱=(x-۱)Q(x)+۳\quad(۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۳$ برابر با $Q(۳)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $۳^{۴}-۳(۳)^{۳}+۴(۳)^{۲}+۱=(۳-۱)Q(۳)+۳$. در نتیجه $Q(۳)=۱۷$.

۱۷۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x)=(x-۱)^{۳}+۷$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[۳]{۳}-۱$ برابر است با

$$P(\sqrt[۳]{۳}+۱)=(\sqrt[۳]{۳}+۱-۱)^{۳}+۷=۳+۷=۱۰$$

۱۷۰۲- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+۲)^{۲}$ بخش‌پذیر است، پس بر $x+۲$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-۲)=۰\Rightarrow-۳۲+۴۸+۲a+۱۶=۰\Rightarrow a=-۱۶$$

۱۷۰۳- گزینهٔ ۱ چون ۱، ۲ و -۲ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-۱$، $x-۲$ و $x+۲$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجهٔ سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-۱)(x-۲)(x+۲)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۱$، چون $P(-۱)=۲۴$، به‌دست می‌آید

$$۲۴=a(-۲)(-۳)(۱)\Rightarrow a=۴$$

به این ترتیب، $P(x)=۴(x-۱)(x-۲)(x+۲)$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ برابر است با

$$P(-۳)=۴(-۳-۱)(-۳-۲)(-۳+۲)=-۸۰$$

۱۷۰۴- گزینهٔ ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۳)$ بر $x-۵$ برابر است با $P(۵-۳)=P(۲)$. بنابراین $P(۲)=-۳$. اگر در تساوی $P(x+۳)=x^{۳}-mx^{۲}+mx+۲$ قرار دهیم $x=-۱$، به‌دست می‌آید

$$P(۲)=(-۱)^{۳}-m(-۱)^{۲}+m(-۱)+۲=-۳\Rightarrow m=۲$$

۱۷۰۵- گزینهٔ ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر است با $P(-۴)$. اکنون اگر در تساوی $P^{۲}(x)-۸xP(x)=-۱۶x^{۲}$ قرار دهیم $x=-۴$، به‌دست می‌آید

$$P^{۲}(-۴)+۳۲P(-۴)+۱۶^{۲}=۰\Rightarrow(P(-۴)+۱۶)^{۲}=۰\Rightarrow P(-۴)=-۱۶$$

۱۷۰۶- گزینهٔ ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر $P(۱+۱)=P(۲)$ است. اگر در تساوی $P(x-۲)=x^{۳}-x^{۲}+۴m$ قرار دهیم $x=۴$، مقدار $P(۲)$ به‌دست می‌آید: $P(۲)=۶۴-۱۶+۴m=۴۸+۴m$. بنابراین

$$۴۸+۴m=۴\Rightarrow m=-۱۱$$

۱۷۰۷- گزینهٔ ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۳$ برابر $Q(۳)$ است، پس $Q(۳)=۲$. اگر در تساوی $P(Q(x-۱))=x^{۲}-۳x+۲$ قرار دهیم $x=۴$، نتیجه می‌شود

$$P(Q(۳))=۱۶-۱۲+۲\Rightarrow P(۲)=۶$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=P(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر $f(۱)$ یا همان $P(۲)$ است که برابر ۶ است.

۱۷۰۸- گزینهٔ ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۱$ برابر $Q(۱)$ است. پس $Q(۱)=۵$. اگر در تساوی $P(x-۳)=(x^{۲}-۳)Q(x+۲)$ قرار دهیم $x=-۱$، نتیجه می‌شود $P(-۴)=-۲Q(۱)=-۲\times۵=-۱۰$. بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر -۱۰ است.

۱۷۰۹- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x+3$ برابر $Q(-3)$ است. پس $Q(-3)=-4$. اکنون توجه کنید که

$$P(x)=x^3+3xQ(2x+1)+3x-2$$

$$P(-2)=-8-6Q(-3)-6-2=-16-6Q(-3)=-16-6\times(-4)=8$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۸ است.

۱۷۱۰- گزینهٔ ۲ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x)+x$ و $Q(x)-x$ بر $x+2$ به‌ترتیب برابر ۱ و -2 است، پس

$$P(-2)-2=1\Rightarrow P(-2)=3$$

$$Q(-2)-(-2)=-2\Rightarrow Q(-2)=-4$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $kP^2(x)+xQ(x)+1$ بر $x+2$ برابر است با $kP^2(-2)+(-2)Q(-2)+1=9k+8+1=9k+9$. چون چندجمله‌ای داده شده بر $x+2$ بخش‌پذیر است پس این باقی‌مانده برابر صفر است، بنابراین

$$9k+9=0\Rightarrow k=-1$$

۱۷۱۱- گزینهٔ ۳ چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس $\Delta=0$. در نتیجه

$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow 2^2-4\times 2\times(k-2)=0\Rightarrow 4-8(k-2)=0\Rightarrow k=\frac{5}{2}$$

۱۷۱۲- گزینهٔ ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta=4k^2-k=k(4k-1)>0\Rightarrow k>\frac{1}{4}\ \text{یا}\ k<0$$

بنابراین k متعلق به مجموعهٔ $\mathbb{R}-[0,\frac{1}{4}]$ است.

۱۷۱۳- گزینهٔ ۳ چون معادلهٔ $x^2-4x+k-1=0$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta=16-4(k-1)<0\Rightarrow k-1>4\Rightarrow k>5$$

در معادلهٔ $x^2+2x-k+6=0$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=4-4(-k+6)=4k-20=4(k-5)$$

چون $k>5$، پس $4(k-5)>0$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۷۱۴- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})=0\xrightarrow{x_1<x_2}x_1=\sqrt{2}\ ,\ x_2=\sqrt{5}$$

بنابراین $x_1^2+x_2^4=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^4=2+25=27$.

۱۷۱۵- گزینهٔ ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری $\frac{-\sqrt{12}}{3}$. چون $x_1<x_2$، بنابراین

$$x_1=-\frac{\sqrt{12}}{3},\ x_2=1\Rightarrow 3x_1+x_2=1-\sqrt{12}$$

۱۷۱۶- گزینهٔ ۳ چون a جواب معادلهٔ $x^2-x-5=0$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^2-a-5=0\Rightarrow a^2-a=5$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^2-b=5$. بنابراین

$$(a^2-a-2)(b^2-b+2)=(5-2)(5+2)=21$$

۱۷۱۷- گزینهٔ ۱ اگر اندازهٔ طول مستطیل را y و اندازهٔ عرض آن را x فرض کنیم، اندازهٔ قطر آن می‌شود $\sqrt{x^2+y^2}$. پس $y=4+x$ و $x^2+y^2=30$. در نتیجه

$$x^2+(4+x)^2=30\Rightarrow x^2+16+8x+x^2=30$$

$$x^2+4x-7=0\Rightarrow x=-2+\sqrt{11}\ ,\ x=-2-\sqrt{11}$$

اگر $x=-2-\sqrt{11}$، x عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس $x=-2+\sqrt{11}$ و در نتیجه $y=4+(-2+\sqrt{11})=2+\sqrt{11}$. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{11}-2)(\sqrt{11}+2)=11-4=7$$

۱۷۱۸- گزینهٔ ۱ دو عدد را x و y می‌نامیم. پس $\frac{y}{x}=4$ و $xy=x+y+6$. بنابراین $y=4x$ و

$$x(4x)=x+4x+6\Rightarrow 4x^2-5x-6=0$$

$$\Delta=25+96=121\Rightarrow x=\frac{5\pm 11}{8}\Rightarrow x_1=2,\ x=-\frac{3}{4}\ (\text{غ.ق.ق})$$

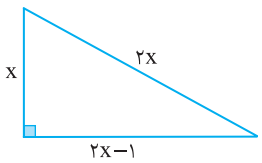
بنابراین $y=8$ و در نتیجه $y-x=6$.

۱۷۱۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیهٔ فیثاغورس، معادلهٔ $(2x)^2=x^2+(2x-1)^2$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$4x^2=x^2+4x^2-4x+1\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x=2-\sqrt{3},\ x=2+\sqrt{3}$$

چون $2x-1$ اندازهٔ یکی از ضلع‌های مثلث است، پس $2x-1>0$، یعنی $x>\frac{1}{2}$. بنابراین $x=2-\sqrt{3}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x=2+\sqrt{3}$. از طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P=x+2x+2x-1=5x-1=5(2+\sqrt{3})-1=9+5\sqrt{3}$$



۱۷۲۰- گزینهٔ ۲ این دو عدد را x و $x+2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین تساوی $(x+2)^3-x^3=488$ برقرار است. پس

$$x^3+6x^2+12x+8-x^3=488\Rightarrow 6x^2+12x-480=0$$

$$x^2+2x-80=0\Rightarrow(x-8)(x+10)=0\Rightarrow x=8\ ,\ x=-10$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس $x=-10$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=8$ و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آن‌ها برابر $10^2-8^2=100-64$، یعنی ۳۶ است.

۱۷۲۱- گزینهٔ ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta=4(m+1)^2-4m(m+1)=4(m+1)(m+1-m)=4(m+1)=0$$

بنابراین $m=-1$.

۱۷۲۲- گزینهٔ ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید $\Delta\le 0$. پس

$$\Delta=36-4\times 4(k-2)\le 0\Rightarrow 68-16k\le 0\Rightarrow k\ge\frac{17}{4}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{17}{4}$ است.

۱۷۲۳- گزینهٔ ۲ چون معادلهٔ $x^2+2x+b=0$ دو جواب حقیقی دارد، پس $\Delta=4-4b>0$. اکنون دلتای معادلهٔ $x^2-6x+b+8=0$ را حساب می‌کنیم

$$\Delta=36-4(b+8)=4-4b>0$$

بنابراین، معادلهٔ اخیر نیز دو جواب دارد.

۱۷۲۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول**

$$x^2+(m-1)x+m-2m^2=0$$

$$\Delta=(m-1)^2-4(m-2m^2)=m^2-2m+1-4m+8m^2$$

$$=9m^2-6m+1=(3m-1)^2$$

$$x=\frac{(1-m)\pm\sqrt{(3m-1)^2}}{2}=\frac{(1-m)\pm(3m-1)}{2}\Rightarrow x_1=1-2m,\ x_2=m$$

حالت اول

$$x_1=1-2m<0\Rightarrow m>\frac{1}{2},\ x_2=m<2\Rightarrow\frac{1}{2}<m<2$$

حالت دوم

$$x_1=1-2m<2\Rightarrow m>-\frac{1}{2},\ x_2=m<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<m<0$$

پس می‌توان گفت $m\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به‌صورت $x^2+(m-1)x-m(2m-1)=0$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل‌ضربشان $-m(2m-1)$ و حاصل‌جمعشان $m-1$ باشد. پس یکی از این دو عدد $2m-1$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+2m-1)=0$. پس جواب‌های معادله $x_1=1-2m$ و $x_2=m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول $x_1=1-2m<0\Rightarrow m>\frac{1}{2}$ ، $x_2=m<2\Rightarrow \frac{1}{2}<m<2$

حالت دوم $x_1=1-2m<2\Rightarrow m>-\frac{1}{2}$ ، $x_2=m<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<m<0$

بنابراین $m\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

۱۷۲۵- گزینهٔ ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $1-m+m-2=0$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۱۷۲۶- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر $a-b+c=0$، آن‌گاه جواب‌های معادله $x=-1$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.

در معادلهٔ $(\sin^2\alpha)x^2+x+\cos^2\alpha=0$،

$$a=\sin^2\alpha\ ,\ b=1\ ,\ c=\cos^2\alpha\Rightarrow a-b+c=\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha=0$$

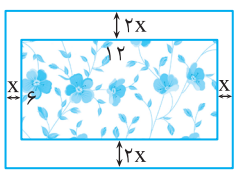
بنابراین $x_1=-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\cot^2\alpha$ و $x_2=-1$. توجه کنید که چون $0^\circ<\alpha<45^\circ$، پس $\cot\alpha>1$ و در نتیجه $-\cot^2\alpha<-1$. بنابراین

$$x_2^2-x_1=(-1)^2-(-\cot^2\alpha)=1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

۱۷۲۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $12+2x$ و $6+4x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(6+4x)(12+2x)$. پس

$$(6+4x)(12+2x)=104\Rightarrow 2x^2+15x-8=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},\ x=-8$$

$x=-8$ قابل قبول نیست. پس $x=\frac{1}{2}$ و



محیط قاب برابر است با

$$P=2(6+4x+12+2x)$$
$$=2(6x+18)=42cm$$

۱۷۲۸- گزینهٔ ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت $x-2=7(y-2)$ و $x=y^2$. اگر در معادلهٔ اول به جای x قرار دهیم y^2، به‌دست می‌آید:

$$y^2-2=7(y-2)\Rightarrow y^2-7y+12=0\Rightarrow (y-3)(y-4)=0\Rightarrow y=3,4$$

اگر $y=3$، آن‌گاه $x=9$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y=4$، آن‌گاه $x=16$. یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینهٔ (۱) آمده است.

۱۷۲۹- گزینهٔ ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازهٔ مساحت آن x^2 و طول قطر آن $\sqrt{2}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+\sqrt{2}x=\frac{7}{2}\Rightarrow x^2+\sqrt{2}x-\frac{7}{2}=0$$

$$x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

محیط مربع $4x$ است که می‌شود $8-2\sqrt{2}$.

۱۷۳۰- گزینهٔ ۳ طول یک تکه را x بگیرید. در این صورت طول تکهٔ دیگر $20-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ اول $\frac{x}{4}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ دوم $\frac{20-x}{4}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{4})^2$ و $(\frac{20-x}{4})^2$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{4})^2+(\frac{20-x}{4})^2=13\Rightarrow x^2-20x+96=0\Rightarrow x=12\ ,\ x=8$$

چون $20=8+12$، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکهٔ دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۱۷۳۱- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m+1=5\Rightarrow m=4$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta=-2m-1=-9$.

۱۷۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1x_2=-5$ و $x_1+x_2=3$. در نتیجه

$$x_1(x_2-2)+x_2(x_1-2)=2x_1x_2-2(x_1+x_2)=2(-5)-2(3)=-16$$

۱۷۳۳- گزینهٔ ۴ جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-5=0$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-2)(\beta-2)=(2-\alpha)(2-\beta)$ را بیابیم. برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$. از طرف دیگر، $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین $(\alpha-2)(\beta-2)=-5-4+4=-5$، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^2-2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $(2-\alpha)(2-\beta)=-5$. چون $\alpha\beta=-5$، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۱۷۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_1+x_2=-(k+1)=-1-k\ ,\quad x_1x_2=8$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-1-k}{8}=-\frac{3}{4}$$

بنابراین $k=5$.

۱۷۳۵- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\frac{2}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=2$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}=2\Rightarrow m-1=4\Rightarrow m=5$$

۱۷۳۶- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^{۲}$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow\beta^{۳}=-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow\beta=-\frac{۳}{۲}$$

پس $\alpha=\frac{۹}{۴}$، همچنین $\alpha+\beta=-\frac{m}{۸}$. بنابراین

$$\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۲}=-\frac{m}{۸}\Rightarrow m=-۶$$

۱۷۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x_۱+x_۲)^{۳}=x_۱^{۳}+x_۲^{۳}+۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)\quad(۱)$$

از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=۲$ و $x_۱x_۲=k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه $x_۱^{۳}+x_۲^{۳}=۶$ به‌دست می‌آید $۸=۶+۶k$. بنابراین $k=\frac{۱}{۳}$.

۱۷۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۳k$ و $x_۱x_۲=۹$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=۶\Rightarrow(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})^{۲}=۶^{۲}$$

$$x_۱+x_۲-۲\sqrt{x_۱x_۲}=۳۶\Rightarrow ۳k-۲\sqrt{۹}=۳۶\Rightarrow k=۱۴$$

۱۷۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=۳\Rightarrow(\alpha+\beta)^{۲}=۹,\quad|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow(\alpha-\beta)^{۲}=۱۳$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۲۲x+۱۱۷=۰$$

۱۷۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا جواب‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۳x-۹=۰$ را می‌یابیم:

$$۲x^{۲}+۳x-۹=۰\Rightarrow(۲x-۳)(x+۳)=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۳}{۲},\ x_۲=-۳$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ $۹x^{۲}-ax+b=۰$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha=\frac{۱}{x_۱^{۲}}-۳=\frac{۴}{۹}-۳=-\frac{۲۳}{۹},\quad\beta=\frac{۱}{x_۲^{۲}}-۳=\frac{۱}{۹}-۳=-\frac{۲۶}{۹}$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{a}{۹}$. بنابراین

$$\frac{a}{۹}=-\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow a=-۴۹$$

راه‌حل دوم جواب‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۳x-۹=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. اگر جواب‌های معادلهٔ $۹x^{۲}-ax+b=۰$ را با z و t نشان دهیم، آن‌گاه $z=\frac{۱}{\alpha^{۲}}-۳$ و $t=\frac{۱}{\beta^{۲}}-۳$.

توجه کنید که $z+t=\frac{a}{۹}=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}-۶=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{(\alpha\beta)^{۲}}-۶$. چون $\alpha+\beta=-\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۹}{۲}$، پس $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=\frac{۹}{۴}+۹=\frac{۴۵}{۴}$. بنابراین

$$\frac{a}{۹}=\frac{\frac{۴۵}{۴}}{\frac{۸۱}{۴}}-۶=\frac{۵}{۹}-۶\Rightarrow a=-۴۹$$

۱۷۴۱- گزینهٔ ۳ مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{m^{۲}}{m}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{۱}{m}$ است. بنابراین

$$\frac{m^{۲}}{m}=\frac{۱}{m}\Rightarrow m^{۲}=۱\Rightarrow m=\pm۱$$

اگر $m=۱$، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^{۲}-x+۱=۰$ است که جواب ندارد چون $\Delta=-۳<۰$. اگر $m=-۱$، آن‌گاه معادله به‌صورت $-x^{۲}-x+۱=۰$ است که دو جواب دارد.

۱۷۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{۳}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{۵}{۲}$ است. بنابراین

$$\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۱۷۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۵}{۲}$. بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۱}{۴}-۲(-\frac{۵}{۲})}{-\frac{۵}{۲}}=-\frac{۲۱}{۱۰}$$

۱۷۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$۳=\frac{\sqrt{۵^{۲}-۴(k+۱)(-۲)}}{|-۲|}\Rightarrow۶=\sqrt{۸k+۳۳}$$

$$۶^{۲}=۸k+۳۳\Rightarrow۸k=۳\Rightarrow k=\frac{۳}{۸}$$

۱۷۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱$ و

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱-۴(۲k-۳)}=\sqrt{۱۳-۸k}$$

از طرف دیگر،

$$x_۱^{۲}-x_۲^{۲}=۶\Rightarrow(x_۱-x_۲)(x_۱+x_۲)=۶\Rightarrow\ x_۱-x_۲=۶$$

پس $x_۱-x_۲>۰$، در نتیجه

$$\sqrt{۱۳-۸k}=۶\Rightarrow۱۳-۸k=۳۶\Rightarrow k=-\frac{۲۳}{۸}$$

۱۷۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱۵$ و $x_۱x_۲=۹$. بنابراین $x_۱,x_۲>۰$ و

$$\sqrt{\frac{x_۱}{x_۲}}+\sqrt{\frac{x_۲}{x_۱}}=\frac{\sqrt{x_۱}}{\sqrt{x_۲}}+\frac{\sqrt{x_۲}}{\sqrt{x_۱}}=\frac{\sqrt{x_۱}^{۲}+\sqrt{x_۲}^{۲}}{\sqrt{x_۱x_۲}}=\frac{x_۱+x_۲}{\sqrt{x_۱x_۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۹}}=۵$$

۱۷۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-(\frac{-۶}{۳})=۲$ و $x_۱x_۲=-\frac{۴}{۳}$.

از طرف دیگر،

$$S=x_۱^{۲}+x_۱x_۲+x_۲^{۲}+x_۱x_۲=x_۱^{۲}+x_۲^{۲}+۲x_۱x_۲=(x_۱+x_۲)^{۲}=۴$$

$$P=(x_۱^{۲}+x_۱x_۲)(x_۲^{۲}+x_۱x_۲)=(x_۱(x_۱+x_۲))(x_۲(x_۱+x_۲))$$

$$=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)^{۲}=-\frac{۴}{۳}\times۴=-\frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^{۲}-۴x-\frac{۱۶}{۳}=۰$ یا $۳x^{۲}-۱۲x-۱۶=۰$ است.

۱۷۴۸- گزینهٔ ۱ اگر جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۵=۰$ را α و β بنامیم، آن‌گاه $\alpha+\beta=۳$ و $\alpha\beta=-۵$. جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ هستند. بنابراین

$$S=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲۷-۳\times(-۵)\times۳=۷۲$$

$$P=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=(-۵)^۳=-۱۲۵$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۷۲x-۱۲۵=۰$$

۱۷۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-۱$ و $\alpha\beta=-۳$، بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\alpha^۲+\frac{۱}{\beta}+\beta^۲+\frac{۱}{\alpha}=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۱+۶+\frac{-۱}{-۳}=\frac{۲۲}{۳}$$

$$P=(\alpha^۲+\frac{۱}{\beta})(\beta^۲+\frac{۱}{\alpha})=(\alpha\beta)^۲+\alpha+\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}=۹-۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۲۲}{۳}x+\frac{۲۳}{۳}=۰\Rightarrow ۳x^۲-۲۲x+۲۳=۰$$

۱۷۵۰- گزینهٔ ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲=-۱\\(x_۱+x_۲)-x_۱x_۲=-۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S+P=-۱\\S-P=-۱۱\end{cases}$$

را حل کنیم، به‌دست می‌آید $S=-۶$ و $P=۵$. بنابراین $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+۵=۰$ هستند.

۱۷۵۱- گزینهٔ ۲ کافی است در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ نابرابری $\frac{c}{a}<۰$ برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی است. پس $\frac{m-۴}{m+۲}<۰$ در نتیجه $-۲<m<۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح -۱، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد.

۱۷۵۲- گزینهٔ ۲ اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر $a\neq۰$، آن‌گاه حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{۱-a^۲}{a^۲}$ که باید منفی باشد. پس

$$\frac{۱-a^۲}{a^۲}<۰\Rightarrow ۱-a^۲<۰\Rightarrow a^۲>۱\Rightarrow|a|>۱$$

۱۷۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\Delta=۴m^۲+۴m+۴\Rightarrow(۲m+۱)^۲+۳>۰$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم‌علامت باشند، کافی است حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -m-۱>۰\Rightarrow m<-۱$$

۱۷۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله به صورت $-۸x+۹=۰$ درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط $a\neq۰$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta=۱۶(a+۲)^۲-۱۶a\times۹=۱۶((a+۲)^۲-۹a)=۱۶(a^۲-۵a+۴)$$
$$=۱۶(a-۱)(a-۴)>۰$$

بنابراین $a\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$. همچنین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها باید مثبت باشند: $\frac{a+۲}{a}>۰$ و $\frac{۹}{۴a}>۰$. پس $a>۰$، در نتیجه $a\in(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشند.

۱۷۵۵- گزینهٔ ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های $\Delta>۰$، $\alpha\beta>۰$ و $\alpha+\beta<۰$ برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta=m^۲-۸(m-۲)>۰\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶>۰\Rightarrow(m-۴)^۲>۰\Rightarrow m\neq۴$$

$$\alpha+\beta<۰\Rightarrow\frac{-m}{۲}<۰\Rightarrow m>۰\ ,\quad \alpha\beta>۰\Rightarrow\frac{m-۲}{۲}>۰\Rightarrow m>۲$$

بنابراین $m\in(۲,+\infty)-\{۴\}$.

۱۷۵۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$$\Delta>۰\Rightarrow(m-۴)^۲-۴(۲m+۴)>۰\Rightarrow m^۲-۱۶m>۰\Rightarrow m<۰\ \text{یا}\ m>۱۶$$

برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل‌ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow ۲m+۴\geq۰\Rightarrow m\geq-۲\ ,\quad -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow ۴-m>۰\Rightarrow m<۴$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برای m به‌صورت $-۲\leq m<۰$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح -۲ و -۱ را داشته باشد.

۱۷۵۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد ($\Delta=m^۲+۸>۰$). اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-۲<۰\Rightarrow m<۲,\quad -(m+۱)>۰\Rightarrow m<-۱$$

پس $m<-۱$.

۱۷۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\Delta=(۲m+۱)^۲$. چون معادله دو جواب دارد، باید $m\neq-\frac{۱}{۲}$. چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_۱+x_۲=-\frac{۲m-۱}{m}>۰\Rightarrow۰<m<\frac{۱}{۲}\ ,\quad x_۱x_۲=-\frac{۲}{m}<۰\Rightarrow m>۰$$

بنابراین $۰<m<\frac{۱}{۲}$.

۱۷۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta\geq۰$، پس

$$۴-۴m+۸\geq۰\Rightarrow m\leq۳$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a}\leq۰\Rightarrow m-۲\leq۰\Rightarrow m\leq۲$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a}\leq۰$، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a}=۲$.

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۱۷۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta=۴m^۲+۴m+۸=(۲m+۱)^۲+۷>۰$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow ۲m<۰\Rightarrow m<۰\ ,\quad \frac{c}{a}>۰\Rightarrow -m-۲>۰\Rightarrow m<-۲$$

پس اگر $m<-۲$، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $m=-۲$، معادله به‌صورت $x^۲+۴x=۰$ درمی‌آید که یک جواب آن $x=۰$ و جواب دیگر $x=-۴$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد. بنابراین اگر $m>-۲$، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۱۷۶۱- گزینهٔ ۳ چون $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=-۱$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases} ۶(\frac{۱}{۲۷})-۵(\frac{۱}{۹})+a(\frac{۱}{۳})+b=۰ \\ ۶(-۱)-۵\times ۱-a+b=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+۳b=۱ \\ a-b=-۱۱ \end{cases}$$

بنابراین $a=-۸$ و $b=۳$. پس معادله به شکل $۶x^۳-۵x^۲-۸x+۳=۰$ در می‌آید که چون $\frac{۱}{۳}$ و -۱ جواب‌های آن هستند، پس $۳x-۱$ و $x+۱$ عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت $(x+۱)(۳x-۱)(۲x-۳)=۰$. بنابراین جواب دیگر معادله $x=\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه $k=\frac{۳}{۲}$ و $\frac{ab}{k}=\frac{(-۸)\times ۳}{\frac{۳}{۲}}=-۱۶$.

۱۷۶۲- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۳+۸+x^۲-۵x-۱۴=۰\Rightarrow (x+۲)(x^۲-۲x+۴)+(x+۲)(x-۷)=۰$$

$$(x+۲)(x^۲-۲x+۴+x-۷)=۰\Rightarrow (x+۲)(x^۲-x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\quad x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲})(-۲)=\sqrt{۱۳}-۱$$

۱۷۶۳- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=-۱$ جواب معادله است. پس $x+۱$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^۳+x^۲+x^۲-mx-m-۱=۰\Rightarrow x^۲(x+۱)+(x+۱)(x-m-۱)=۰$$

$$(x+۱)(x^۲+x-(m+۱))=۰$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+x-(m+۱)=۰$ دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=۱+۴(m+۱)>۰\Rightarrow ۵+۴m>۰\Rightarrow m>-\frac{۵}{۴}$$

$$(-۱)^۲-۱-(m+۱)\neq ۰\Rightarrow m\neq -۱$$

پس $m\in(-\frac{۵}{۴},+\infty)-\{-۱\}$.

۱۷۶۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq ۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ درمی‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{۵\pm\sqrt{۳۷}}{۲}$ هستند.

جواب $\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۲}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^۲=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq ۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ در می‌آید، که در آن $\frac{c}{a}<۰$ است. پس معادله دو جواب مختلف العلامت دارد. که با توجه به فرض $t\geq ۰$، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و $x=\pm\sqrt{t}$. پس معادلهٔ داده شده دو جواب دارد.

۱۷۶۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲-۴t-۱۲=۰$، پس

$$t^۲-۴t-۱۲=۰\Rightarrow (t-۶)(t+۲)=۰$$

$$t=-۲\quad (\text{غ.ق.ق}),\quad t=۶\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۶ است.

۱۷۶۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲+(۲m-۱)t-۲m=۰$. چون معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد، پس این معادلهٔ درجهٔ دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta>۰\Rightarrow (۲m-۱)^۲+۸m>۰\Rightarrow (۲m+۱)^۲>۰\Rightarrow m\neq -\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -۲m>۰\Rightarrow m<۰$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -(۲m-۱)>۰\Rightarrow ۲m-۱<۰\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m به‌صورت $(-\infty,۰)-\{-\frac{۱}{۲}\}$ است.

۱۷۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، به‌معادلهٔ $t^۲-kt+\frac{۳-۲k}{۴}=۰$ می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند $t_۱$ داشته باشد، معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_۱}$ دارد:

$$\begin{cases} \Delta=۰ \\ t_۱=-\frac{b}{۲a}>۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} k^۲-(۳-۲k)=۰ \\ \frac{k}{۲}>۰\Rightarrow k>۰ \end{cases}$$

$$k^۲+۲k-۳=۰\Rightarrow k=-۳\ (\text{غ.ق.ق}),\ k=۱$$

همچنین اگر معادلهٔ درجهٔ دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد، جواب منفی قابل‌قبول نیست، چون $x^۲$ نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow \frac{۳-۲k}{۴}<۰\Rightarrow ۳-۲k<۰\Rightarrow k>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $k>\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$ جواب مسئله است.

۱۷۶۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ ، $t\geq ۰$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^۲-۲mt+m^۲-۴=۰ \quad (*)$$

در این معادله $\Delta=۴m^۲-۴(m^۲-۴)=۱۶>۰$. بنابراین معادلهٔ (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر $t_۱$ و $t_۲$ جواب‌های معادلهٔ (*) باشند، باید

$$t_۱+t_۲<۰\Rightarrow ۲m<۰\Rightarrow m<۰$$

$$t_۱t_۲>۰\Rightarrow m^۲-۴>۰\Rightarrow m<-۲ \text{ یا } m>۲$$

بنابراین کافی است $m<-۲$ تا معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۱۷۶۹- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$. در این صورت

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow (t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$(x-۲)(x+۳)=۰\Rightarrow x_۱=۲,\quad x_۲=-۳$$

$$t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰$$

$$(x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x_۳=۳,\quad x_۴=-۴$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

۱۷۷۰- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲-۷x+۱۱=t$. در نتیجه $t^۲=۳t+۴$. بنابراین $t=-۱,۴$ ، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^۲-۷x+۱۱=-۱\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲=۰\Rightarrow x=۳,۴$$

$$x^۲-۷x+۱۱=۴\Rightarrow x^۲-۷x+۷=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۲۱}}{۲}$$

پس معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

۱۷۷۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^۲+۱=۲(x+۱)\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

جواب‌های معادلهٔ بالا $x=۱+\sqrt{۲}$ و $x=۱-\sqrt{۲}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $۱+\sqrt{۲}$ است.

۱۷۷۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^۴-x^۲-۲x+۱}=\frac{۱}{x^۳-۱}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^۴-x=x^۴-x^۲-۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۱=۰\Rightarrow \frac{c}{a}=-۱$$

۱۷۷۳- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را در $(x-۱)(x+۱)$ ضرب و آن را ساده می‌کنیم:

$$x+۱+۲(x-۱)=۲(x-۱)(x+۱)\Rightarrow ۳x-۱=۲x^۲-۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که ۱ و -۱ از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۷۷۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید $x_۱$ جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{۵x-۲-۴a}{x^۲-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^۲-(a+۷)x+۶a+۲=۰ \quad (۱)$$

چون $x=۵$ جواب معادله است، پس

$$۲۵-۵(a+۷)+۶a+۲=۰\Rightarrow a=۸$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۷$ است، پس

$$a+۷=۵+x_۱\Rightarrow ۱۵=۵+x_۱\Rightarrow x_۱=۱۰$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

۱۷۷۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{۲x-۲a+x+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴\Rightarrow \frac{۳x-۲a+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴$$

$$۳x-۲a+۳=۴x^۲+(۱۲-۴a)x-۱۲a\Rightarrow ۴x^۲+(۹-۴a)x-۱۰a-۳=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-۱۰a-۳}{۴}$ است. پس

$$\frac{-۱۰a-۳}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow -۱۰a=۱۰\Rightarrow a=-۱$$

۱۷۷۶- گزینهٔ ۲ دو طرف معادله را در $x^۲-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$x-۱-۲=a(x^۲-۱)\Rightarrow ax^۲-x+۳-a=۰ \quad (۱)$$

اگر در معادلهٔ (۱) شرط $\Delta<۰$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta=۱-۴a(۳-a)<۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۲a+۱<۰\Rightarrow \frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}<a<\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۲}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a=۱$ و $a=۲$ معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادلهٔ اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

۱) $x=۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باشد.

۲) $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۲) باشد.

۳) $x=۱$ و $x=-۱$ هر دو جواب‌های معادلهٔ (۱) باشند.

۱۷۷۷- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\frac{۲x+۱}{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$t+\frac{-۶}{t}=۵\Rightarrow t^۲-۵t-۶=۰\Rightarrow t=-۱,t=۶$$

بنابراین

$$t=-۱\Rightarrow \frac{۲x+۱}{x}=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

$$t=۶\Rightarrow \frac{۲x+۱}{x}=۶\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادلهٔ اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $-\frac{۱}{۱۲}$.

۱۷۷۸- گزینهٔ ۱ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}=۴$. بنابراین

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$$

بنابراین دو عدد $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ شرط مورد نظر را دارند که $۲-\sqrt{۳}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

۱۷۷۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t+\frac{۴}{۹}$ و سرعت برگشت برابر $v-۵$ است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر ۲۰۰ کیلومتر است، پس تساوی‌های $۲۰۰=vt$ و $۲۰۰=(v-۵)(t+\frac{۴}{۹})$ برقرارند. بنابراین

$$v=\frac{۲۰۰}{t}\Rightarrow ۲۰۰=(\frac{۲۰۰}{t}-۵)(t+\frac{۴}{۹})\Rightarrow ۲۰۰=۲۰۰+\frac{۸۰۰}{۹t}-۵t-\frac{۲۰}{۹}$$

$$۸۰۰-۴۵t^۲-۲۰t=۰\Rightarrow ۹t^۲+۴t-۱۶۰=۰$$

$$(۹t+۴۰)(t-۴)=۰\Rightarrow t=۴ \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت ۴ ساعت است.

۱۷۸۰- گزینهٔ ۱ نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow x=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $۳-\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{۲(x+y)}{xy}=۳-\sqrt{۵}\Rightarrow ۲((\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y+y)=(۳-\sqrt{۵})xy$$

$$۲(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}+۱)=(۳-\sqrt{۵})x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}\times\frac{۳+\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{(۳+\sqrt{۵})^۲}{۹-۵}=\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۷۸۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-۱)(\frac{۱}{x-۳}+\frac{۱}{x-۵})=۰\Rightarrow(x-۱)(\frac{x-۵+x-۳}{(x-۳)(x-۵)})=۰$$

$$(x-۱)(\frac{۲x-۸}{(x-۳)(x-۵)})=۰\Rightarrow\frac{۲(x-۱)(x-۴)}{(x-۳)(x-۵)}=۰$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

۱۷۸۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-۱۲}{x^۲+۳x}=\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x+۳}=\frac{۲x+۶+۵x}{x^۲+۳x}=\frac{۷x+۶}{x^۲+۳x}$$

در نتیجه، با فرض $x\neq ۰,-۳$،

$$x-۱۲=۷x+۶\Rightarrow ۶x=-۱۸\Rightarrow x=-۳$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۷۸۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{۳x-۲-۲a}{x^۲-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^۲-(a+۵)x+۴a+۲=۰ \quad (۱)$$

چون $x=۶$ جواب معادله است، پس

$$۳۶-۶(a+۵)+۴a+۲=۰\Rightarrow -۲a+۸=۰\Rightarrow a=۴$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۵=۹$ است، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۱۷۸۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در $(x^۲-x+۱)(x-۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)=\frac{a}{a+۱}(x+۱)(x^۲-x+۱)$$

$$x^۳-۱=\frac{a}{a+۱}(x^۳+۱)\Rightarrow(a+۱)x^۳-a-۱=ax^۳+a$$

$$x^۳=۲a+۱\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲a+۱}$$

اگر $\sqrt[۳]{۲a+۱}$ ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر $x=۱$ است، پس

$$\sqrt[۳]{۲a+۱}=۱\Rightarrow ۲a+۱=۱\Rightarrow a=۰$$

توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^۲+x+۱=۰$ درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر $a=-۱$، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای $a\in\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه‌حل دوم چون $a+۱$ در مخرج کسر است، پس $a\neq -۱$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است $a=۰$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=۰$ معادله می‌شود $\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x+۱}=۰$ که جواب ندارد. پس $a\neq ۰$.

۱۷۸۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۵}{(x-۱)(x+۴)}-\frac{۳}{(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$\frac{۵(x+۱)-۳(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k\Rightarrow\frac{۲(x+۴)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$k(x^۲-۱)=۲\Rightarrow kx^۲-k-۲=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-۲}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-۲}{k}=-۴\Rightarrow ۴k=k+۲\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$$

۱۷۸۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $(x+\frac{۲}{x})^۲=t$، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^۲-۹t-۱۰=۰\Rightarrow t=-۱, t=۱۰$$

چون $t>۰$، پس $t=-۱$ غیرقابل قبول است. اگر $t=۱۰$، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+\frac{۲}{x}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^۲-\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \\ x+\frac{۲}{x}=-\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^۲+\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

۱۷۸۷- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۲۱}{x^۲+۴x+۱۰}-(x^۲+۴x+۱۰)+۱۰=۶$$

اگر فرض کنیم $x^۲+۴x+۱۰=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{۲۱}{t}-t+۴=۰\xrightarrow{\text{ضرب در } t}۲۱-t^۲+۴t=۰$$

$$t^۲-۴t-۲۱=۰\Rightarrow(t-۷)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳,\ t=۷$$

بنابراین

$t=-۳\Rightarrow x^۲+۴x+۱۰=-۳\Rightarrow x^۲+۴x+۱۳=۰$ $(\Delta<۰)$ جواب ندارد.

$$t=۷\Rightarrow x^۲+۴x+۱۰=۷\Rightarrow x^۲+۴x+۳=۰$$

$$(x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=-۳$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۴ است.

۱۷۸۸- گزینهٔ ۲ اگر طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث را a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{a^۲+\frac{۱۶}{۹}a^۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۹}a^۲}=\frac{۵}{۳}a$$

بنابراین

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱}{a}+\frac{۱}{\frac{۴}{۳}a}+\frac{۱}{\frac{۵}{۳}a}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱}{a}+\frac{۳}{۴a}+\frac{۳}{۵a}=\frac{۴۷}{۳۰}$$

دو طرف معادله را در ۶۰a ضرب می‌کنیم

$$۶۰+۴۵+۳۶=۹۴a\Rightarrow a=\frac{۱۴۱}{۹۴}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{b=\frac{۴}{۳}a}b=۲$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S=\frac{۱}{۲}ab=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۲=\frac{۳}{۲}$.

۱۷۸۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند، در نتیجه هزینهٔ سرانهٔ اولیه برابر $\frac{۷۰۰}{n}$ (برحسب هزارتومان) است. با افزودن پنج نفر از دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینهٔ سرانه برابر با $\frac{۷۰۰}{n}-۷$ می‌شود. در نتیجه

$$(\frac{۷۰۰}{n}-۷)(n+۵)=۷۰۰$$ بنابراین

$$(\frac{۷۰۰-۷n}{n})(n+۵)=۷۰۰\Rightarrow(۷۰۰-۷n)(n+۵)=۷۰۰n$$

$$n^۲+۵n-۵۰۰=۰\Rightarrow(n+۲۵)(n-۲۰)=۰\Rightarrow n=-۲۵,n=۲۰$$

فقط جواب $n=۲۰$ قابل قبول است.

۱۷۹۰- گزینهٔ ۱ ۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $۲۰+x$ و جرم محلول $۶۰+x$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow۱۰۰+۵x=۱۲۰+۲x\Rightarrow۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

۱۷۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y=x(x^۲-۳x+۲)=x(x-۱)(x-۲)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	

۱۷۹۲- گزینهٔ ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن متفاوت است، پس باید عبارت از درجهٔ اول باشد. یعنی ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$m^۲-۴=۰\Rightarrow m=\pm۲$$

اگر $m=۲$، عبارت به‌صورت $y=۲nx+۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$۰=۲n\times۴+۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به‌صورت زیر است و این حالت قابل قبول نیست.

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y		+	۰	−	

اگر $m=-۲$، عبارت به‌صورت $y=-۲nx-۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس $۰=-۲n\times۴-۲$. در نتیجه $n=-\frac{۱}{۴}$، بنابراین $mn=\frac{۱}{۲}$.

۱۷۹۳- گزینهٔ ۱ با توجه به جدول، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x=۱\Rightarrow m+۲-(m+۲)^۲+n=۰\quad(*)$$

$$x=۲\Rightarrow۴(m+۲)-۲(m+۲)^۲+n=۰$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m+۲)^۲-۳(m+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+۲=۰\Rightarrow m=-۲\\m+۲=۳\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

به ازای $m=-۲$ نتیجه می‌شود $y=n$ که در این صورت علامت y ثابت است و به ازای $m=۱$ از معادلهٔ $(*)$ مقدار n به‌دست می‌آید

$$۳-۹+n=۰\Rightarrow n=۶$$

۱۷۹۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌ها را به‌صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-x^۳>۰\Rightarrow x(۱-x)(۱+x)>۰\ ,\quad x-x^۲<۰\Rightarrow x(۱-x)<۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱\\x<۰\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، با فرض $x>۱$ یا $x<۰$ با مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x+۱<۰$ که بازهٔ $(-\infty,-۱)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ و $(-\infty,-۱)$ برابر $(-\infty,-۱)$ است که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مورد نظر مسئله است.

راه‌حل دوم عدد $-\frac{۱}{۲}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد ۲- در آن صدق می‌کند پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۱۷۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x(x^۲-۴x-۵)^۲(x^۲-۱)<۰$$

$$x^۲-۴x-۵=(x-۵)(x+۱),\quad x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=x(x+۱)^۳(x-۵)^۲(x-۱)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۵		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$. پس $a=-۱$، $b=۰$ و در نتیجه $a+b=-۱$.

۱۷۹۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$. دلتای عبارت $x^۲-x+۱$ منفی است $(\Delta=-۳)$. در نتیجه همواره $x^۲-x+۱>۰$.

بنابراین مسئله به یافتن مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $y=\frac{x+۱}{(x-۲)(x-۴)}\le۰$ تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	ت ن	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-۱]\cup(۲,۴)$ است.

پس $a=-۱$ و $b=۴$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۷۹۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۴-x^۲-۲<۰\Rightarrow(x^۲+۱)(x^۲-۲)<۰$$

چون مقدار عبارت $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس

$$x^۲-۲<۰\Rightarrow-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ است. در نتیجه

$$a=-\sqrt{۲}\ ,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow ab=-۲$$

۱۷۹۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر فرض کنیم $P(x)=x^۲+(a-۱)x+۲a-۶$ جدول تعیین علامت باید به‌صورت زیر باشد

x	$-\infty$		$x_۱$	-۳	$x_۲$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس باید $P(x)$ به ازای $x=-۳$ منفی باشد. بنابراین

$$P(-۳)=(-۳)^۲-۳(a-۱)+۲a-۶<۰\Rightarrow a>۶$$

راه‌حل دوم ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲+(a-۱)x+۲(a-۳)=(x+a-۳)(x+۲)=۰$$

$$\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x+a-۳=۰\Rightarrow x=۳-a\end{cases}$$

$$x_۱<-۳<x_۲\Rightarrow x_۱=۳-a,\ x_۲=-۲$$

$$x_۱=۳-a<-۳\Rightarrow a>۶$$

۱۷۹۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت برابر $-۲x$ خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر $m\neq۰$، آن‌گاه باید ضریب $x^۲$ مثبت و Δ منفی باشد. پس

$$m>۰\ ,\ ۴-۴m^۲<۰\Rightarrow m^۲>۱\Rightarrow m>۱$$

۱۸۰۰- گزینهٔ ۳ می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۶$ برقرار باشد، یعنی $mx^۲-۲mx+۸>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۳۲m<۰\Rightarrow m(m-۸)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۸$.

m	$-\infty$		۰		۸		$+\infty$
$m(m-۸)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۶ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\leq m<۸$. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

۱۸۰۱- گزینهٔ ۱ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y=x^۴-۳x^۲-۴=(x^۲+۱)(x^۲-۴)$$

چون $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس کافی است $x^۲-۴$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۱۸۰۲- گزینهٔ ۱ ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$m^۲x+|m|=۰\Rightarrow x=\frac{-|m|}{m^۲}=\frac{-|m|}{|m|^۲}=\frac{-۱}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	

۱۸۰۳- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $x^۳-۳x^۲\leq۰$ و $x^۳-۳x^۲\geq-۴$ را حل کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^۳-۳x^۲\leq۰\Rightarrow x^۲(x-۳)\leq۰\Rightarrow x\leq۳$$

$$x^۳-۳x^۲+۴\geq۰\Rightarrow(x+۱)(x^۲-۴x+۴)\geq۰$$

$$(x+۱)(x-۲)^۲\geq۰\Rightarrow x\geq-۱$$

بنابراین $-۱\leq x\leq۳$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر است. پس $a=-۱$ و $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۲$. توجه کنید که

$$x^۳-۳x^۲+۴=x^۳+۱-۳x^۲+۳=(x^۳+۱)-۳(x^۲-۱)$$

$$=(x+۱)(x^۲-x+۱)-۳(x-۱)(x+۱)=(x+۱)(x^۲-۴x+۴)$$

۱۸۰۴- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^۲-۲x-۴)^۲-۴(x^۲-۲)^۲\geq۰$$

$$(x^۲-۲x-۴+۲x^۲-۴)(x^۲-۲x-۴-۲x^۲+۴)\geq۰$$

$$(۳x^۲-۲x-۸)(-x^۲-۲x)\geq۰\Rightarrow-x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\geq۰$$

$$y=x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\leq۰$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		۰		۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $[-۲,-\frac{۴}{۳}]\cup[۰,۲]$ است که اعداد صحیح ۲، ۱، ۰ و -۲ را شامل می‌شود.

۱۸۰۵- گزینهٔ ۳ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۴}=\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x-۳}{x+۲},\quad x\neq۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۲		۳		$+\infty$
y		$+$	ت ن	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

بنابراین y به‌ازای هر x که در مجموعهٔ $(-۲,۳)-\{۲\}$ باشد، منفی است. پس $a=-۲$، $b=۳$ و $c=۲$. در نتیجه $\frac{a+b}{c}=\frac{۱}{۲}$.

۱۸۰۶- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $ax-b>۰$ به یکی از دو صورت $(\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{b}{a})$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a>۰,\ \frac{b}{a}=۲\Rightarrow ۲a=b$$

بنابراین $\frac{ax+b}{x-۲}=a(\frac{x+۲}{x-۲})$. چون $a>۰$، کافی است مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+۲}{x-۲}<۰$ را بیابیم که بازهٔ $(-۲,۲)$ است.

۱۸۰۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰\Rightarrow\frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$

$$\frac{-x^۲+۲x+۲۴}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-۴,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

پس $a=-۴$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۲$.

۱۸۰۸- گزینهٔ ۴ اولاً باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس $m<۰$، ثانیاً باید $\Delta<۰$. پس

$$۱-۴m^۲<۰\Rightarrow m^۲>\frac{۱}{۴}\Rightarrow|m|>\frac{۱}{۲}\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ m<-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m<-\frac{۱}{۲}$.

۱۸۰۹- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۲$ برقرار باشد، یعنی $mx^۲-۲mx+۴>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۱۶m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۴$.

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m(m-۴)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$ آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۲ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\leq m<۴$.

۱۸۱۰- گزینهٔ ۳ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲+mx+m}{x^۲-x+۱}-۳\leq۰\Rightarrow\frac{-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳}{x^۲-x+۱}\leq۰$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^۲-x+۱>۰$ برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳\leq۰$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta=(m+۳)^۲+۸(m-۳)\leq۰\Rightarrow m^۲+۱۴m-۱۵\leq۰$$

$$(m-۱)(m+۱۵)\leq۰\Rightarrow-۱۵\leq m\leq۱$$

پس حداقل مقدار m برابر -۱۵ است.

۱۸۱۱- گزینهٔ ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$۲x+۱=(۲x-۱)^۲\Rightarrow۲x+۱=۴x^۲+۱-۴x$$

$$۴x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=\frac{۳}{۲}$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند ولی $x=\frac{۳}{۲}$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{۱}{۲}x+۱\geq۰$ و در نتیجه $x\geq-۲$. همچنین باید $۴-x^۲\geq۰$ و در نتیجه $-۲\leq x\leq۲$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴-x^۲=(\frac{۱}{۲}x+۱)^۲\Rightarrow۴-x^۲=\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱$$

$$۵x^۲+۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۲)(۵x-۶)=۰\Rightarrow x=-۲,\ x=\frac{۶}{۵}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{۴}{۵}$ است.

۱۸۱۳- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف معادلهٔ مورد نظر را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$۴-۳x-x^۲=x^۲+۸x+۱۶\Rightarrow۲x^۲+۱۱x+۱۲=۰\Rightarrow x=-۴,\ x=-\frac{۳}{۲}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۱۸۱۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴+۲x-۵=(۱+x)^۲\Rightarrow x^۴-x^۲-۶=۰\Rightarrow(x^۲-۳)(x^۲+۲)=۰$$

چون $x^۲+۲\neq۰$، پس $x^۲-۳=۰$ بنابراین $x=\pm\sqrt{۳}$.

$x=\sqrt{۳}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=-\sqrt{۳}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x=-\sqrt{۳}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲x-۱}=۲-۲\sqrt{x}\quad(*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲x-۱=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow۲x+۵=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴x^۲+۲۰x+۲۵=۶۴x\Rightarrow۴x^۲-۴۴x+۲۵=۰$$

$$x=\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}\ ,\ x=\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$۲-۲\sqrt{x}\geq۰\Rightarrow\sqrt{x}\leq۱\Rightarrow۰\leq x\leq۱$$

بنابراین جواب $\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$ قابل قبول نیست و $\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۸۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=۸$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{۸-۴a}+\sqrt{۸+a}=\sqrt{۲۴+a}\quad(۱)$$

دو طرف معادلهٔ بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$۸-۴a+۸+a+۲\sqrt{(۸-۴a)(۸+a)}=۲۴+a$$

$$۲\sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۴a+۸\Rightarrow\sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۲a+۴$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۶۴-۲۴a-۴a^۲=۴a^۲+۱۶+۱۶a$$

$$۸a^۲+۴۰a-۴۸=۰\Rightarrow a^۲+۵a-۶=۰\Rightarrow a=۱\ ,\ a=-۶$$

جواب $a=-۶$ قابل قبول نیست چون در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۸۱۷- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[۳]{x})^۴-۵(\sqrt[۳]{x})^۲+۴=۰$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $(\sqrt[۳]{x})^۲=a$. در این صورت

$$a^۲-۵a+۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a-۱)=۰$$

$$\begin{cases}a=۱\Rightarrow(\sqrt[۳]{x})^۲=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱\\ a=۴\Rightarrow(\sqrt[۳]{x})^۲=۴\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=\pm۸\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۱۸۱۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{۱}{t}=۲\Rightarrow t^۲+۱=۲t\Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰$$

تنها جواب معادلهٔ بالا $t=۱$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=۱\Rightarrow x=\sqrt{x}+۱\Rightarrow x-۱=\sqrt{x}\quad(۱)$$

$$x^۲-۲x+۱=x\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\ ,\ x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

با توجه به معادلهٔ (۱) باید $x>۱$ و در نتیجه $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۸۱۹- گزینهٔ ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}=\frac{۴}{x}$. بنابراین

$$x=\frac{۱۶}{x^۲}\Rightarrow x^۳=۱۶\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۶}$$

۱۸۲۰- گزینهٔ ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با $t_۱$ و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با $t_۲$ نشان می‌دهیم.

در نتیجه اگر $CD=x$، آن‌گاه

$$t_۱=\frac{AD}{v_۱}=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}\ ,\quad t_۲=\frac{DB}{v_۲}=\frac{۸-x}{۳}$$

در نتیجه $t_۱+t_۲=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}+\frac{۸-x}{۳}=\frac{۸}{۳}$، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}=\frac{x}{۳}\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+۱۶}=۵x\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}$$

$$۹(x^۲+۱۶)=۲۵x^۲\Rightarrow ۱۶x^۲=۹\times ۱۶\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=۳$$

پس $CD=۳km$.

۱۸۲۱- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^۲+۷=(x+۲)^۲\Rightarrow x^۲+۷=x^۲+۴x+۴\Rightarrow ۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

با توجه به اینکه $x=\frac{۳}{۴}$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ قرار دارد.

۱۸۲۲- گزینهٔ ۱ برای حل معادلهٔ $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(۲x+۱)^۲=(\sqrt{۱۱x-۲})^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۱۱x-۲$$

$$۴x^۲-۷x+۳=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}\ ,\ x=۱$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۸۲۳- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$۱+۳x-x^۲=۱-۶x-x^۲+x^۳\Rightarrow x^۳=۹x\Rightarrow x(x^۲-۹)=۰$$

$$x=۰\ ,\ x=۳,\ x=-۳$$

جواب $x=-۳$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

۱۸۲۴- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^۳+۲=x^۳+۳x^۲+۳x+۱\Rightarrow ۳x^۲+۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۱}}{۶}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$ است.

۱۸۲۵- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-۲}=\sqrt{x+۱}-۱$ می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}\Rightarrow \sqrt{x+۱}=۲\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

$x=۳$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۱۸۲۶- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{۳x-۲}=۲-۲\sqrt{x}\quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$۳x-۲=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow x+۶=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^۲+۳۶+۱۲x=۶۴x\Rightarrow x^۲-۵۲x+۳۶=۰$$

$$x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}\ ,\ x=۲۶+۸\sqrt{۱۰}$$

در معادلهٔ (*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$۳x-۲\geq ۰\ ,\ ۲-۲\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow \frac{۲}{۳}\leq x\leq ۱$$

بنابراین جواب $۲۶+۸\sqrt{۱۰}$ قابل قبول نیست و $x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}$ جواب معادله است.

۱۸۲۷- گزینهٔ ۲ یک جواب معادله $x=۲$ است، پس $x=۲$ باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{۲-۱}+\sqrt{a-۲}=۳\Rightarrow \sqrt{a-۲}=۲\Rightarrow a-۲=۴\Rightarrow a=۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۶-x}=۳$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-۱}-۳=-\sqrt{۶-x}\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x-۱+۹-۶\sqrt{x-۱}=۶-x$$

$$x+۱=۳\sqrt{x-۱}\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۹x-۹\Rightarrow x^۲-۷x+۱۰=۰$$

$$(x-۲)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۲,x=۵$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۱۸۲۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $x^۲+۱+۶=۵\sqrt{x^۲+۱}$ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^۲+۱}$، معادله به‌صورت $t^۲+۶=۵t$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^۲-۵t+۶=(t-۲)(t-۳)=۰$ بنویسیم، جواب‌های آن $t=۲$ و $t=۳$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^۲+۱}=۲\Rightarrow x^۲+۱=۴\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{x^۲+۱}=۳\Rightarrow x^۲+۱=۹\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۱۸۲۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=x+\sqrt{x}$، معادله به‌صورت $t^۲+t=۲$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^۲+t-۲=(t-۱)(t+۲)=۰$ بنویسیم، $t=۱$ و $t=-۲$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x+\sqrt{x}=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x+\sqrt{x}=۱\Rightarrow \sqrt{x}=۱-x\quad (۱)$$

$$x=x^۲+۱-۲x\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

$$x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲},\quad x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که معادلهٔ $x+\sqrt{x}=-۲$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x+\sqrt{x}$ همواره نامنفی است. همچنین $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست زیرا در معادلهٔ (۱) باید $۰\leq x\leq ۱$، ولی $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۱۸۳۰- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^۳+k=x^۳-۳x^۲+۳x-۱\Rightarrow ۳x^۲-۳x+k+۱=۰$$

برای اینکه معادلهٔ بالا دو جواب داشته باشد، باید

$$\Delta>۰\Rightarrow ۹-۱۲(k+۱)>۰\Rightarrow k<-\frac{۱}{۴}$$

۱۸۳۱- گزینهٔ ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{17}{3} \\ x_1=3x_2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\frac{2}{3} \\ x_1=5 \end{cases} \xrightarrow{x_1x_2=\frac{m}{3}} \frac{10}{3}=\frac{m}{3} \Rightarrow m=10$$

ریاضی - ۸۷

۱۸۳۲- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=8\ ,\quad \alpha=\frac{\beta}{2}+5$$

از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha=6$ و $\beta=2$. از طرف دیگر، $\alpha\beta=m \Rightarrow m=12$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۸۳۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند. در این صورت $x_1+x_2=\frac{m+1}{2}$ و $x_1x_2=\frac{1}{16}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=4$$

$$\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4 \Rightarrow \frac{m+1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow m=6$$

ریاضی - ۹۶

۱۸۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-2$. بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\frac{1}{\alpha}+1+\frac{1}{\beta}+1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{\frac{3}{2}}{-2}+2=\frac{5}{4}$$

$$P=(\frac{1}{\alpha}+1)(\frac{1}{\beta}+1)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{1}{-2}+\frac{\frac{3}{2}}{-2}+1=-\frac{1}{4}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-5x-1=0$$

ریاضی - ۹۲

۱۸۳۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta>0\ ,\quad -\frac{b}{a}>0\ ,\quad \frac{c}{a}>0$$

$$\Delta=4(a-2)^2-4(14-a)=4a^2-12a-40=4(a-5)(a+2)$$

از شرط $\Delta>0$ نتیجه می‌شود $a<-2$ یا $a>5$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a}=2(a-2)>0 \Rightarrow a>2\ ,\quad \frac{c}{a}=14-a>0 \Rightarrow a<14$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به‌صورت $5<a<14$ است.

ریاضی - ۹۶

۱۸۳۶- گزینهٔ ۳ حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر با $\alpha+\beta=-\frac{-12}{4}=3$ و $\alpha\beta=\frac{1}{4}$ است. بنابراین

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}}=4$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۸۳۷- گزینهٔ ۱ برای آنکه، معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، باید $\frac{c}{a}<0$، پس

$$\frac{c}{a}=\frac{1-m}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۸۳۸- گزینهٔ ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است، $\frac{40}{100}\times 11=4/4$ کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است، $\frac{70}{100}\times 4=2/8$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{4/4+2/8}{11+4-x}=\frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow 7/2\times 2=15-x \Rightarrow x=0/6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۸۳۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $x^2+4x+5=A$، آن‌گاه

$$A-2=\sqrt{A} \xrightarrow{A\geq 2} A^2-4A+4=A \Rightarrow A^2-5A+4=0$$

$$\begin{cases} A=1 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ A=4 \Rightarrow x^2+4x+5=4 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \xrightarrow{\frac{c}{a}=1} x_1x_2=1 \end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۱۸۴۰- گزینهٔ ۴ از $f(x)>\frac{7}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{2}x^2+2x+6>\frac{7}{2} \Rightarrow x^2-4x-5<0 \Rightarrow -1<x<5$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ (a,b)، همان بازهٔ $(-1,5)$ است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $5-(-1)=6$.

تجربی - ۸۹

۱۸۴۱- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^2+x$، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-6)(t-12)=0$$

$$t=6 \Rightarrow x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1+x_2=-1$$

$$t=12 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow x_3+x_4=-1$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

تجربی - ۹۰

۱۸۴۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$5x^2+3x-2=0 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-3}{5}\ ,\quad \alpha\beta=-\frac{2}{5}$$

اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\frac{9}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{25}}=\frac{29}{4}$$

$$P=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{25}{4}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۲۹x+۲۵=۰\Rightarrow k=۲۹$$

راه‌حل دوم یکی از جواب‌های معادلهٔ اول برابر -۱ است:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow \alpha=-۱$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادلهٔ دوم ۱ است:

$$\alpha=-۱\Rightarrow \frac{۱}{\alpha^۲}=۱\Rightarrow ۴\times ۱^۲-k\times ۱+۲۵=۰\Rightarrow k=۲۹$$

ریاضی - ۹۰

۱۸۴۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ و α و β جواب‌های معادلهٔ $۸x^۲-mx-۸=۰$ باشند.

در این صورت

$$x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲},\quad x_۱x_۲=-۱$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{۸},\quad \alpha\beta=-۱$$

$$\alpha=x_۱^۳,\quad \beta=x_۲^۳$$

دو طرف تساوی $x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_۱^۳+x_۲^۳+۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=\frac{۱}{۸}$$

$$\alpha+\beta-۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \frac{m}{۸}=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow m=۱۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۸۴۴- گزینهٔ ۲ $x=۲$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$۲(۴a-۲-۵)=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین معادله به صورت $۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$ است. با تقسیم عبارت سمت چپ معادله بر $x-۲$ به‌دست می‌آید:

$$۲x^۳-x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$ به‌دست می‌آیند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۸۴۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$، آن‌گاه $t^۲-۲t+m-۱=۰$.

برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>۰\Rightarrow ۴-۴(m-۱)>۰\Rightarrow m<۲\\ \frac{c}{a}\geq ۰\Rightarrow \frac{m-۱}{۱}\geq ۰\Rightarrow m-۱\geq ۰\Rightarrow m\geq ۱\\ -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -\frac{-۲}{۱}>۰\Rightarrow ۲>۰\Rightarrow m\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} ۱\leq m<۲$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۸۴۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه همهٔ مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$۱-a>۰\Rightarrow a<۱$$

$$\Delta=۲۴+۴a(۱-a)<۰\Rightarrow -a^۲+a+۶<۰\Rightarrow a<-۲ \text{ یا } a>۳$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a<-۲$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۸۴۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادلهٔ $\sqrt{۴x-۳}=۲-۳x$ جواب داشته باشد، باید

$$۴x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq \frac{۳}{۴},\quad ۲-۳x\geq ۰\Rightarrow x\leq \frac{۲}{۳}$$

با اشتراک دو محدودهٔ به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی نمی‌تواند داشته باشد.

خارج از کشور تجربی - ۸۷

۱۸۴۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=۴$ جواب معادله باشد:

$$۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶}\Rightarrow ۴+a=۲\Rightarrow a=-۲$$

به ازای $a=-۲$، معادلهٔ مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۵x-x^۲$$

$$۲x^۲-۹x+۴=۰\Rightarrow x=۴,\frac{۱}{۲}$$

چون $x=\frac{۱}{۲}$ در معادلهٔ $x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}$ صدق نمی‌کند، این معادله جواب دیگری ندارد.

تجربی - ۸۷

۱۸۴۹- گزینهٔ ۲ باید $f(x)<۲$. بنابراین

$$\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲\Rightarrow ۳x^۲-۲x<۲x^۲+۸\Rightarrow x^۲-۲x-۸<۰\Rightarrow -۲<x<۴$$

پس $a=-۲$ و $b=۴$ و در نتیجه $b-a=۶$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۸۵۰- گزینهٔ ۲ به‌ازای مقادیری از x، نمودار تابع زیر محور x است که داشته باشیم $f(x)<۰$، پس

$$f(x)=x^۳-۴x^۲-x+۴=x^۲(x-۴)-x+۴=(x-۴)(x^۲-۱)$$

$$=(x-۴)(x-۱)(x+۱)\xrightarrow{f(x)<۰}(x-۱)(x+۱)(x-۴)<۰$$

x		-۱		۱		۴		$+\infty$
$f(x)$		۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a,b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازهٔ $(۱,۴)$ است، پس $b-a=۴-۱=۳$.

ریاضی - ۸۸

فصل دوازدهم

۱۸۵۱- گزینهٔ ۲ اگر $a<-۲$، آن‌گاه $a+۱<-۱<۰$، پس $|a+۱|=-a-۱$.

در نتیجه $|۲+a|=|۱+۱+a|=|۱-|۱+a||$. از طرف دیگر، چون $a<-۲$، پس $a+۲<۰$، در نتیجه $|۲+a|=-۲-a$.

۱۸۵۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $-۱<x<۲$، پس

$$\frac{|x-۲|}{x-۲}=\frac{۲-x}{x-۲}=-۱\,,\quad \frac{x+۱}{|x+۱|}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۲-۱-۱=-۲$.

راه‌حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x=۰$ حساب کنیم:

$$A=\frac{|x-۲|}{x-۲}-\frac{x+۱}{|x+۱|}\xrightarrow{x=۰}A=-۱-۱=-۲$$

۱۸۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-۳<x<-۲\Rightarrow-۱۸<۶x<-۱۲\Rightarrow۰<۱۴<۶x+۳۲<۲۰$$

در نتیجه $|۶x+۳۲|=۶x+۳۲$. از طرف دیگر،

$$-۳<x<-۲\Rightarrow۳>-x>۲\Rightarrow۱۱>۸-x>۱۰>۰$$

در نتیجه $|۸-x|=۸-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۶x+۳۲-۴(۸-x)}{۳x}=\frac{۶x+۴x}{۳x}=\frac{۱۰}{۳}$$

۱۸۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۱<x<۲\Rightarrow۳<۳x<۶\Rightarrow۰<۳x-۳<۳\Rightarrow|۳x-۳|=۳x-۳$$

$$\sqrt{۴x^۲-۱۶x+۱۶}=\sqrt{۴(x-۲)^۲}=۲\underbrace{|x-۲|}_{\text{منفی}}=-۲x+۴$$

بنابراین $A=۳x-۳-(-۲x+۴)=۵x-۷$.

۱۸۵۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون x منفی است، عبارت $x+\frac{۴}{x}$ منفی است، پس $|x+\frac{۴}{x}|=-x-\frac{۴}{x}$. از طرف دیگر،

$$|x-\frac{۴}{x}|=|\frac{x^۲-۴}{x}|=|\frac{(x-۲)(x+۲)}{x}|$$

چون $-۲<x<۰$، پس $x-۲<۰$ و $x+۲>۰$ و چون x منفی است، پس $x-\frac{۴}{x}$ مثبت است، پس $|x-\frac{۴}{x}|=x-\frac{۴}{x}$، بنابراین

$$f(x)=-x-\frac{۴}{x}+x-\frac{۴}{x}=\frac{-۸}{x}$$

راه‌حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۱$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|x+\frac{۴}{x}|+|x-\frac{۴}{x}|\xrightarrow{x=-۱}f(-۱)=|-۵|+|۳|=۸$$

فقط مقدار گزینهٔ (۴) به ازای $x=-۱$ برابر ۸ می‌شود.

۱۸۵۶- گزینهٔ ۳ چون $a-۶<۰$، پس $|a-۶|=-a+۶$. بنابراین

$$A=|۶-a-|۳+|a-۶||\,|=|۶-a-|۳-a+۶|\,|=|۶-a-|۹-a||$$

$$\xrightarrow{۹-a>۰}A=|۶-a-(۹-a)|=|-۳|=۳$$

۱۸۵۷- گزینهٔ ۲ چون $x<۰<y$، پس $۲x-y<۰$ و $۲y-x>۰$، پس عبارت مورد نظر برابر است با $-۲x+y-(۲x-y)-(۲y-x)=-(۲x-y)$.

۱۸۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $a-۱<۰$، $b+۲>۰$ و $a+b<-۱-۱=۰$، بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-۳=-۱-۱-۱$.

۱۸۵۹- گزینهٔ ۱ چون $a<۰$، پس $|a|=-a$، در نتیجه

$$|a|b\le a\xrightarrow{a\neq۰}b\le\frac{a}{|a|}\xrightarrow{a<۰}b\le-۱$$

بنابراین هر یک از عددهای $۲b-۶$ و $b-۲$ هم منفی هستند، پس

$$|۲b-۶|-۲|b-۲|=-(۲b-۶)-۲(-(b-۲))=۲$$

۱۸۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}۱ & a>۰\\ -۱ & a<۰\end{cases}$.

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
$x^۲-۱$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	
$x^۲-۲$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
y		۲	ت ن	۰	ت ن	-۲	ت ن	۰	ت ن	۲	

بنابراین y سه مقدار مختلف (۰ و ±۲) دارد.

۱۸۶۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $x^۲-۵x=\pm۶$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^۲-۵x=۶\Rightarrow x^۲-۵x-۶=(x+۱)(x-۶)=۰\Rightarrow x=-۱\,,\,x=۶$$

$$x^۲-۵x=-۶\Rightarrow x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲\,,\,x=۳$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۳۶ است.

۱۸۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $|۳x-۱۸|=|۳(x-۶)|=۳|x-۶|$ و $|۲۴-۴x|=|۴x-۲۴|=|۴(x-۶)|=۴|x-۶|$. بنابراین

$$۷|x-۶|=۲۸\Rightarrow|x-۶|=۴\Rightarrow x=۲\,,\,x=۱۰$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۱۲ است.

۱۸۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a|=|b|$، آن‌گاه $a=b$ یا $a=-b$. بنابراین از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $x^۲-۲x=x^۲+۲x-۴$ یا $x^۲-۲x=-x^۲-۲x+۴$. بنابراین

$$x^۲-۲x=x^۲+۲x-۴\Rightarrow۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

$$x^۲-۲x=-x^۲-۲x+۴\Rightarrow۲x^۲=۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۲ است.

۱۸۶۴- گزینهٔ ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x\ge۰$، آن‌گاه $|x|=x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=۳$$

حالت دوم اگر $x<۰$، آن‌گاه $|x|=-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۷}\,,\,x=۲+\sqrt{۷}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر سه جواب دارد.

۱۸۶۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^۲-۲x+۱-|x-۱|-۲=۰\Rightarrow(x-۱)^۲-|x-۱|-۲=۰$$

$$|x-۱|^۲-|x-۱|-۲=۰\xrightarrow{|x-۱|=t}t^۲-t-۲=۰$$

$$(t+۱)(t-۲)=۰\Rightarrow t=-۱\Rightarrow|x-۱|=-۱\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

$$t=۲\Rightarrow|x-۱|=۲\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۲\Rightarrow x=۳\\x-۱=-۲\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x\geq۱$، آن‌گاه $|x-۱|=x-۱$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۲x-x+۱-۱=۰\Rightarrow x^۲-۳x=۰\Rightarrow x=۰\ (\text{غ.ق.ق.}),\quad x=۳$$

حالت دوم اگر $x<۱$، آن‌گاه $|x-۱|=۱-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۲x+x-۱-۱=۰\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $۲=۱-۳$.

۱۸۶۶- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$۳x-۲\leq-۷\Rightarrow x\geq۳\ \text{یا}\ ۳x-۲\geq۷\quad x\leq-\frac{۵}{۳}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-\frac{۵}{۳}]\cup[۳,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{۵}{۳},۳)$ است. پس $a=-\frac{۵}{۳}$ و $b=۳$ و در نتیجه $ab=-۵$.

۱۸۶۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نابرابری $|x|\leq|y|$ با نابرابری $(x-y)(x+y)\leq۰$ معادل است، زیرا

$$|x|\leq|y|\Rightarrow x^۲\leq y^۲\Rightarrow x^۲-y^۲\leq۰\Rightarrow(x-y)(x+y)\leq۰$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+۵-a+۵)(a+۵+a-۵)\leq۰$$

نابرابری بالا به‌صورت $۱۰(۲a)\leq۰$ یا $۲۰a\leq۰$ درمی‌آید که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,۰]$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$a^۲+۱۰a+۲۵\leq a^۲-۱۰a+۲۵\Rightarrow۲۰a\leq۰$$

پس مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,۰]$ است.

۱۸۶۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت $\frac{|x-۶|}{|x-۲|}>۳$ می‌نویسیم. چون $x\neq۲$، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-۲|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-۶|>۳|x-۲|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^۲-۱۲x+۳۶>۹(x^۲-۴x+۴)\Rightarrow۸(x^۲-۳x)<۰\Rightarrow۰<x<۳$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازهٔ $(۰,۳)$ هستند. اما $x=۲$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادلهٔ مورد نظر ۱ است.

۱۸۶۹- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. همچنین $x=۰$ جواب نامعادله نیست. اگر $x>۰$، آن‌گاه

$$\begin{cases}x^۲-x>۲x\Rightarrow x^۲-۳x>۰\Rightarrow x(x-۳)>۰\Rightarrow x-۳>۰\Rightarrow x>۳\\ \text{یا}\\ x^۲-x<-۲x\Rightarrow x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\xrightarrow{x>۰}x+۱<۰\\ x<-۱\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$ است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۱۸۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$ بنابراین نامعادله به شکل $|x|^۲-۵|x|+۴\leq۰$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t=|x|$، نامعادله به‌صورت $t^۲-۵t+۴\leq۰$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدودهٔ $۱\leq t\leq۴$ جواب نامعادله است. یعنی

$$۱\leq|x|\leq۴$$

t	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
$t^۲-۵t+۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۱۸۷۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $a\geq۰$، آن‌گاه جواب‌های معادلهٔ $|x|=a$ برابرند با $x=\pm a$. بنابراین

$$\big||x-۴|-۱\big|=۳\Rightarrow\begin{cases}|x-۴|-۱=۳\Rightarrow|x-۴|=۴\\|x-۴|-۱=-۳\Rightarrow|x-۴|=-۲\end{cases}$$

معادلهٔ $|x-۴|=-۲$ جواب ندارد. پس

$$|x-۴|=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۴\\x-۴=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۸\\x=۰\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۱۸۷۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲-۴x+۳=(x-۱)(x-۳)$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x-۱||x-۳|-۵|x-۱|=۰\Rightarrow|x-۱|(|x-۳|-۵)=۰$$

$$\begin{cases}|x-۱|=۰\Rightarrow x=۱\\|x-۳|=۵\Rightarrow x-۳=\pm۵\Rightarrow x=-۲,\ x=۸\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۱۸۷۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x\geq۰$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^۲-۴|=۳x\Rightarrow(x^۲-۴)^۲=(۳x)^۲\Rightarrow x^۴-۸x^۲+۱۶=۹x^۲$$

$$x^۴-۱۷x^۲+۱۶=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x^۲-۱۶)=۰$$

بنابراین

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

$$x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x=\pm۴$$

چون $x\geq۰$، پس فقط جواب‌های $x=۱$ و $x=۴$ قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر $x<۰$، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x\geq۰$، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^۲-۴=۳x\\x^۲-۴=-۳x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=۴\\x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۴\end{cases}$$

جواب‌های $x=-۱$ و $x=-۴$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x\geq ۰$ معادله را حل کرده‌ایم. پس جواب‌های معادله $x=۱$ و $x=۴$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

۱۸۷۴- گزینهٔ ۴ اگر $x\leq -۳$، آن‌گاه $|x+۳|=-(x+۳)$ و معادله می‌شود

$$x^۲+۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۲x-۱۲=۰$$

$$x=-۱-\sqrt{۱۳},\ x=-۱+\sqrt{۱۳}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

اگر $x>-۳$، آن‌گاه $|x+۳|=x+۳$ و معادله می‌شود

$$x^۲-۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۲۴=۰$$

$$(x-۶)(x+۴)=۰\Rightarrow x=-۴\ \text{(غ.ق.ق.)},\quad x=۶$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $۵-\sqrt{۱۳}$.

۱۸۷۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله‌های $x^۲-۶x-a=۰$ و $x^۲-۶x+a=۰$ باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $۳۶+۴a>۰$ و $۳۶-۴a>۰$. می‌دانیم $a>۰$ (زیرا اگر $a<۰$، معادلهٔ $|x^۲-۶x|=a$ جواب ندارد)، در نتیجه $۳۶+۴a>۰$. بنابراین کافی است

$$۳۶-۴a>۰\Rightarrow a<۹$$

بنابراین $۰<a<۹$.

۱۸۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا باید مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $|x-۳|\geq ۲$ و $|۲x+۱|\leq ۵$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-۳|\geq ۲\Rightarrow\begin{cases}x-۳\geq ۲\Rightarrow x\geq ۵\\ x-۳\leq -۲\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}$$

$$|۲x+۱|\leq ۵\Rightarrow -۵\leq ۲x+۱\leq ۵\Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۴\Rightarrow -۳\leq x\leq ۲$$

پس مجموعهٔ جواب‌های اولی برابر با $A=(-\infty,۱]\cup[۵,+\infty)$ و مجموعهٔ جواب‌های دومی $B=[-۳,۲]$ است. بنابراین $A\cap B=[-۳,۱]$.

۱۸۷۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$(x+۱)^۲\geq (۲x-۱)^۲\Rightarrow x^۲+۲x+۱\geq ۴x^۲-۴x+۱$$

در نتیجه به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳x^۲-۶x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A|\geq |B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود:

$$A^۲\geq B^۲\Rightarrow A^۲-B^۲\geq ۰\Rightarrow (A-B)(A+B)\geq ۰$$

و برعکس. در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر معادل است با

$$(x+۱-۲x+۱)(x+۱+۲x-۱)\geq ۰\Rightarrow (-x+۲)(۳x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

۱۸۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را به‌صورت $|\frac{x-۳}{۲-x}|\leq ۱$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-۳|}{|۲-x|}\leq ۱\Rightarrow |x-۳|\leq |۲-x|,\quad x\neq ۲$$

$$|x-۳|^۲\leq |۲-x|^۲\Rightarrow x^۲-۶x+۹\leq ۴-۴x+x^۲\Rightarrow x\geq \frac{۵}{۲}$$

بنابراین $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a=۵$، $b=۲$. پس $a+b=۷$.

۱۸۷۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $x=|x|$. بنابراین

$$x<|x|\Rightarrow x<۰$$

در نتیجه

$$|x|<x^۲\xrightarrow{x<۰} -x<x^۲\Rightarrow x(x+۱)>۰\xrightarrow{x<۰} x+۱<۰$$

به این ترتیب، $|x+۱|=-x-۱$، $|x|=-x$ و $|۱-x|=۱-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۳x$.

راه‌حل دوم $x=-۲$ در نابرابری‌های $x<|x|<x^۲$ صدق می‌کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۲$ به‌دست آوریم:

$$A=|x+۱|+|۱-x|+|x|\xrightarrow{x=-۲} A=۱+۳+۲=۶$$

فقط مقدار گزینهٔ (۱) به ازای $x=-۲$ برابر ۶ است.

۱۸۸۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-۱<x<۰$، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید، یعنی $۲x(x+۱)>۰$ که درست نیست. اگر $x\leq -۱$، آن‌گاه $x+۱\leq ۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<-x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله تهی است.

راه‌حل دوم معلوم است که $x=۰$ و $x=-۱$ جواب‌های نامعادله نیستند، پس می‌توانیم نامعادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}<\frac{x}{|x|}\qquad (۱)$$

می‌دانیم برای هر $a\neq ۰$، $\frac{a}{|a|}=\begin{cases}۱ & a>۰\\ -۱ & a<۰\end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که نامعادلهٔ (۱) می‌تواند جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}=-۱\ ,\ \frac{x}{|x|}=۱$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $x+۱<۰$، یعنی $x<-۱$ و از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $x>۰$. دو محدودهٔ به‌دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر تهی است.

۱۸۸۱- گزینهٔ ۴ چون از $|A|=-A$، نتیجه می‌شود $A\leq ۰$، پس از $|x^۲-x-۶|=-(x^۲-x-۶)$ نتیجه می‌شود $x^۲-x-۶\leq ۰$. بنابراین $(x-۳)(x+۲)\leq ۰$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازهٔ $[-۲,۳]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح (۰، ±۱، ±۲ و ۳) است.

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$x^۲-x-۶$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۱۸۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$||x^۲-۵|-۲|=۱\Rightarrow |x^۲-۵|-۲=\pm ۱$$

حالت اول

$$|x^۲-۵|-۲=-۱\Rightarrow |x^۲-۵|=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲\\ x^۲-۵=۱\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}\end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^۲-۵|-۲=۱\Rightarrow |x^۲-۵|=۳\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۳\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^۲-۵=۳\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}\end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

۱۸۸۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^۲-۳)|=|x|\Rightarrow|x||x^۲-۳|=|x|$$

واضح است که $x=۰$ یک جواب معادله است. با شرط $x\neq۰$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^۲-۳|=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۳=-۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^۲-۳=۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲\end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۱۸۸۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ریشهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم

$$x\leq-۲\Rightarrow-۲(x-۱)-(x+۲)=۵\Rightarrow-۳x=۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$
$$-۲<x\leq۱\Rightarrow-۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow-x+۴=۵\Rightarrow x=-۱$$
$$x>۱\Rightarrow۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\{-۱,\frac{۵}{۳}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱۸۸۵- گزینهٔ ۴ چون صفر جواب معادلهٔ مورد نظر نیست، پس $a\neq۰$. همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a>۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^۲}{x+۱}=-a\Rightarrow x^۲+ax+a=۰\quad\text{یا}\quad\frac{x^۲}{x+۱}=a\Rightarrow x^۲-ax-a=۰$$

توجه کنید که معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد $(\Delta=a^۲+۴a>۰)$. بنابراین برای اینکه معادلهٔ اصلی دو جواب غیرصفر داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+ax+a=۰$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^۲-۴a<۰\Rightarrow۰<a<۴$$

بنابراین اگر $۰<a<۴$، معادلهٔ مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-۱$ (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ نیست.

۱۸۸۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-۴<-۱\quad\text{یا}\quad|x|-۴>۱$$

پس $|x|<۳$ یا $|x|>۵$. از نامعادلهٔ $|x|<۳$ نتیجه می‌شود $-۳<x<۳$.

از نامعادلهٔ $|x|>۵$ نتیجه می‌شود $x>۵$ یا $x<-۵$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت زیر است:

$$(-\infty,-۵)\cup(-۳,۳)\cup(۵,+\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ±۵، ±۴ و ±۳ نیست. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۱۸۸۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-۵)(x-۲)|<|(x-۲)(x-۳)|\Rightarrow|x-۲||x-۵|<|x-۲||x-۳|$$

معلوم است که $x\neq۲$. بنابراین $|x-۵|<|x-۳|$. چون دو طرف این نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^۲-۱۰x+۲۵<x^۲-۶x+۹\Rightarrow۴x>۱۶\Rightarrow x>۴$$

راه‌حل دوم

$$|x^۲-۷x+۱۰|<|x^۲-۵x+۶|$$

$$x^۲-۷x+۱۰<x^۲-۵x+۶\Rightarrow۲x>۴\Rightarrow x>۲$$

$$x^۲-۷x+۱۰>-x^۲+۵x-۶\Rightarrow۲x^۲-۱۲x+۱۶>۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸>۰$$

$$(x-۲)(x-۴)>۰\Rightarrow x>۴\ \text{یا}\ x<۲$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x>۴$ است.

۱۸۸۸- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت $x^۲-۲x+۱<۲+|x-۱|$ می‌نویسیم. بنابراین

$$(x-۱)^۲<۲+|x-۱|\Rightarrow|x-۱|^۲<۲+|x-۱|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-۱|$، آن‌گاه

$$t^۲-t-۲<۰\Rightarrow(t+۱)(t-۲)<۰$$

چون $t\geq۰$، بنابراین $t+۱\geq۱$ و در نتیجه باید نامعادلهٔ $t-۲<۰$ را حل کنیم که $t<۲$ جواب است. پس $|x-۱|<۲$ و در نتیجه

$$-۲<x-۱<۲\Rightarrow-۱<x<۳$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۱۸۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^۲-۲<|x|-۳a<a^۲+۲\Rightarrow-a^۲+۳a-۲<|x|<a^۲+۳a+۲$$

واضح است که اگر $a^۲+۳a+۲\leq۰$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^۲+۳a+۲=(a+۱)(a+۲)\leq۰$$

a	$-\infty$		-۲		-۱		$+\infty$
$a^۲+۳a+۲$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

با توجه به جدول فوق باید $-۲\leq a\leq-۱$.

۱۸۹۰- گزینهٔ ۲ اگر $x<۱$، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی و سمت راست آن نامنفی است. پس $x<۱$ جواب نامعادله است. اگر $x>۱$، آن‌گاه $|x+۱|=x+۱$ و در نتیجه

$$\frac{۳}{x-۱}\leq x+۱\Rightarrow۳\leq x^۲-۱\Rightarrow x^۲\geq۴\xrightarrow{x>۱}x\geq۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[۱,۲)$ است و در نتیجه

$$a=۱,b=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۱۸۹۱- گزینهٔ ۴ با جای‌گذاری $x=\sqrt{۲}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۲}-۱)=۵|۳\sqrt{۲}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۲}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۲}-۴)-۳(۵\sqrt{۲}-۹)=۷$$

با جای‌گذاری $x=\sqrt{۳}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۳}-۱)=۵|۳\sqrt{۳}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۳}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۳}-۴)-۳(۵\sqrt{۳}-۹)=۷$$

پس

$$f(\sqrt{۲}-۱)+f(\sqrt{۳}-۱)=۱۴$$

۱۸۹۲- گزینهٔ ۳ برای $x>1$ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-1>0,\ x+1>0 \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1-x}{x-1}=2$$

به طریق مشابه برای $-1<x<1$ به‌دست می‌آید

$$x-1<0,\ x+1>0 \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1-x}{-(x-1)}=0$$

همچنین برای $x<-1$،

$$x-1<0,\ x+1<0 \Rightarrow f(x)=\frac{-(x+1)}{x+1}-\frac{1-x}{-(x-1)}=-2$$

بنابراین $R_f=\{0,-2,2\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

۱۸۹۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $x\geq 0$، آن‌گاه

$$|x|=x \Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x-x|=0$$

بنابراین $f(x)=|2x-0|=|2x|=2x$. اگر $x<0$، آن‌گاه

$$|x|=-x \Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x+x|=|2x|=-2x$$

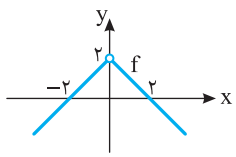
بنابراین $f(x)=|2x-(-2x)|=|4x|=-4x$. در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ -4x & x<0\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(1)=2$. فقط در تابع گزینهٔ (۳) این شرایط برقرار است.

۱۸۹۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

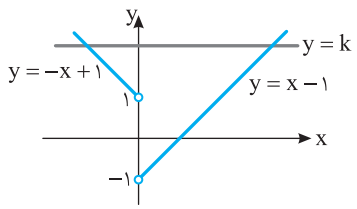
$$f(x)=\frac{2|x|-x^2}{|x|}=\begin{cases}\frac{2x-x^2}{x} & x>0\\ \frac{-2x-x^2}{-x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}2-x & x>0\\ 2+x & x<0\end{cases}$$



۱۸۹۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

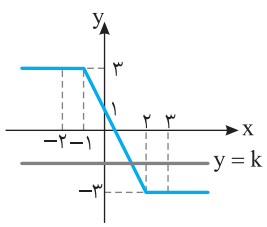
$$f(x)=\begin{cases}-x(1-\frac{1}{x}) & x<0\\ x(1-\frac{1}{x}) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k>1$، آن‌گاه خط $y=k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.

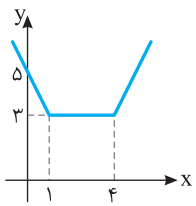


۱۸۹۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را به کمک نقاط $(-3,2)$، $(-1,3)$، $(3,-3)$ و $(2,-3)$ رسم می‌کنیم.

واضح است که اگر خط $y=k$ این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید $-3<k<1$.



۱۸۹۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه حداکثر مقدار عبارت $\frac{15}{|x-1|+|x-4|}$ را به‌دست بیاوریم، کافی است حداقل مقدار تابع $f(x)=|x-1|+|x-4|$ را به‌دست آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{15}{3}=5$.



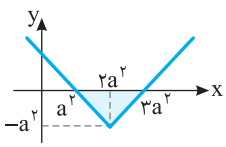
۱۸۹۸- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-2a^2|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x^2-2a^2|-a^2$ به‌دست می‌آید.

با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با

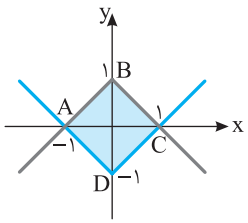
$$S=\frac{1}{2}a^2(2a^2)=a^4$$

بنابراین

$$a^4=4 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$



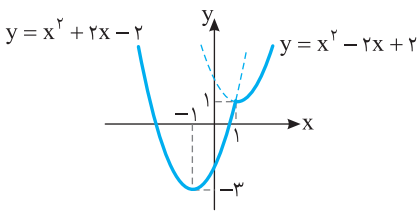
۱۸۹۹- گزینهٔ ۳ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعدهٔ یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $4\times(\frac{1\times 1}{2})=2$.



۱۹۰۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & x\geq 1\\ x^2+2x-2 & x<1\end{cases}.$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-3,+\infty)$ است.



۱۹۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(2-|a|)$ و $f(2+|a|)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(2-|a|)=\big|2-|a|-2\big|+1=\big|-|a|\big|+1=|a|+1$$

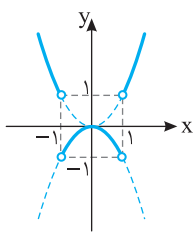
$$f(2+|a|)=\big|2+|a|-2\big|+1=\big||a|\big|+1=|a|+1$$

بنابراین $f(2-|a|)-2f(2+|a|)+1=|a|+1-2|a|-2+1=-|a|$.

۱۹۰۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|>1\\ -x^2 & |x|<1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ است. پس $a=1$ و $b=0$ و در نتیجه $a-b=1$.



۱۹۰۳- گزینهٔ ۲ اگر $-۲\le x\le ۲$، آن‌گاه $x+۲>۰$ و $x-۲\le ۰$، پس

$$x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)\le ۰$$

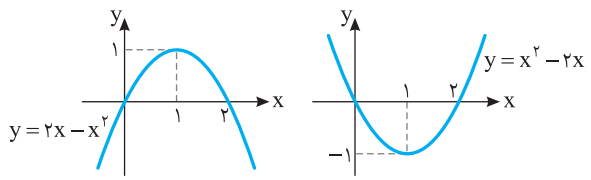
$$x^۲-۲x=x(x-۲)\le ۰$$

بنابراین $f(x)=-x^۲+۴+(x^۲-۲x)=-۲x+۴$. پس

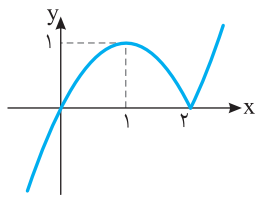
$$-۲\le x\le ۲\Rightarrow -۴\le -۲x\le ۰\Rightarrow ۰\le -۲x+۴\le ۴$$

پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

۱۹۰۴- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases} ۲x-x^۲ & x\le ۲ \\ x^۲-۲x & x>۲ \end{cases}$ است. نمودار توابع $y=۲x-x^۲$ و $y=x^۲-۲x$ به‌صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۱۹۰۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

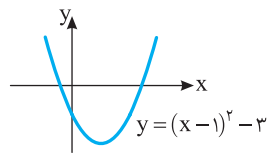
$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x-۲ & x\le ۰ \\ x^۲-۲x-۲ & x>۰ \end{cases}$$

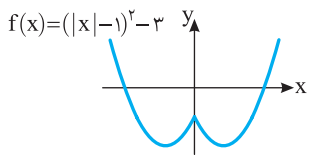
هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-۳,-۱)$ و دومی به رأس $(۱,-۳)$). پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=|x|^۲-۲|x|-۲=(|x|-۱)^۲-۳$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y=(x-۱)^۲-۳$ را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



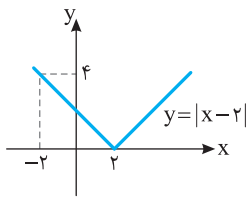


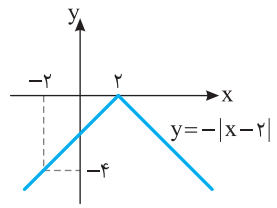
راه‌حل سوم چون $f(-x)=f(x)$، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y متقارن است (توجه کنید که نمودار $y=f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به‌دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر، $f(۰)=-۲$، پس گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۱۹۰۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

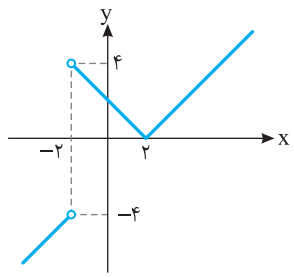
$$f(x)=\frac{|x-۲||x+۲|}{x+۲}=\begin{cases} |x-۲| & x>-۲ \\ -|x-۲| & x<-۲ \end{cases}$$

ابتدا نمودار توابع $y=|x-۲|$ و $y=-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم.





پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۱۹۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطهٔ تابع وجود دارد:

$$x\le -۱\Rightarrow f(x)=-x+x-۲+۲(x+۱)=۲x$$

$$-۱<x\le ۰\Rightarrow f(x)=-x+x-۲-۲(x+۱)=-۲x-۴$$

$$۰<x\le ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲-۲(x+۱)=-۴$$

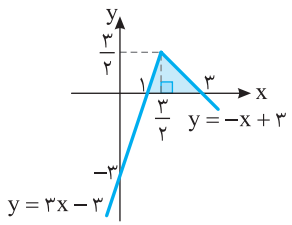
$$x>۲\Rightarrow f(x)=x-(x-۲)-۲(x+۱)=-۲x$$

بنابراین روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر است با ۲.

۱۹۰۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x-(۲x-۳)=-x+۳ \\ x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x+۲x-۳=۳x-۳ \end{cases}$$

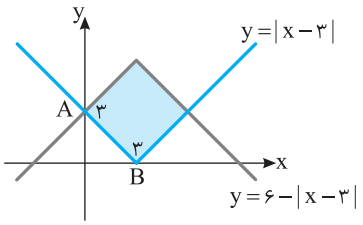
مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلثی به ارتفاع $\frac{۳}{۲}$ و قاعدهٔ ۲ مد نظر است که برابر است با $\frac{۳}{۲}$.



۱۹۰۹- گزینهٔ ۳ در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به‌دست آوریم:

$$A(۰,۳)\ ,\ B(۳,۰)\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۳)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

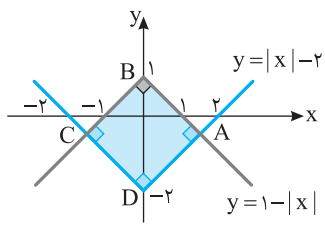
بنابراین مساحت مربع برابر است با $(۳\sqrt{۲})^۲=۱۸$.



۱۹۱۰- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه‌های A و C را مشخص می‌کنیم:

$$|x|-۲=۱-|x|\Rightarrow|x|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $AC=۳$ و $BD=۳$. پس چهارضلعی ABCD یک مربع است که مساحت آن برابر است با $S=\frac{۱}{۲}\times۳^۲=\frac{۹}{۲}$.



۱۹۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۳=-۲۰\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{۲۰}$$

همچنین $۲\sqrt[۳]{۲۰}<۵$، بنابراین

$$-۶<-۲\sqrt[۳]{۲۰}<-۵\Rightarrow-۶<۲x<-۵\Rightarrow[۲x]=-۶$$

توجه کنید که $۲\sqrt[۳]{۲۰}=\sqrt[۳]{۱۶۰}$ و چون $\sqrt[۳]{۱۲۵}<\sqrt[۳]{۱۶۰}<\sqrt[۳]{۲۱۶}$، پس

$$۵<۲\sqrt[۳]{۲۰}<۶$$

۱۹۱۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۱\le x<۴\Rightarrow۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$

$$۴\le x<۹\Rightarrow۲\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۲$$

$$۹\le x<۱۶\Rightarrow۳\le\sqrt{x}<۴\Rightarrow[\sqrt{x}]=۳$$

$$۱۶\le x<۲۵\Rightarrow۴\le\sqrt{x}<۵\Rightarrow[\sqrt{x}]=۴$$

$$x=۲۵\Rightarrow\sqrt{۲۵}=۵$$

بنابراین

$$A=\underbrace{۱+۱+۱+}_{۹\text{ تا}}\underbrace{۲+۲+\cdots+۲}_{۵\text{ تا}}+\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{۷\text{ تا}}+\underbrace{۴+۴+\cdots+۴}_{۹\text{ تا}}+۵$$

$$=۳+۱۰+۲۱+۳۶+۵=۷۵$$

۱۹۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳\Rightarrow۶\le۳x<۹\Rightarrow۱\le۳x-۵<۴$$

بنابراین $[۳x-۵]$ می‌تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

۱۹۱۴- گزینهٔ ۱ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۳$، آن‌گاه $-۳\le\frac{۵-x}{۲}<-۲$. بنابراین

$$-۶\le۵-x<-۴\Rightarrow-۱۱\le-x<-۹$$

در نتیجه $۹<x\le۱۱$.

۱۹۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[۳x-۲]=۱\Rightarrow۱\le۳x-۲<۲\Rightarrow۳\le۳x<۴\Rightarrow۱\le x<\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$۲\le۲x<\frac{۸}{۳}\Rightarrow-۱\le۲x-۳<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow[۲x-۳]=-۱$$

۱۹۱۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲\Rightarrow(۲n-۱)^۲<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲$$

$$۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}<۲n$$

بنابراین $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=۲n-۱$.

راه‌حل دوم فرض کنید $n=۲$. در این صورت $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=[\sqrt{۱۳}]=۳$.
فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۲$ برابر ۳ می‌شود.

۱۹۱۷- گزینهٔ ۲ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۴$، آن‌گاه $-۴\le\frac{۵-x}{۲}<-۳$، بنابراین

$$-۸\le۵-x<-۶\Rightarrow-۱۳\le-x<-۱۱$$

در نتیجه $۱۱<x\le۱۳$. بنابراین $a=۱۱$، $b=۱۳$ و $b-a=۲$.

۱۹۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $[x+۲]=[x]+۲$ و $[x-۱]=[x]-۱$.
بنابراین

$$۲[x+۲]-[x-۱]=۷\Rightarrow۲[x]+۴-[x]+۱=۷\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳$$

۱۹۱۹- گزینهٔ ۱ اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$.
بنابراین

$$[x+[x-۳]]=۳\Rightarrow[x]+[x-۳]=۳\Rightarrow[x]+[x]-۳=۳\Rightarrow[x]=۳$$

در نتیجه $۳\le x<۴$. بنابراین $a=۳$، $b=۴$ و $a+b=۷$.

۱۹۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۳\le[x]\le۴$ معادل است با $[x]=۳$ یا $[x]=۴$. پس

$$[x]=۳\Rightarrow۳\le x<۴,\quad[x]=۴\Rightarrow۴\le x<۵$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۳,۵)$ است.
در نتیجه $a=۳$، $b=۵$ و $a+b=۸$.

۱۹۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[۳]{۲}]=[\sqrt[۳]{۳}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۷}]=۱,\quad[\sqrt[۳]{۸}]=[\sqrt[۳]{۹}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۲۶}]=۲$$

$$[\sqrt[۳]{۲۷}]=[\sqrt[۳]{۲۸}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۶۳}]=۳$$

بنابراین

$$A=\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{۶\text{ تا}}+\underbrace{۲+۲+\cdots+۲}_{۱۹\text{ تا}}+\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{۳۷\text{ تا}}=۶+۳۸+۱۱۱=۱۵۵$$

۱۹۲۲- گزینهٔ ۳

$$A=[-\sqrt{۱۰}]+[-\sqrt{۹}]+[-\sqrt{۸}]+\cdots+[\sqrt{۱۰}]$$

$$=([-\sqrt{۱۰}]+[\sqrt{۱۰}])+([-\sqrt{۹}]+[\sqrt{۹}])+\cdots+([-\sqrt{۱}]+[\sqrt{۱}])$$

اگر $x\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[-x]+[x]=۰$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[-x]+[x]=-۱$. از $\sqrt{۰}$ تا $\sqrt{۱۰}$ اعداد $\sqrt{۰}$، $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{۹}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۰}$ غیرصحیح هستند. بنابراین

$$A=\underbrace{۰+۰+۰+۰}_{۴\text{ تا}}+\underbrace{(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)}_{۷\text{ تا}}=-۷$$

۱۹۲۳- گزینهٔ ۴ از $\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}$ نتیجه می‌شود

$$۱<۳x<۲\Rightarrow[۳x]=۱,\quad\frac{۳}{۲}<\frac{۱}{x}<۳\Rightarrow۳<\frac{۲}{x}<۶\Rightarrow۱<\frac{۲}{۳x}<۲\Rightarrow[\frac{۲}{۳x}]=۱$$

بنابراین $[۳x]-[\frac{۲}{۳x}]=۱-۱=۰$.

۱۹۲۴- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$۲\le x<۳\xrightarrow{\times۲}۴\le۲x<۶,\quad۲\le y<۳\xrightarrow{\times۳}۶\le۳y<۹$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می‌شود که

$$۱۰\le۲x+۳y<۱۵\xrightarrow{\div۵}۲\le\frac{۲x+۳y}{۵}<۳$$

پس $[\frac{۲x+۳y}{۵}]=۲$.

۱۹۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x^۲-۴x=(x-۲)^۲-۴$، پس

$$[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\Rightarrow ۰\le x-۲<۱\Rightarrow ۰\le (x-۲)^۲<۱$$

$$-۴\le (x-۲)^۲-۴<-۳\Rightarrow [(x-۲)^۲-۴]=-۴$$

بنابراین $[x^۲-۴x]$ فقط می‌تواند مقدار -۴ را داشته باشد.

۱۹۲۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰$$

$$-۱\le (x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}<۰\Rightarrow -\frac{۳}{۴}\le (x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۴}$$

$$(x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۴}\Rightarrow |x+\frac{۱}{۲}|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x+\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۱<x<۰$$

بنابراین $۰<x^{۱۰}<۱$ و در نتیجه $[x^{۱۰}]=۰$.

۱۹۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n^۳<n^۳+۳n^۲+۱<n^۳+۳n^۲+۳n+۱$$

$$n^۳<n^۳+۳n^۲+۱<(n+۱)^۳\Rightarrow n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۱}<n+۱$$

بنابراین $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۱}]=n$.

۱۹۲۸- گزینهٔ ۳ اگر $-۱<x<-۲$، آن‌گاه $[x]=-۲$ و $|x|=-x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۴=۱\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

اگر $-۱\le x<۰$، آن‌گاه $[x]=-۱$ و $|x|=-x$، پس معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۲=۱\Rightarrow x=-۱$$

اگر $۰\le x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و $|x|=x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$۳x+۰=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(-۲,۱)$ برابر است با

$$-\frac{۵}{۳}-۱+\frac{۱}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$

۱۹۲۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $[x-۱]=[x]-۱$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[x]^۲+۵[x]+۶=۰\Rightarrow ([x]+۲)([x]+۳)=۰$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+۲=۰\Rightarrow [x]=-۲\Rightarrow -۲\le x<-۱$$

$$[x]+۳=۰\Rightarrow [x]=-۳\Rightarrow -۳\le x<-۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[-۳,-۲)\cup[-۲,-۱)=[-۳,-۱)$$

در نتیجه $a=-۳$، $b=-۱$ و $b-a=۲$.

۱۹۳۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$[\frac{۲[x]+۱}{۵}]=۳\Rightarrow ۳\le \frac{۲[x]+۱}{۵}<۴\Rightarrow ۷\le [x]<\frac{۱۹}{۲}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=۷\Rightarrow ۷\le x<۸,\quad [x]=۸\Rightarrow ۸\le x<۹,\quad [x]=۹\Rightarrow ۹\le x<۱۰$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[۷,۸)\cup[۸,۹)\cup[۹,۱۰)=[۷,۱۰)$$

در نتیجه $a=۷$، $b=۱۰$ و $b-a=۳$.

۱۹۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$f(x+۳)=[\frac{x+۳}{۲}]-[\frac{x+۴}{۲}]=[\frac{x}{۲}+۱]-[\frac{x}{۲}+۲]$$

$$=[\frac{x}{۲}]+۱-[\frac{x}{۲}]-۲=-f(x)-۱$$

در نتیجه $f(x+۳)+f(x)=-۱$.

۱۹۳۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر $x\in[۱,۲)$، آن‌گاه $-۲\le x-۳<-۱$.

بنابراین $|x-۳|=-x+۳$. همچنین

$$-۱\le x-۲<۰\Rightarrow [x-۲]=-۱$$

در نتیجه $f(x)=-۱+(-x+۳)=-x+۲$.

راه‌حل دوم $f(۱)=-۱+|-۲|=۱$ فقط در گزینهٔ (۲) برقرار است.

۱۹۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۹-x^۲\ge ۰$ و در نتیجه $-۳\le x\le ۳$. از طرف دیگر،

$$[\frac{x}{۲}]-۱=۰\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۱\Rightarrow ۱\le \frac{x}{۲}<۲\Rightarrow ۲\le x<۴$$

بنابراین عددهای بازهٔ $[۲,۴)$ در دامنهٔ تابع نیستند و دامنهٔ تابع به‌صورت $[-۳,۲)$ است. پس $a=-۳$، $b=۲$ و $a+b=-۱$.

۱۹۳۴- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $[x]+۲\ge ۰$ و $۳-[x]\ge ۰$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$[x]+۲\ge ۰\Rightarrow [x]\ge -۲\Rightarrow x\ge -۲,\quad ۳-[x]\ge ۰\Rightarrow [x]\le ۳\Rightarrow x<۴$$

بنابراین $D_f=[-۲,۴)$. پس $a=-۲$، $b=۴$ و $a+b=۲$.

۱۹۳۵- گزینهٔ ۱ اگر $-۱\le x<۰$،

$$[x]=-۱,|x|=-x\Rightarrow f(x)=-۱+x$$

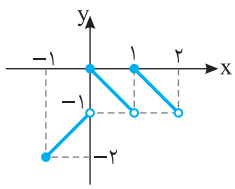
اگر $۰\le x<۱$،

$$[x]=۰,|x|=x\Rightarrow f(x)=-x$$

اگر $۱\le x<۲$،

$$[x]=۱,|x|=x\Rightarrow f(x)=۱-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به‌صورت $[-۲,۰)-\{-۱\}$ است.

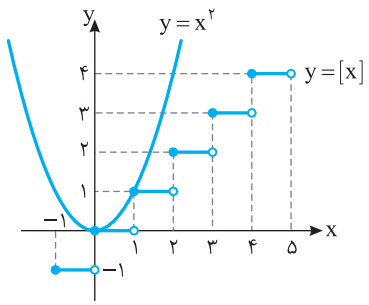


۱۹۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|[|x+۱|-۲]>۰\}$. از طرف دیگر، چون $[|x+۱|-۲]$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است: $[|x+۱|-۲]\ge ۱$. در نتیجه

$$|x+۱|-۲\ge ۱\Rightarrow |x+۱|\ge ۳\Rightarrow \begin{cases} x+۱\ge ۳\Rightarrow x\ge ۲\\ x+۱\le -۳\Rightarrow x\le -۴\end{cases}$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$.

۱۹۳۷- گزینهٔ ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

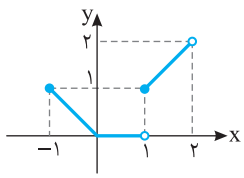


۱۹۳۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-x\ ,\quad ۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



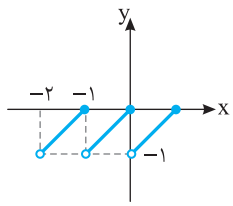
۱۹۳۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$-۲<x\le-۱\Rightarrow۱\le-x<۲\Rightarrow[-x]=۱\Rightarrow f(x)=x+۱$$

$$-۱<x\le۰\Rightarrow۰\le-x<۱\Rightarrow[-x]=۰\Rightarrow f(x)=x$$

$$۰<x\le۱\Rightarrow-۱\le-x<۰\Rightarrow[-x]=-۱\Rightarrow f(x)=x-۱$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a، $[a]\le a$. بنابراین

$$[-x]\le-x\Rightarrow x+[-x]\le۰$$

چون $f(x)=x+[-x]$، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(۰)=۰$، پس گزینهٔ (۱) نیز رد می‌شود.

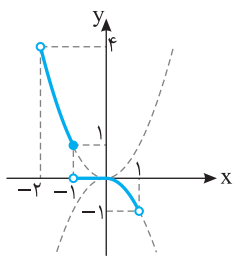
۱۹۴۰- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$-۲<x\le-۱\Rightarrow۱\le-x<۲\Rightarrow[-x]=۱\Rightarrow f(x)=x^۲$$

$$-۱<x\le۰\Rightarrow۰\le-x<۱\Rightarrow[-x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۰<x<۱\Rightarrow-۱<-x<۰\Rightarrow[-x]=-۱\Rightarrow f(x)=-x^۲$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۹۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x))=f(x)-[۳f(x)]$$

اکنون حاصل $[۳f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k]=[x]+k$$

در نتیجه

$$[۳f(x)]=[۳x-۳[۳x]]=[۳x]-۳[۳x]=-۲[۳x]$$

(زیرا $۳[۳x]\in\mathbb{Z}$) بنابراین

$$f(f(x))=f(x)-(-۲[۳x])=x-[۳x]+۲[۳x]=x+[۳x]$$

در نتیجه $f(f(x))-x=[۳x]$.

۱۹۴۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$[۴-x]+[x-۳]=۰\Rightarrow۴+[-x]+[x]-۳=۰$$

$$[x]+[-x]=-۱\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

پس عددهای غیرصحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنهٔ تابع نیستند. بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=f(۱)=۱$. بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنهٔ تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۱۹۴۳- گزینهٔ ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنهٔ f نیست، آن‌گاه

$$[|x+۱|-۲]-۵=۰\qquad(۱)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+۱|-۲$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+۱|-۲]=|x+۱|-۲$$

بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$|x+۱|-۲-۵=۰\Rightarrow|x+۱|=۷\Rightarrow x+۱=\pm۷\Rightarrow x=\pm۷-۱$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر -۲ است.

۱۹۴۴- گزینهٔ ۳ برای تعیین دامنهٔ تابع f باید نامعادلهٔ $\frac{۴-[x]}{[x]-۱}\ge۰$ را حل کنیم. اگر فرض کنیم $t=[x]$، نامعادله به‌صورت $\frac{۴-t}{t-۱}\ge۰$ درمی‌آید که جواب آن به‌صورت $۱<t\le۴$ است.

بنابراین

$$۱<[x]\le۴\Rightarrow۲\le x<۵$$

بنابراین $D_f=[۲,۵)$ و در نتیجه $a=۲$، $b=۵$ و $a+b=۷$.

۱۹۴۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $۴[x]-[x]^۲\ge۰$ را حل کنیم. فرض می‌کنیم $[x]=t$ و در نتیجه

$$۴t-t^۲\ge۰\Rightarrow t(۴-t)\ge۰\Rightarrow۰\le t\le۴$$

بنابراین $۰\le[x]\le۴$. در نتیجه $۰\le x<۵$. پس $D_f=[۰,۵)$ و دامنهٔ تابع شامل ۵ عدد صحیح است.

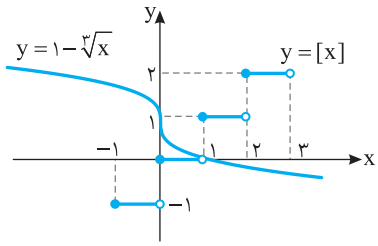
۱۹۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری $۰\le x-[x]<۱$ برای هر مقدار x برقرار است.

پس

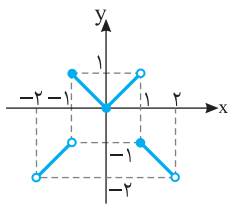
$$-۱<[x]-x\le۰\Rightarrow-۲<۲[x]-۲x\le۰\Rightarrow-۲<f(x)\le۰$$

بنابراین $R_f=(-۲,۰]$.

۱۹۴۷- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $y=1-\sqrt[3]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



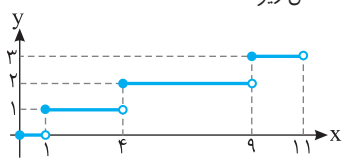
۱۹۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=1$ و در نتیجه $f(x)=x$. همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=-1$ و در نتیجه $f(x)=-x$. بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



۱۹۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$0\le x<1\Rightarrow 0\le\sqrt{x}<1\Rightarrow[\sqrt{x}]=0\Rightarrow f(x)=0$$
$$1\le x<4\Rightarrow 1\le\sqrt{x}<2\Rightarrow[\sqrt{x}]=1\Rightarrow f(x)=1$$
$$4\le x<9\Rightarrow 2\le\sqrt{x}<3\Rightarrow[\sqrt{x}]=2\Rightarrow f(x)=2$$
$$9\le x<11\Rightarrow 3\le\sqrt{x}<\sqrt{11}\Rightarrow[\sqrt{x}]=3\Rightarrow f(x)=3$$

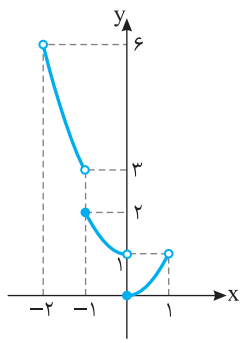
پس نمودار تابع به شکل زیر است.



۱۹۵۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-2<x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow f(x)=x^2+2$$
$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=x^2+1$$
$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=x^2$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



۱۹۵۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ $(x-4)|x|<2x-5$ را برای $x\ge 0$ و $x<0$ جداگانه حل می‌کنیم:

$$x\ge 0\Rightarrow(x-4)x<2x-5\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow 1<x<5$$
$$x<0\Rightarrow(x-4)(-x)<2x-5\Rightarrow x^2-2x-5>0$$
$$x<1-\sqrt{6},\ x>1+\sqrt{6}\xrightarrow{x<0} x<1-\sqrt{6}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$ است.

ریاضی - ۹۲

۱۹۵۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** واضح است که اگر $x<0$، نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2-2x|<0$ که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x\ge 0$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$|x^2-2x|<x\Rightarrow|x(x-2)|<x\Rightarrow|x||x-2|<x$$
$$x|x-2|<x\Rightarrow|x-2|<1$$
$$-1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(1,3)$ است.

راه‌حل دوم به کمک دو مقدار $x=1$ و $x=2$ گزینهٔ صحیح مشخص می‌شود. $x=1$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی $x=2$ در آن صدق می‌کند. تنها گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینهٔ (۴) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۹۵۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $|x+1|-1<0$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2-2|<0$ که غیرممکن است. بنابراین باید $|x+1|-1\ge 0$ و در نتیجه

$$|x+1|\ge 1\Rightarrow\begin{cases}x+1\ge 1\Rightarrow x\ge 0\\ x+1\le -1\Rightarrow x\le -2\end{cases}$$

اگر $x\le -2$، آن‌گاه $x+1<0$ و $x^2-2>0$، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-2<-x-1-1\Rightarrow x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین نامعادله در بازهٔ $(-\infty,-2]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x\ge 0$ آن را حل کنیم. در این حالت $x+1>0$ و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

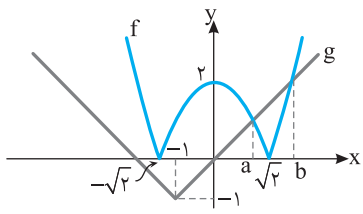
$$|x^2-2|<x+1-1\Rightarrow|x^2-2|<x\Rightarrow -x<x^2-2<x$$

پس باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}x^2-x-2<0 & (1)\\ x^2+x-2>0 & (2)\end{cases}$ را حل کنیم. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) با شرط $x\ge 0$ به صورت $0\le x<2$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) با شرط $x\ge 0$ به صورت $x>1$ است. اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها بازهٔ $(1,2)$ است که وسط بازه نقطه‌ای به طول ۱/۵ است.

راه‌حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x)=|x^2-2|$ و $g(x)=|x+1|-1$ را رسم می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x)<g(x)$، بازهٔ (a,b) است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x>0$. بنابراین در این بازه، ضابطهٔ g به‌صورت $g(x)=x+1-1=x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$|x^2-2|<x\Rightarrow x^4-4x^2+4<x^2\Rightarrow x^4-5x^2+4<0$$
$$(x^2-4)(x^2-1)<0\xrightarrow{x>0}1<x<2$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۲$، پس بازهٔ مورد نظر به‌صورت $(۱,۲)$ است و وسط بازه نقطه‌ای به طول ۱/۵ است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

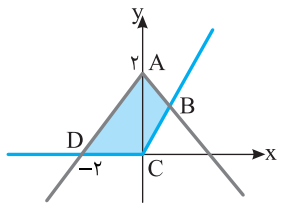
۱۹۵۴- گزینهٔ ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y=۲-|x|=\begin{cases}۲-x & x\geq ۰\\ ۲+x & x<۰\end{cases},\quad y=x+|x|=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$۲-x_B=۲x_B\Rightarrow ۳x_B=۲\Rightarrow x_B=\frac{۲}{۳}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{\frac{۲}{۳}\times ۲}{۲}+\frac{۲\times ۲}{۲}=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}$$



تجربی - ۹۵

۱۹۵۵- گزینهٔ ۴ عبارت $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس

$$|x^۲+۱|=x^۲+۱$$

بنابراین

$$۲x+۱-|x-۲|>x^۲+۱\Rightarrow -x^۲+۲x>|x-۲|\Rightarrow -x(x-۲)>|x-۲|$$

$$x\geq ۲: -x(x-۲)>(x-۲)\Rightarrow (x-۲)(-x-۱)>۰$$

$$-x>۱\Rightarrow x<-۱ \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$x<۲: -x(x-۲)>-(x-۲)\Rightarrow (x-۲)(-x+۱)>۰$$

$$-x<-۱\Rightarrow x>۱$$

بنابراین $۱<x<۲$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۹۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-۳-[۲x-۳]-۲x+۲[x]$$

$$=۲x-۳-[۲x]+۳-۲x+۲[x]\Rightarrow g(x)=۲[x]-[۲x]$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x)=۲[x]-[۲x]$ همواره عددی صحیح است، گزینهٔ (۳) یعنی $\{-۱,۰\}$ یا گزینهٔ (۴) یعنی $\{۰,۱\}$ پاسخ صحیح هستند که با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow y=۰,\quad x=\frac{۹}{۱۰}\Rightarrow y=-۱$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۹۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از $[x^۲+x]=-۱$، مقادیر x را می‌یابیم:

$$-۱\leq x^۲+x<۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x<۰\Rightarrow -۱<x<۰\\ x^۲+x+۱\geq ۰\Rightarrow \text{همواره درست است.}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱<x<۰$$

پس $۰<x^{۲۰}<۱$ و حاصل $[x^{۲۰}]$ برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۹۵۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از آنجا که به‌ازای هر عدد طبیعی $n>۲$ حاصل، عددی منحصربه‌فرد است به‌ازای $n=۳$ این عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$n=۳:[\sqrt{۳۶-۹+۱}]-۲[\sqrt{۹-۶}]=[\sqrt{۲۸}]-۲[\sqrt{۳}]=۵-۲=۳$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n>۲$،

$$\begin{cases}۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۳n+۱<۴n^۲\Rightarrow (۲n-۱)^۲<۴n^۲-۳n+۱<(۲n)^۲\\ ۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}<۲n\Rightarrow[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]=۲n-۱\\ n^۲-۴n+۴<n^۲-۲n<n^۲-۲n+۱\Rightarrow (n-۲)^۲<n^۲-۲n<(n-۱)^۲\\ n-۲<\sqrt{n^۲-۲n}<n-۱\Rightarrow[\sqrt{n^۲-۲n}]=n-۲\end{cases}$$

پس $[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}]=۲n-۱-۲(n-۲)=۴-۱=۳$.

تجربی - ۹۱

۱۹۵۹- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ $f(x-f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=[x]\Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصلهٔ $[۰,۱)$ است، بنابراین $f(x-[x])$ یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x])=۰$.

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۹۶۰- گزینهٔ ۱ از نامعادلهٔ $x^۲+x<۰$ نتیجه می‌گیریم $-۱<x<۰$، پس به‌ازای $-۱<x<۰$:

$$-۱<x<۰\Rightarrow [x]=-۱,\qquad ۰<x^۲<۱\Rightarrow [x^۲]=۰$$

$$-۱<x^۳<۰\Rightarrow [x^۳]=-۱,\qquad ۰<x^۴<۱\Rightarrow [x^۴]=۰$$

بنابراین $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=-۱+۰-۱+۰=-۲$.

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۹۶۱- گزینهٔ ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=0\Rightarrow 2^{x-1}-2=0\Rightarrow 2^{x-1}=2^1\Rightarrow x-1=1\Rightarrow x=2\Rightarrow A=(2,0)$$

$$x=0\Rightarrow y=2^{-1}-2=-\frac{3}{2}\Rightarrow B=(0,-\frac{3}{2})$$

بنابراین $AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-\frac{3}{2}))^2}=\frac{5}{2}$.

۱۹۶۲- گزینهٔ ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2})=0\Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a}-2b=0\Rightarrow 2b=9^{-\frac{3}{2}+a}$$

$$f(0)=26\Rightarrow 9^a-2b=26\Rightarrow 2b=9^a-26$$

بنابراین

$$9^{-\frac{3}{2}+a}=9^a-26\Rightarrow 9^a-9^{-\frac{3}{2}+a}=26\Rightarrow 9^a(1-9^{-\frac{3}{2}})=26$$

$$9^a(1-\frac{1}{27})=26\Rightarrow 9^a=27\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $2b=9^a-26=1$، یعنی $b=\frac{1}{2}$. به این ترتیب، $a+b=2$.

۱۹۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

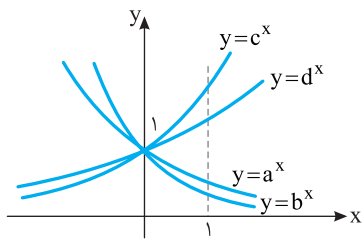
$$f(-1)=9\Rightarrow a^{-1}+1=9\Rightarrow a^{-1}=8\Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{1}{8})^x+1$. از طرف دیگر

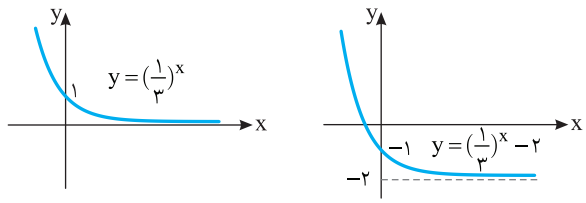
$$f(0)=b\Rightarrow(\frac{1}{8})^0+1=b\Rightarrow b=1+1=2$$

در نتیجه $ab=\frac{1}{4}$.

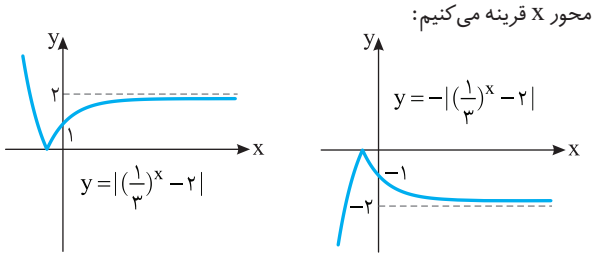
۱۹۶۴- گزینهٔ ۴ چون عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ به‌صورت a، b، c و d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسهٔ عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ معلوم می‌شود $c>d>a>b$.



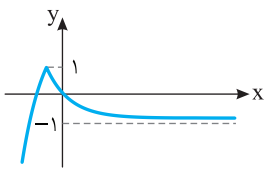
۱۹۶۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$. ابتدا نمودار $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



اکنون نمودار تابع $y=|(\frac{1}{3})^x-2|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



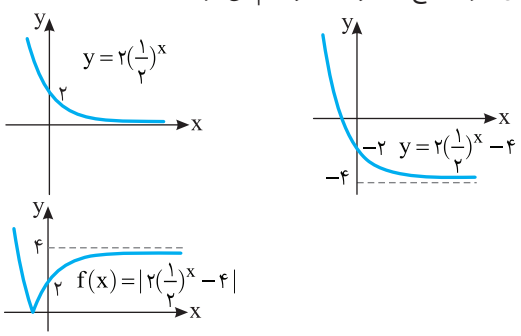
$$f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$$

۱۹۶۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{|2^{x+1}-1|}{2^{x-1}}=\frac{|2^{x+1}-1|}{|2^{x-1}|}=|\frac{2^{x+1}-1}{2^{x-1}}|=|\frac{2^{x+1}}{2^{x-1}}-\frac{1}{2^{x-1}}|$$

$$=|4-\frac{2}{2^x}|=|4-2(\frac{1}{2})^x|=|2(\frac{1}{2})^x-4|$$

بنابراین نمودار تابع f به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۱۹۶۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

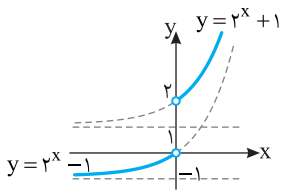
$$(fog)(x)=f(g(x))=3^{g(x)-2}=3^{x+2-2}=3^x$$

$$f(x)=3^{x-2}=\frac{1}{9}\times 3^x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}\times(fog)(x)\Rightarrow(fog)(x)=9f(x)$$

۱۹۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2^x+1 & x>0\\ 2^x-1 & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(-1,0)\cup(2,+\infty)$ است.

۱۹۶۹- گزینهٔ ۴ در تابع $f(x)=۲^{x^۲}+۱$ برای $x=۱$ و $x=-۱$ مقدار تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۱۹۷۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که باید $k>۰$ و

$$f(x)=۲\times ۲^x\times(\frac{۱}{k})^x=۲\times(\frac{۲}{k})^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{۲}{k}>۱\xrightarrow{k>۰}k<۲$$

بنابراین $۰<k<۲$.

۱۹۷۱- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b-۶=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b=\frac{۳}{۴}$$

$$a(\frac{۱}{۲})^{b-۲}=۳\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}=۶\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}-۶=۰\Rightarrow f(-۳)=۰$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع می‌کند.

۱۹۷۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع‌اند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۲^{-a+b}=(\frac{۱}{۴})^{-۱-b}=۲^{-۲(-۱-b)}=۲^{۲(۱+b)}$$

بنابراین

$$-a+b=۲(۱+b)\Rightarrow a+b=-۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(۱)g(۱)=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times(\frac{۱}{۴})^{۱-b}=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times ۲^{-۲(۱-b)}=۲^۲$$

$$۲^{a+۳b-۲}=۲^۲\Rightarrow a+۳b=۴ \qquad (۲)$$

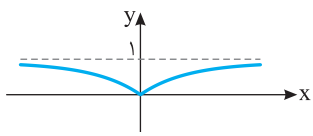
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۵$ و $b=۳$، بنابراین $f(x)=۲^{-۵x+۳}$. اکنون فرض کنید $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۸})=m$. در این صورت

$$f(m)=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow ۲^{-۵m+۳}=\frac{۱}{۱۲۸}=۲^{-۷}\Rightarrow -۵m+۳=-۷\Rightarrow m=۲$$

۱۹۷۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲^x & x\le ۰\\ ۱-۲^{-x} & x>۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

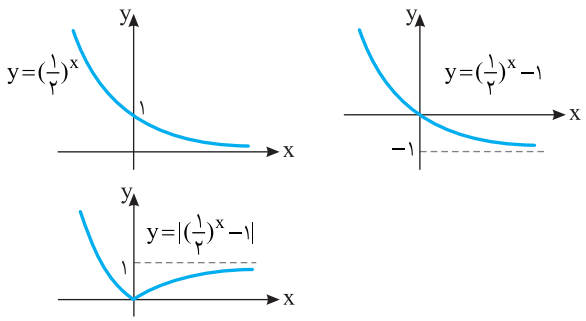
$$f(۱)=f(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.

۱۹۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=\frac{|۱-۲^x|}{۲^x}=\frac{|۱-۲^x|}{|۲^x|}=|\frac{۱-۲^x}{۲^x}|=|\frac{۱}{۲^x}-\frac{۲^x}{۲^x}|=|(\frac{۱}{۲})^x-۱|$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۱۹۷۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $s=۲^{m-۲}+۱$. چون $f^{-۱}(s)=۲۶$. پس $f(۲۶)=s$. در نتیجه $f(۲۶)=۵(۲۶)-۱=۱۲۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$s=۲^{m-۲}+۱=۱۲۹\Rightarrow ۲^{m-۲}=۱۲۸=۲^۷$$

بنابراین $m-۲=۷$، پس $m=۹$.

۱۹۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $g(x+۲)=۲^{x+۲-۱}=۲^{x+۱}$، بنابراین $f(۲^{x+۱})=۲^x+۱$.

$$f(۲^{x+۱})=۲^x+۱\Rightarrow f^{-۱}(۲^x+۱)=۲^{x+۱}$$

$$۲^x+۱=۹\Rightarrow ۲^x=۸=۲^۳\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $f^{-۱}(۹)=۲^{۳+۱}=۱۶$.

۱۹۷۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$f(\frac{x}{۳})=۸^{\frac{x}{۳}}=۲^x,\quad g(x-۲)=۲^{۲(x-۲)+۵}=۲^{۲x+۱}$$

بنابراین

$$f(\frac{x}{۳})g(x-۲)=۲^x\times ۲^{۲x+۱}=۲^{۳x+۱}=۲^{۳x}\times ۲=۲\times ۸^x=۲f(x)$$

۱۹۷۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x+۲}=\frac{۲^x+۲}{۲^x+۲}+\frac{-۱}{۲^x+۲}=۱-\frac{۱}{۲^x+۲}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $۲^x>۰$. بنابراین

$$۲^x+۲>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۲^x+۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۲^x+۲}<۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۱-\frac{۱}{۲^x+۲}<۱$$

در نتیجه $\frac{۱}{۲}<f(x)<۱$.

۱۹۷۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x)=ka^x$ $(a>۰, a\neq ۱)$، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های $y=۳^{۱+۲x}$ و $y=۴^{۵-x}$ یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x)=۲^{۳-|x|}$، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی، $f(x)=f(-x)=۲^{۳-|x|}$. اکنون ثابت می‌کنیم تابع $y=۹^x+۲\times ۳^{x+۱}$ یک‌به‌یک است. دقت کنید که $۹^x+۲\times ۳^{x+۱}=(۳^x+۳)^۲-۹$. فرض می‌کنیم $f(x_۱)=f(x_۲)$. در نتیجه $(۳^{x_۱}+۳)^۲-۹=(۳^{x_۲}+۳)^۲-۹$.

بنابراین $(۳^{x_۱}+۳)^۲=(۳^{x_۲}+۳)^۲$، چون $۳^{x_۱}+۳, ۳^{x_۲}+۳>۰$، پس

$$۳^{x_۱}+۳=۳^{x_۲}+۳\Rightarrow ۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

۱۹۸۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

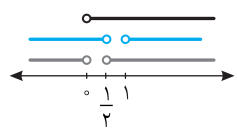
$$f(x)=k\times k^x\times(\frac{1}{2k-1})^x=k(\frac{k}{2k-1})^x$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید

$$0<\frac{k}{2k-1}<1$$

$$\frac{k}{2k-1}>0\Rightarrow k>\frac{1}{2}\ \text{یا}\ k<0$$

$$\frac{k}{2k-1}<1\Rightarrow\frac{k}{2k-1}-1<0\Rightarrow\frac{-k+1}{2k-1}<0\Rightarrow k>1\ \text{یا}\ k<\frac{1}{2}$$



پس $k>1$.

۱۹۸۱- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می‌کنیم

$$3^x(3+1)=108\Rightarrow 3^x\times 4=108\Rightarrow 3^x=27=3^3\Rightarrow x=3$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$5^{x-3}=(\frac{1}{5})^{x^2}\Rightarrow 5^{x-3}=5^{-x^2}$$

$$x-3=-x^2\Rightarrow x^2+x-3=0$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر -1 است.

۱۹۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f^{-1}(5)=a\Rightarrow f(a)=5$$

$$2+3^{a-2}=5\Rightarrow 3^{a-2}=3\Rightarrow a-2=1\Rightarrow a=3$$

۱۹۸۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $2^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$t-\frac{2}{t}+15=0\Rightarrow t^2+15t-2=0$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادلهٔ $2^x=a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_2 a$ است). بنابراین معادلهٔ اصلی فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل $3\times 3^{2x}-9\times 3^x+5=0$ نوشت. اگر فرض کنیم $3^x=t$، این معادله می‌شود $3t^2-9t+5=0$. هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با $3^\alpha+3^\beta=t_1+t_2=3$. به این ترتیب $\frac{9}{3}=3$.

۱۹۸۶- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $x+y=5$ به‌دست می‌آید $y=5-x$. با جای‌گذاری $5-x$ به جای y در معادلهٔ $2^x-2^y=4$، به‌دست می‌آید

$$2^x-2^{5-x}=4\Rightarrow 2^x-\frac{2^5}{2^x}=4\Rightarrow(2^x)^2-4(2^x)-32=0$$

$$(2^x-8)(2^x+4)=0\Rightarrow\begin{cases}2^x+4=0\Rightarrow 2^x=-4\ \text{(غ.ق.ق.)}\\ 2^x-8=0\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3\end{cases}$$

$$y=5-x\xrightarrow{x=3}y=2$$

بنابراین $x-y=1$.

۱۹۸۷- گزینهٔ ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس

$$|2^x-4|-3=0\Rightarrow 2^x-4=\pm 3\Rightarrow 2^x=7, 2^x=1$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنهٔ تابع شامل دو عدد نیست.

۱۹۸۸- گزینهٔ ۴ چون $\frac{2}{3}=(\frac{3}{2})^{-1}$، پس نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\frac{3}{2})^{1-3x}<(\frac{3}{2})^{-(3+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{3}{2}>1$، پس $1-3x<-(3+x)$، بنابراین $x>2$.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(2,+\infty)$ است.

۱۹۸۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $2^x-8\geq 0$ و $81-3^x>0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم

$$2^x-8\geq 0\Rightarrow 2^x\geq 2^3\Rightarrow x\geq 3,\quad 81-3^x>0\Rightarrow 3^x<3^4\Rightarrow x<4$$

بنابراین $D_f=[3,4)$. در نتیجه $a=3$، $b=4$ و $a+b=7$.

۱۹۹۰- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f برابر است با

$$D_f=\{x\,|\,-3^{2x+1}+4\times 3^x-1>0\}$$

فرض می‌کنیم $3^x=t$، در نتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-3t^2+4t-1>0\Rightarrow-(t-1)(3t-1)>0$$

جواب نامعادلهٔ بالا به‌صورت $\frac{1}{3}<t<1$ است. در نتیجه $\frac{1}{3}<3^x<1$. بنابراین

$$-1<x<0$$

۱۹۹۱- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$2^x(1+2+2^2)=5^x(2+5)\Rightarrow 2^x\times 7=5^x\times 7$$

$$2^x=5^x\Rightarrow(\frac{2}{5})^x=1\Rightarrow x=0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۹۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $2^{|x|}=(2^{-1})^{x-x^2}=2^{x^2-x}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$|x|=x^2-x\qquad(1)$$

اگر $x\geq 0$، این معادله می‌شود:

$$x=x^2-x\Rightarrow 2x=x^2\Rightarrow x=2, x=0$$

اگر $x<0$، معادلهٔ (۱) می‌شود:

$$-x=x^2-x\Rightarrow x^2=0$$

که چون $x<0$، جواب ندارد. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد: $x=0$ و $x=2$.

۱۹۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $3^x-1=8$، یعنی $3^x=9$، پس $x=2$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم، ۲ به‌دست می‌آید $f(8)=2^3+1=9$. از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2)=a\Rightarrow f(a)=2$$

$$x^3+1=2\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

پس

$$f(3^1-1)=1^3+1\Rightarrow f(2)=2$$

در نتیجه $f^{-1}(2)=2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $2+9=11$.

۱۹۹۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲}=\sqrt{۵}-۲$. بنابراین اگر فرض کنیم $(\sqrt{۵}+۲)^x=t$، معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{۱}{t}=۱۸\Rightarrow t^۲-۱۸t+۱=۰\Rightarrow t=۹+۴\sqrt{۵}=(\sqrt{۵}+۲)^x\Rightarrow x=۲$$

$$t=۹-۴\sqrt{۵}=(\sqrt{۵}+۲)^x\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۴ است.

۱۹۹۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲^{۲x}+۲^x\times۳^x=۲\times۳^{۲x}$$

اگر فرض کنیم $۲^x=a$ و $۳^x=b$، این معادله می‌شود:

$$a^۲+ab=۲b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=b^۲-ab\Rightarrow(a-b)(a+b)=b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b)=۰\Rightarrow(a-b)(a+۲b)=۰$$

بنابراین

$$a-b=۰\Rightarrow ۲^x=۳^x\Rightarrow(\frac{۲}{۳})^x=۱\Rightarrow x=۰$$

$$a+۲b=۰\Rightarrow ۲^x+۲\times۳^x=۰$$ جواب ندارد.

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=۰$.

۱۹۹۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $a=۲^x$ و $b=۳^y$، در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=-۷\\ ab=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow b=\frac{۱}{۱۸a}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{a}-\frac{۱}{۱۸a}=-۷\Rightarrow\frac{۱}{a}-۱۸a=-۷$$

$$۱۸a^۲-۷a-۱=۰\Rightarrow(۹a+۱)(۲a-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۹}=۲^x & \text{جواب ندارد.}\\ a=\frac{۱}{۲}=۲^x\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

۱۹۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-۱}$$

بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۱-۲x}>(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-x-۳}$$

چون $۰<\sqrt{۳}-\sqrt{۲}<۱$، پس

$$۱-۲x<-x-۳\Rightarrow x>۴$$

۱۹۹۸- گزینهٔ ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$۸(۲^x)^۲-۶(۲^x)+۱\geq۰$$

اگر فرض کنیم $۲^x=t$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$۸t^۲-۶t+۱\geq۰\Rightarrow(۲t-۱)(۴t-۱)\geq۰\Rightarrow t\geq\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ t\leq\frac{۱}{۴}$$

$$t\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^x\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^x\geq۲^{-۱}\Rightarrow x\geq-۱$$

$$t\leq\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^x\leq\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^x\leq۲^{-۲}\Rightarrow x\leq-۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-۲]\cup[-۱,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-۲,-۱)$ است. پس $a=-۲$، $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۳$.

۱۹۹۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادلهٔ $۲^{x+۱}-۴^x\geq۰$ را حل کنیم تا دامنهٔ تابع به‌دست آید

$$۲^{x+۱}-۴^x\geq۰\Rightarrow۲\times۲^x-(۲^x)^۲\geq۰\Rightarrow۲^x(۲-۲^x)\geq۰$$

با توجه به اینکه $۲^x>۰$ نتیجه می‌شود

$$۲-۲^x\geq۰\Rightarrow۲^x\leq۲\Rightarrow x\leq۱$$

بنابراین $a=۱$.

۲۰۰۰- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f مجموعهٔ xهایی است که

$$\frac{(\frac{۱}{۲})^x-۴}{۲۷-۳^x}\geq۰$$

$$(\frac{۱}{۲})^x-۴=۰\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^x=۴=۲^۲\Rightarrow x=-۲$$

$$۲۷-۳^x=۰\Rightarrow۳^x=۲۷=۳^۳\Rightarrow x=۳$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$(\frac{۱}{۲})^x-۴$		+	۰	−		−	
$۲۷-۳^x$		+		+	۰	−	
$\frac{(\frac{۱}{۲})^x-۴}{۲۷-۳^x}$		+	۰	−	ت ن	+	

بنابراین

$$D_f=(-\infty,-۲]\cup(۳,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۳]$$

در نتیجه $a=-۲$، $b=۳$ و $a+b=۱$.

۲۰۰۱- گزینهٔ ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log۹۰=\log(۹\times۱۰)=\log۹+\log۱۰=\log۳^۲+۱=۲\log۳+۱=۲a+۱$$

۲۰۰۲- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log۶-\log۲\times\log_۲۳=\log۶-\log۲\times\frac{\log۳}{\log۲}$$

$$=\log۶-\log۳=\log\frac{۶}{۳}=\log۲$$

۲۰۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۱$. بنابراین

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

در نتیجه

$$\log_{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\log_{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}(\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}})=-۱$$

۲۰۰۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲۷\sqrt[۳]{۸۱}}}=۳^{\frac{۱}{۴}}\times۲۷^{\frac{۱}{۴\times۲}}\times۸۱^{\frac{۱}{۴\times۲\times۳}}$$

$$=۳^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۳}{۴\times۲}}\times۳^{\frac{۴}{۴\times۲\times۳}}=۳^{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۶}}=۳^{\frac{۶+۹+۴}{۲۴}}=۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

بنابراین

$$\log_۳\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲۷\sqrt[۳]{۸۱}}}=\log_۳۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}=\frac{۱۹}{۲۴}\log_۳۳=\frac{۱۹}{۲۴}$$

۲۰۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_{۴}۵=\frac{\log ۵}{\log ۴}=\frac{\log ۵}{۲\log ۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\log ۵}{\log ۲}=\frac{۱}{۲}\log_{۲}۵$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}\log_{۲}۵}=(۲^{-۱})^{\frac{۱}{۲}\log_{۲}۵}=۲^{-\frac{۱}{۲}\log_{۲}۵}=(\underbrace{۲^{\log_{۲}۵}}_{۵})^{-\frac{۱}{۲}}=۵^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

۲۰۰۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲۱۶=۶^۳=۲^۳\times۳^۳$، در نتیجه

$$\log ۲۱۶=\log(۲^۳\times۳^۳)=\log ۲^۳+\log ۳^۳$$
$$=۳\log ۲+۳\log ۳=۳x+۳y$$

۲۰۰۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log ۵+\log ۲۰=\log(۵\times۲۰)=\log ۱۰۰=۲$$

بنابراین $\log ۲۰=۲-\log ۵=۲-a$.

۲۰۰۸- گزینهٔ ۲ از دو طرف تساوی $۲^x=۳^y$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۲^x=\log ۳^y\Rightarrow x\log ۲=y\log ۳$$

بنابراین

$$\frac{\log ۳}{\log ۲}=\frac{x}{y}\Rightarrow\log_{۲}۳=\frac{x}{y}$$

در نتیجه $\log_{۸}۹=\log_{۲^۳}۳^۲=\frac{۲}{۳}\log_{۲}۳=\frac{۲x}{۳y}$.

۲۰۰۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $۳^{\log_{۲}۵}=b$ نتیجه می‌شود

$$\log_{۳}b=\log_{۲}۵$$

از تساوی $۲^{\log_{۵}۳}=a$ نتیجه می‌شود

$$۳^{\log_{۵}۲}=a\Rightarrow\log_{۳}a=\log_{۵}۲$$

بنابراین $\log_{۳}a\times\log_{۳}b=\log_{۵}۲\times\log_{۲}۵=۱$.

۲۰۱۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $۲\times۲^x=۵^x$ بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه $(\frac{۵}{۲})^x=۲$. بنابراین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x=\log_{\frac{۵}{۲}}۲=\frac{۱}{\log_{۲}\frac{۵}{۲}}=\frac{۱}{\log_{۲}۵-\log_{۲}۲}=\frac{۱}{\log_{۲}۵-۱}$$

۲۰۱۱- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A=\log(۲۰\times۳۰\times۵۰)=\log(۳\times۱۰^۴)=\log ۳+\log ۱۰^۴=a+۴$$

۲۰۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{۱}{\log_{۳}۱۸}=\log_{۱۸}۳,\quad \frac{۱}{\log_{۶}۱۸}=\log_{۱۸}۶$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{۱۸}۶+\log_{۱۸}۳=\log_{۱۸}(۳\times۶)=۱$$

۲۰۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $۳+۲\sqrt{۲}=(۱+\sqrt{۲})^۲=(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})^۲$.

بنابراین

$$\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(۳+۲\sqrt{۲})=\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})^۲$$
$$=۲\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})=-۲$$

۲۰۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{۲}\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}=\log_{۲}(۴^{\frac{۱}{۴}}\times۴^{\frac{۱}{۱۲}}\times۲^{\frac{۱}{۲۴}})$$
$$=\log_{۲}۲^{\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}}=\log_{۲}۲^{\frac{۱۷}{۲۴}}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

$$\log_{۲}\sqrt{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۴}}}=\log_{۲}(۲^{\frac{۱}{۲}}\times۴^{\frac{۱}{۶}}\times۴^{\frac{۱}{۲۴}})$$
$$=\log_{۲}۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۶}+\frac{۲}{۲۴}}=\log_{۲}۲^{\frac{۲۲}{۲۴}}=\frac{۲۲}{۲۴}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{۱۷}{۲۴}}{\frac{۲۲}{۲۴}}=\frac{۱۷}{۲۲}$.

۲۰۱۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_{۸}۳=\log_{۲^۳}۳=\frac{۱}{۳}\log_{۲}۳$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲^{۳+\log_{۸}۳}=۲^{۳+\frac{۱}{۳}\log_{۲}۳}=۲^۳\times۲^{\frac{۱}{۳}\log_{۲}۳}=۸\times(\underbrace{۲^{\log_{۲}۳}}_{۳})^{\frac{۱}{۳}}=۸(۳)^{\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{۳}$$

راه‌حل دوم

$$۲^۳\times۲^{\log_{۸}۳}=۸\times۳^{\log_{۸}۲}=۸\times۳^{\log_{۲^۳}۲}=۸\times۳^{\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{۳}$$

۲۰۱۶- گزینهٔ ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[۳]{۶/۴}=\log\sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۱۰}}=\log\sqrt[۳]{\frac{۳۲}{۵}}=\frac{۱}{۳}\log\frac{۳۲}{۵}=\frac{۱}{۳}(\log ۳۲-\log ۵)$$
$$=\frac{۱}{۳}(\log ۲^۵-\log\frac{۱۰}{۲})=\frac{۱}{۳}(۵\log ۲-(\log ۱۰-\log ۲))$$
$$=\frac{۱}{۳}(۶\log ۲-\log ۱۰)=\frac{۱}{۳}(۶a-۱)=۲a-\frac{۱}{۳}$$

۲۰۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{۵}۲=a\Rightarrow\frac{\log ۲}{\log ۵}=a\Rightarrow\log ۲=a\log ۵$$
$$\log_{۳}۵=b\Rightarrow\frac{\log ۵}{\log ۳}=b\Rightarrow\log ۳=\frac{\log ۵}{b}$$

بنابراین

$$\log_{۱۵}۴=\frac{\log ۴}{\log ۱۵}=\frac{۲\log ۲}{\log ۳+\log ۵}=\frac{۲a\log ۵}{\frac{\log ۵}{b}+\log ۵}=\frac{۲a}{\frac{۱}{b}+۱}=\frac{۲ab}{b+۱}$$

۲۰۱۸- گزینهٔ ۲ چون $۳۸۵=۵\times۷\times۱۱$، پس طرفین سه تساوی داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log ۱۱+\log ۵+\log ۵+\log ۷+\log ۷+\log ۱۱=a+b+c$$
$$۲(\log ۱۱+\log ۵+\log ۷)=a+b+c$$
$$۲\log(۱۱\times۵\times۷)=a+b+c\Rightarrow\log ۳۸۵=\frac{a+b+c}{۲}$$

۲۰۱۹- گزینهٔ ۱ با توجه به خاصیت $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۱-\log_{۲}۳}+\frac{۱}{۱-\log_{۳}۲}=\frac{۱}{۱-\log_{۲}۳}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{\log_{۲}۳}}$$
$$=\frac{۱}{۱-\log_{۲}۳}+\frac{\log_{۲}۳}{\log_{۲}۳-۱}=\frac{۱-\log_{۲}۳}{۱-\log_{۲}۳}=۱$$

۲۰۲۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $(3^x)^2-3^x-2=0$ می‌نویسیم.

در نتیجه $(3^x-2)(3^x+1)=0$، چون عبارت 3^x+1 همواره مثبت است، نتیجه می‌شود

$$3^x-2=0\Rightarrow 3^x=2\Rightarrow x=\log_3 2$$

۲۰۲۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه

$$\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$$

داریم

$$A=\log_5\left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{124}{125}\right)=\log_5\frac{5}{125}=\log_5\frac{1}{25}=\log_5 5^{-2}$$
$$=-2$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ می‌توان نوشت

$$A=\log_5 5-\log_5 6+\log_5 6-\log_5 7+\log_5 7-\log_5 8$$
$$+\cdots+\log_5 124-\log_5 125=\log_5 5-\log_5 125=1-3=-2$$

۲۰۲۲- گزینهٔ ۱ چون $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$، پس

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\log_2 3}}=\frac{1}{1+\log_3 2}=\frac{1}{\log_3 3+\log_3 2}=\frac{1}{\log_3(3\times 2)}=\frac{1}{\log_3 6}$$
$$=\log_6 3$$

۲۰۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2\log(3+\sqrt{5})=\log(3+\sqrt{5})^2=\log(9+5+6\sqrt{5})=\log(14+6\sqrt{5})$$

بنابراین

$$\log(28+12\sqrt{5})-2\log(3+\sqrt{5})=\log(28+12\sqrt{5})-\log(14+6\sqrt{5})$$
$$=\log\frac{28+12\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}}=\log 2=k$$

۲۰۲۴- گزینهٔ ۲ به کمک تساوی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 8=\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 5}{\log 3}\times\frac{\log 8}{\log 5}=\frac{\log 8}{\log 2}=\frac{3\log 2}{\log 2}=3$$

۲۰۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a=5^{\log 20}=5^{\log 10+\log 2}=5^{1+\log 2}=5\times 5^{\log 2}=5\times 2^{\log 5}$$
$$b=2^{\log 50}=2^{\log 10+\log 5}=2^{1+\log 5}=2\times 2^{\log 5}$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{5\times 2^{\log 5}}{2\times 2^{\log 5}}=\frac{5}{2}$.

۲۰۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log 15=\frac{\log_3 15}{\log_3 10}$. از طرف دیگر

$$\log_3 15=\log_3(3\times 5)=\log_3 3+\log_3 5=1+b$$
$$\log_3 10=\log_3(2\times 5)=\log_3 2+\log_3 5$$
$$=\frac{1}{\log_2 3}+\log_3 5=\frac{1}{a}+b=\frac{1+ab}{a}$$

بنابراین $\log 15=\frac{1+b}{\frac{1+ab}{a}}=\frac{a(1+b)}{1+ab}$.

۲۰۲۷- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^x} b=\frac{1}{x}\log_a b$، پس

$$\log_8 10=a\Rightarrow\log_{2^3}(2\times 5)=a\Rightarrow\frac{1}{3}\log_2(2\times 5)=a$$

$$\frac{1}{3}(\log_2 2+\log_2 5)=a\Rightarrow 1+\log_2 5=3a\Rightarrow\log_2 5=3a-1$$

بنابراین

$$\log_{40}50=\frac{\log_2 50}{\log_2 40}=\frac{\log_2(2\times 5^2)}{\log_2(2^3\times 5)}=\frac{\log_2 2+\log_2 5^2}{\log_2 2^3+\log_2 5}$$
$$=\frac{1+2\log_2 5}{3+\log_2 5}=\frac{1+2(3a-1)}{3+3a-1}=\frac{6a-1}{3a+2}$$

۲۰۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log_{ab} x=\frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=3\Rightarrow\frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}}=3\Rightarrow\frac{\log(ab)}{\log a}=3$$

$$\frac{\log a+\log b}{\log a}=3\Rightarrow 1+\frac{\log b}{\log a}=3\Rightarrow\log_a b=2$$

بنابراین $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{2}$. در نتیجه $\log_a b+\log_b a=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

۲۰۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2^x)^2-8\times 2^x+15=0$$

بنابراین $(2^x-3)(2^x-5)=0$، پس

$$\begin{cases}2^x-3=0\Rightarrow 2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3\\ 2^x-5=0\Rightarrow 2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5\end{cases}$$

چون $f(x)=\log_2 x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس $\log_2 5>\log_2 3$.

در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ مورد نظر $\log_2 5$ است.

۲۰۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از دو طرف معادلهٔ $2^x=3^y$ در پایهٔ ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3 2^x=\log_3 3^y\Rightarrow x\log_3 2=y\log_3 3\Rightarrow y=x\log_3 2$$

در معادلهٔ $x+y=1$ به جای y قرار می‌دهیم $x\log_3 2$، در نتیجه

$$x+x\log_3 2=1\Rightarrow x(1+\log_3 2)=1$$
$$x(\log_3 3+\log_3 2)=1\Rightarrow x\log_3 6=1$$
$$x=\frac{1}{\log_3 6}\Rightarrow x=\log_6 3$$

راه‌حل دوم

$$x+y=1\Rightarrow y=1-x$$
$$2^x=3^{1-x}\Rightarrow 2^x=\frac{3}{3^x}\Rightarrow 6^x=3\Rightarrow x=\log_6 3$$

۲۰۳۱- گزینهٔ ۴ اگر $f^{-1}(۸)=t$، آن‌گاه $f(t)=۸$، بنابراین

$$۳+۵\log(۲t-۳)=۸\Rightarrow\log(۲t-۳)=۱\Rightarrow ۲t-۳=۱۰\Rightarrow t=\frac{۱۳}{۲}$$

۲۰۳۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,۴)$ می‌گذرد، پس

$$f(۲)=۳\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)=۳ \quad (۱)$$

$$f(۳)=۴\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=۴ \quad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)-\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=-۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=-۱\Rightarrow\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید:

$$a=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۱}{۲}+۱)=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}=۳-۱=۲$$

۲۰۳۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل دامنهٔ تابع به‌صورت $(-۳,+\infty)$ است. پس دامنهٔ تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a},+\infty)$ باشد. بنابراین

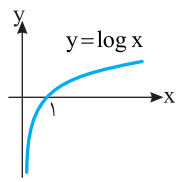
$$-\frac{b}{a}=-۳\Rightarrow b=۳a$$

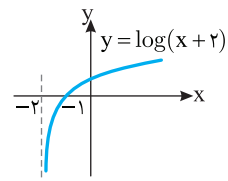
همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌گذرد. بنابراین

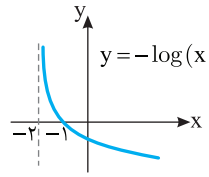
$$f(۰)=\log_{\frac{۱}{۳}}b=-۲\Rightarrow b=(\frac{۱}{۳})^{-۲}=۹$$

در نتیجه $a=۳$. بنابراین $ab=۲۷$.

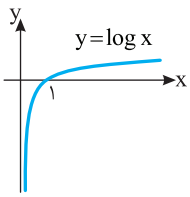
۲۰۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x+۲)$ به‌دست آید. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log(x+۲)$ به‌دست آید.

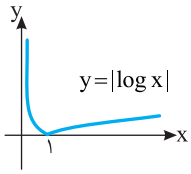


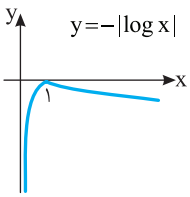




۲۰۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y=|\log x|$ به‌دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|\log x|$ رسم شود.



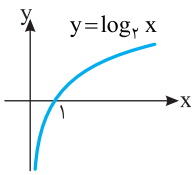


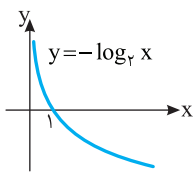


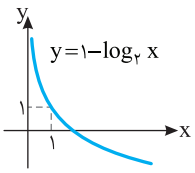
۲۰۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log_۲\frac{۲}{x}=\log_۲ ۲-\log_۲ x=۱-\log_۲ x$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۰۳۷- گزینهٔ ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$۱۰-x>۰\Rightarrow x<۱۰,\quad x-۲>۰\Rightarrow x>۲,\quad x-۲\neq۱\Rightarrow x\neq۳$$

پس دامنهٔ تابع $(۲,۱۰)-\{۳\}$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۰۳۸- گزینهٔ ۳ باید همواره $x^۲-۲mx+۴>۰$، چون ضریب $x^۲$ مثبت است، باید $\Delta<۰$.

$$\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(-۲m)^۲-۴\times(۱)\times۴<۰$$

$$۴m^۲-۱۶<۰\Rightarrow۴(m^۲-۴)<۰\Rightarrow|m|<۲\Rightarrow-۲<m<۲$$

۲۰۳۹- گزینهٔ ۳ با تغییرات دو مرحلهٔ اول به تابع $f(x)=۲^{x-۱}+۱$ می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y=x$، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطهٔ تابع وارون f به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y=۱+۲^{x-۱}\Rightarrow۲^{x-۱}=y-۱\Rightarrow x-۱=\log_۲(y-۱)\Rightarrow x=\log_۲(y-۱)+۱$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\log_۲(x-۱)+۱$.

۲۰۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $y=-\log_۲(x-۱)+۲$.

در نتیجه

$$۲-y=\log_۲(x-۱)\Rightarrow۲^{۲-y}=x-۱$$

بنابراین $x=۲^{۲-y}+۱$، پس $f^{-۱}(x)=۲^{۲-x}+۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۳)=-\log_۲ ۲+۲=۱$، بنابراین $f^{-۱}(۱)=۳$.

فقط گزینهٔ (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۰۴۱- گزینهٔ ۴ چون $f^{-1}(۳)=۲۹$، پس $f(۲۹)=۳$ در نتیجه

$$\log_۳(۲\times۲۹-k)=۳\Rightarrow ۵۸-k=۳^۳=۲۷\Rightarrow k=۳۱$$

۲۰۴۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۲,۲)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(۲)=۲\Rightarrow\log_۲(۲a+b)=۲\Rightarrow ۲a+b=۴ \quad (۱)$$

$$f(-۱)=۱\Rightarrow\log_۲(-a+b)=۱\Rightarrow -a+b=۲ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۲}{۳}$ و $b=\frac{۸}{۳}$.

۲۰۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=(-۲,+\infty)$، پس $x=-۲$ باید ریشهٔ عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-۲b+c=۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر $f(۰)=-۱$ و $f(-۱)=۰$. پس

$$f(۰)=\log_a c=-۱\Rightarrow c=\frac{۱}{a} \quad (۲)$$

$$f(-۱)=\log_a(-b+c)=۰\Rightarrow -b+c=۱ \quad (۳)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $b=۱$ و $c=۲$. همچنین از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b+c=\frac{۷}{۲}$.

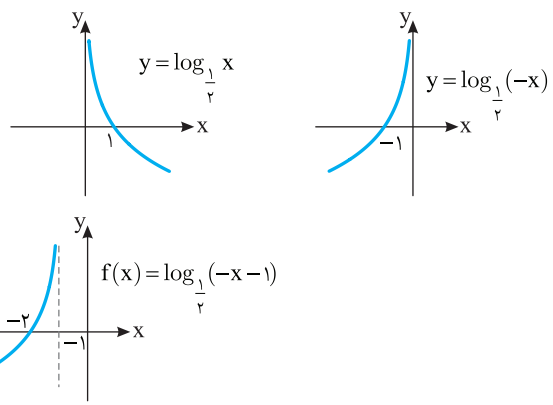
۲۰۴۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\log_۲(۳x-۵)=۰\Rightarrow ۳x-۵=۱\Rightarrow x=۲$$

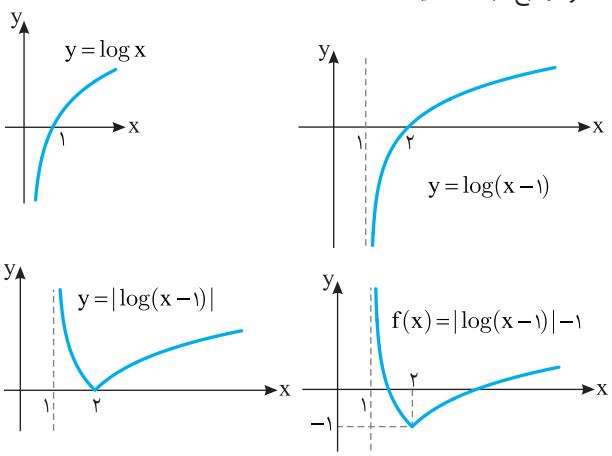
پس نقطهٔ برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(۲,۰)$ است. بنابراین نقطهٔ برخورد نمودار تابع وارون f با محور عرض‌ها $B(۰,۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

۲۰۴۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x)$ به‌دست بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-(x+۱))=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x-۱)$ به‌دست آید. مراحل رسم نمودار تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



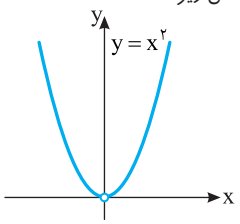
۲۰۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\log(x-۱)|$ به‌دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید.



۲۰۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)}=g(x)$

$$f(x)=۲^{\log_۲ x^۲}=x^۲,\quad x\neq ۰$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۰۴۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه عبارت $\log_{(x-۱)}(۱۶-x^۲)$ معنادار باشد، باید

$$۱۶-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴\,,\ x-۱>۰\Rightarrow x>۱\,,\ x-۱\neq ۱\Rightarrow x\neq ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(۱,۴)-\{۲\}$ است، پس $a=۱$، $b=۴$ و $c=۲$ و در نتیجه $a+b+c=۷$.

۲۰۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\frac{۴-۲^{x+۱}}{۲^x-۱}\Rightarrow y\times ۲^x-y=۴-۲^{x+۱}$$

$$۲^x(y+۲)=۴+y\Rightarrow ۲^x=\frac{۴+y}{y+۲}\Rightarrow x=\log_۲\left(\frac{۴+y}{y+۲}\right)$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\frac{۴+x}{x+۲}\right)$.

۲۰۵۰- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون تابع داده شده، x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{\log x}{۱+\log x}\Rightarrow y+y\log x=\log x\Rightarrow (y-۱)\log x=-y$$

$$\log x=\frac{y}{۱-y}\Rightarrow x=۱۰^{\frac{y}{۱-y}}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱-x}}$.

۲۰۵۱- گزینهٔ ۳ کافی است معادلهٔ $x^۲-۳x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=۰, x=۴$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۰۵۲- گزینهٔ ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=\log_۲\left(\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}\right)=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}=۲^۲=۴\Rightarrow ۴b^۲-۱۲=۱۲b-۲۱$$

بنابراین

$$۴b^۲-۱۲b+۹=(۲b-۳)^۲=۰$$

بنابراین $b=\frac{۳}{۲}$. اما به ازای $b=\frac{۳}{۲}$ هیچ‌یک از عبارت‌های $\log_۲(۱۲b-۲۱)$ و $\log_۲(b^۲-۳)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۵۳- گزینهٔ ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_۲(\log_۳(x-۱))=۵\Rightarrow \log_۳(x-۱)=۲^۵=۳۲$$

$$x-۱=۳^{۳۲}\Rightarrow x=۳^{۳۲}+۱$$

۲۰۵۴- گزینهٔ ۴ چون $\log_{a^k} b=\frac{۱}{k}\log_a b$، پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^۲} x+\log_{۲^۴} x^۲+\log_{۲^۶} x^۳=۹$$

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۲}{۴}\log_۲ x+\frac{۳}{۶}\log_۲ x=۹$$

$$\frac{۳}{۲}\log_۲ x=۹\Rightarrow \log_۲ x=۶\Rightarrow x=۲^۶=۶۴$$

۲۰۵۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$، در نتیجه $\log_x ۳=\frac{۱}{t}$.

بنابراین به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$t-\frac{۶}{t}+۱=۰\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow (t-۲)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳, t=۲$$

پس

$$\log_۳ x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}$$

$$\log_۳ x=۲\Rightarrow x=۳^۲$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲۰۵۶- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+۲)$ و $\log(۳-x)$ بامعنا باشند و نیز $\log(۳-x)\neq ۰$، پس

$$D_f=\{x|x+۲>۰, ۳-x>۰, \log(۳-x)\neq ۰\}$$

اگر $\log(۳-x)=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۲,۳)-\{۲\}$ است.

۲۰۵۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^۲>۰\Rightarrow x\neq ۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\},\quad x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x|x\neq ۰, \log x^۲\neq ۱\}$$

$$=\{x|x\neq ۰, x\neq \pm\sqrt{۱۰}\}=\mathbb{R}-\{۰, \pm\sqrt{۱۰}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند.

۲۰۵۸- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۱)>\log ۳$ نتیجه می‌شود $x+۱>۳$ و در نتیجه $x>۲$. واضح است که عبارت $\log(x+۱)$ به ازای $x>-۱$ بامعنا است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

۲۰۵۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ بامعنا باشد، باید $x-۱>۰$، یعنی $x>۱$. از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)>۱=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱<\frac{۱}{۲}\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $۱<x<\frac{۳}{۲}$.

۲۰۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۱۶-x^۲>۰$ تا عبارت $\log(۱۶-x^۲)$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴$$

از طرف دیگر،

$$\log(۱۶-x^۲)<\log ۱۵\Rightarrow ۱۶-x^۲<۱۵\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-۴,-۱)\cup(۱,۴)$ است که چهار عدد صحیح ± ۳ و ± ۲ در آن قرار دارند.

۲۰۶۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۹(۲x+۱)-\log_۹(x-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \log_۹\left(\frac{۲x+۱}{x-۱}\right)=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۹^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow ۲x+۱=۳x-۳\Rightarrow x=۴$$

۲۰۶۲- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log\left(\frac{x}{x+۱}\right)=\log(\log ۲)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+۱}=\log ۲\Rightarrow x=x\log ۲+\log ۲$$

$$x(۱-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x(\log ۱۰-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x\log ۵=\log ۲$$

$$x=\frac{\log ۲}{\log ۵}\Rightarrow x=\log_۵ ۲$$

۲۰۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_۲(۱۴+\log_۴(x-۱))=۴\Rightarrow ۱۴+\log_۴(x-۱)=۲^۴=۱۶$$

$$\log_۴(x-۱)=۲\Rightarrow x-۱=۴^۲=۱۶\Rightarrow x=۱۷$$

۲۰۶۴- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b$، پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{2^2} x+\log_{2^4} x+\log_{2^6} x=\frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{6}\log_2 x=\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{12}\log_2 x=\frac{11}{3}\Rightarrow\log_2 x=4\Rightarrow x=2^4=16$$

۲۰۶۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\log_3 x=t$. در این صورت $\log_x 3=\frac{1}{t}$. در نتیجه $\frac{1}{\log_x 3}=\log_3 x=t$. بنابراین، معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t-\frac{12}{t}=1\Rightarrow t^2-12=t\Rightarrow t^2-t-12=0$$

$$(t-4)(t+3)=0\Rightarrow t=4\ ,\ t=-3$$

در نتیجه

$$\log_3 x=4\Rightarrow x=3^4=81,\quad \log_3 x=-3\Rightarrow x=3^{-3}=\frac{1}{27}$$

۲۰۶۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x=t$، آن‌گاه

$$\log_8 x=\log_{2^3} x=\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{1}{3}t$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x=\log_{8^{-1}} x=-\log_8 x=-\frac{1}{3}t$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t(\frac{1}{3}t)-t+\frac{1}{3}t-1=0\Rightarrow\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}t-1=0$$

$$t^2-2t-3=0\Rightarrow(t-3)(t+1)=0\Rightarrow t=-1,t=3$$

بنابراین

$$t=-1\Rightarrow\log_2 x=-1\Rightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$t=3\Rightarrow\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8$$

در نتیجه، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۴ است.

۲۰۶۷- گزینهٔ ۱ دستگاه به شکل $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ 2\log x-3\log y=1\end{cases}$ است. طرفین معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}3\log x+3\log y=9\\ 2\log x-3\log y=1\end{cases}\Rightarrow 5\log x=10\Rightarrow\log x=2\Rightarrow x=100$$

بنابراین

$$\log x+\log y=3\Rightarrow 2+\log y=3\Rightarrow\log y=1\Rightarrow y=10$$

در نتیجه $x-2y=100-20=80$.

۲۰۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{3^{-1}}(2x-1)=-\log_3(2x-1)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-3\le-\log_3(2x-1)\le-2\Rightarrow 2\le\log_3(2x-1)\le 3$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_3 9=2\le\log_3(2x-1)\le 3=\log_3 27$$

$$9\le 2x-1\le 27\xrightarrow{+1}10\le 2x\le 28\xrightarrow{\div 2}5\le x\le 14$$

بنابراین $5\le x\le 14$ (توجه کنید که در این محدوده $2x-1>0$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(5,6,7,\dots,14)$ است.

۲۰۶۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_2(1+3x)<\log_2(x+7)\Rightarrow 1+3x<x+7\Rightarrow x<3$$

از طرف دیگر، باید $1+3x>0$ و $x+7>0$. در نتیجه $x>-\frac{1}{3}$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $(-\frac{1}{3},3)$ است.

۲۰۷۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه $\log_3(x+2)$ بامعنا باشد، باید $x+2>0$، یعنی $x>-2$. از طرف دیگر، باید

$$1-\log_3(x+2)\ge 0\Rightarrow\log_3(x+2)\le 1=\log_3 3\Rightarrow x+2\le 3\Rightarrow x\le 1$$

پس دامنهٔ f بازهٔ $(-2,1]$ است.

۲۰۷۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\log_5 25=2$. در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log_4(28x-6)-\log_4(x-1)=2\Rightarrow\log_4(\frac{28x-6}{x-1})=2$$

در نتیجه

$$\frac{28x-6}{x-1}=4^2=16\Rightarrow 28x-6=16x-16\Rightarrow 12x=-10\Rightarrow x=\frac{-10}{12}=\frac{-5}{6}$$

اما به ازای $x=\frac{-5}{6}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_4(28x-6)$ و $\log_4(x-1)$ معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۷۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2\log_x(2x-1)=1\Rightarrow\log_x(2x-1)^2=1$$

بنابراین

$$(2x-1)^2=x\Rightarrow 4x^2-4x+1=x$$

$$4x^2-5x+1=0\Rightarrow(4x-1)(x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{4},x=1$$

اکنون توجه کنید که اگر $x=1$، پایهٔ لگاریتم داده شده در صورت مسئله برابر ۱ می‌شود که ممکن نیست و اگر $x=\frac{1}{4}$، آن‌گاه $2x-1=-\frac{1}{2}$، که باز هم ممکن نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ‌یک از مقدارهای به‌دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۲۰۷۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_4(x^2-6x+9)=\log_{2^2}(x-3)^2=\frac{2}{2}\log_2|x-3|=\log_2|x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادلهٔ زیر منجر می‌شود

$$\log_2(x+3)+\log_2|x-3|=\log_2(x+3)|x-3|=4$$

بنابراین $(x+3)|x-3|=2^4=16$. اکنون می‌توان گفت

$$x>3\Rightarrow(x+3)(x-3)=16\Rightarrow x^2-9=16$$

$$x^2=25\Rightarrow x=5\ ,\ x=-5\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x<3\Rightarrow(x+3)(3-x)=16\Rightarrow 9-x^2=16\Rightarrow x^2=-7\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک جواب دارد.

۲۰۷۴- گزینهٔ ۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_5 x+\log_{\frac{1}{5^2}} x-2\log_{5^2} x=\log_2 5^2$$

$$\log_5 x+2\log_5 x-2\times\frac{1}{2}\log_5 x=2\log_2 5$$

$$\log_5 x=\log_2 5\Rightarrow x=5^{\log_2 5}$$

۲۰۷۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x=t$، آن‌گاه $\log_2 x^2=2t$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+2t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)}=\frac{1}{6}$$

$$6t=1+3t+2t^2\Rightarrow 2t^2-3t+1=0\Rightarrow t=1, t=\frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t=1\Rightarrow\log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

$$t=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

بنابراین مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $2^2+\sqrt{2}^2=6$ است.

۲۰۷۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{(8-\log x)}=\log(\frac{1}{x^2})\Rightarrow(8-\log x)\log x=-2\log x$$

$$\begin{cases}\log x=0\Rightarrow x=10^0=1\\ 8-\log x=-2\Rightarrow\log x=10\Rightarrow x=10^{10}\end{cases}$$

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت $x^{10-\log x}=1$ یا $x^2\times x^{8-\log x}=1$ می‌نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x=1$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x=10$، پس $x=10^{10}$.

۲۰۷۷- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $\log_2 x+\log_2 y=4$ به‌دست می‌آید

$$\log_2(xy)=4\Rightarrow xy=2^4=16$$

از معادلهٔ $x+y=10$ به‌دست می‌آید

$$y=10-x$$

با جای‌گذاری $10-x$ به جای y در معادلهٔ $xy=16$ نتیجه می‌شود

$$x(10-x)=16\Rightarrow x^2-10x+16=0\Rightarrow(x-2)(x-8)=0$$

$$x=2\Rightarrow y=8,\quad x=8\Rightarrow y=2$$

در هر صورت $x^2+y^2=68$.

۲۰۷۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\Rightarrow 2x-1<x+1\Rightarrow x<2$$

از طرف دیگر، عبارت $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ به‌ازای $x>\frac{1}{2}$ و عبارت $\log(x+1)$ به‌ازای $x>-1$ معنادار است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{2},2)$ است.

۲۰۷۹- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{1-\log x+1+\log x}{(1-\log x)(1+\log x)}>2\Rightarrow\frac{2}{1-(\log x)^2}>2\Rightarrow\frac{1}{1-(\log x)^2}>1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2}-1>0\Rightarrow\frac{1-1+(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0\Rightarrow\frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0$$

بنابراین باید $(\log x)^2\neq 0$ و $1-(\log x)^2>0$:

$$(\log x)^2\neq 0\Rightarrow x\neq 1,\quad (\log x)^2<1\Rightarrow|\log x|<1$$

$$-1<\log x<1\Rightarrow\frac{1}{10}<x<10$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(\frac{1}{10},10)-\{1\}$ است.

۲۰۸۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$D_f=\{x|x\neq -3,\frac{3x-1}{x+3}>0,\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq 0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{3x-1}{x+3}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$$

$$\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq 0\Rightarrow\frac{3x-1}{x+3}\geq 1\Rightarrow\frac{2(x-2)}{x+3}\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$. در نتیجه عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع f نیستند، -3، -2، -1، صفر و ۱ هستند.

۲۰۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}=(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x}=(\frac{1}{3})^x=\frac{1}{3^x}$.

اکنون نقطهٔ تقاطع نمودارها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$3^x+\frac{8}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}\Rightarrow 3^x+\frac{8}{3}=\frac{1}{3^x}\xrightarrow{t=3^x}t+\frac{8}{3}=\frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 3t}3t^2+8t=3\Rightarrow 3t^2+8t-3=0$$

$$(3t-1)(t+3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=3\\ t=-3\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

$A(-1,3)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-1,3)$ و $B(-1,1)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=2$.

ریاضی- ۹۶

۲۰۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(\frac{1}{2})^{2x}=\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{4^x}$. اکنون نقطهٔ A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$4^x=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}\Rightarrow 4^x=\frac{1}{4^x}+\frac{3}{2}\xrightarrow{t=4^x}t=\frac{1}{t}+\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2t}2t^2=2+3t\Rightarrow 2t^2-3t-2=0$$

$$(2t+1)(t-2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق})\\ t=2\Rightarrow 4^x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2\end{cases}$$

$A(\frac{۱}{۲},۲)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(\frac{۱}{۲},۲)$ و $B(-\frac{۱}{۲},۱)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۸۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد، پس $f(۲)=۶$ و $f(۱۲)=۱۰$. بنابراین

$$f(۲)=a+\log_۲(۲b-۴)=۶\Rightarrow\log_۲(۲b-۴)=۶-a$$

$$f(۱۲)=a+\log_۲(۱۲b-۴)=۱۰\Rightarrow\log_۲(۱۲b-۴)=۱۰-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_۲(۱۲b-۴)-\log_۲(۲b-۴)=۴\Rightarrow\log_۲(\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴})=۴$$

$$\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۱۶\Rightarrow۱۲b-۴=۳۲b-۶۴\Rightarrow۲۰b=۶۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $\log_۲(۲b-۴)=\log_۲(۶-۴)=۱=۶-a\Rightarrow a=۵$

ریاضی - ۹۶

۲۰۸۴- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع به‌صورت $\{x|ax+b>۰\}$ است. جواب نامعادلهٔ اخیر به‌صورت $(-\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ تعریف شده است، پس $-\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲b$ (۱)

از طرف دیگر، $f(۴)=۲\Rightarrow\log_۳(۴a+b)=۲\Rightarrow۴a+b=۹$ (۲)

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۱$. به این ترتیب

$$f(x)=\log_۳(۲x+۱)$$

و در نتیجه $f(-\frac{۴}{۹})=\log_۳(-\frac{۸}{۹}+۱)=\log_۳\frac{۱}{۹}=-۲$.

ریاضی - ۹۴

۲۰۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\sqrt[۳]{(\frac{۵}{۱۰})^۲}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{۲})^۲}=۲^{-\frac{۲}{۳}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A=\log_۸(۲\sqrt[۳]{۰/۲۵})=\log_{۲^۳}(۲\times۲^{-\frac{۲}{۳}})=\log_{۲^۳}۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\log_۲۲=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین $\log_۴(\frac{۱}{A}-۱)=\log_۴(۹-۱)=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$

ریاضی - ۹۰

۲۰۸۶- گزینهٔ ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log((۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵}))$$

$$=\log(۳۶-۲۰)=\log۱۶=۴\log۲=۴k$$

تجربی - ۹۰

۲۰۸۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>۲$. معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\log(x-۲)=\log(x+۱۰)\Rightarrow\log(x-۲)^۲=\log(x+۱۰)$$

$$(x-۲)^۲=x+۱۰\Rightarrow x^۲-۵x-۶=۰\Rightarrow x=-۱\text{ (غ.ق.ق.)}\ ,\ x=۶$$

بنابراین $\log_۴(x+۲)=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$.

ریاضی - ۸۵

۲۰۸۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>\frac{۵}{۳}$. از معادلهٔ داده شده مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_۵(۲x-۱)+\log_۵(۳x-۵)=۱\Rightarrow\log_۵((۲x-۱)(۳x-۵))=۱$$

$$(۲x-۱)(۳x-۵)=۵\Rightarrow۶x^۲-۱۳x=۰\Rightarrow x=۰\text{ (غ.ق.ق.)}\ ,\ x=\frac{۱۳}{۶}$$

بنابراین $\log_۲(۶x+۳)=\log_۲(۱۳+۳)=\log_۲۲^۴=۴$.

ریاضی - ۸۶

۲۰۸۹- گزینهٔ ۳ مقدار x را از معادلهٔ داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)\Rightarrow\log_۳(x^۲-۱)-\log_۳(x+۳)=۱$$

$$\log_۳(\frac{x^۲-۱}{x+۳})=۱\Rightarrow\frac{x^۲-۱}{x+۳}=۳\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۲\end{cases}$$

اگر $x=-۲$، آن‌گاه $x-۳<۰$ و $\log_۴(x-۳)$ تعریف نمی‌شود و اگر $x=۵$، آن‌گاه $\log_۴(x-۳)=\log_۴۲=\frac{۱}{۲}$.

ریاضی - ۸۸

۲۰۹۰- گزینهٔ ۳ از معادلهٔ $\log y=۲\log۳+\log x$ به‌دست می‌آید

$$\log y-\log x=\log۹\Rightarrow\log\frac{y}{x}=\log۹\Rightarrow\frac{y}{x}=۹\Rightarrow y=۹x$$

در معادلهٔ $۲^{x-۷}\times۴^{x+y}=۱$ به جای y قرار می‌دهیم $۹x$، در نتیجه

$$۲^{x-۷}\times۴^{x+۹x}=۱\Rightarrow۲^{x-۷}\times۲^{۲۰x}=۱\Rightarrow۲^{۲۱x-۷}=۱$$

$$۲۱x-۷=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۳$$

تجربی - ۹۶

۲۰۹۱- گزینهٔ ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow۳^{b-a}=۹=۳^۲\Rightarrow b-a=۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$، پس

$$۳^{۲a+b}=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\Rightarrow۲a+b=-۱\quad(۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۱$ و $b=۱$. پس $f(x)=۳^{-x+۱}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۲۷)=m$.

در این صورت

$$f(m)=۲۷\Rightarrow۳^{-m+۱}=۲۷\Rightarrow-m+۱=۳\Rightarrow m=-۲$$

ریاضی - ۹۵

۲۰۹۲- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(۰)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ab^۰=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲b^۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow b^۲=۱۶$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b=۴$ و $f(x)=\frac{۳}{۲}\times۴^x$.

بنابراین

$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times۸=۱۲$$

تجربی - ۹۱

۲۰۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطهٔ $(5,11)$ و $(21,15)$ می‌گذرد، پس $f(5)=11$ و $f(21)=15$. بنابراین

$$f(5)=a+\log_2(15+b)^2=11\Rightarrow a+2\log_2(15+b)=11$$

$$\log_2(15+b)=\frac{11-a}{2}$$

$$f(21)=a+\log_2(63+b)^2=15\Rightarrow a+2\log_2(63+b)=15$$

$$\log_2(63+b)=\frac{15-a}{2}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_2(63+b)-\log_2(15+b)=2\Rightarrow\log_2\left(\frac{63+b}{15+b}\right)=2$$

$$\frac{63+b}{15+b}=4\Rightarrow 63+b=60+4b\Rightarrow 3b=3\Rightarrow b=1$$

بنابراین

$$a+\log_2(15+1)^2=11\Rightarrow a=3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۹۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-1,0)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(1,-1)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-1)=0\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)=0\Rightarrow -a+b=1 \qquad (1)$$

$$f(1)=-1\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}(a+b)=-1\Rightarrow a+b=2 \qquad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی- ۹۴

۲۰۹۵- گزینهٔ ۴ از معادلهٔ داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)\Rightarrow\log(x-2)+\log(x-4)=\log 4$$

$$\log((x-2)(x-4))=\log 4\Rightarrow(x-2)(x-4)=4$$

$$x^2-6x+4=0\Rightarrow x=3-\sqrt{5}\ \ (\text{غ.ق.ق.}),\ x=3+\sqrt{5}$$

بنابراین $\log_5(x-3)=\log_5(3+\sqrt{5}-3)=\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$.

ریاضی - ۸۷

۲۰۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $A^2=(3^a)^2=3^{2a}$، بنابراین

$$\log_3(9A^2)=\log_3(3^2\times 3^{2a})=\log_3 3^{(2+2a)}$$

$$=(2+2a)\log_3 3=2+2a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_3 A=a$. پس

$$\log_3(9A^2)=\log_3(3^2A^2)=\log_3(3A)^2=2\log_3(3A)$$

$$=2(\log_3 3+\log_3 A)=2(1+a)=2+2a$$

ریاضی - ۹۱

۲۰۹۷- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x(3x+8)=2-\log_x(x-6)\Rightarrow\log_x(3x+8)+\log_x(x-6)=2$$

$$\log_x((3x+8)(x-6))=2\Rightarrow(3x+8)(x-6)=x^2$$

$$3x^2-10x-48=x^2\Rightarrow x^2-5x-24=0$$

$$(x-8)(x+3)=0\Rightarrow x=-3,\ x=8$$

به‌ازای $x=-3$ عبارت‌های $\log_x(x-6)$ و $\log_x(3x+8)$ بی‌معنی هستند، بنابراین $x=8$ و مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ برابر است با

$$\log_4 x=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی- ۹۳

۲۰۹۸- گزینهٔ ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_3(2x^2+1)-\log_3(x+2)=1\Rightarrow\log_3\frac{2x^2+1}{x+2}=1\Rightarrow\frac{2x^2+1}{x+2}=3$$

$$2x^2+1=3x+6\Rightarrow 2x^2-3x-5=0\Rightarrow x=-1,\quad x=\frac{5}{2}$$

اکنون به محاسبهٔ مقدار $\log_8(2x-1)$ می‌پردازیم. با توجه به محدودهٔ تعریف این لگاریتم $(x>\frac{1}{2})$، تنها $x=\frac{5}{2}$ قابل قبول است، پس

$$\log_8(2x-1)=\log_8(2\times\frac{5}{2}-1)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

تجربی - ۹۵

۲۰۹۹- گزینهٔ ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^2-x-6)-\log(x-3)=\log(2x-5)$$

$$\log(\frac{x^2-x-6}{x-3})=\log(2x-5)\Rightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=2x-5$$

$$\xrightarrow{x\neq 3} x+2=2x-5\Rightarrow x=7$$

بنابراین $\log_4\sqrt[3]{x+1}=\log_4\sqrt[3]{8}=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$.

خارج از کشور تجربی- ۹۵

۲۱۰۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>0$ و $y>0$. توجه کنید که

$$\log_3 x+\log_3 y=2\Rightarrow\log_3 xy=2\Rightarrow xy=9$$

$$x^2+y^2=46\Rightarrow(x+y)^2-2xy=46\Rightarrow(x+y)^2-18=46$$

$$(x+y)^2=64\xrightarrow{x>0,y>0}x+y=8$$

بنابراین

$$\log_4(x+y)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}=1/5$$

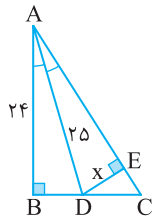
تجربی - ۸۹

فصل چهاردهم

۲۱۰۱- گزینهٔ ۴

۲۱۰۲- گزینهٔ ۴

۲۱۰۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD،

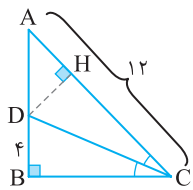


$$AD^۲=BA^۲+BD^۲\Rightarrow ۲۵^۲=۲۴^۲+BD^۲$$

$$BD^۲=۲۵^۲-۲۴^۲=(۲۵-۲۴)(۲۵+۲۴)=۴۹$$

بنابراین $BD=۷$. از طرف دیگر، چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $DE=DB=۷$.

۲۱۰۴- گزینهٔ ۳ چون D روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس فاصلهٔ آن از دو ضلع این زاویه برابر است. بنابراین با توجه به شکل مقابل $DH=DB=۴$. در نتیجه



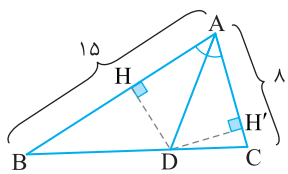
$$\text{مساحت}(ADC)=\frac{۱}{۲}DH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۲=۲۴$$

۲۱۰۵- گزینهٔ ۴ چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ A است، پس فاصلهٔ آن از AB و AC برابر است، یعنی با توجه به شکل زیر $DH=DH'$. بنابراین

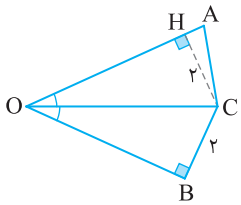
$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}=\frac{۱}{۲}DH\times AB+\frac{۱}{۲}DH'\times AC$$

$$۴۶=\frac{۱}{۲}DH'\times ۱۵+\frac{۱}{۲}DH'\times ۸\Rightarrow DH'=۴$$

در نتیجه $S_{ADC}=\frac{۱}{۲}DH'\times AC=۱۶$.



۲۱۰۶- گزینهٔ ۳ چون C روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد، پس فاصله‌اش تا ضلع‌های این زاویه برابر است، بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو $CH=CB=۲$. اکنون توجه کنید که

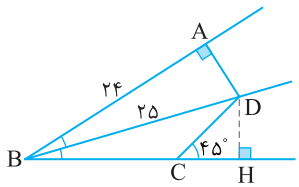


$$\text{مساحت}(AOC)-\text{مساحت}(BOC)=\frac{۱}{۲}CH\times OA-\frac{۱}{۲}CB\times OB$$

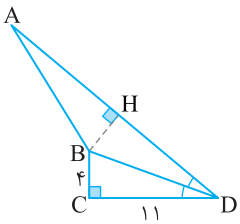
$$=\frac{۱}{۲}\times ۲\times OA-\frac{۱}{۲}\times ۲\times OB=OA-OB=۴$$

۲۱۰۷- گزینهٔ ۲ از نقطهٔ D بر امتداد BC عمود می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. چون D روی نیمساز زاویهٔ B است، پس $AD=DH$. توجه کنید که $AD=\sqrt{BD^۲-AB^۲}=\sqrt{۲۵^۲-۲۴^۲}=۷$. در نتیجه $DH=۷$. بنابراین در مثلث CHD، $DH=CH=۷$ (زیرا $\hat{C}=۴۵^\circ$) و مثلث CHD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است). دو مثلث ABD و HBD به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند.

بنابراین $BH=AB=۲۴$. در نتیجه $BC=BH-HC=۲۴-۷=۱۷$.



۲۱۰۸- گزینهٔ ۴ ارتفاع BH را در مثلث ABD رسم می‌کنیم. چون مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BCD و BHD همنهشت‌اند، پس $HD=CD=۱۱$ و $BH=BC=۴$. بنابراین $AH=۲۳-۱۱=۱۲$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHB،



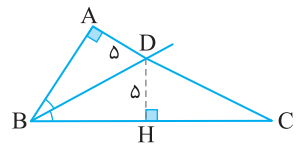
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۱۴۴+۱۶=۱۶۰\Rightarrow AB=۴\sqrt{۱۰}$$

۲۱۰۹- گزینهٔ ۴ به شکل زیر توجه کنید. چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ B است، پس $DA=DH=۵$. از طرف دیگر، چون مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و HBD همنهشت‌اند، پس $AB=HB$. بنابراین

$$BC-AB=۱۰\Rightarrow BC-HB=۱۰\Rightarrow HC=۱۰$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC،

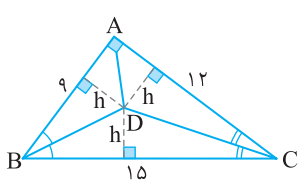
$$DC^۲=DH^۲+HC^۲=۲۵+۱۰۰=۱۲۵\Rightarrow DC=۵\sqrt{۵}$$



۲۱۱۰- گزینهٔ ۲ چون D روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AB و BC برابر است. همین‌طور، چون D روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AC و BC برابر است. فرض کنید این فاصله برابر h باشد. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC^۲=AB^۲+AC^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵$. پس $BC=۱۵$. مساحت مثلث ABC از یک طرف برابر است با $\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۱۲=۵۴$ و از طرف دیگر برابر است با مجموع مساحت‌های سه مثلث ADB، BDC و ADC:

$$\frac{۱}{۲}h\times ۹+\frac{۱}{۲}h\times ۱۵+\frac{۱}{۲}h\times ۱۲=۵۴\Rightarrow \frac{۱}{۲}h(۹+۱۵+۱۲)=۵۴\Rightarrow h=۳$$

بنابراین $\text{مساحت}(BDC)=\frac{۱}{۲}h\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۱۵=۲۲/۵$.



۲۱۱۱- گزینهٔ ۱ تساوی $\frac{m}{n}=\frac{۳}{۲}$ را طرفین - وسطین می‌کنیم

$$۲m=۳n\Rightarrow m=\frac{۳n}{۲}$$

بنابراین $\frac{۲m+n}{m-n}=\frac{۲(\frac{۳n}{۲})+n}{\frac{۳n}{۲}-n}=\frac{۴n}{\frac{۱}{۲}n}=۸$.

۲۱۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر فرض تست و ویژگی (چ) تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}=\frac{a+d}{b+c}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{a+d}{b+c}\Rightarrow\frac{b+c}{a+d}=۲$$

۲۱۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x\ ,\quad \frac{x}{۳}=\frac{z}{۵}\Rightarrow z=\frac{۵}{۳}x$$

بنابراین

$$۲x-۳y+z=-۲\Rightarrow ۲x-۳(\frac{۴}{۳}x)+\frac{۵}{۳}x=-۲\Rightarrow-\frac{۱}{۳}x=-۲\Rightarrow x=۶$$

۲۱۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}$ پس $y=\frac{۳}{۲}x$. از طرف دیگر،

$$\frac{x}{۲}=\frac{۲x-ky}{۷}\Rightarrow ۷x=۴x-۲ky\Rightarrow ۳x=-۲ky$$

$$۳x=-۲k(\frac{۳}{۲}x)\Rightarrow k=-۱$$

۲۱۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{a}{-۵}=c\Rightarrow a=-۵c\ ,\quad \frac{۴}{b}=c\Rightarrow b=\frac{۴}{c}$$

بنابراین

$$a+b+c=۰\Rightarrow-۵c+\frac{۴}{c}+c=۰\Rightarrow-۴c+\frac{۴}{c}=۰\Rightarrow-۴c^۲+۴=۰\Rightarrow c^۲=۱$$

۲۱۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\\ \frac{y}{z}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{z}{۴}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(\frac{z}{۴})=\frac{z}{۸}$$

بنابراین

$$x+y+z=۳۳\Rightarrow\frac{z}{۸}+\frac{z}{۴}+z=۳۳\Rightarrow\frac{z+۲z+۸z}{۸}=۳۳$$

$$\frac{۱۱z}{۸}=۳۳\Rightarrow z=۲۴$$

۲۱۱۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با توجه به فرض مسئله

$$a=۵k\ ,\quad b=۷k\ ,\quad c=۴k$$

بنابراین $\frac{۳a+۲b+mc}{۵۳}=\frac{۱۵k+۱۴k+۴mk}{۵۳}=\frac{۲۹k+۴mk}{۵۳}=k$. در نتیجه

$$۲۹k+۴mk=۵۳k\Rightarrow۴mk=۲۴k\Rightarrow m=۶$$

راه‌حل دوم عددهای ۳، ۲ و m را به‌ترتیب در صورت و مخرج نسبت‌های داده شده ضرب می‌کنیم: $\frac{۳a}{۳\times۵}=\frac{۲b}{۲\times۷}=\frac{mc}{m\times۴}=k$. اکنون با توجه به ویژگی (چ) تناسب،

$$\frac{۳a+۲b+mc}{۱۵+۱۴+۴m}=k\xrightarrow{\text{طبق فرض}}۲۹+۴m=۵۳\Rightarrow m=۶$$

۲۱۱۸- گزینهٔ ۴ اگر تناسب $\frac{۴x-y}{۲x+y}=\frac{۱}{۵}$ را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$۵(۴x-y)=۲x+y\Rightarrow۲۰x-۵y=۲x+y\Rightarrow۱۸x=۶y\Rightarrow۳x=y$$

بنابراین $\frac{۶x+y}{x+y}=\frac{۶x+۳x}{x+۳x}=\frac{۹x}{۴x}=\frac{۹}{۴}$.

۲۱۱۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$. در نتیجه $a=kb$ و $c=kd$. بنابراین $\frac{a+۷c}{b+۷d}=\frac{kb+۷kd}{b+۷d}=\frac{k(b+۷d)}{b+۷d}=k=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=k+k=۲k=۳$$

۲۱۲۰- گزینهٔ ۱ تناسب داده شده را تفضیل در صورت می‌کنیم:

$$\frac{۳a+۱۰-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷-(۷+۲b)}{۷+۲b}\Rightarrow\frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}$$

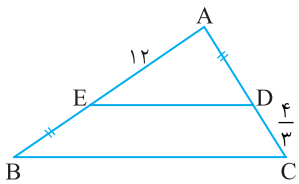
اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$a(۷+۲b)=b(۱۰+۲a)\Rightarrow۷a+۲ab=۱۰b+۲ab\Rightarrow۷a=۱۰b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

۲۱۲۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، چون $ED\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}\xrightarrow{AD=EB}\frac{۱۲}{EB}=\frac{EB}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow EB=۴$$

در نتیجه $AB=AE+EB=۱۲+۴=۱۶$.



۲۱۲۲- گزینهٔ ۱ چون $EF\|AB$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAB،

$$\frac{MF}{FA}=\frac{ME}{EB}\quad(۱)$$

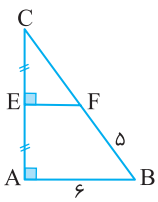
همین‌طور، $DF\|AC$ و بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAC،

$$\frac{MD}{DC}=\frac{MF}{FA}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{ME}{EB}=\frac{MD}{DC}\Rightarrow\frac{x}{۱}=\frac{۲}{x}\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

۲۱۲۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چون $EF\|AB$ و نقطهٔ E وسط ضلع AC است، پس بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB، نقطهٔ F نیز وسط ضلع BC است. بنابراین $CF=۵$. همچنین در مثلث CAB، EF میان‌خط است، پس $EF=\frac{AB}{۲}=۳$. به این ترتیب، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ EFC نتیجه می‌شود



$$FC^۲=EF^۲+EC^۲\Rightarrow۲۵=۹+EC^۲\Rightarrow EC=۴$$

بنابراین، مساحت مثلث CEF برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۶$.

۲۱۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون BEFD متوازی‌الاضلاع است، EF=BD=۶ و EF||BC، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۴+EB}=\frac{۶}{۸}$$

$$۳۲=۲۴+۶EB\Rightarrow EB=\frac{۴}{۳}$$

راه‌حل دوم چون FD||AB، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CF}{FA}=\frac{CD}{DB}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{FA}{CF}=۳\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون EF||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(۱)}\frac{۴}{EB}=۳\Rightarrow EB=\frac{۴}{۳}$$

۲۱۲۵- گزینهٔ ۳ چون EF||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{AF}{FC}=\frac{۶}{۲}=۳\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون FK||AD، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAD،

$$\frac{CF}{CA}=\frac{FK}{AD}\quad(۲)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{AF+FC}{FC}=\frac{۳+۱}{۱}\Rightarrow\frac{AC}{FC}=۴\Rightarrow\frac{FC}{AC}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین از تناسب (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{AD}\Rightarrow AD=۱۲$$

۲۱۲۶- گزینهٔ ۴ چون ED||AC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون EF||BD، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABD،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BD}\quad(۲)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{BE+EA}{EA}=\frac{۴+۳}{۳}\Rightarrow\frac{AB}{EA}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{۳}{۷}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{۳}{۷}=\frac{EF}{۸}\Rightarrow EF=\frac{۲۴}{۷}$$

۲۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که NM||HC. در نتیجه طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC، $\frac{BM}{BC}=\frac{NM}{HC}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$. بنابراین $\frac{BM}{BC}=\frac{BM}{BM+MC}=\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه x=۱۰.

۲۱۲۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید ۶EF=۴FC=۳AE=۱۲k. در نتیجه

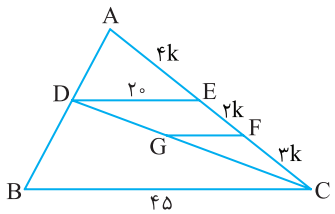
$$EF=۲k,\quad FC=۳k,\quad AE=۴k$$

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{DE}{۴۵}=\frac{۴k}{۹k}\Rightarrow DE=۲۰$$

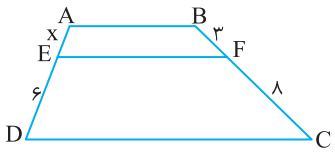
اکنون طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CED،

$$\frac{GF}{DE}=\frac{CF}{CE}=\frac{۳k}{۵k}\Rightarrow\frac{GF}{۲۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow GF=۱۲$$



۲۱۲۹- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

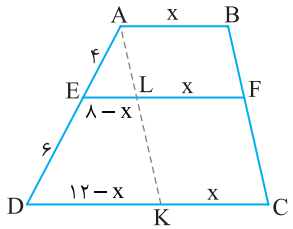
$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}$$



۲۱۳۰- گزینهٔ ۴ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چهارضلعی‌های ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس KC=LF=AB=x. اکنون توجه کنید که چون EL||DK، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{EL}{DK}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{۸-x}{۱۲-x}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$۴۰-۵x=۲۴-۲x\Rightarrow ۳x=۱۶\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}$$



۲۱۳۱- گزینهٔ ۲ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{۸}=\frac{۱۰}{BC}\Rightarrow BC=۱۶$$

۲۱۳۲- گزینهٔ ۲ چون EF||CD، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ADC،

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EC}\quad(۱)$$

چون DE||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}\quad(۳)$$

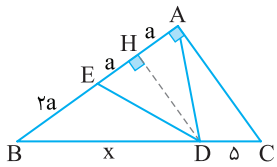
اگر فرض کنیم DF=x، تساوی (۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{۲}{x}=\frac{۲+x}{۱۲}\Rightarrow x^۲+۲x-۲۴=۰$$

$$(x-۴)(x+۶)=۰\Rightarrow x=۴$$

بنابراین AB=۲+۴+۱۲=۱۸.

۲۱۳۳- گزینهٔ ۲ مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ وارد بر قاعدهٔ AE در آن ارتفاع نیز هست (به شکل زیر توجه کنید). از طرف دیگر، اگر $AH=a$، آن‌گاه $EH=a$ و $BE=EA=۲a$، همچنین، چون $HD\|AC$، بنابر قضیهٔ تالس،



$$\frac{BH}{HA}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{۳a}{a}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x=۱۵$$

۲۱۳۴- گزینهٔ ۴ چون BFED لوزی است، پس

$$DE=EF=BF=DB=x$$

چون $DE\|BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۹}{۹+x}=\frac{x}{x+۴}\Rightarrow ۹x+۳۶=x^۲+۹x\Rightarrow ۳۶=x^۲\Rightarrow x=۶$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$.

۲۱۳۵- گزینهٔ ۳ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAB،

$$\frac{DK}{DB}=\frac{EK}{AB}=\frac{۳}{۴}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BDC،

$$\frac{BK}{BD}=\frac{KF}{DC}\quad(۲)$$

از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{DK}{DB}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{DB-DK}{DB}=\frac{۴-۳}{۴}\Rightarrow\frac{BK}{DB}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود $\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{DC}$، پس $DC=۸$.

تذکر برای به‌دست آوردن نسبت $\frac{BK}{DB}$ می‌توانیم از تناسب (۱) به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$\frac{DK}{DB}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{DK}{DB}+\frac{BK}{DB}=\frac{۳}{۴}+\frac{BK}{DB}\Rightarrow ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{BK}{DB}\Rightarrow\frac{BK}{DB}=\frac{۱}{۴}$$

۲۱۳۶- گزینهٔ ۴ فرض کنید $EF=x$. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{CF}{CB}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{EF}{DC}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{BF}{BC}\quad(۲)$$

با جمع کردن تناسب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{x}{۶}+\frac{x}{۳}=\frac{CF+BF}{BC}\Rightarrow\frac{x+۲x}{۶}=۱\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲$$

۲۱۳۷- گزینهٔ ۲ چون $ED\|AC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{ED}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{ED}{۲۰}=\frac{۳}{۱۵}\Rightarrow ED=۴$$

برای به‌دست آوردن طول ضلع بزرگ متوازی‌الاضلاع AEDF می‌توانیم یکی از دو روش زیر را به‌کار ببریم:

روش اول چون $FD\|AB$، پس باز هم بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{FD}{AB}=\frac{CD}{CB}\xrightarrow{AE=FD}\frac{FD}{FD+۴}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

$$۱۵FD=۱۲FD+۴۸\Rightarrow ۳FD=۴۸\Rightarrow FD=۱۶$$

روش دوم چون $ED\|AC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{۴}{EA}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow EA=۱۶$$

بنابراین محیط متوازی‌الاضلاع AEDF برابر است با

$$۲(ED+FD)=۲\times۲۰=۴۰$$

۲۱۳۸- گزینهٔ ۴ از نقطهٔ D خطی موازی FE رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در K قطع کند (شکل زیر را ببینید). طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BKD،

$$EF\|KD\Rightarrow\frac{BF}{BD}=\frac{EF}{KD}$$

در نتیجه

$$\frac{BF}{BF+FD}=\frac{۶}{KD}\quad(۱)$$

توجه کنید که با توجه به فرض سؤال،

$$\frac{BF}{FD}=۳\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BF}{BF+FD}=\frac{۳}{۳+۱}=\frac{۳}{۴}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $KD=۸$. اکنون طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

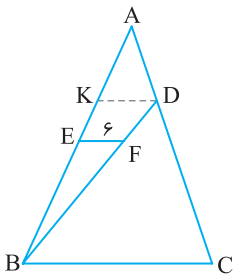
$$KD\|BC\Rightarrow\frac{KD}{BC}=\frac{AD}{AC}\quad(۳)$$

همچنین طبق فرض سؤال،

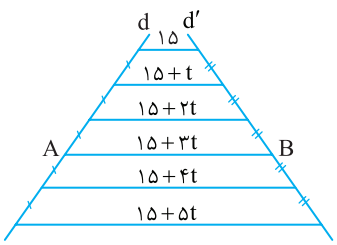
$$\frac{DC}{AD}=۵\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AD+DC}{AD}=\frac{۱+۵}{۱}=۶$$

$$\frac{AC}{AD}=۶\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می‌شود $\frac{۸}{BC}=\frac{۱}{۶}$، پس $BC=۴۸$.



۲۱۳۹- گزینهٔ ۱ چون پاره‌خط‌های افقی موازی‌اند، بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه، پاره‌خط‌هایی که روی خط d' تشکیل شده‌اند نیز برابر هستند، در نتیجه از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $۱۵+۵t=۷۵$، پس $t=۱۲$. بنابراین $AB=۱۵+۳۶=۵۱$.

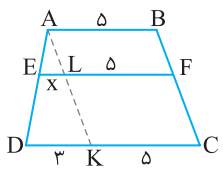


۲۱۴۰- گزینهٔ ۱ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس $KC=LF=AB=۵$، اکنون توجه کنید که چون $EL\|DK$، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AD}=\frac{EL}{DK} \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض سؤال، $\frac{AE}{DE}=\frac{۱}{۲}$ و اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{AE}{DE+AE}=\frac{۱}{۲+۱}\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{۱}{۳}$$



بنابراین از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۳}\Rightarrow x=۱$$

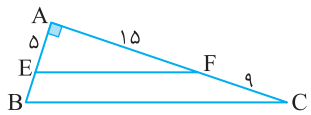
بنابراین $EF=۱+۵=۶$.

۲۱۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۵}{EB}=\frac{۱۵}{۹}\Rightarrow EB=\frac{۵\times۹}{۱۵}=۳$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

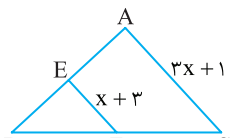
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۸^۲+۲۴^۲=۸^۲(۱+۳^۲)=۸^۲\times۱۰\Rightarrow BC=۸\sqrt{۱۰}$$



۲۱۴۲- گزینهٔ ۳ پاره‌خط EF میان‌خط است، پس طول آن برابر با نصف طول AC است. بنابراین

$$x+۳=\frac{۱}{۲}(۳x+۱)\Rightarrow x=۵$$

بنابراین $EF=۵+۳=۸$.



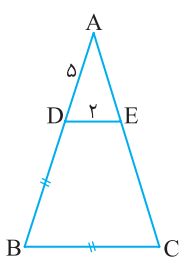
۲۱۴۳- گزینهٔ ۳ چون $DE\|BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

از طرف دیگر، $BC=DB$، در نتیجه

$$\frac{۵}{۵+DB}=\frac{۲}{DB}\Rightarrow ۵DB=۲DB+۱۰$$

بنابراین $DB=\frac{۱۰}{۳}$. اکنون بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{۵}{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۲}$$



۲۱۴۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید $AE=s$ و $AF=t$، (شکل زیر را ببینید). چون $EF\|BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{s}{s+x}=\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین

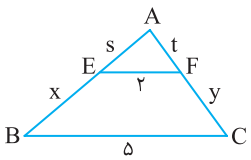
$$\frac{s}{s+x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵s=۲s+۲x\Rightarrow ۳s=۲x$$

$$\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵t=۲t+۲y\Rightarrow ۳t=۲y$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم:

$$۳(s+t)=۲(x+y)\xrightarrow{x+y=۹}s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن $s+t$، تناسب $\frac{s}{s+x}=\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}$ را تفضیل در مخرج می‌کنیم

$$\frac{s}{s+x-s}=\frac{t}{t+y-t}=\frac{۲}{۵-۲}\Rightarrow\frac{s}{x}=\frac{t}{y}=\frac{۲}{۳}$$

اکنون از خاصیت‌های تناسب (خاصیت چ) استفاده می‌کنیم

$$\frac{s}{x}=\frac{t}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{s+t}{x+y}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{x+y=۹}\frac{s+t}{۹}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.

راه‌حل سوم چون $EF\|BC$، پس مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست. در نتیجه، با نمادگذاری شکل راه‌حل اول،

$$\frac{s+t+۲}{s+x+۵+t+y}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{s+t+۲}{s+t+۹+۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.

۲۱۴۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چون $EF\|BD$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABD،

$$\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{BD}=\frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر، چون $FK\|AC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC}=\frac{DF}{DA}\Rightarrow\frac{x}{۱۲}=\frac{DF}{DA}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{۱۲-x}{۱۲}=\frac{DA-DF}{DA}=\frac{AF}{DA}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\frac{۱۲-x}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴(۱۲-x)=۳\times۱۲\Rightarrow x=۳$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن x، از تناسب (۱) به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AF}{AD}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AF}{AD}+\frac{FD}{AD}=\frac{۳}{۴}+\frac{FD}{AD}\Rightarrow ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{FD}{AD}\Rightarrow\frac{FD}{AD}=\frac{۱}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر چون $FK\|AC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC}=\frac{DF}{DA}\xrightarrow{(۱)}\frac{x}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=۳$$

۲۱۴۶- گزینهٔ ۲ از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABC و BAD استفاده می‌کنیم:

$$FH||BC\Rightarrow\frac{FH}{BC}=\frac{AF}{AB}$$
$$FE||AD\Rightarrow\frac{FE}{AD}=\frac{BF}{AB}$$

با جمع کردن دو تساوی بالا معلوم می‌شود که

$$\frac{FH}{BC}+\frac{FE}{AD}=\frac{AF+BF}{AB}=۱$$
$$\frac{۶}{BC}+\frac{۲}{۵}=۱$$
$$\frac{۶}{BC}=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow BC=۱۰$$

۲۱۴۷- گزینهٔ ۳ چون در لوزی همهٔ ضلع‌ها برابرند، پس

$$AD=AB=BC=CD=۶$$

از طرف دیگر، چون $FC||AD$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث EAD،

$$\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{ED}\Rightarrow\frac{FC}{۶}=\frac{۶}{۱۲}$$

پس $FC=۳$. بنابراین $BF=۶-۳=۳$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AFB،

$$AB^۲=AF^۲+FB^۲$$
$$۳۶=AF^۲+۹$$
$$AF=۳\sqrt{۳}$$

به این ترتیب، مساحت مثلث ABF برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AF\times BF=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

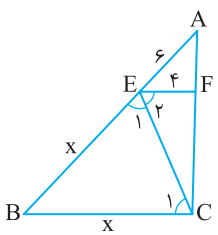
تذکر برای به‌دست آوردن FC، چون FC با AD موازی است و C وسط DE است، بنابر قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم F نیز وسط AE است، در نتیجه FC در مثلث EAD میان‌خط است پس می‌توان FC را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$FC=\frac{AD}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۲۱۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون $EF||BC$، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{E}_۲=\hat{C}_۱$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر، $\hat{E}_۲=\hat{E}_۱$، پس $\hat{E}_۱=\hat{C}_۱$. بنابراین مثلث EBC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $EB=BC=x$. اکنون توجه کنید که چون $EF||BC$، از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۶}{۶+x}=\frac{۴}{x}$$
$$۶x=۲۴+۴x\Rightarrow x=۱۲$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC، $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$.



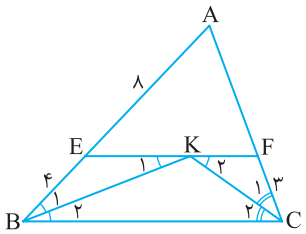
۲۱۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون $EF||BC$، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{K}_۱=\hat{B}_۲$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر، $\hat{B}_۲=\hat{B}_۱$، پس $\hat{K}_۱=\hat{B}_۱$، و در نتیجه مثلث BEK متساوی‌الساقین است، پس $EK=EB=۴$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $KF=FC=۳$، به این ترتیب $EF=۴+۳=۷$. اکنون توجه کنید که چون $EF||BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۸+۴}=\frac{۷}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{BC}\Rightarrow ۲BC=۲۱\Rightarrow BC=\frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۸}{۴}=\frac{AF}{۳}\Rightarrow AF=۶$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با $۸+۴+\frac{۲۱}{۲}+۳+۶=۳۱/۵$.

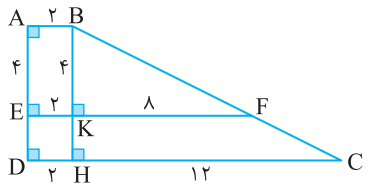


۲۱۵۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $AB||EF||DC$. از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در K و H قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC،

$$KF||CH\Rightarrow\frac{BK}{BH}=\frac{KF}{HC}\Rightarrow\frac{۴}{KH+۴}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow KH=۲$$

بنابراین $BH=۴+۲=۶$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC،

$$BC^۲=BH^۲+HC^۲=۶^۲+۱۲^۲=۶^۲\times۵\Rightarrow BC=۶\sqrt{۵}$$



۲۱۵۱- گزینهٔ ۲ زاویه‌های ACB و ECD متقابل به رأس هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های ACB و ECD متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۹}{۳}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۱۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در مثلث‌های ABD و CBA زاویهٔ B مشترک است و $B\hat{A}D=A\hat{C}B$. بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$، بنابراین $\frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{BC}$ در نتیجه $BC=۹\sqrt{۲}$. پس

$$DC=۹\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$$

۲۱۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\triangle ADE\sim\triangle ACB$ (ز ز). در نتیجه $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$، یعنی $\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۳+BD}$. بنابراین $BD=\frac{۱۱}{۳}$.

۲۱۵۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون $EF||BC$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{F}_1=\hat{C}$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHF و FKC که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

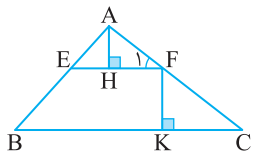
$$\frac{AF}{FC}=\frac{AH}{FK}=\frac{۲}{۳}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AF}{AF+FC}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{AF}{AC}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{۶}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=۱۵$$



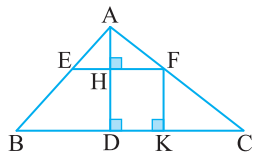
راه‌حل دوم از نقطهٔ H عمود HD را بر ضلع BC رسم می کنیم (شکل زیر را ببینید). واضح است که $FK=HD$. از طرف دیگر چون $EF||BC$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه هستند و AH و AD به‌ترتیب ارتفاع‌های آن‌ها هستند. از طرف دیگر

$$\frac{AH}{HD}=\frac{AH}{FK}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AH}{AH+HD}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{AH}{AD}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین نسبت تشابه نیز $\frac{۲}{۵}$ است، پس

نسبت تشابه این دو مثلث نیز $\frac{۲}{۵}$ است، در نتیجه

$$\frac{EF}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{۶}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=۱۵$$



۲۱۵۵- گزینهٔ ۴ چون $AB||DE$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}=\hat{E}$ و $\hat{B}=\hat{D}$. بنابراین مثلث‌های ABC و EDC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow\frac{۹}{ED}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow ED=۱۵$$

همین‌طور $\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$. اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{BC+DC}{DC}=\frac{۳+۵}{۵}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow\frac{۳۲}{DC}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow DC=۲۰$$

بنابراین محیط مثلث CDE برابر است با $۲۰+۱۰+۱۵=۴۵$.

۲۱۵۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید $A\hat{E}B=C\hat{E}D$ (زاویه‌های متقابل به رأس). همچنین $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. در نتیجه $\frac{AB}{CD}=\frac{۱۰}{x}=\frac{۱}{۲}$ پس $x=CD=۲۰$.

۲۱۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\hat{A}=\hat{A}$، بنابراین $\triangle ABC\sim\triangle AED$ (ض‌زض). در نتیجه $\frac{BC}{DE}=\frac{۱}{۲}$.

۲۱۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲}$ و $\hat{A}=\hat{A}$. در نتیجه، دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DE}{BC}=\frac{۶}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۱۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEF،

$$BF^۲=BE^۲+EF^۲=۱۶+۹=۲۵\Rightarrow BF=۵$$

از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و FBE که یک زاویهٔ حادهٔ مشترک دارند، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{\text{محیط}(FBE)}=\frac{AB}{FB}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{۱۲}=۲\Rightarrow\text{محیط}(ABC)=۲۴$$

۲۱۶۰- گزینهٔ ۴ چون $EF||BC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)}=(\frac{AE}{AB})^۲=(\frac{۲}{۵})^۲=\frac{۴}{۲۵}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)-\text{مساحت}(AEF)}=\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(BEFC)}=\frac{۴}{۲۵-۴}=\frac{۴}{۲۱}$$

۲۱۶۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل معلوم می‌شود

$$\triangle ADB\sim\triangle ABC\ (\text{ز ز})$$

بنابراین

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{AC}\Rightarrow AC=۹$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow۹^۲=۶^۲+BC^۲\Rightarrow BC=۳\sqrt{۵}$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC=۹\sqrt{۵}$.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB،

$$AB^۲=AD^۲+DB^۲\Rightarrow۶^۲=۴^۲+DB^۲\Rightarrow DB=۲\sqrt{۵}$$

در نتیجه $S_{ADB}=\frac{۱}{۲}AD\times DB=۴\sqrt{۵}$. اکنون توجه کنید که مثلث‌های ADB و ABC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}}=(\frac{AB}{AD})^۲\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{۴\sqrt{۵}}=(\frac{۶}{۴})^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow S_{ABC}=۹\sqrt{۵}$$

۲۱۶۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $DC=x$. مثلث‌های ABD و CBA به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_1=\hat{C}$ و زاویهٔ B مشترک). بنابراین

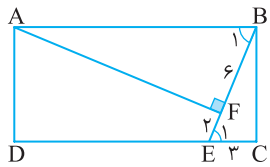
$$\frac{BD}{BA}=\frac{AB}{CB}\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{۸}{۴+x}\Rightarrow۱۶=۴+x\Rightarrow x=۱۲$$

۲۱۶۳- گزینهٔ ۲ مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و EFC که یک زاویهٔ حادهٔ مشترک دارند، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{EF}\Rightarrow\frac{AC}{۶}=\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow AC=۱۵$$

۲۱۶۴- گزینهٔ ۲ چون $AB\|CD$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{B}_۱=\hat{E}_۱$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AFB و BCE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{BE}=\frac{BF}{EC}\Rightarrow\frac{AB}{۸}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow AB=۱۶$$



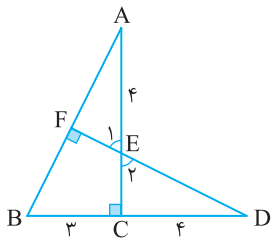
۲۱۶۵- گزینهٔ ۲ در مثلث AEF، $\hat{A}+\hat{E}_۱=۹۰^\circ$ و در مثلث DCE، $\hat{D}+\hat{E}_۲=۹۰^\circ$ از طرف دیگر $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$، پس $\hat{A}=\hat{D}$. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و DEC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{۳}{EC}=\frac{۴+EC}{۴}$$

$$۱۲=۴EC+EC^۲$$

$$EC^۲+۴EC-۱۲=۰$$

$$(EC-۲)(EC+۶)=۰\Rightarrow EC=۲$$



۲۱۶۶- گزینهٔ ۴ چون $DE\|AB$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های DEF و BAF متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DE}{BA}=\frac{DF}{BF}\Rightarrow\frac{x}{BA}=\frac{۲}{۹}\quad (۱)$$

از طرف دیگر، چون $DC\|AB$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های DCK و BAK متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DC}{BA}=\frac{DK}{BK}\Rightarrow\frac{x+y}{BA}=\frac{۶}{۵}\quad (۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{x}{x+y}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{۹}{۶}}{۲۷}$$

۲۱۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $A\hat{E}B=C\hat{E}D$ (زاویه‌های متقابل به رأس). همچنین $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{۱}{۳}$. بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. در نتیجه

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۱۰}{x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۳۰$$

۲۱۶۸- گزینهٔ ۱ چون $AB\|CD$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $B\hat{A}C=A\hat{C}D$. همچنین $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{DC}=\frac{۳}{۴}$. بنابراین

$$\triangle ABC\sim\triangle CAD\quad (ض‌زض)$$

در نتیجه

$$\frac{BC}{AD}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow BC=\frac{۳}{۴}AD=\frac{۳}{۴}(۲۴)=۱۸$$

۲۱۶۹- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DAC به حالت (ز ز) متشابه‌اند، زیرا $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و زاویهٔ C در آن‌ها مشترک است. بنابراین

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{\text{محیط}(DAC)}=\frac{AC}{DC}\Rightarrow\frac{\text{محیط}(ABC)}{۱۵}=\frac{۶}{۵}\Rightarrow\text{محیط}(ABC)=۱۸$$

۲۱۷۰- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویهٔ B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(ABC)}{\text{مساحت}(DBE)}=\left(\frac{AB}{DB}\right)^۲\quad (۱)$$

از طرف دیگر،

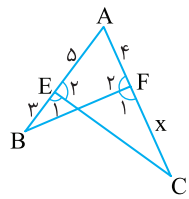
$$\text{مساحت}(ABC)=\text{مساحت}(ACDE)+\text{مساحت}(DBE)$$
$$=۲\,\text{مساحت}(DBE)$$

در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود

$$۲=\left(\frac{۸}{x}\right)^۲\Rightarrow۲=\frac{۶۴}{x^۲}\Rightarrow x^۲=۳۲\Rightarrow x=۴\sqrt{۲}$$

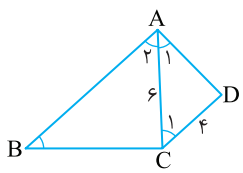
۲۱۷۱- گزینهٔ ۴ فرض کنید $CF=x$. چون $\hat{E}_۱=\hat{F}_۱$، پس زاویه‌های $E_۲$ و $F_۲$ نیز که مکمل این دو زاویهٔ برابر هستند، برابرند (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های ABF و ACE به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{F}_۲=\hat{E}_۲$ و زاویهٔ A مشترک). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{۸}{۴+x}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow۴۰=۱۶+۴x\Rightarrow x=۶$$



۲۱۷۲- گزینهٔ ۲ چون $AB\|CD$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}_۲=\hat{C}_۱$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های ABC و CAD به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_۲=\hat{C}_۱$ و $\hat{B}=\hat{A}_۱$). در نتیجه

$$\frac{AB}{CA}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{۶}=\frac{۶}{۴}\Rightarrow AB=۹$$



۲۱۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE،

$$DE^۲=CE^۲+CD^۲\Rightarrow ۵^۲=CE^۲+۳^۲\Rightarrow CE=۴$$

مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABE و DCE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند (زاویهٔ E)، متشابه‌اند. بنابراین

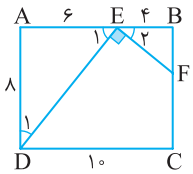
$$\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}\Rightarrow\frac{۶}{۳}=\frac{BE}{۴}\Rightarrow BE=۸$$

بنابراین $BC=۸+۴=۱۲$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۶^۲+۱۲^۲=۶^۲(۱+۲^۲)=۶^۲\times۵\Rightarrow AC=۶\sqrt{۵}$$

۲۱۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $BE=۱۰-۶=۴$. از طرف دیگر، $\hat{E}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ$ و $\hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۹۰^\circ$، پس $\hat{D}_۱=\hat{E}_۲$ (شکل زیر را ببینید).

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE و BEF که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه



$$\frac{AE}{BF}=\frac{AD}{BE}\Rightarrow\frac{۶}{BF}=\frac{۸}{۴}\Rightarrow BF=۳$$

در نتیجه $FC=۸-۳=۵$.

۲۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$، $\frac{BC}{CD}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ و $A\hat{B}C=A\hat{C}D$. بنابراین مثلث‌های ABC و ACD متشابه‌اند (ض‌زض). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{x}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۱۷۶- گزینهٔ ۳ در دو مثلث ABC و EDC، $\frac{AC}{EC}=\frac{۱۲}{۳}=۴$ و $\frac{BC}{DC}=\frac{۱۶}{۴}=۴$. چون زاویهٔ C هم در این دو مثلث مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض‌زض)، بنابراین

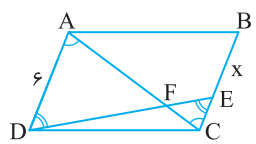
$$\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow\frac{۱۲}{۳}=\frac{AB}{۶}\Rightarrow AB=۲۴$$

۲۱۷۷- گزینهٔ ۳ چون $AD\|BC$، پس مثلث‌های ADF و CEF متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

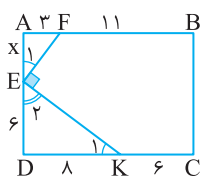
$$\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CE}\xrightarrow{\frac{AF}{CF}=۳}۳=\frac{۶}{CE}\Rightarrow CE=۲$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس

$$AD=BC\Rightarrow۶=x+۲\Rightarrow x=۴$$



۲۱۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون $DC=AB=۱۴$، پس $AF=۳$. از طرف دیگر، چون $\hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۹۰^\circ$ و $\hat{K}_۱+\hat{E}_۲=۹۰^\circ$، پس $\hat{E}_۱=\hat{K}_۱$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AEF و DKE متشابه‌اند (ز ز). بنابراین



$$\frac{AE}{DK}=\frac{AF}{DE}\Rightarrow\frac{x}{۸}=\frac{۳}{۶}\Rightarrow x=۴$$

۲۱۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AEF\sim\triangle AMN\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{AE}{AM})^۲=(\frac{۵}{۶})^۲=\frac{۲۵}{۳۶}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEF}+۳۳}=\frac{۲۵}{۳۶}\Rightarrow S_{AEF}=۷۵$$

همچنین بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AEF\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{AE}{AB})^۲$$

$$\frac{۷۵}{S_{ABC}}=(\frac{۵}{۸})^۲\Rightarrow S_{ABC}=۱۹۲$$

۲۱۸۰- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ اساسی تشابه چون مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{AF}{AN})^۲=(\frac{۳}{۸})^۲=\frac{۹}{۶۴}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}-S_{AEF}}=\frac{۹}{۶۴-۹}\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{EFNM}}=\frac{۹}{۵۵}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{AF}{AC})^۲=(\frac{۳}{۱۰})^۲=\frac{۹}{۱۰۰}\quad(۲)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{EFNM}}{S_{ABC}}=\frac{۵۵}{۱۰۰}=۰/۵۵$$

۲۱۸۱- گزینهٔ ۱ چون $AB\|CD$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{B}=\hat{C}$. بنابراین مثلث‌های ABE و DCE متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

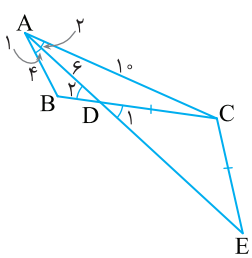
$$\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{BE}{CE}$$

اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{۵+۲}{۲}=\frac{BE+CE}{CE}\Rightarrow\frac{۷}{۲}=\frac{BC}{CE}\Rightarrow\frac{۷}{۲}=\frac{۲۸}{CE}\Rightarrow CE=۸$$

۲۱۸۲- گزینهٔ ۳ چون $CD=CE$، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{D}_۱=\hat{E}$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$ (متقابل به رأس)، پس $\hat{D}_۲=\hat{E}$. بنابراین مثلث‌های ABD و ACE به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و $\hat{D}_۲=\hat{E}$). در نتیجه

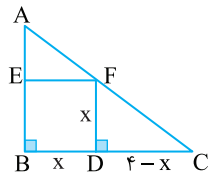
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\frac{۴}{۱۰}=\frac{۶}{۶+DE}\Rightarrow DE=۹$$



۲۱۸۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول ضلع مربع BEFD برابر x باشد. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و FDC که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند (زاویهٔ C)، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

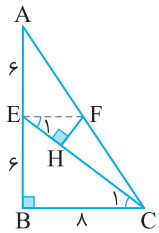
$$\frac{AB}{FD}=\frac{BC}{DC}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{۴}{۴-x}\Rightarrow ۳(۴-x)=۴x\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۷}$$

بنابراین محیط مربع BEFD برابر است با $۴x=\frac{۴۸}{۷}$.



۲۱۸۴- گزینهٔ ۳ چون نقطه‌های E و F به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند، در نتیجه EF در مثلث ABC میان‌خط است، پس $EF=\frac{BC}{۲}=۴$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت EF با BC موازی است. بنابراین طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{E}_۱=\hat{C}_۱$. اکنون توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ EFH و CEB متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{EF}{CE}=\frac{FH}{EB}\xrightarrow{CE=۱۰\ (\text{فیثاغورس})}\frac{۴}{۱۰}=\frac{FH}{۶}\Rightarrow FH=۲/۴$$



۲۱۸۵- گزینهٔ ۱ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث DEC،

$$FG\|EC\Rightarrow\frac{DF}{FE}=\frac{DG}{GC}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{DG}{۹}\Rightarrow DG=۶$$

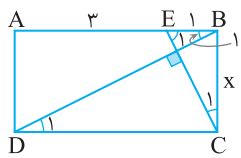
بنابر قضیهٔ اساسی تشابه $\triangle AEB\sim\triangle DEC$، پس

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EB}{EC}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}=\frac{۳}{EC}\Rightarrow EC=۷/۵$$

در نتیجه با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DEC،

$$\frac{GF}{EC}=\frac{DG}{DC}\Rightarrow\frac{GF}{۷/۵}=\frac{۶}{۱۵}\Rightarrow GF=۳$$

۲۱۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون $AD\|BC$، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$ (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر،



$$\begin{cases}\hat{B}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{C}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$$

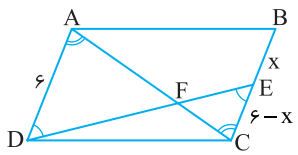
در نتیجه $\hat{C}_۱=\hat{D}_۱$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BEC و CBD که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲$$

۲۱۸۷- گزینهٔ ۲ چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس $AD=x+۶-x=۶$. از طرف دیگر چون $AD\|BC$، پس مثلث‌های ADF و CEF متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CE}\xrightarrow{\frac{AF}{CF}=۲}۲=\frac{۶}{CE}\Rightarrow CE=۳$$

در نتیجه $x=۶-x=۳$، پس $x=۳$.



۲۱۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{EC}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{DC}{CB}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین مثلث‌های EDC و ACB متشابه‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه

$$A\hat{B}C=D\hat{C}E=۳۵^\circ$$

به این ترتیب، $B\hat{A}C=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۳۵^\circ)=۸۰^\circ$.

۲۱۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AMF\sim\triangle ANC\Rightarrow\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}}=(\frac{AM}{AN})^۲$$

$$\triangle AEM\sim\triangle ABN\Rightarrow\frac{S_{AEM}}{S_{ABN}}=(\frac{AM}{AN})^۲$$

بنابراین

$$\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}}=\frac{S_{AEM}}{S_{ABN}}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۸+۳۲}=\frac{S_{AEM}}{S_{AEM}+۴۸}\Rightarrow S_{AEM}=۲۷$$

۲۱۹۰- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویهٔ B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}\,(ABC)}{\text{مساحت}\,(DBE)}=(\frac{AB}{DB})^۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت}\,(ABC)=\text{مساحت}\,(DBE)+\text{مساحت}\,(ACDE)$$

$$=\text{مساحت}\,(DBE)+\frac{۳}{۲}(DBE)\,\text{مساحت}=\frac{۵}{۲}(DBE)\,\text{مساحت}$$

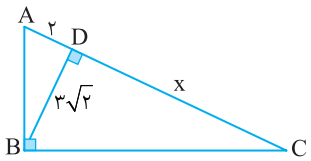
در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود $\frac{۵}{۲}=(\frac{AB}{۱۰})^۲$، پس $AB=۵\sqrt{۱۰}$.

۲۱۹۱- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=CH\times CB=۶\times۹\Rightarrow AC=۳\sqrt{۶}$$

۲۱۹۲- گزینهٔ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BD^۲=AD\times DC\Rightarrow(۳\sqrt{۲})^۲=۲x\Rightarrow x=۹$$



۲۱۹۳- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۱۲=x(۲x+۲)\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲$$

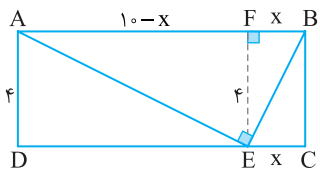
پس $BC=۲x+۲=۶$.

۲۱۹۴- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $CE=x$. از E پاره‌خط EF را عمود بر AB رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت $FB=x$، $FA=۱۰-x$ و $EF=۴$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB، بنابر رابطه‌های طولی،

$$EF^۲=FB\times FA\Rightarrow ۴^۲=x(۱۰-x)\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۶=۰$$

$$(x-۲)(x-۸)=۰\Rightarrow x=۲,\ x=۸$$

چون $CE<DE$، پس $CE=x=۲$.



۲۱۹۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر مثلث را به دو مثلث کوچک متشابه تقسیم می‌کند. بنابراین مثلث‌های AHB و CHA متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{۲BH}{AC}=\frac{BH}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

به این ترتیب، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC،

$$AC^۲=AH^۲+HC^۲\Rightarrow ۴^۲\times۳=۲^۲\times۳+HC^۲$$

$$HC^۲=۴^۲\times۳-۲^۲\times۳=۳۶\Rightarrow HC=۶$$

راه‌حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۴BH^۲=BH\times BC\Rightarrow ۴BH=BC$$

$$۴BH-BH=BC-BH\Rightarrow ۳BH=CH$$

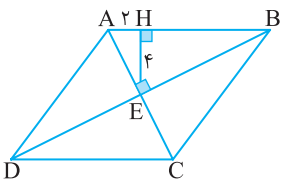
از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^۲=BH\times HC\Rightarrow ۱۲=\frac{CH}{۳}\times CH\Rightarrow CH^۲=۳۶\Rightarrow CH=۶$$

۲۱۹۶- گزینهٔ ۲ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AEB قائم‌الزاویه است. در این مثلث قائم‌الزاویه از رابطه‌های طولی نتیجه می‌شود

$$EH^۲=AH\times HB\Rightarrow ۱۶=۲\times HB\Rightarrow HB=۸$$

بنابراین $AB=۲+۸=۱۰$.



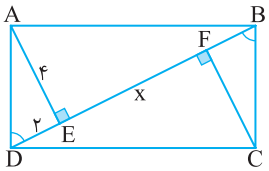
۲۱۹۷- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AH^۲=HB\times HC\Rightarrow ۱۶=HB\times۸\Rightarrow HB=۲$$

همین‌طور در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC،

$$DH'^۲=H'B\times H'C=۴\times۶\Rightarrow DH'=۲\sqrt{۶}$$

۲۱۹۸- گزینهٔ ۳ چون $AD\|BC$، پس $C\hat{B}F=A\hat{D}E$، بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AED و CFB همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $BF=DE=۲$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، بنابر رابطه‌های طولی،



$$AE^۲=DE\times EB\Rightarrow ۱۶=۲\times(x+۲)\Rightarrow x=۶$$

۲۱۹۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،

$$HC^۲=CK\times CA\Rightarrow y^۲=۷\times۱۰=۷۰\Rightarrow y=\sqrt{۷۰}$$

همین‌طور در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow ۱۰۰=\sqrt{۷۰}\times(x+\sqrt{۷۰})$$

$$۱۰۰=\sqrt{۷۰}x+۷۰\Rightarrow\sqrt{۷۰}x=۳۰\Rightarrow x=\frac{۳۰}{\sqrt{۷۰}}$$

بنابراین $xy=۳۰$.

راه‌حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AH^۲=BH\times HC\Rightarrow AH^۲=xy\quad(۱)$$

برای به‌دست آوردن AH، از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ HAC استفاده می‌کنیم

$$AH^۲=AK\times AC\Rightarrow AH^۲=۳\times۱۰=۳۰$$

در نتیجه با استفاده از تساوی (۱)، $xy=۳۰$.

۲۲۰۰- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ FDC، بنابر رابطه‌های طولی،

$$FC^۲=EC\times DC\xrightarrow{DC=۲EC}FC^۲=۲EC^۲$$

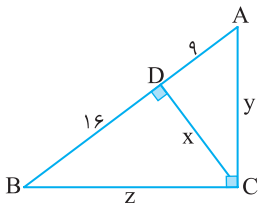
همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $AD^۲=BD\times DC$ یعنی $۱۶=۲\times DC$، بنابراین $DC=۸$. در نتیجه $EC=\frac{DC}{۲}=۴$. بنابراین

$$FC^۲=۲EC^۲=۲\times۴^۲\Rightarrow FC=۴\sqrt{۲}$$

۲۲۰۱- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$CD^۲=BD\times AD\Rightarrow x^۲=۱۶\times۹=۱۴۴\Rightarrow x=۱۲$$

همچنین



$$y^۲=AD\times AB=۹\times۲۵\Rightarrow y=۱۵$$

و

$$z^۲=BD\times AB=۱۶\times۲۵\Rightarrow z=۲۰$$

در نتیجه $x+y+z=۴۷$.

۲۲۰۲- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BH^۲=AH\times CH\Rightarrow(x+۴)^۲=۹(x+۲)$$

$$x^۲+۸x+۱۶=۹x+۱۸\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲,\ x=-۱$$

به این ترتیب اگر $x=۲$، آن‌گاه

$$\text{مساحت}(ABC)=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}(۶)(۱۳)=۳۹$$

و اگر $x=-۱$، آن‌گاه $\text{مساحت}(ABC)=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}(۳)(۱۰)=۱۵$.

بنابراین مساحت مثلث ABC می‌تواند برابر ۱۵ یا ۳۹ باشد.

۲۲۰۳- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD،

$$CH^۲=HB\times HD=\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=۴$$

بنابراین $CH=۲$. در نتیجه

$$\text{مساحت}(BCD)=\frac{۱}{۲}CH\times BD=\frac{۱}{۲}(۲)(\sqrt{۲}+\sqrt{۸})=\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

به این ترتیب $\text{مساحت}(ABCD)=۲\times(BCD)=۶\sqrt{۲}$.

۲۲۰۴- گزینهٔ ۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE، بنابر رابطه‌های طولی،

$$DH^۲=HB\times HE=۹\times۴=۳۶$$

پس $DH=۶$. بنابراین $AH=۱۲+۶=۱۸$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC، بنابر رابطه‌های طولی،

$$AH^۲=HB\times HC\Rightarrow ۱۸^۲=۹(۴+x)\Rightarrow x=۳۲$$

۲۲۰۵- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۲۷+۹=۳۶$$

بنابراین $AC=۶$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BH\times AC=AB\times BC\Rightarrow x\times۶=۳\sqrt{۳}\times۳\Rightarrow x=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

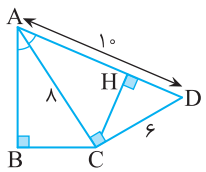
۲۲۰۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD،

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲\Rightarrow ۱۰۰=۶۴+CD^۲\Rightarrow CD=۶$$

ارتفاع CH را در مثلث CAD رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون نقطهٔ C روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $CB=CH$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD،

$$AC\times CD=CH\times AD\Rightarrow ۸\times۶=CH\times۱۰\Rightarrow CH=۴/۸$$

بنابراین $CB=CH=۴/۸$.



راه‌حل دوم چون $C\hat{A}B=D\hat{A}C$، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DAC و CAB متشابه هستند (ز ز). بنابراین

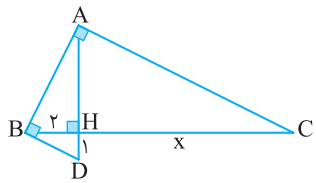
$$\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AC}\xrightarrow{CD=۶}\frac{۶}{BC}=\frac{۱۰}{۸}\Rightarrow BC=۴/۸$$

۲۲۰۷- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD،

$$BH^۲=AH\times HD\Rightarrow ۴=AH\times۱\Rightarrow AH=۴$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

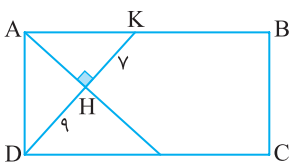
$$AH^۲=BH\times HC\Rightarrow ۱۶=۲\times x\Rightarrow x=۸$$



۲۲۰۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAK،

$$AD^۲=DH\times DK=۹\times۱۶=۱۴۴$$

بنابراین $AD=۱۲$.



۲۲۰۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $BH=a$ و $HE=b$، در این صورت

$$a+b=BE=۲EC\Rightarrow EC=\frac{a+b}{۲}$$

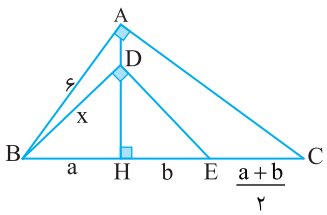
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۳۶=a(a+b+\frac{a+b}{۲})=\frac{۳}{۲}a(a+b)$$

$$a(a+b)=۲۴$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE،

$$BD^۲=BH\times BE\Rightarrow x^۲=a(a+b)=۲۴\Rightarrow x=۲\sqrt{۶}$$



۲۲۱۰- گزینهٔ ۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC^۲=AD^۲+DC^۲=۴+۱۶=۲۰\Rightarrow AC=۲\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، بنابر رابطه‌های طولی

$$DE\times AC=AD\times DC\Rightarrow DE\times۲\sqrt{۵}=۲\times۴\Rightarrow DE=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

۲۲۱۱- گزینهٔ ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

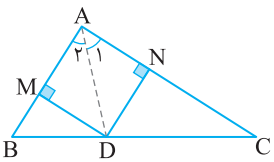
$$S_{ABC}=S_{ADC}+S_{ABD}\Rightarrow\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{DN\times AC}{۲}+\frac{DM\times AB}{۲}$$

هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM=DN=x$. در نتیجه

$$۳\times۷=x\times۷+x\times۳\Rightarrow ۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$

توجه کنید که $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$، پس مثلث ADN قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. یعنی $AN=DN=x$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADN،

$$AD^۲=AN^۲+DN^۲=۲x^۲\Rightarrow AD=x\sqrt{۲}=۲/۱\sqrt{۲}$$



تجربی - ۹۵

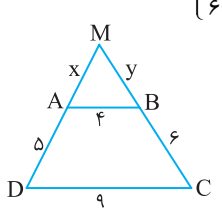
۲۲۱۲- گزینهٔ ۴ محل تلاقی امتداد ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD را M می‌نامیم. با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث MDC،

$$AB\|CD\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{۴}{۹}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{۵+x}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹x=۴x+۲۰\Rightarrow x=۴\\ \frac{y}{۶+y}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹y=۲۴+۴y\Rightarrow y=۴/۸\end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با

$$P=x+y+۴=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$



تجربی - ۹۴

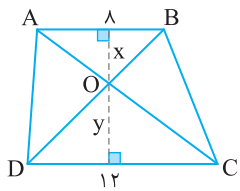
۲۲۱۳- گزینهٔ ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، پس

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x=۲y\\ x+y=۱۰\Rightarrow ۳x+۳y=۳۰\end{cases}\Rightarrow ۵y=۳۰\Rightarrow y=۶, x=۴$$

بنابراین مساحت مثلث OCD برابر است با $S_{OCD}=\frac{y\times ۱۲}{۲}=۳۶$.

توجه کنید که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، در نتیجه $S_{ADC}=\frac{۱۰\times ۱۲}{۲}=۶۰$. بنابراین

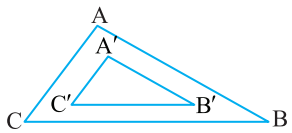
$$S_{ADO}=S_{ADC}-S_{OCD}=۶۰-۳۶=۲۴$$



تجربی - ۹۵

۲۲۱۴- گزینهٔ ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{۹}{۶}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است. اگر مساحت مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌ترتیب S و S' بنامیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S}{S'}=(\frac{۳}{۲})^۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{S-S'}{S'}=\frac{۹-۴}{۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$



خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۲۱۵- گزینهٔ ۱ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OBD،

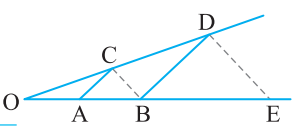
$$AC||BD\Rightarrow\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\qquad(۱)$$

بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OED،

$$BC||ED\Rightarrow\frac{OB}{BE}=\frac{OC}{CD}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OB}{BE}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{BE}\Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۲۲۱۶- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAC،

$$EB||AC\Rightarrow\frac{ME}{EA}=\frac{MB}{BC}\qquad(۱)$$

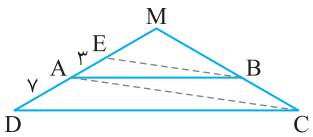
بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MDC،

$$AB||DC\Rightarrow\frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{ME}{EA}=\frac{MA}{AD}\Rightarrow\frac{ME}{۳}=\frac{ME+۳}{۷}\Rightarrow ۷ME=۳ME+۹\Rightarrow ME=۲/۲۵$$

پس $MD=۲/۲۵+۳+۷=۱۲/۲۵$.



خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۲۲۱۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نماد گذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

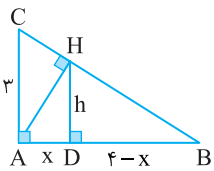
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$h^۲=x(۴-x)\Rightarrow h=\sqrt{x(۴-x)}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث BDH و BAC متشابه هستند. از تشابه این دو مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود

$$\frac{h}{۳}=\frac{۴-x}{۴-x+x}\Rightarrow\frac{\sqrt{x(۴-x)}}{۳}=\frac{۴-x}{۴}\Rightarrow\frac{x(۴-x)}{۹}=\frac{(۴-x)^۲}{۱۶}$$

$$\frac{x}{۹}=\frac{۴-x}{۱۶}\Rightarrow ۱۶x=۳۶-۹x\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$



راه‌حل دوم چون $AB=x+۴-x=۴$، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

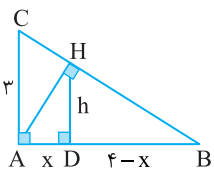
$$BC^۲=AC^۲+AB^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow BC=۵$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH\times ۵=۴\times ۳\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

اکنون از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB نتیجه می‌شود

$$AH^۲=AD\times AB\Rightarrow\frac{۱۴۴}{۲۵}=x\times ۴\Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۱۰۰}=۱/۴۴$$



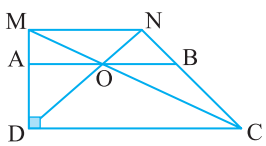
ریاضی - ۸۹

۲۲۱۸- گزینهٔ ۲ شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC:\ OA||DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{MA}{MD}=\frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC:\ OB||DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{NB}{NC}=\frac{OB}{DC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ MNCD، $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}$. پس $\frac{OA}{DC}=\frac{OB}{DC}$، در نتیجه $OA=OB$ و $\frac{OA}{OB}=۱$.



تجربی - ۹۷

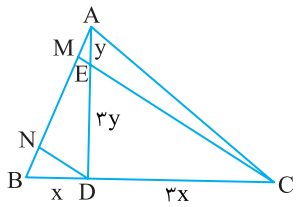
۲۲۱۹- گزینهٔ ۳ از فرض‌های مسئله شکل زیر به‌دست می‌آید. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle BMC:\ DN\|CM \Rightarrow \frac{BN}{MN}=\frac{BD}{DC}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow BN=\frac{۱}{۳}MN$$

$$\triangle AND:\ ME\|DN \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{AE}{ED}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow AM=\frac{۱}{۳}MN$$

بنابراین $AM=BN=\frac{۱}{۳}MN$. پس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AM+MN+BN}=\frac{AM}{AM+۳AM+AM}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow AB=۵AM$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۲۲۲۰- گزینهٔ ۱ بنابر فرض سؤال اگر $AB=۲x$، آن‌گاه $CD=۵x$ و اگر $AF=y$، آن‌گاه $DF=۳y$. قطر AC را رسم می‌کنیم. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

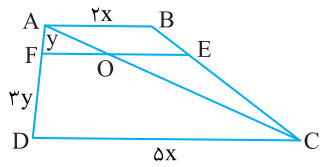
$$\triangle ADC:OF\|DC \Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{OF}{CD}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{CD=۵x} OF=\frac{۵}{۴}x$$

$$\triangle CAB:OE\|AB \Rightarrow \frac{CE}{CB}=\frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{\frac{CE}{CB}=\frac{DF}{DA}=\frac{۳}{۴}\ (\text{قضیهٔ تالس در ذوزنقه})} \frac{۳}{۴}=\frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=۲x} OE=\frac{۳}{۲}x$$

بنابراین $EF=OF+OE=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۲}x=\frac{۱۱}{۴}x$. پس $\frac{EF}{CD}=\frac{\frac{۱۱}{۴}x}{۵x}=\frac{۱۱}{۲۰}$.



خارج از کشور تجربی - ۹۷

۲۲۲۱- گزینهٔ ۲ اگر اشتراک دو بازهٔ $(-۱,۳)$ و $[a,a+۱]$ تهی باشد، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

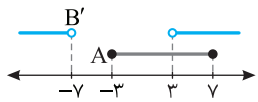
$a+۱\le -۱\Rightarrow a\le -۲$ $\qquad$ $a\ge ۳$

بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-۲<a<۳$. پس به ازای مقادیر صحیح ۱−، ۰، ۱ و ۲ برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۲۲۲- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$B'=(-\infty,-۷)\cup(۳,+\infty)$$

بنابراین، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A\cap B'=(۳,۷]$.



۲۲۲۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم دنبالهٔ حاصل $۲۰,a_۱,\dots,a_n,۸۰$ باشد. در این صورت قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d=\frac{۸۰-۲۰}{n+۲-۱}=\frac{۶۰}{n+۱}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_۱}{a_n}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۲۰+d}{۸۰-d}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۶۰+۳d=۸۰-d\Rightarrow d=۵$$

پس $\frac{۶۰}{n+۱}=۵$، یعنی $n=۱۱$.

۲۲۲۴- گزینهٔ ۴ جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ است و جملهٔ n ام دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $۸+۴(n-۱)$ است. بنابراین

$$۸+۴n-۴=۱۰۲۴\Rightarrow ۴n=۱۰۲۰\Rightarrow n=۲۵۵$$

پس جملهٔ دویست و پنجاه و پنجم دنبالهٔ حسابی $۸,۱۲,۱۶,\dots$ با جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $۲,۴,۸,\dots$ برابر است.

۲۲۲۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید a و b دو عدد مورد نظر باشند طوری که $۰<a<b$. بنابراین

$$\frac{a+b}{۲}=\frac{۵}{۳}\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{(a+b)^۲}{۴}=\frac{۲۵}{۹}ab\Rightarrow ۹a^۲+۹b^۲+۱۸ab=۱۰۰ab$$

$$۹a^۲+۹b^۲-۸۲ab=۰\Rightarrow(a-۹b)(۹a-b)=۰$$

$$\begin{cases} a=۹b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱}{۹} \quad (\text{غ.ق.ق}) \\ b=۹a\Rightarrow\frac{b}{a}=۹ \end{cases}$$

۲۲۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{a}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۴}{۶}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۲}{۳}}=۲$$

$$\Rightarrow a^۲=۲^۳=۸\Rightarrow a=\sqrt{۸}$$

بنابراین

$$\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=a^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۸}^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\sqrt{۸}}=\sqrt[۴]{۸}$$

۲۲۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a-\frac{۱}{a}=۲\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲=۴\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۶$$

بنابراین

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲=۸\Rightarrow(a+\frac{۱}{a})^۲=۸\Rightarrow|a+\frac{۱}{a}|=\sqrt{۸}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a+\frac{۱}{a}=-\sqrt{۸}$. در نتیجه

$$(a-\frac{۱}{a})(a+\frac{۱}{a})=۲(-\sqrt{۸})\Rightarrow a^۲-\frac{۱}{a^۲}=-۴\sqrt{۲}$$

۲۲۲۸- گزینهٔ ۳ عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲+xy-۲y^۲=x^۲-y^۲+xy-y^۲=(x-y)(x+y)+y(x-y)$$

$$=(x-y)(x+y+y)=(x-y)(x+۲y)$$

بنابراین عامل $x+۲y$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

۲۲۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۲}+۱+\sqrt[۳]{۴})}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۱۶}+۱-\sqrt[۳]{۴})}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}+۱}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۴}+۱})$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{\sqrt[۳]{۲}^۳-۱}+\frac{۵(\sqrt[۳]{۴}+۱)}{\sqrt[۳]{۴}^۳+۱})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۲-۱}+\frac{۵(\sqrt[۳]{۴}+۱)}{۴+۱})$$

$$=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\sqrt[۳]{۲}-۱+\sqrt[۳]{۴}+۱)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴})=۱+\sqrt[۳]{۲}$$

۲۲۳۰- گزینهٔ ۳ اولاً نمودار از نقطهٔ $(۰,m)$ می‌گذرد و با توجه به شکل m عددی مثبت است. با این شرایط حاصل‌ضرب صفرهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است. بنابراین

$$-\frac{۲m-۱}{۲(-۱)}<۰\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اگر $۰<m<\frac{۱}{۲}$، نمودار تابع f به‌صورت رسم شده است.

۲۲۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۶$ و $\alpha\beta=۲$. اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S=x_۱+x_۲=(\alpha+\frac{۱}{\beta})+(\beta+\frac{۱}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۶+\frac{۶}{۲}=۹$$

$$P=x_۱x_۲=(\alpha+\frac{۱}{\beta})(\beta+\frac{۱}{\alpha})=\alpha\beta+۲+\frac{۱}{\alpha\beta}=۲+۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۹x+\frac{۹}{۲}=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱۸x+۹=۰$$

۲۲۳۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\sin x=\frac{۳\cos x}{۱}\Rightarrow\sin^۲x=۹\cos^۲x$$

می‌دانیم $\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha=۱$، پس

$$۱-\cos^۲x=۹\cos^۲x\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

از طرف دیگر،

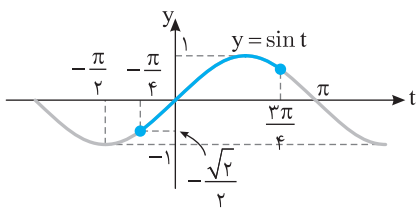
$$\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\cos x=AB\Rightarrow AB=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

۲۲۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $۰\le x\le\pi$، آن‌گاه

$$-\frac{\pi}{۴}\le x-\frac{\pi}{۴}\le\frac{۳\pi}{۴}$$

و با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌شود

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le۱$$



بنابراین

$$-۱\le-\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow۰\le۱-\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۰\le f(x)\le۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $R_f=[۰,\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}]$.

۲۲۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x\ ,\quad \cos(\frac{۵\pi}{۲}-x)=\sin x$$

بنابراین

$$-۲\cos x=۳\sin x\Rightarrow\tan x=-\frac{۲}{۳}$$

از طرف دیگر،

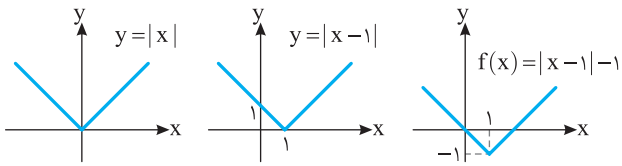
$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow۱+\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۹}{۱۳}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\cos x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$.

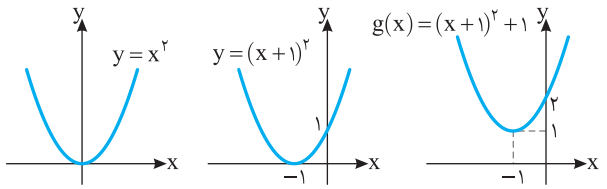
بنابراین

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

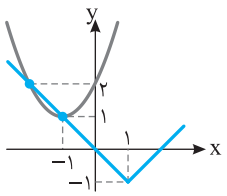
۲۲۳۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۱|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=(x+۱)^۲$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y=(x+۱)^۲+۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۲۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲=|x|^۲$. اکنون نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|^۲\le۴|x|\Rightarrow|x|^۲-۴|x|\le۰\Rightarrow|x|(|x|-۴)\le۰$$

چون $|x|\ge۰$، پس

$$|x|-۴\le۰\Rightarrow|x|\le۴\Rightarrow-۴\le x\le۴$$

بنابراین نُه عدد صحیح ±۴، ±۳، ±۲، ±۱ و ۰ در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۲۳۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه عبارت $\sqrt{۴x+۱}$ بامعنی باشد باید $x\ge-\frac{۱}{۴}$.

بنابراین $x+۱$ مثبت است و $|x+۱|=x+۱$. پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{۴x+۱}=۲x+x+۱\Rightarrow\sqrt{۴x+۱}=۳x+۱$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$۴x+۱=۹x^۲+۶x+۱\Rightarrow۹x^۲+۲x=۰$$

$$x(۹x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{۲}{۹}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۲۳۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(0)=-2$ و $f(\log_8 3)=0$. بنابراین

$$f(0)=1-b=-2\Rightarrow b=3\Rightarrow f(x)=a^{3x}-3$$

$$f(\log_8 3)=a^{3\log_8 3}-3=0\Rightarrow a^{\log_2 3}=3$$

$$\log_2 3=\log_a 3\Rightarrow a=2$$

بنابراین $b=3$ و $a=2$، پس $ab=6$.

۲۲۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$2^a 2^{b+1}=3^a 3^b\Rightarrow 2^{a+b+1}=3^{a+b}$$

بنابراین

$$2\times 2^{a+b}=3^{a+b}\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{a+b}=2\Rightarrow a+b=\log_{\frac{3}{2}} 2$$

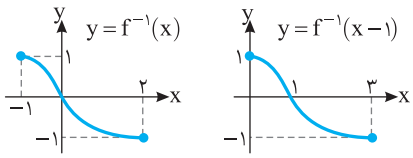
۲۲۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$64<120<128\Rightarrow 2^6<120<2^7$$

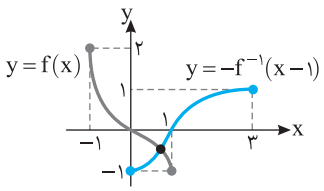
بنابراین

$$\log_2 2^6<\log_2 120<\log_2 2^7\Rightarrow 6<\log_2 120<7\Rightarrow[\log_2 120]=6$$

۲۲۴۱- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، نمودار تابع f^{-1} به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(x-1)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f^{-1}(x-1)$ به‌دست می‌آید.



مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



۲۲۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

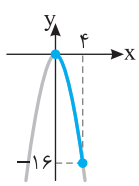
$$\begin{cases}x\geq 0\\ 4x-x^2\geq 0\Rightarrow x(4-x)\geq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow D_f=D_g=[0,4]$$

بنابراین $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[0,4]$. از طرف دیگر،

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{4x-x^2}-2\sqrt{x})(\sqrt{4x-x^2}+2\sqrt{x})$$

$$=4x-x^2-4x=-x^2$$

بنابراین نمودار تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-16,0]$ است.



۲۲۴۳- گزینهٔ ۱ حد چپ و حد راست تابع f را در نقطهٔ $x=-2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-2a-12x)=-2a+24$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(-3a-15x)=-3a+30$$

برای اینکه تابع f در $x=-2$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس

$$-2a+24=-3a+30\Rightarrow a=6$$

بنابراین

$$f(x)=6[x]+3x[2x]\Rightarrow f(-2)=6(-2)+3(-2)(-4)=12$$

۲۲۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0$، آن‌گاه $x^2\to 0^+$ و $-x^2\to 0^-$. پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-x^2)}{3-f(x^2)}=\frac{\lim_{t\to 0^-} f(t)}{3-\lim_{t\to 0^+} f(t)}=\frac{2}{3-(-1)}=\frac{1}{2}.$$

۲۲۴۵- گزینهٔ ۲ اگر $\lim_{x\to 2} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to 2} g(x)=L_2$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 2}(f\times g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)=L_1L_2=2$$

$$\lim_{x\to 2}(f-g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)=L_1-L_2=\frac{7}{2}\Rightarrow L_1=L_2+\frac{7}{2}$$

بنابراین

$$(L_2+\frac{7}{2})L_2=2\Rightarrow L_2^2+\frac{7}{2}L_2-2=0\Rightarrow 2L_2^2+7L_2-4=0$$

$$(L_2+4)(2L_2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}L_2=-4\Rightarrow L_1=-\frac{1}{2}\\ L_2=\frac{1}{2}\Rightarrow L_1=4\end{cases}$$

پس ۸ یا $\lim_{x\to 2}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{1}{8}$.

۲۲۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شرط‌های مسئله، باید رقم وسط ۵ باشد، چهار رقم نخست ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشند و چهار رقم آخر ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشند.

$$\underbrace{\square\square\square\square}_{1,2,3,4}\,5\,\underbrace{\square\square\square\square}_{6,7,8,9}$$

بنابراین پاسخ برابر است با $4!\times 4!=24^2=2^6\times 3^2$.

۲۲۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت پیشامد A' این است که دو نفر انتخاب شده کنار هم نشسته باشند. بنابراین $n(A')=6$ و در نتیجه

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{6}{\binom{7}{2}}=\frac{5}{7}$$

۲۲۴۸- گزینهٔ ۲ باید ۴ تا لامپ سالم یا ۳ تا سالم و یکی خراب انتخاب کنیم. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

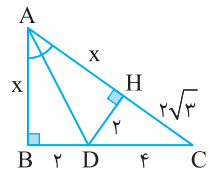
$$\frac{\binom{5}{4}+\binom{5}{3}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{5+10\times 3}{70}=\frac{1}{2}$$

۲۲۴۹- گزینهٔ ۳ اگر ارتفاع DH در مثلث ADC را رسم کنیم، چون D روی نیمساز زاویهٔ BAC است، نتیجه می‌گیریم $DH=DB=۲$، بنابراین، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DHC نتیجه می‌شود

$$DC^۲=HC^۲+HD^۲\Rightarrow ۱۶=HC^۲+۴\Rightarrow HC=۲\sqrt{۳}$$

همچنین از همنهشتی مثلث‌های ABD و AHD نتیجه می‌شود $AH=AB=x$. اکنون از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نتیجه می‌شود

$$(x+۲\sqrt{۳})^۲=x^۲+۳۶\Rightarrow x^۲+۴\sqrt{۳}x+۱۲=x^۲+۳۶\Rightarrow x=۲\sqrt{۳}$$



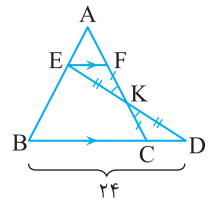
۲۲۵۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مثلث‌های EFK و DCK همنهشت‌اند (ز ض ز). بنابراین $CD=EF$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$EF\|BC\Rightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow EF=\frac{۱}{۳}BC$$

در نتیجه $CD=\frac{۱}{۳}BC$، یعنی $BC=۳CD$. اکنون توجه کنید که

$$BD=۲۴\Rightarrow BC+CD=۲۴\Rightarrow ۳CD+CD=۲۴$$

$$۴CD=۲۴\Rightarrow CD=۶$$



۲۲۵۱- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد. در این صورت

$$a_۸=a_۱+۷d\ ,\quad a_۹=a_۱+۸d\ ,\quad a_{۱۳}=a_۱+۱۲d$$

از طرف دیگر، چون $a_۸$، $a_۹$ و $a_{۱۳}$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$a_۹^۲=a_{۱۳}\times a_۸\Rightarrow(a_۱+۸d)^۲=(a_۱+۱۲d)(a_۱+۷d)$$

$$a_۱^۲+۱۶a_۱d+۶۴d^۲=a_۱^۲+۱۹a_۱d+۸۴d^۲$$

$$۳a_۱d=-۲۰d^۲\Rightarrow a_۱=-\frac{۲۰}{۳}d$$

بنابراین

$$\frac{a_۹}{a_۸}=\frac{a_۱+۸d}{a_۱+۷d}=\frac{-\frac{۲۰}{۳}d+۸d}{-\frac{۲۰}{۳}d+۷d}=\frac{\frac{۴d}{۳}}{\frac{d}{۳}}=۴$$

۲۲۵۲- گزینهٔ ۴ جمله‌های مورد نظر را $\frac{a}{r}, a, ar$ می‌گیریم. در این صورت

$$(\frac{a}{r})(a)(ar)=۱\Rightarrow a^۳=۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین جمله‌ها می‌شوند $\frac{۱}{r}, ۱, r$. از طرف دیگر، طبق فرض،

$$\frac{۱}{r}+۱+r=\frac{۳۹}{۱۰}\Rightarrow ۱۰r^۲-۲۹r+۱۰=۰\Rightarrow(۵r-۲)(۲r-۵)=۰\Rightarrow r=\frac{۲}{۵}, r=\frac{۵}{۲}$$

اگر $r=\frac{۲}{۵}$، جمله‌ها می‌شوند $\frac{۲}{۵}, ۱, \frac{۵}{۲}$ و اگر $r=\frac{۵}{۲}$، جمله‌ها می‌شوند $\frac{۵}{۲}, ۱, \frac{۲}{۵}$.

بنابراین، در هر صورت، بزرگ‌ترین جمله در میان این سه جمله برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

۲۲۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=((x-۲)(x^۲+۲x+۴))(x^۳+۸)+۶۴=(x^۳-۸)(x^۳+۸)+۶۴$$

$$=x^۶-۶۴+۶۴=x^۶$$

بنابراین مقدار A به ازای $x=\sqrt{۲}$ برابر است با $A=(\sqrt{۲})^۶=۲^۳=۸$.

۲۲۵۴- گزینهٔ ۳ تساوی‌های داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^۳+a^۲b+۲ab^۲=۲۰\qquad(۱)$$

$$b^۳+۲a^۲b+ab^۲=۷\qquad(۲)$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۳+b^۳+۳a^۲b+۳a^۲b=۲۷\Rightarrow(a+b)^۳=۲۷\Rightarrow a+b=۳$$

اگر طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۳-b^۳-a^۲b+ab^۲=۱۳\Rightarrow(a^۳-a^۲b)+(-b^۳+ab^۲)=۱۳$$

$$a^۲(a-b)+b^۲(a-b)=۱۳\Rightarrow(a-b)(a^۲+b^۲)=۱۳$$

چون $a+b=۳$، پس

$$(a+b)(a-b)(a^۲+b^۲)=۱۳\times۳=۳۹\Rightarrow a^۴-b^۴=۳۹$$

۲۲۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a^۵b^۶=\sqrt[۷]{۴-\sqrt{۱۵}}\times\sqrt[۷]{۴+\sqrt{۱۵}}=\sqrt[۷]{(۴-\sqrt{۱۵})(۴+\sqrt{۱۵})}=\sqrt[۷]{۱۶-۱۵}=۱$$

بنابراین

$$(ab)^۵b=۱\Rightarrow(ab)^۵=\frac{۱}{b}$$

پس

$$(ab)^{۲۱۰}=((ab)^۵)^{۴۲}=(\frac{۱}{b})^{۴۲}=(\frac{۱}{b^۶})^۷$$

$$=(\frac{۱}{\sqrt[۷]{۴+\sqrt{۱۵}}})^۷=\frac{۱}{۴+\sqrt{۱۵}}=۴-\sqrt{۱۵}$$

۲۲۵۶- گزینهٔ ۳ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta\geq۰\Rightarrow۴k^۲-۴(k^۲+۱۰k+۲۰)\geq۰\Rightarrow۴۰k+۸۰\leq۰\Rightarrow k\leq-۲$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=۲k$، $\alpha\beta=k^۲+۱۰k+۲۰$ و در نتیجه

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۴k^۲-۲k^۲-۲۰k-۴۰$$

$$=۲k^۲-۲۰k-۴۰=۲(k-۵)^۲-۹۰$$

بنابراین

$$k\leq-۲\Rightarrow k-۵\leq-۷\Rightarrow(k-۵)^۲\geq۴۹$$

$$۲(k-۵)^۲\geq۹۸\Rightarrow۲(k-۵)^۲-۹۰\geq۸$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

۲۲۵۷- گزینهٔ ۲ اولاً چون معادله دو جواب دارد، پس

$$\Delta>۰\Rightarrow۱۶-۴k>۰\Rightarrow k<۴$$

ثانیاً اختلاف جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. پس

$$\frac{\sqrt{۱۶-۴k}}{۱}<۱\Rightarrow۱۶-۴k<۱\Rightarrow۴k>۱۵\Rightarrow k>\frac{۱۵}{۴}$$

بنابراین $\frac{۱۵}{۴}<k<۴$.

۲۲۵۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f محور طول‌ها را در $x=۴$ و $x=-۱$ قطع کرده است. پس $f(x)=a(x+۱)(x-۴)$. نمودار تابع f محور عرض‌ها را در $y=۲$ قطع کرده است. پس

$$f(۰)=۲\Rightarrow a(۰+۱)(۰-۴)=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

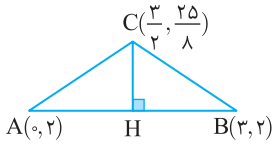
$$f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۴)=-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۲}x+۲$$

بنابراین نقطهٔ $C(\frac{۳}{۲},\frac{۲۵}{۸})$ رأس سهمی است و

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۰+x_B}{۲}\Rightarrow x_B=۳$$

پس $CH=\frac{۲۵}{۸}-۲=\frac{۹}{۸}$ و $AB=۳$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{۳\times\frac{۹}{۸}}{۲}=\frac{۲۷}{۱۶}$$



۲۲۵۹- گزینهٔ ۴ باید با شرط $x>۰$ نامعادلهٔ $f(x)<۰$ را حل کنیم:

$$x+\frac{۱}{x+۲}-۵<۰\Rightarrow x(x+۲)+۱-۵(x+۲)<۰\Rightarrow x^۲-۳x-۹<۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۲-۳x-۹$ به‌صورت $\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳-۳\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. پس

$$\frac{۳-۳\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

از طرف دیگر $x>۰$، پس $۰<x<\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۲۲۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که باید $۲x-x^۲\geq۰$ تا عبارت $\sqrt{۲x-x^۲}$ در معادله بامعنی باشد. پس $۰\leq x\leq۲$.

اگر $x=۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲ است. پس $x=۲$ جواب معادله نیست.

اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^۲}=۰$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $۱\leq x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^۲}=۱$ درمی‌آید که به‌صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$۴(۲x-x^۲)=۱\Rightarrow ۴x^۲-۸x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲},x=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ دربازهٔ $[۱,۲)$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۲۲۶۱- گزینهٔ ۲ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|\frac{۱+|x|-|x|}{۱+|x|}|\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow|\frac{۱}{۱+|x|}|\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱+|x|}\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow|x|\leq۱\Rightarrow-۱\leq x\leq۱$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[-۱,۱]$ است. بنابراین $a=-۱$، $b=۱$ و $b-a=۲$.

۲۲۶۲- گزینهٔ ۳ اگر $x\neq۵$، نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|۳|}{|۵-x|}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow|x-۵|>۶$$

بنابراین $(x\neq۵)$،

$$\begin{cases}x-۵>۶\\x-۵<-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۱۱\\x<-۱\end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(-\infty,-۱)\cup(۱۱,+\infty)$$

در نتیجه $a=-۱$ و $b=۱۱$، پس $b-a=۱۲$.

۲۲۶۳- گزینهٔ ۲ اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$، آن‌گاه $۰<\sin\alpha<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و در نتیجه

$$۰<۲\sin\alpha<\sqrt{۲}\Rightarrow-\sqrt{۲}<۲\sin\alpha-\sqrt{۲}<۰$$

۲۲۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})=\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۵})=\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۶\pi}{۵})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۹\pi}{۵})=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

بنابراین

$$\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})}{۳\sin(\frac{۶\pi}{۵})-۲\sin(\frac{۹\pi}{۵})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۵}}{-۳\sin\frac{\pi}{۵}+۲\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{۳\sin\frac{\pi}{۵}}{-\sin\frac{\pi}{۵}}=-۳$$

۲۲۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۲}{۳}$$

$$۱-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین

$$\sin^۶x+\cos^۶x$$

$$=(\sin^۲x+\cos^۲x)^۳-۳\sin^۲x\cos^۲x(\sin^۲x+\cos^۲x)$$

$$=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x=۱-۳(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

۲۲۶۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=۲^x$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t^۲+(k-۳)t+k-۴=۰$$

بنابراین $t^۲+(k-۳)t+k-۴=(t+k-۴)(t+۱)$. پس جواب‌های این معادله $t=-۱$ و $t=۴-k$ هستند. بنابراین

$$۲^x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$۲^x=۴-k\Rightarrow x=\log_۲(۴-k),k<۴$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_۲(۴-k)\le ۰\Rightarrow \log_۲(۴-k)\le \log_۲ ۱\Rightarrow ۴-k\le ۱\Rightarrow k\ge ۳$$

در نتیجه $۳\le k<۴$.

۲۲۶۷- گزینهٔ ۲ از طرفین معادلـه در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_۳ x^{\log_۳ x}=\log_۳(۹x)\Rightarrow(\log_۳ x)(\log_۳ x)=\log_۳ ۹+\log_۳ x$$

$$(\log_۳ x)^۲-\log_۳ x-۲=۰\Rightarrow(\log_۳ x+۱)(\log_۳ x-۲)=۰$$

بنابراین

$$\log_۳ x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\quad \log_۳ x=۲\Rightarrow x=۹$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۳ است.

۲۲۶۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_۲ x(\frac{۱}{۲}\log_۲ x)=\frac{۱}{۳}\log_۲ x\Rightarrow \log_۲ x(\frac{۱}{۲}\log_۲ x-\frac{۱}{۳})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{cases}\log_۲ x=۰\Rightarrow x=۱\\ \log_۲ x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}\end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[۳]{۴}$ است.

۲۲۶۹- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنید کـه $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$. بنابراین $x=۲$ بایـد تنهـا ریشـهٔ مخـرج $g(x)$ باشـد. یعنی مخـرج $g(x)$ بایـد به‌صورت $(x-۲)^۲$ باشد که در این صورت $b=-۴$. از طرف دیگر

$$g(x)=\frac{ax-b}{x^۲+bx+۴}=\frac{ax+۴}{(x-۲)^۲}$$

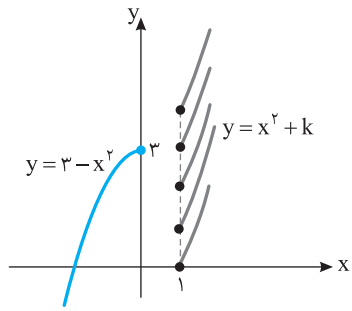
$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+۴}{(x-۲)^۲}=\frac{-۲}{x-۲}\Rightarrow ax+۴=-۲(x-۲)$$

$$ax+۴=-۲x+۴$$

پس $a=-۲$، $b=-۴$ و در نتیجه $ab=۸$.

۲۲۷۰- گزینهٔ ۱ نمـودار تابـع به ازای چند مقدار مختلف k در شـکل زیر رسـم شده اسـت. واضح است که اگر $f(۱)>۳$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد بود. پس

$$۱+k>۳\Rightarrow k>۲$$



۲۲۷۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\le ۰\ \text{یا}\ x\ge ۴\Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۶x-x^۲=۲x$$

$$۰\le x\le ۴\Rightarrow f(x)=-x^۲+۴x+۶x-x^۲=-۲x^۲+۱۰x$$

بنابراین دامنهٔ تابع f باید $[۴,+\infty)$ و برد آن $[۸,+\infty)$ باشد. پس

$$f(x)=y=۲x\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}\ ,\ D_{f^{-۱}}=[۸,+\infty)$$

۲۲۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^۳-a^۳}{۲x-۸}$ در نقطهٔ $x=a$، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x\to a}(۲x-۸)=۰\Rightarrow ۲a-۸=۰\Rightarrow a=۴$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۳-۶۴}{۲x-۸}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)}{۲(x-۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲+۴x+۱۶}{۲}=\frac{۱۶+۱۶+۱۶}{۲}=۲۴$$

در نتیجه $a+b=۲۸$.

۲۲۷۳- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید کـه اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجـه $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-b}{x}=-b$. از طـرف دیگـر حد صورت کسـر $\frac{x^۲-۱}{ax+b}$ در $x=۱$ برابـر صفر اسـت. پس باید حد مخـرج آن نیز در این نقطه صفر باشـد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=۱$ برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوسـتگی تابع در $x=۱$ باید حد راسـت آن یعنی $-b$ هم برابر صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x\to ۱^-}(ax+b)=a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{-bx+b}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x+۱)}{-b(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{-b}=-\frac{۲}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)\Rightarrow -\frac{۲}{b}=-b\Rightarrow b^۲=۲\Rightarrow b=\pm\sqrt{۲}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد، باید

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱} f(x)\Rightarrow c=-b=\pm\sqrt{۲}$$

۲۲۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=bc$ و

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax+b)=۲a+b$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲(x-۲)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ برابر صفر نیسـت و در نتیجـه حـد راسـت آن هـم برابـر صفـر نیسـت. پس حـد مخـرج عبارت $\frac{۳۲(x-۲)}{(x-a)(x+a)}$ در $x=۲$ بایـد صفر باشـد. در غیر این صورت حد راسـت تابع f در $x=۲$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x\to ۲^+}((x-a)(x+a))=۰\Rightarrow(۲-a)(۲+a)=۰\Rightarrow a=۲, a=-۲\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲}{x+۲}=۸$$

چون f در $x=۲$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$۲a+b=۸ \xrightarrow{a=۲} ۴+b=۸\Rightarrow b=۴\ ,\quad bc=۸ \xrightarrow{b=۴} c=۲$$

۲۲۷۵- گزینهٔ ۲ حالت‌های زیر ممکن است:

حالت اول یک توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۲}=۳\times ۱۵=۴۵$$

حالت دوم دو توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۳}{۲}\binom{۶}{۱}=۳\times ۶=۱۸$$

حالت سوم سه توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۳}{۳}\binom{۶}{۰}=۱$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $۴۵+۱۸+۱=۶۴$.

۲۲۷۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت $A=X\cup Y$، که در آن X پیشامد این است که از جعبهٔ اول مهرهٔ قرمز و از جعبهٔ دوم مهرهٔ آبی بیرون بیاید و Y پیشامد این است که از جعبهٔ اول مهرهٔ آبی و از جعبهٔ دوم مهرهٔ قرمز بیرون بیاید. بنابراین

$$P(A)=P(X)+P(Y)=\frac{۳}{۸}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲۱}{۴۰}$$

۲۲۷۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که شمارهٔ کارت ۲ باشد و B پیشامد این باشد که رنگ کارت آبی است. در این صورت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\frac{۱}{۶}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{\frac{۱}{۶}}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}$.

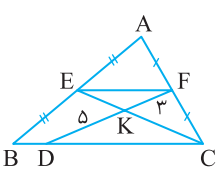
۲۲۷۹- گزینهٔ ۳ اگر پاره‌خط EF را رسم کنیم، از عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $EF\|BC$ و بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $EF=\frac{۱}{۲}BC$. از طرف دیگر، چون $EF\|BC$، پس مثلث‌های EKF و CKD متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EF}{DC}=\frac{FK}{DK}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow EF=\frac{۳}{۵}DC$$

به این ترتیب

$$\frac{۱}{۲}BC=\frac{۳}{۵}DC\Rightarrow BC=\frac{۶}{۵}DC\xrightarrow{-DC}BC-DC=\frac{۶}{۵}DC-DC$$

$$BD=\frac{۱}{۵}DC\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۵}$$

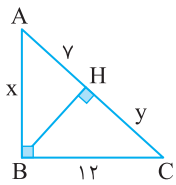


۲۲۸۰- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $HC=y$. در این صورت، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $x^۲=۷(۷+y)$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$(۷+y)^۲=x^۲+۱۲^۲=۷(۷+y)+۱۲^۲\Rightarrow ۷^۲+۱۴y+y^۲=۷^۲+۷y+۱۲^۲$$

$$y^۲+۷y-۱۴۴=۰\Rightarrow(y+۱۶)(y-۹)=۰\Rightarrow y=۹\ ,\ y=-۱۶\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

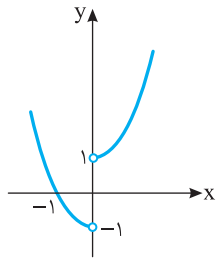
در نتیجه $x^۲=۷(۷+y)=۷\times ۱۶$، پس $x=۴\sqrt{۷}$.



۲۲۸۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^۳+۱) & x>۰\\ \frac{x}{-x}(x^۳+۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳+۱ & x>۰\\ -x^۳-۱ & x<۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع f، خط $y=k$ را در دو نقطه قطع کند، حدود k، به‌صورت $k>۱$ است.



۲۲۸۲- گزینهٔ ۲ با توجه به زوج مرتب‌های $(-۱,x^۲-x),(۰,x^۳)$ می‌توان نوشت:

$$۰>-۱\Rightarrow x^۳\geq x^۲-x$$

$$x^۳-x^۲+x\geq۰\Rightarrow x(x^۲-x+۱)\geq۰$$

چون در چندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲-x+۱$، $a>۰$ و $\Delta<۰$، پس همواره $x^۲-x+۱>۰$. بنابراین $x\geq۰$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^۲,۸)$ و $(۰,x^۳)$ می‌توان نوشت:

$$x^۲>۰\Rightarrow ۸\geq x^۳\Rightarrow ۲\geq x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in\{۱,۲\}$، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

توجه کنید که $x=۰$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f=\{(-۱,۰),(۰,۰),(۰,۸)\}$، که تابع نیست.

۲۲۸۳- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

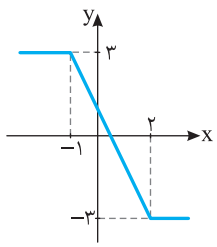
$$\begin{cases}x>۳\Rightarrow f(x)<f(۳)\Rightarrow f(x)<۰\\ x<۳\Rightarrow f(x)>f(۳)\Rightarrow f(x)>۰\end{cases}$$

اکنون باید دامنهٔ تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادلهٔ $(x^۲-۹)f(x)\geq ۰$ را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^۲-۹$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	۰	$-$	
$(x^۲-۹)f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق $(-\infty,-۳]\cup\{۳\}$ است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنهٔ تابع g است.

۲۲۸۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ و هر بازه‌ای به‌صورت $[c,d]$ که در آن $c\geq -۱$ و $d\leq ۲$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۲$، در این صورت $b-a=۲-(-۱)=۳$.



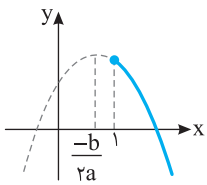
۲۲۸۵- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ با شرط $a<۰$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):

$$k-۱<۰\Rightarrow k<۱$$

$$\frac{-۱}{۲(k-۱)}\leq ۱\Rightarrow \frac{-۱}{۲(k-۱)}-۱\leq ۰\Rightarrow \frac{-۱-۲k+۲}{۲(k-۱)}\leq ۰$$

$$\frac{-۲k+۱}{۲(k-۱)}\leq ۰\Rightarrow k\leq \frac{۱}{۲} \text{ یا } k>۱$$

از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $k\leq \frac{۱}{۲}$.



۲۲۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))$$

$$۲(a-x)-۳=a-(۲x-۳)\Rightarrow ۲a-۲x-۳=a-۲x+۳\Rightarrow a=۶$$

۲۲۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x}{۲x-۱}\Rightarrow \frac{۱}{g(x)+۱}=\frac{x}{۲x-۱}$$

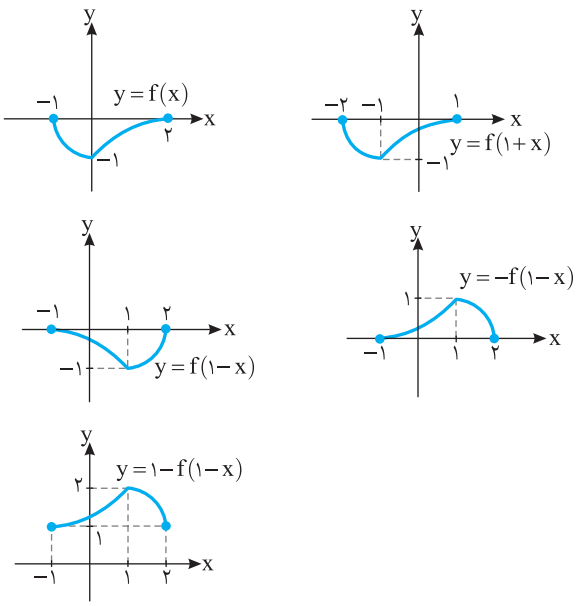
$$xg(x)+x=۲x-۱\Rightarrow xg(x)=x-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x-۱}{x}$$

۲۲۸۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $D_{fof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_f\}$. پس

$$\begin{cases} x\in D_f\Rightarrow -۱\leq x\leq ۳ \\ f(x)\in D_f\Rightarrow -۱\leq ۲x-۵\leq ۳\Rightarrow ۴\leq ۲x\leq ۸\Rightarrow ۲\leq x\leq ۴ \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به‌صورت $۲\leq x\leq ۳$ است، پس $D_{fof}=[۲,۳]$.

۲۲۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۱-x)$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱-f(۱-x)$ به‌دست آید.



۲۲۹۰- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=۳f(۲x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۱))=۳f(۲x+۲)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(\frac{۱}{۲}x)+۲)+۳=۳f(x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}\times(۳f(x+۲)+۳)=f(x+۲)+۱$ به‌دست می‌آید.

۲۲۹۱- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۱-\sqrt{۳+x}\Rightarrow \sqrt{۳+x}=۱-y\Rightarrow ۳+x=(۱-y)^۲\Rightarrow x=(۱-y)^۲-۳$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(۱-x)^۲-۳$، پس

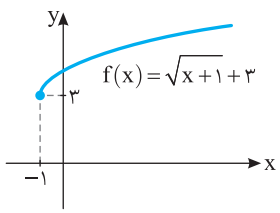
$$f^{-۱}(x)=(۱-x)^۲-۳=۱+x^۲-۲x-۳=x^۲-۲x-۲=x^۲+ax+b$$

در نتیجه

$$a=-۲, b=-۲\Rightarrow ۲a+۳b=-۱۰$$

۲۲۹۲- گزینهٔ ۱ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۳,+\infty)$. پس برای هر $x\geq ۳$، $g(x)=x-۲$، بنابراین

$$x\geq ۳\Rightarrow x-۲\geq ۱\Rightarrow g(x)\geq ۱\Rightarrow R_g=[۱,+\infty)$$



۲۲۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=۳(x+m)-۴=۳x+۳m-۴$$

از طرف دیگر،

$$(fog)^{-۱}(۸)=-۱\Rightarrow(fog)(-۱)=۸$$

$$۳\times(-۱)+۳m-۴=۸\Rightarrow ۳m-۷=۸\Rightarrow m=۵$$

۲۲۹۴- گزینهٔ ۳ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. پس

$$\begin{cases} f(۰)=۲ \\ f(۲)=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۰+۰+b=۲ \\ -۱+۲a+b=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=۲ \\ a=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $ab=-۱$.

۲۲۹۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|a\pi|}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow|a|=۴$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^۲-|b|$ است. بنابراین

$$a^۲-|b|=-۴\Rightarrow ۱۶-|b|=-۴\Rightarrow|b|=۲۰$$

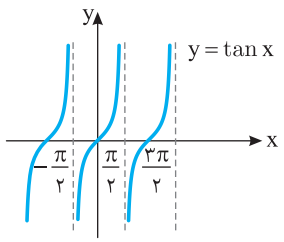
بیشترین مقدار تابع f برابر $a^۲+|b|$ است که برابر است با $۳۶=۲۰+۱۶$.

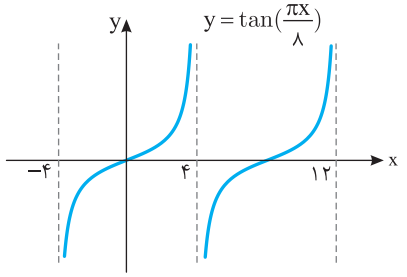
۲۲۹۶- گزینهٔ ۱ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است، پس $\tan x\geq\tan(-\frac{\pi}{۴})$ و در نتیجه $\tan x\geq -۱$. بنابراین

$$۲m^۲-۵\geq -۱\Rightarrow ۲m^۲\geq ۴\Rightarrow m^۲\geq ۲\Rightarrow|m|\geq\sqrt{۲}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۲۹۷- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{۸}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. نمودار تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(a,۱۲)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.





۲۲۹۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $۳a-۲$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -۱ است. پس

$$۳a-۲=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۴۵}{۷}-\frac{۳}{۷}=۶$ است. پس

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{b}|}=۶\Rightarrow|b|=۶\Rightarrow b=\pm۶$$

اگر $b=-۶$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۶}x+\frac{\pi}{۳})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=۰$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=۶$ و در نتیجه $ab=۲$.

۲۲۹۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که α در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس $\cos\alpha<۰$. از طرف دیگر،

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow(\frac{-۴}{۵})^۲+\cos^۲\alpha=۱$$

$$\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow|\cos\alpha|=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۳}{۵}$$

می‌دانیم $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$، پس

$$\sin ۲\alpha=۲\times(\frac{-۴}{۵})\times(\frac{-۳}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha=(\frac{-۳}{۵})^۲-(\frac{-۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{-۷}{۲۵}$$

می‌دانیم $\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}$، پس $\cot ۲\alpha=\frac{\frac{-۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-۷}{۲۴}$.

۲۳۰۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{۱+\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}=\frac{۱+(۲\cos^۲ ۲۰^\circ-۱)}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\cos^۲ ۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{\cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=\cot ۲۰^\circ$$

۲۳۰۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A=\tan ۲۳۰^\circ-\tan ۴۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۵۰^\circ)-\tan(۹۰^\circ-۵۰^\circ)$$

$$=\tan ۵۰^\circ-\cot ۵۰^\circ=\frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}-\frac{\cos ۵۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\sin^۲ ۵۰^\circ-\cos^۲ ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ\sin ۵۰^\circ}$$

چون $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$، پس

$$A=\frac{-\cos ۱۰۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۱۰۰^\circ}=-۲\cot ۱۰۰^\circ=-۲\cot(۹۰^\circ+۱۰^\circ)=۲\tan ۱۰^\circ$$

۲۳۰۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow k=-\frac{۱}{۸} \quad (غ.ق.ق.) \\ x=۲k\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

۲۳۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^۲ x)+۵\sin x-۵=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x-۵\sin x+۳=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $2t^2-5t+3=0$ در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t_1=\frac{3}{2}$ و $t_2=1$. چون $\sin x=\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، پس

$$\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{x\in(0,2\pi)}x=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده تنها یک جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۲۳۰۴- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1\xrightarrow{2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha}$$

$$1-\sin x=1\Rightarrow\sin x=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,4\pi]$ عبارت‌اند از $x=0$، $x=\pi$، $x=2\pi$، $x=3\pi$ و $x=4\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$، $x=2\pi$ و $x=4\pi$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازهٔ $[0,4\pi]$ دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۲۳۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که حد مخرج کسر وقتی $x\to1$ برابر صفر است، بنابراین باید حد صورت کسر نیز وقتی $x\to1$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to1}(x^2-ax+b)=1-a+b=0\Rightarrow b-a=-1$$

راه‌حل اول چون $b=a-1$، پس

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+b}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+a-1}{(2x-1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1-a)}{(2x-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1-a)}{(2x-1)}=\frac{2-a}{2-1}=2-a$$

طبق فرض مسئله حاصل حد برابر ۳ است، پس $2-a=3$، یعنی $a=-1$. بنابراین $b=a-1=-2$. در نتیجه $a+b=-3$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+b}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-a}{4x-3}=\frac{2-a}{1}=2-a$$

پس $2-a=3$، بنابراین $a=-1$. چون $b-a=-1$، پس $b=-2$. بنابراین $a+b=-3$

۲۳۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x+2}-x}\times\frac{\sqrt{3x-2}+2}{\sqrt{3x-2}+2}\times\frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{x+2}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{3x-2-4}{x+2-x^2}\times\frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{3(x-2)}{(2-x)(x+1)}\times\frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{3}{-(x+1)}\times\frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2}\right)=\frac{3}{-3}\times\frac{2+2}{2+2}=-1$$

۲۳۰۷- گزینهٔ ۱ اگر $x\to3^+$، آن‌گاه $[x]=3$ و در $f(x)=\frac{1}{x-3}$، نتیجه $\lim_{x\to3^+}f(x)=+\infty$. اگر $x\to3^-$، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x)=\frac{-1}{x-3}$، در نتیجه $\lim_{x\to3^-}f(x)=+\infty$.

۲۳۰۸- گزینهٔ ۲ چون حد صورت در نقطهٔ $x=2$ برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر $3x^2+ax-b$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=2$ مثبت باشند. در نتیجه $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $3x^2+ax-b=0$ است، یعنی $3x^2+ax-b$ باید به‌صورت $3(x-2)^2$ باشد.

در نتیجه

$$3x^2+ax-b=3(x-2)^2=3x^2-12x+12$$

پس $a=-12$، $b=-12$. یعنی $a+b=-24$.

۲۳۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-3$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-3$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-3)^-}f(t)=-\infty$$

۲۳۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله‌ای شامل x^4 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^4 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $2a-4=0$. پس $a=2$. به این ترتیب

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-1}{12x^3+x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{12x^3}=\frac{1}{3}$$

در نتیجه $ab=\frac{2}{3}$.

۲۳۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-k}{x+2}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to-2}\frac{f^2(x)-kf(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-k}{x+2}\times\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x-2}=f'(-2)\times\frac{f(-2)}{-4}=\frac{k^2}{-4}$$

بنابراین $\frac{k^2}{-4}=-2$، در نتیجه $k^2=8$.

۲۳۱۲- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sqrt[3]{x^2+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x^2+1}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sqrt[3]{x^2+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}(-\sqrt[3]{x^2+1})=-1$$

بنابراین $2f'_+(0)-f'_-(0)=3$.

۲۳۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=(۸x^۳+۱۰x)(ax^۲+۱)+(۲ax)(۲x^۴+۵x^۲-۳)$$

بنابراین

$$f'(۱)=(۸+۱۰)(a+۱)+(۲a)(۲+۵-۳)=۱۸a+۱۸+۸a=۲۶a+۱۸$$

چون $f'(۱)=-۸$، پس

$$۲a+۱۸=-۸\Rightarrow ۲۶a=-۲۶\Rightarrow a=-۱$$

۲۳۱۴- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$۸a+۴=۴+۲b\Rightarrow ۴a-b=۰$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+۲ & x>۲\\ ۲x+b & x<۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲a+۲=۴+b\Rightarrow ۱۲a-b=۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۴a-b=۰\\ ۱۲a-b=۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=۱$.

پس $a+b=\frac{۵}{۴}$.

۲۳۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

بنابراین $g'(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۲\times\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۴}}}f'(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=-۴f'(۲)$. از طرف دیگر $f'(۲)=\frac{۴+۱}{۲-۳}=-۵$. در نتیجه $g'(\frac{۱}{۴})=(-۴)(-۵)=۲۰$.

۲۳۱۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x^۳+۳ax^۲+۶x,\quad f''(x)=۶x^۲+۶ax+۶$$

پس معادلهٔ $۶x^۲+۶ax+۶=۰$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=۳۶a^۲-۱۴۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow |a|<۲$$

۲۳۱۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,۱]$ برابر است با

$$\frac{f(۱)-f(a)}{۱-a}=\frac{۰-(a-۲)\sqrt{۱-a}}{۱-a}=\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}$$

بنابراین

$$\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{(۲-a)^۲}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow\frac{۴+a^۲-۴a}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$۴a^۲-۱۶a+۱۶=۲۵-۲۵a$$

$$۴a^۲+۹a-۹=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۴},a=-۳$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب -۳ است.

۲۳۱۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۱۲=۳(x-۲)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۲)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۲$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۲)=۶$.

۲۳۱۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=۲x+۴$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x)=۶x^۲-۴\Rightarrow f'(x_۰)=۲\Rightarrow ۶x_۰^۲-۴=۲$$

$$x_۰^۲=۱\Rightarrow x_۰=۱\text{ یا }x_۰=-۱$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$y_۰=f(۱)=۲-۴+۶=۴\quad\text{یا}\quad y_۰=f(-۱)=-۲+۴+۶=۸$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطهٔ $(۱,۴)$ یا نقطهٔ $(-۱,۸)$ می‌گذرند و شیب آن‌ها ۲ است. پس معادلهٔ این دو خط به‌صورت $y=۲x+۲$ یا $y=۲x+۱۰$ است.

۲۳۲۰- گزینهٔ ۴ خط $y=۴x+۲$ در نقطهٔ $A(۱,۶)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(۱)=۶$ و $f'(۱)=۴$. در نتیجه چون $f'(x)=۳x^۲-۲ax$، پس

$$\begin{cases}f(۱)=۱-a+b=۶\\ f'(۱)=۳-۲a=۴\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲},b=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a+b=۴$$

۲۳۲۱- گزینهٔ ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x,f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ نزولی است. می‌دانیم در صورتی‌که $c\geq ۰$ و $d\leq ۱$، تابع f روی بازهٔ $[c,d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b-a$، زمانی است که $a=۰$ و $b=۱$. پس $b-a=۱-۰=۱$.

۲۳۲۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x)=-۶x^۲+۲ax-۶$. برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f'\leq ۰$. پس

$$a<۰,\Delta\leq ۰\Rightarrow -۶<۰,\Delta=۴a^۲-۱۴۴\leq ۰\Rightarrow -۶\leq a\leq ۶$$

۲۳۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع f' را تعیین علامت می‌کنیم

x	$-\infty$		-۳		-۲		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↘		↗		↘		↗	

تابع f' در نقطه‌های -۲، ۰ و ۱ هم برابر صفر است و هم در اطراف این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در این نقطه‌ها اکسترمم نسبی دارد. پس مجموع طول این نقطه‌ها برابر $-۲+۰+۱=-۱$ است.

۲۳۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=x^۲-۲x-۸$ و

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۲$$

با توجه به آنکه $f(-۲)=\frac{۲۵}{۳}$ و $f(۴)=-\frac{۸۳}{۳}$، پس نقاط $(-۲,\frac{۲۵}{۳})$ و $(۴,-\frac{۸۳}{۳})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۴-(-۲))^۲+(-\frac{۸۳}{۳}-\frac{۲۵}{۳})^۲}=\sqrt{۶^۲+۳۶^۲}=۶\sqrt{۳۷}$$

۲۳۲۵- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، برای آنکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۲)=۰$. پس

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+a}+\frac{x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^۲}}\,,\,f'(۲)=۰$$

$$f'(۲)=\sqrt[۳]{۲+a}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=\frac{۳(۲+a)+۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=۰\Rightarrow ۹+۳a=۰\Rightarrow a=-۳$$

۲۳۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

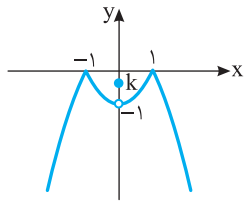
$$f(x)=\begin{cases}۲x-x^۳ & x\le-\sqrt{۲}\ \text{یا}\ ۰\le x\le\sqrt{۲}\\ x^۳-۲x & -\sqrt{۲}\le x\le۰\ \text{یا}\ x\ge\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲-۳x^۲ & x<-\sqrt{۲}\ \text{یا}\ ۰<x<\sqrt{۲}\\ ۳x^۲-۲ & -\sqrt{۲}<x<۰\ \text{یا}\ x>\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

همچنین در نقاط $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۳۲۷- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع f توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-۱<k<۰$. توجه کنید که اگر $k\ge۰$، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k\le-۱$، در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.



۲۳۲۸- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+۱)^۲}=\frac{۱-a}{۲\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^۲}$$

اگر $f'(x)=۰$، آن‌گاه $a=۱$ که در این صورت $f(x)=۱$. چون کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[۰,۴]$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس $a=۱$ قابل قبول نیست. پس $f'(x)\neq۰$، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم: $f(۰)=a$ و $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}$. اگر $f(۰)=a=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=\frac{۴}{۳}$ و اگر $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=۲$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}\times۲$ است.

۲۳۲۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ B روی سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲$ باشد. بنابراین مختصات آن به‌صورت $B(x,۲x^۲)$ است. پس

$$AB=\sqrt{(x-۹)^۲+(۲x^۲-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۸x+۸۱+۴x^۴}$$

اگر $f(x)=\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}$، آن‌گاه

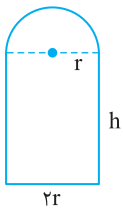
$$f'(x)=\frac{۸x^۳+x-۹}{\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۸x^۳+x-۹=۰\Rightarrow(۸x^۳-۸)+(x-۱)=۰$$

$$۸(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)=(x-۱)(۸x^۲+۸x+۹)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. پس B نقطهٔ $(۱,۲)$ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۳۳۰- گزینهٔ ۴ در واقع باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد. پس



$$\text{محیط}=۵\Rightarrow ۲h+۲r+(\frac{۲\pi r}{۲})=۲h+۲r+r\pi=۵$$

$$h=\frac{۵-۲r-r\pi}{۲}=\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت پنجره}=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{نیم‌دایره}}$$

$$S(r)=(h\times۲r)+(\frac{r\times r\times\pi}{۲})=(\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲})\times۲r+\frac{r^۲\pi}{۲}=-۲r^۲-\frac{r^۲\pi}{۲}+۵r$$

$$S'(r)=-۴r-r\pi+۵\,,\,S'(r)=۰\Rightarrow-۴r-r\pi+۵=۰\Rightarrow r=\frac{۵}{۴+\pi}$$

۲۳۳۱- گزینهٔ ۳ حجم جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع ۸ و ارتفاع ۳ است که استوانه‌ای به شعاع ۳ و ارتفاع ۳ از آن حذف شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر با $V=(۸\times۸\times\pi)\times۳-(۳\times۳\times\pi)\times۳=۱۶۵\pi$ است.

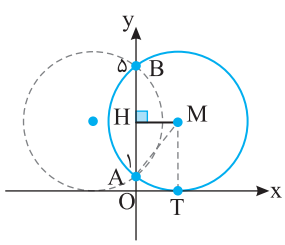
۲۳۳۲- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه BB' قطر کوچک بیضی است و روی محور y قرار دارد، مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است. پس $b=OB=۴\sqrt{۲}$ و $c=OF'=۲$، در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=(۴\sqrt{۲})^۲+۲^۲=۳۶\Rightarrow a=۶$$

$$S_{ABF'}=\frac{BO\times AF'}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}\times(۶+۲)}{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

توجه کنید که $AF'=OA+OF'=a+c=۶$.

۲۳۳۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ M مرکز دایرهٔ مورد نظر باشد و این دایره در نقطهٔ T بر محور x مماس شده باشد. با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل $AB=۵-۱=۴$، پس $AH=۲$. بنابراین $TM=OH=۳$، یعنی شعاع این دایره برابر ۳ است.



بنابراین $AM=3$. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM ،

$$AM^2=AH^2+HM^2\Rightarrow 3^2=2^2+HM^2\Rightarrow HM=\sqrt{5}$$

پس مرکز این دایره نقطهٔ $(\sqrt{5},3)$ و شعاع آن برابر ۳ است. پس معادله‌اش به‌صورت $(x-\sqrt{5})^2+(y-3)^2=9$ است. دقت داشته باشید که دایره‌ای به معادلهٔ $(x+\sqrt{5})^2+(y-3)^2=9$ نیز می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

۲۳۳۴- گزینهٔ ۴ مرکز این دایره نقطهٔ $(1,-4)$ است. پس شیب خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(2,-3)$ روی آن است، برابر است با $m=\frac{-3-(-4)}{2-1}=1$.

چون خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس شیب خط مماس مورد نظر برابر با $m'=-1$ است. پس برای نوشتن معادلهٔ خط مورد نظر، معادلهٔ خطی با شیب -1 و گذرنده از نقطهٔ $(2,-3)$ را می‌نویسیم:

$$y+3=-1\,(x-2)\Rightarrow y=-x-1$$

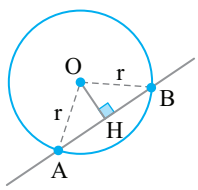
۲۳۳۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید نقاط A و B محل برخورد خط با دایره و O مرکز دایره باشد. ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $O(-1,-2)$ است و شعاع این دایره برابر است با $r=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2-4\times(-4)}=3$. از طرف دیگر طول پاره‌خط OH برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از خط است. پس

$$OH=\frac{|2\times(-1)+1\times(-2)-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA ،

$$r^2=OH^2+AH^2\Rightarrow 3^2=\sqrt{5}^2+AH^2\Rightarrow AH=2$$

بنابراین طول وتر مورد نظر برابر با $AB=2AH=4$ است.



راه‌حل دوم ابتدا محل‌های برخورد خط و دایره را مشخص می‌کنیم، سپس فاصلهٔ بین این دو نقطه را به‌دست می‌آوریم که برابر با طول وتر مورد نظر است:

$$2x+y-1=0\Rightarrow y=1-2x$$

$$x^2+y^2+2x+4y-4=0\Rightarrow x^2+(1-2x)^2+2x+4(1-2x)-4=0$$

$$5x^2-10x+1=0\Rightarrow x_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{10}\ ,\ x_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{10}$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{10+4\sqrt{5}}{10},\frac{-10-8\sqrt{5}}{10}\right)=\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5},-1-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{10-4\sqrt{5}}{10},\frac{-10+8\sqrt{5}}{10}\right)=\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5},-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$AB=\sqrt{\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}-\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)^2+\left(-1-\frac{4\sqrt{5}}{5}-\left(-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{-8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=4$$

۲۳۳۶- گزینهٔ ۱ در دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-8=0$ مرکز دایره نقطهٔ $O(1,-2)$ و شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4\times(-8)}=\sqrt{13}$ و در دایرهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ مرکز دایره نقطهٔ $O'(2,-1)$ و شعاع دایره $r'=3$ است. پس

$$OO'=\sqrt{(1-2)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{2}$$

$$r+r'=\sqrt{13}+3$$

$$|r-r'|=\sqrt{13}-3$$

$$|r-r'|<OO'<r+r'$$

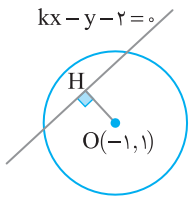
بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۲۳۳۷- گزینهٔ ۲ در این دایره شعاع برابر ۱ و مرکز نقطهٔ $O(-1,1)$ است. چون خط $kx-y-2=0$ ، دایره را در دو نقطه قطع کرده است باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره باشد، پس

$$OH=\frac{|k(-1)-1-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}<1\Rightarrow\frac{|-k-3|}{\sqrt{k^2+1}}<1$$

$$\frac{(k+3)^2}{k^2+1}<1\Rightarrow k^2+6k+9<k^2+1$$

$$6k<-8\Rightarrow k<-\frac{4}{3}$$

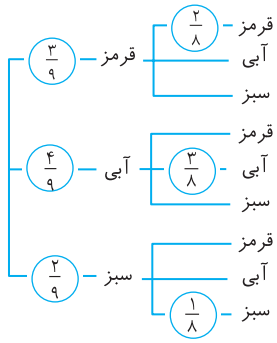


۲۳۳۸- گزینهٔ ۳ A را پیشامد هم‌رنگ‌بودن هر دو مهره در نظر می‌گیریم. پس A' پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره‌ها است. با توجه به نمودار درختی زیر، احتمال هم‌رنگ‌بودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$$

بنابراین احتمال هم‌رنگ نبودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A')=1-P(A)=\frac{13}{18}$$

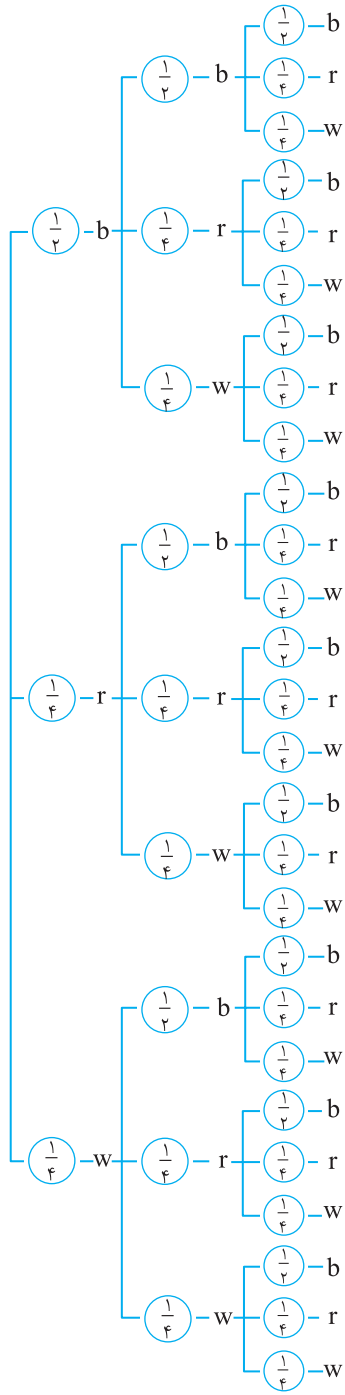


۲۳۳۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.

از روی نمودار معلوم می‌شود احتمال موردنظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}$$

$$=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$



(دقت کنید که b، r و w به‌ترتیب نماد سیاه، قرمز و سفید هستند.)

راه‌حل دوم عقربه باید دقیقاً دو بار روی سیاه و یک بار روی قرمز یا سفید قرار گیرد. بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول

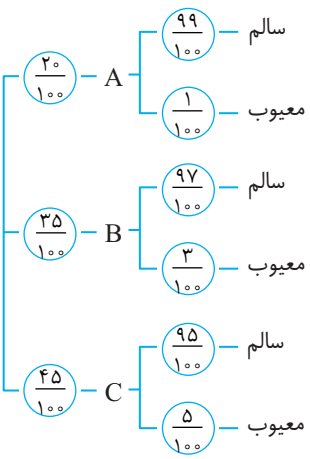
دو بار سیاه و یک بار سفید $\binom{۳}{۲}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۲}{۴^۳}$

حالت دوم

دو بار سیاه و یک بار قرمز $\binom{۳}{۲}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۲}{۴^۳}$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۱۲}{۴^۳}+\frac{۱۲}{۴^۳}=\frac{۲۴}{۴^۳}=\frac{۳}{۸}$.

۲۳۴۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که



اگر X پیشامد معیوب‌بودن محصول انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه

$$P(X)=\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}$$

$$=\frac{۲۰}{۱۰۰۰۰}+\frac{۱۰۵}{۱۰۰۰۰}+\frac{۲۲۵}{۱۰۰۰۰}=\frac{۳۵۰}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۳۵$$

۲۳۴۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x}\qquad(\pi<x<\frac{۳\pi}{۲})$$

$$\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)=-\frac{۱}{\cos x}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^۲ x)$$

$$=-\frac{۱}{\cos x}(۱-\sin^۲ x)=-\frac{۱}{\cos x}\times\cos^۲ x=-\cos x$$

۲۳۴۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $۱۰۰+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $۱۰۰-v$ است. در نتیجه

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵\Rightarrow\frac{۲۴۰}{۱۰۰-v}-\frac{۲۴۰}{۱۰۰+v}=۱$$

$$۲۴۰(\frac{۱}{۱۰۰-v}-\frac{۱}{۱۰۰+v})=۱\Rightarrow۲۴۰(\frac{۲v}{۱۰۰^۲-v^۲})=۱$$

$$۱۰۰^۲-v^۲=۴۸۰v\Rightarrow v^۲+۴۸۰v-۱۰۰^۲=۰$$

$$(v-۲۰)(v+۵۰۰)=۰\Rightarrow v=۲۰$$

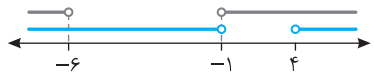
۲۳۴۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰\Rightarrow\frac{x-۴}{x+۱}>۰\Rightarrow x>۴\text{ یا }x<-۱\qquad(۱)$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰\Rightarrow\frac{-x-۶}{x+۱}<۰\Rightarrow\frac{x+۶}{x+۱}>۰$$

$$x<-۶\text{ یا }x>-۱\qquad(۲)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و -۷ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$۱<\frac{۲\times۵-۳}{۵+۱}=\frac{۷}{۶}<۳\ ,\quad ۱<\frac{۲\times(-۷)-۳}{-۷+۱}=\frac{۱۷}{۶}<۳$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۲۳۴۴- گزینهٔ ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شیء متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$

۲۳۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲\Rightarrow\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a\Rightarrow ۲a^۲+۴a=۴-۱۲a+۹a^۲$$

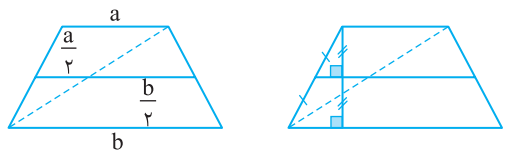
$$۷a^۲-۱۶a+۴=۰\Rightarrow(۷a-۲)(a-۲)=۰\Rightarrow a=\frac{۲}{۷}, a=۲$$

توجه کنید که اگر $a=۲$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{۲}{۷}$. در نتیجه $\frac{a+۱}{a}=۱+\frac{۱}{a}=۱+\frac{۷}{۲}=۴/۵$.

۲۳۴۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{۲}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲})}{\frac{۱}{۲}h(\frac{a+b}{۲}+b)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a+\frac{a+b}{۲}}{\frac{a+b}{۲}+b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳a+b}{a+۳b}=\frac{۱}{۲}$$

$$۶a+۲b=a+۳b\Rightarrow ۵a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱}{۵}$$



۲۳۴۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=(۳\sqrt{۵})^۲+۶^۲=۸۱\Rightarrow BC=۹$$

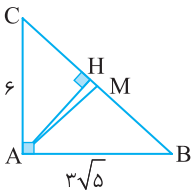
از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow ۳۶=CH\times۹\Rightarrow CH=۴$$

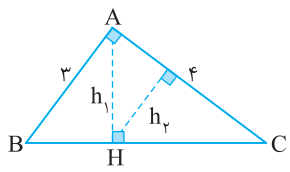
بنابراین $HM=CM-CH=\frac{BC}{۲}-CH=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$.

اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{۹}{\frac{۱}{۲}}=۱۸$$



۲۳۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر $\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی $\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{AC}{BC}=\frac{۴}{۵}$.



۲۳۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})=\sin(۵\pi+\frac{۲\pi}{۳})=-\sin\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=-\sin(\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-(-\sin\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$.

۲۳۵۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به‌دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{۳}$ است، پس $a+b=\sqrt{۳}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{۳}{۲})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}$$

$$b(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

۲۳۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=((\frac{۵}{۲})^۳)^{x^۲}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲}$$

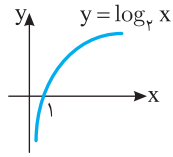
بنابراین

$$۲x-۱=-۳x^۲\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow(۳x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}, x=-۱$$

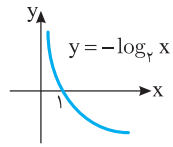
به ازای $x=-۱$، مقدار $۹x+۱$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{۱}{۳}$ و

$$\log_۸(۹x+۱)=\log_۸(۳+۱)=\log_۸ ۴=\log_{۲^۳}۲^۲=\frac{۲}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۲}{۳}$$

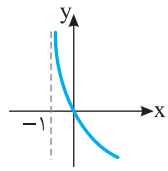
۲۳۵۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_{۲} x$ به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_{۲} x$ به‌صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_{۲}(x+۱)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_{۲}(x+۱)=\log_{۲}(x+۱)^{-۱}$، بنابراین

$$U(x)=(x+۱)^{-۱}$$

۲۳۵۳- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=f(-۲)$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)\neq f(-۲)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(۲+x)(۴-۲x+x^۲)}{-(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^-}(-(۴-۲x+x^۲))=-(۴-۲(-۲)+(-۲)^۲)=-۱۲$$

چون $f(-۲)=a$، پس باید $a=-۱۲$.

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=۱۲$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)\neq f(-۲)$.

۲۳۵۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A)=۰/۷$، $P(B)=۰/۶$ و $P(B|A)=۰/۸$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۸=\frac{P(A\cap B)}{۰/۷}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵۶$$

در نتیجه،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۶-۰/۵۶=۰/۷۴$$

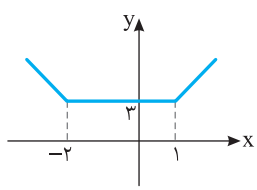
۲۳۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

گروه اول: $\overline{x}=۸۰, \sigma^۲=۲۵\Rightarrow \sigma=۵, CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{۵}{۸۰}=\frac{۱}{۱۶}$

گروه دوم: $\overline{x}=۷۲, \sigma^۲=۱۶\Rightarrow \sigma=۴, CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{۴}{۷۲}=\frac{۱}{۱۸}$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۲۳۵۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً نزولی است.



۲۳۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۴\sin x(-\cos x)=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$\frac{۱}{۱۲}\le k\le ۲+\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow k=۱,۲$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{۱۲}, x=۲\pi-\frac{\pi}{۱۲} \qquad (۱)$$

$$۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$-\frac{۷}{۱۲}\le k<۲-\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow k=۰,۱$$

$$x=\frac{۷\pi}{۱۲}, x=\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \qquad (۲)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $۴\pi+\frac{۱۴\pi-۲\pi}{۱۲}=۵\pi$.

۲۳۵۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^۲+۱۰x+۱۶=(x+۲)(x+۸)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}(\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}})$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۲^۳+\sqrt[۳]{x}^۳}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۸+x}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}((x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}))$$

$$=\frac{۱}{۶}(-۸+۲)(۴-۲(-۲)+۲^۲)=-۱۲$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to-۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times(-۲)^۲}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

۲۳۵۹- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۰^+} f(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}$$

چون $\lim\limits_{x\to۰^+}(x^۲-۱)=-۱$، $\lim\limits_{x\to۰^+}(۲x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر ۲x مثبت‌اند، پس $\lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=-\infty$.

۲۳۶۰- گزینهٔ ۳ خارج از برنامهٔ درسی

۲۳۶۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{(-۳)^۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲۳۶۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}(-x^۲+ax+b)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۱}$$

$$-۴+۲a+b=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

همچنین،

$$f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}(-۲x+a)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $b=۵-۲a=-۱$.

۲۳۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲)) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

همچنین، $g(۲)=۵$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f'(۵)(-۳)=۶$، پس $f'(۵)=-۲$.

۲۳۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۸-\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$$

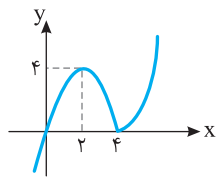
$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲}$، پس $f'(۲)=\frac{۹}{۴}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۳۶۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & x\le ۴\\ x^۲-۴x & x>۴\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(۴,۰)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$.



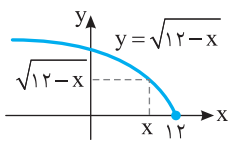
۲۳۶۶- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{۱۲-x}$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=x\sqrt{۱۲-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

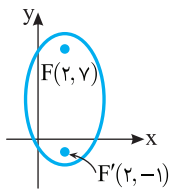
$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.

۲۳۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که



$$FF'=۲c\Rightarrow ۸=۲c\Rightarrow c=۴$$

از طرف دیگر، $۲b=۶$، پس $b=۳$ و در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow a=۵$$

به این ترتیب $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$.

۲۳۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با $n^۲$ دایره و ردیف‌هایی از ۱، ۲، ... و $n-۱$ دایره درست شده است. بنابراین

$$۹^۲+۱+۲+۳+\cdots+۸=۸۱+\frac{۸\times ۹}{۲}=۱۱۷$$

۲۳۶۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \qquad (۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$(x-۵)(x-۲۱)=۰\Rightarrow x=۵\,,\,x=۲۱$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$، پس مقادیر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۲۳۷۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A_1 پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سفید باشد و A_2 پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{5}{11}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{6}{11}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$=\frac{5}{11}\times\frac{6}{45}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{45}=\frac{90}{11\times45}=\frac{2}{11}$$

۲۳۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{2}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}}(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\cos^2 x$$

۲۳۷۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد. چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق باد برابر $v+5$ و در جهت مخالف باد برابر $v-5$ است. چون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{1}{v+5}$ و مدت زمان برگشت $\frac{1}{v-5}$ کیلومتر برساعت است. به این ترتیب،

$$\frac{1}{v+5}+\frac{1}{v-5}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}\Rightarrow\frac{2v}{v^2-25}=\frac{3}{20}$$

$$3v^2-40v-75=0\Rightarrow(3v+5)(v-15)=0\Rightarrow v=15$$

۲۳۷۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2}>\frac{x}{x-2}\Rightarrow\frac{7x-8}{(x+1)(x-2)}-\frac{x}{x-2}>0\Rightarrow\frac{7x-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)}>0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}<0$$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		$+$	ث ن	$-$	ث ن	$-$	۰	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-1,2)\cup(2,4)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{0-8}{0-0-2}>\frac{0}{0-2}\Rightarrow 4>0\ ,\quad \frac{27-8}{9-3-2}>\frac{3}{3-1}\Rightarrow\frac{13}{4}>\frac{3}{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۲۳۷۴- گزینهٔ ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\binom{5}{3}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\binom{4}{1}$ طریق). بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=10\times4\times4\times4=640$.

۲۳۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

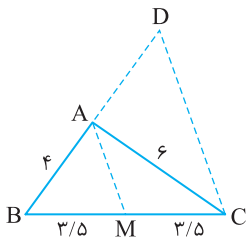
$$2a+\sqrt{3a+16}=1\Rightarrow\sqrt{3a+16}=1-2a\Rightarrow\sqrt{3a+16}^2=(1-2a)^2$$

$$3a+16=1-4a+4a^2\Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$(4a+5)(a-3)=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4}\ ,\ a=3$$

توجه کنید که $a=3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی در $a=-\frac{5}{4}$ تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ و $4a+9=4$.

۲۳۷۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطهٔ M، وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی $BD=2AB=8$



راه‌حل دوم چون $AM||DC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{4}{3/5}=\frac{BD}{7}\Rightarrow BD=8$$

۲۳۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=(\frac{1}{2})^2\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{AEF} \qquad (1)$$

همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

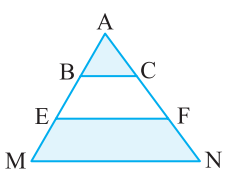
$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{2}{3})^2\Rightarrow S_{AMN}=\frac{9}{4}S_{AEF}$$

$$S_{AMN}-S_{AEF}=\frac{9}{4}S_{AEF}-S_{AEF}$$

$$S_{EFNM}=\frac{5}{4}S_{AEF} \qquad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

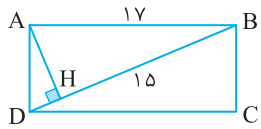
$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}}=\frac{1}{5}$$



۲۳۷۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^۲=BH\times BD\Rightarrow ۱۷^۲=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۷^۲}{۱۵}=\frac{۲۸۹}{۱۵}=۱۹\frac{۴}{۱۵}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{۴}{۱۵}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۲۳۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\quad \cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<۰$)

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$(-\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$$

۲۳۸۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=۳$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})=a+b(-\frac{۱}{۲})=a-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۳\\ a-\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=۱+۲\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۲$.

۲۳۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۳^{x^۲-۲}=۸۱^x=(۳^۴)^x=۳^{۴x}$.

بنابراین

$$x^۲-۲=۴x\Rightarrow x^۲-۴x-۲=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۶}\ ,\ x=۲+\sqrt{۶}$$

چون به ازای $x=۲-\sqrt{۶}$، مقدار $x-۲$ منفی می‌شود و $\log_۶(x-۲)$ به ازای آن تعریف نشده است، پس $x=۲-\sqrt{۶}$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=۲+\sqrt{۶}$ و در نتیجه

$$\log_۶(x-۲)=\log_۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\log_۶۶=\frac{۱}{۲}$$

۲۳۸۲- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{۲},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، پس $a=-۱$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ گذشته است، پس $y(۲)=۰$:

$$-۱+\log_b(۴-۱)=۰\Rightarrow\log_b۳=۱\Rightarrow b=۳$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-۱+\log_۳(۲x-۱)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=۱$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۱+\log_۳(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_۳(۲x-۱)=۲\Rightarrow۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

۲۳۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(-(x-۲))}=\lim_{x\to۲^-}\frac{x+۲}{-۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to۲^+}\frac{x+۲}{۲}=۲$$

چون $f(۲)=۲$، پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ فقط از راست پیوسته است.

۲۳۸۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A)=۲P(B)\ ,\quad P(A\cup B)=\frac{۷}{۹}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۷}{۹}$$

$$=P(A)+\frac{P(A)}{۲}-\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

$$(P(A))^۲-۳P(A)+\frac{۱۴}{۹}=۰\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}\ ,\ P(A)=\frac{۷}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۲۳۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{x}_A=۱۴$ و $\bar{x}_B=۱۴/۵$. بنابراین

$$\sigma_A^۲=\frac{۲^۲+۱^۲+۰^۲+۱^۲+۲^۲}{۵}=۲$$

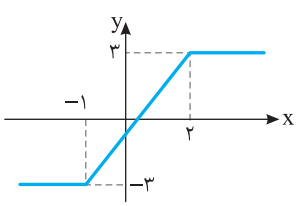
$$\sigma_B^۲=\frac{۲^۲+۱/۵^۲+۱^۲+۱/۵^۲+۳^۲}{۵}=۳/۷$$

چون $CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$ و $CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$. پس

$$CV_A<CV_B$$

یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۲۳۸۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۲۳۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos۳x+\cos x=۰\Rightarrow\cos۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

چون باید $\cos x\neq ۰$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۲۳۸۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

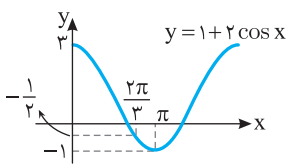
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳}{(۵x-۸)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\frac{-۳}{(۲)(۴+۲\times ۲+۲^۲)}=-\frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۲^۲}}{۲۰-۱۸}=-\frac{۱}{۸}$$

۲۳۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}(۱+۲\cos x)=۰$، و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$، مقادیر $۱+۲\cos x$ منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=-\infty$.



۲۳۹۰- گزینهٔ ۴ خارج از برنامهٔ درسی

۲۳۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$.

پس

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}+(۱)(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۲۳۹۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=f(۲)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۲۳۹۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۲۳۹۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

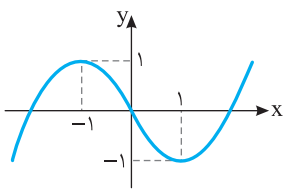
$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۴\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به‌صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۲۳۹۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\leq ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$.

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f به‌ترتیب نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$

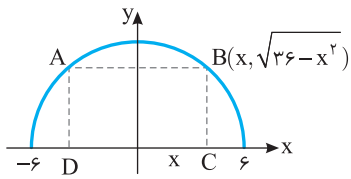


۲۳۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

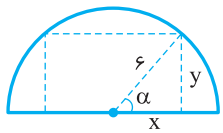
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل ۲x و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\le ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به‌دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۲۳۹۷- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y+۱=۰$ برابر است با

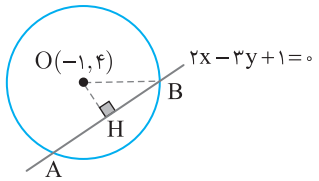
$$OH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

چون $HB=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۷}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۲۰\Rightarrow OB=۲\sqrt{۵}$$

یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=۲$ جواب معادلهٔ زیر هستند:

$$(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x=-۵\ ,\ x=۳$$



۲۳۹۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۲۳۹۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

اکنون فرض کنید $f^{-۱}(۸)=a$. در این صورت

$$f(a)=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}a-۴=۸\Rightarrow a=۳۰$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳۰)=b$. در این صورت

$$g(b)=۳۰\Rightarrow b^۳+b=۳۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$.

۲۴۰۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X)=P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C)$$

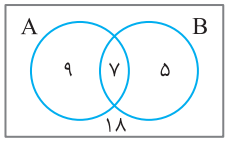
$$=\frac{۵}{۱۸}\times۰/۷+\frac{۷}{۱۸}\times۰/۸+\frac{۶}{۱۸}\times۰/۹=\frac{۳۵}{۱۸۰}+\frac{۵۶}{۱۸۰}+\frac{۵۴}{۱۸۰}=\frac{۱۴۵}{۱۸۰}=\frac{۲۹}{۳۶}$$

۲۴۰۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=۱۶$، $n(B)=۱۲$ و $n(A-B)=۹$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=۱۶-۹=۷$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۶+۱۲-۷=۲۱$$

بنابراین $۳۹-۲۱=۱۸$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۴۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۱۵]{۱۶}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۵}}\times۲^{\frac{۴}{۱۵}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^۲=۴$$

بنابراین $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۴۰۳- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<۰$ و $b^۲-۴ac<۰$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱-m<۰\Rightarrow m>۱$$

$$۴(m-۳)^۲+۴(۱-m)<۰\Rightarrow m^۲-۷m+۱۰<۰\Rightarrow(m-۲)(m-۵)<۰$$

$$۲<m<۵$$

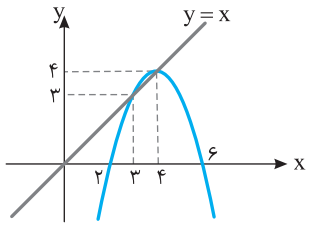
اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $۲<m<۵$ است. بنابراین اگر $۲<m<۵$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۲۴۰۴- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را سه واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵-۲$ به‌دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=-x^۲+۸x-۱۲$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد.

راه‌حل اول برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^۲+۸x-۱۲>x\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰\Rightarrow(x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

راه‌حل دوم به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(۳,۴)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل سوم در تابع $f(x)=-x^۲+۸x-۱۲$ مقادیر $f(۳)$ و $f(۴)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۳)=-۹+۲۴-۱۲=۳\ ,\quad f(۴)=-۱۶+۳۲-۱۲=۴$$

بنابراین در نقاط $x=۳$ و $x=۴$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۲۴۰۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+۹$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۲۰(t+۹)+۲۰t=t(t+۹)\Rightarrow t^۲-۳۱t-۱۸۰=۰$$
$$(t-۳۶)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳۶, t=-۵\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۲۴۰۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به‌صورت $۲x-۱+x+۲=۳$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{۲}{۳}$ است. اگر $x<\frac{۱}{۲}<-۲$، آن‌گاه معادله به‌صورت $-۲x+۱+x+۲=۳$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است. اگر $x\leq-۲$، آن‌گاه معادله به‌صورت $-۲x+۱-x-۲=۳$ در می‌آید که $x=-\frac{۴}{۳}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۰$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۴۰۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-۱})(۵)=g(۲)=۳\ ,\quad (gof^{-۱})(۲)=g(۱)=\text{تعریف نشده}$$
$$(gof^{-۱})(۶)=g(۴)=۲\ ,\quad (gof^{-۱})(۴)=g(۳)=۱\ ,$$

بنابراین

$$D_{gof^{-۱}}=\{۵\ ,۴,۶\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}}=D_g\cap D_{gof^{-۱}}-\{x|(gof^{-۱})(x)=۰\}=\{۴,۵\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{۴,۵\}$ است.

۲۴۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-۱\neq۰\Rightarrow x\neq۱ \\ ۹-x^۲\geq۰\Rightarrow x^۲\leq۹\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳ \end{cases}\Rightarrow D_f=[-۳,۱)\cup(۱,۳]$$

برای اینکه بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-۳,۱)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-۲,۳k+۲)\subseteq[-۳,۱)$. در این حالت باید $k-۲\geq-۳$ و $۳k+۲\leq۱$. پس $-۱\leq k\leq-\frac{۱}{۳}$.

حالت دوم $(k-۲,۳k+۲)\subseteq(۱,۳]$. در این حالت باید $k-۲\geq۱$ و $۳k+۲\leq۳$ که ممکن نیست.

بنابراین $k\in[-۱,-\frac{۱}{۳}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-۱,-\frac{۱}{۳})$ آمده است.

۲۴۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^۲-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}\ ,\quad f(۱)=۰\ ,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲\Rightarrow -A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$
$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴\Rightarrow -۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} A+B=-۱ \\ ۲A+B=-۲ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$.

در نتیجه

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=۶$$

۲۴۱۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$
$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$.

۲۴۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۲b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $۱+|\frac{a}{۲}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\pi=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow|b|=۱\ ,\quad ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|a|=۱$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=-۱$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲− باشد که فقط حالت $a+b=۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۴۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x-\sin x\cos x)$$
$$=(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$
$$(\sin x+\cos x-۱)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$
$$\begin{cases}\sin x+\cos x-۱=۰\\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow \sin ۲x=۲ \text{ (غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۲۴۱۳- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی $x+۱<۳<۲x-۱$.

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+۱<۳$ و $۳<۲x-۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+۱<۳\Rightarrow x<۲ \quad (۱) \quad , \quad ۳<۲x-۱\Rightarrow x>۲ \quad (۲)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲۴۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=۲a-۱$ و

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$
$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$
$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به‌دست آورید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۲۴۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=a+b \ , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x[x])=\lim_{x\to ۱^-} ۰=۰$$

تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر

$$f(-۱)=-a+b \ , \quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x[x])=\lim_{x\to(-۱)^+}(-x)=۱$$

تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته است، پس $-a+b=۱$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۰\\ -a+b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$.

۲۴۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۲}(۲x-۵)=-۱$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^۲+ax+b$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشد. پس $x^۲+ax+b$ باید برابر $(x-۲)^۲$ باشد، در نتیجه

$$x^۲+ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴, b=۴$$

پس $a+b=۰$.

۲۴۱۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=۲\\ g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=g'(۱)f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$.

۲۴۱۸- گزینهٔ ۴ خط $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $(۲,۱)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(۲)=۱$ و $g'(۲)=۳$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=g'(۲)f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$.

۲۴۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=۲$ علامت عبارت $x^۲-۲x$ منفی است، بنابراین $|x^۲-۲x|=۲x-x^۲$. در واقع تابع f به‌صورت زیر است

$$\begin{cases}x^۲-۲x & x\le ۰\\ ۲x-x^۲ & ۰<x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & x\ge ۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۰\\ ۲-۲x & ۰<x<۲\\ x+a & x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_+(۲)=f'_-(۲)$. بنابراین

$$۲+a=۲-۴\Rightarrow a=-۴$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)$$

بنابراین

$$۲+۲a+b=۴-۴\Rightarrow b=-۲a-۲=۶$$

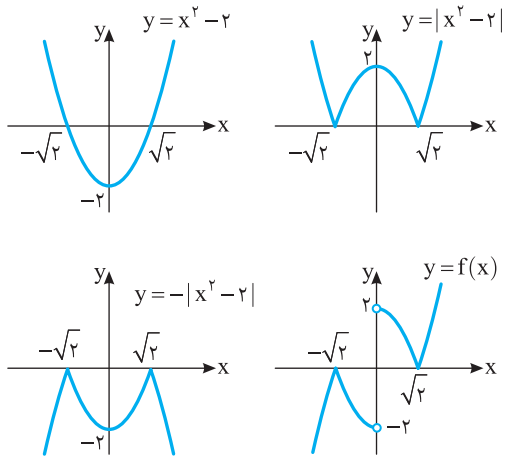
در نتیجه $a+b=۲$.

۲۴۲۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت x^3-2x در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f در سه نقطه مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}=\frac{|x||x^2-2|}{x}=\begin{cases}|x^2-2| & x>0\\ -|x^2-2| & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که در $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۲۴۲۱- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-2}{2}=5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}}\Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ به اندازهٔ $5-\frac{19}{4}=\frac{1}{4}$ بیشتر است.

۲۴۲۲- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x)=x(4x^2+3ax)=x^2(4x+3a)$$

$$f'(3)=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$f(x)=x^4-4x^3\Rightarrow f(-2)=48$$

۲۴۲۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید B_1 پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبهٔ اول، B_2 پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبهٔ دوم و A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد. طبق فرمول احتمال کل،

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

طبق فرض $P(B_1)=\frac{5}{12}$ و $P(B_2)=\frac{7}{12}$، زیرا لامپ را از بین ۵ لامپ از جعبهٔ اول و ۷ لامپ از جعبهٔ دوم انتخاب می‌کنیم. همچنین چون ۴ تا از ۲۰ لامپ جعبهٔ اول و ۳ تا از ۱۲ لامپ جعبهٔ دوم معیوب‌اند، پس $P(A|B_1)=\frac{4}{20}$ و $P(A|B_2)=\frac{3}{12}$.

در نتیجه

$$P(A)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{20}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{7}{48}=\frac{11}{48}$$

۲۴۲۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر A و B مستقل باشند، A و B' نیز مستقل‌اند. بنابراین

$$\begin{cases}P(A\cap B)=0/6\\ P(A\cap B')=0/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(A)P(B)=0/6\\ P(A)P(B')=0/2\end{cases}$$

$$P(A)P(B)+P(A)P(B')=0/8$$

$$P(A)\underbrace{(P(B)+P(B'))}_{1}=0/8\Rightarrow P(A)=0/8$$

$$\xrightarrow{P(A)P(B)=0/6}P(B)=\frac{0/6}{0/8}=\frac{3}{4}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$0/8+(1-\frac{3}{4})-0/2=0/8+0/25-0/2=0/85$$

۲۴۲۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد شرکت کردن امیر و B پیشامد شرکت کردن بهروز در مسابقهٔ علمی باشد. طبق فرض $P(A)=0/6$، $P(B)=0/3$ و $P(A|B)=0/5$. باید $P(A|B')$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$0/6=0/3\times0/5+(1-0/3)P(A|B')$$

$$0/6=0/15+0/7P(A|B')\Rightarrow P(A|B')=\frac{0/45}{0/7}=\frac{9}{14}$$

۲۴۲۶- گزینهٔ ۲ اگر فضای نمونه‌ای آزمایش را فقط برای مهرهٔ دوم تشکیل دهیم، ۱۰ مهره عضو این فضای نمونه‌ای هستند که ۶ تا از آن‌ها سفید است. بنابراین احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم ۰/۶ است.

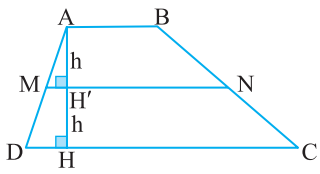
۲۴۲۷- گزینهٔ ۲ در ذوزنقهٔ ABCD نقاط M و N وسط‌های دو ساق هستند، پس بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه $MN=\frac{AB+DC}{2}$ و اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH'=HH'=h$.

بنابر فرض سؤال،

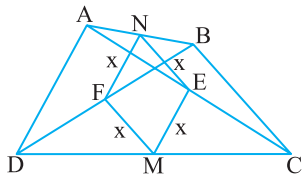
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}h(AB+MN)}{\frac{۱}{۲}h(MN+DC)}=\frac{۳}{۵}$$

$$۵AB+۵MN=۳MN+۳DC$$

$$۵AB-۳DC=-۲(\frac{AB+DC}{۲})\Rightarrow۶AB=۲DC\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{۱}{۳}$$



۲۴۲۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیر مجاور چهارضلعی ABCD و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی MENF لوزی به ضلع x باشد. بنابر قضیهٔ میان خط در مثلث نتیجه می‌گیریم $AD=۲ME=۲x$ و $BC=۲EN=۲x$. پس $BC=AD$. یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی ABCD برابرند.



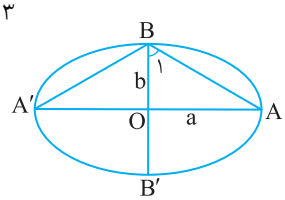
۲۴۲۹- گزینهٔ ۳ اگر AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک بیضی باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ABA' مورد سؤال است. می‌دانیم $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$ و بنابر فرض $e=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

پس

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=۱-\frac{b^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB می‌نویسیم

$$\tan\hat{B}_۱=\frac{a}{b}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\sqrt{۳}\Rightarrow\hat{B}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow A\hat{B}A'=۲\times۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$



۲۴۳۰- گزینهٔ ۲ داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

$$۱۰/۶,۱۰/۶,۱۱/۲,۱۱/۵,۱۱/۹,۱۲/۳,۱۲/۷,۱۲/۸,۱۳/۵,۳۰/۲$$

چون تعداد داده‌ها ۱۰تا است، پس میانه برابر میانگین داده‌های پنجم و ششم، چارک اول برابر دادهٔ سوم و چارک سوم برابر دادهٔ هشتم است. بنابراین

$$Q_۲=\frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲}=۱۲/۱,Q_۱=۱۱/۲,Q_۳=۱۲/۸$$

$$\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}=\frac{۱۱/۲+۱۲/۸-۲\times۱۲/۱}{۱۲/۸-۱۱/۲}=\frac{-۰/۲}{۱/۶}=-۰/۱۲۵$$