

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد، شهریور و دی ۹۸ و دی ۹۹ است هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان

سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، خرداد و شهریور ۹۹ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت، همه آن‌چه را

که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی (۳) نیاز دارید، در ۱۷ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا چهارم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

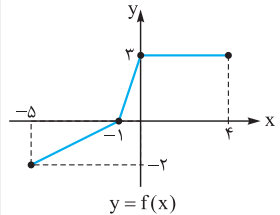
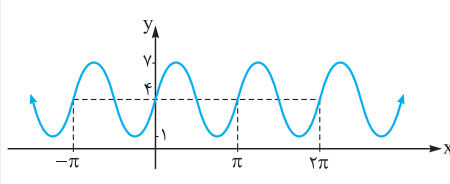


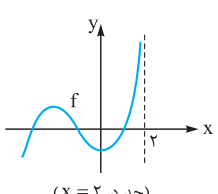
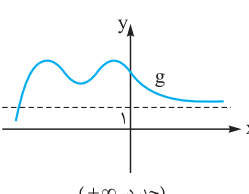
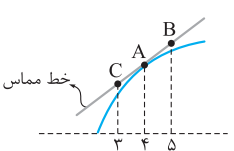
فهرست

بازم‌بندی درس ریاضی (۳)

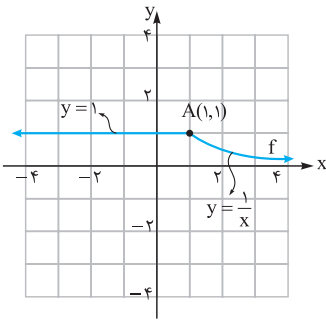
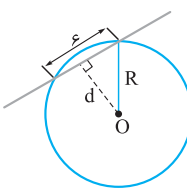
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول	۷	۲	۳
فصل دوم	۵	۲	۳
فصل سوم	۵	۲	۲
فصل چهارم	۳ تا صفحه ۷۶	۱	۵
	صفحه ۷۷ به بعد	۴	
فصل پنجم	-	۳/۵	۳
فصل ششم	-	۳/۵	۲/۵
فصل هفتم	-	۲	۱/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

صفحه نوبت	صفحه آزمون	صفحه پاسخ‌نامه
آزمون شماره ۱	۳	۲۴
آزمون شماره ۲	۵	۲۶
آزمون شماره ۳	۷	۲۸
آزمون شماره ۴	۸	۳۰
آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۹۸	۹	۳۲
آزمون شماره ۶ نهایی شهریور ۹۸	۱۱	۳۴
آزمون شماره ۷ نهایی دی ۹۸	۱۳	۳۵
آزمون شماره ۸ نهایی دی ۹۹	۱۵	۳۶
آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۰	۱۷	۳۸
آزمون شماره ۱۰ نهایی شهریور ۱۴۰۰	۱۹	۳۹
آزمون شماره ۱۱ نهایی خرداد ۹۹	۲۰	۴۰
آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۹۹	۲۲	۴۲
درس‌نامه توپ برای شب امتحان		۴۴

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
فصل اول				
۱	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید:</p> <p>الف) برای دو تابع f و g با شرط آن که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست.</p> <p>ب) بُرد تابع $2f(x-1)$ در حالت کلی با بُرد تابع $f(x)$ برابر نیست.</p>			۱
۱/۱۵	<p>شما از سال دهم با رسم نمودارهای مختلف سروکار داشتین. ولی آنگه بازم یادتون رفته چه طوری نمودار توابع رو رسم کنید به درس نامه آخر این کتاب به نیگا بندازین.</p>	<p>ابتدا نمودار تابع f را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$	۲	
۱/۲۵	<p>با رسم نمودار، وضعیت یکنوایی تابع $y = 2^x - 1$ را بررسی کنید، سپس در صورت امکان، ضابطه و نمودار تابع وارون آن را به دست آورید.</p>			۳
۱	 <p style="text-align: center;">$y = f(x)$</p>	<p>نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار توابع $y = -f(-x)$ و $y = \frac{1}{4}f(2x)$ را رسم کنید.</p>	۴	
۱	<p>برای دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ضابطه و دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.</p>			۵
۱/۲۵	<p>نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کرده سپس دامنه‌اش را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود، در نهایت با در نظر گرفتن این دامنه، ضابطه وارون f را به دست آورید.</p>			۶
فصل دوم				
۱/۱۵	<p>ما مقادیر $\sin 22/5^\circ$ و $\cos 22/5^\circ$ رو نمی‌دونیم ولی $\sin 45^\circ$ و $\cos 45^\circ$ رو بلدییم. پس از فرمول‌های PCL استفاده می‌کنیم.</p>	<p>برای زاویه $22/5^\circ$ مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت را بدست آورید.</p>	۷	
۱/۲۵	<p>معادله مثلثاتی $\cos x(4\cos x - 9) = -5$ را حل کنید. جواب‌هایی را که در بازه $[0, 4\pi]$ قرار دارند، تعیین کنید.</p>			۸
۰/۲۵	<p>در جای خالی، عبارت مناسب قرار دهید:</p> <p>جواب معادله $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ که در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ واقع می‌باشد، برابر با است.</p>			۹
۱		<p>نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.</p>	۱۰	
۱	<p>مثلثی با مساحت ۹ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۱۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟</p>			۱۱
فصل سوم				
۲/۱۵	<p>در معاسبه حد توابع کسری، اگر صورت کسر، عددی غیرصفر و مخرج کسر صفر شد باید نوع صفر رو تعیین کنید یعنی باید ببینید مخرج $+$ می‌شود یا $-$.</p>	<p>حاصل حدود زیر را به دست آورید:</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$</p> <p>ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 9t^3}{t^2 + 2t}$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{(x-1)^3}$</p>	۱۲	

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)																
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم		آزمون شماره ۱																	
۱	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="border: none;">x</td> <td style="border: none;">$-\infty \leftarrow$</td> <td style="border: none;">-1000</td> <td style="border: none;">-100</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">100</td> <td style="border: none;">1000</td> <td style="border: none;">$\rightarrow +\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$f(x) = \frac{1}{x}$</td> <td style="border: none;">$\bigcirc \leftarrow$</td> <td style="border: none;">\bigcirc</td> <td style="border: none;">\bigcirc</td> <td style="border: none;">\bigcirc</td> <td style="border: none;">\bigcirc</td> <td style="border: none;">\bigcirc</td> <td style="border: none;">$\rightarrow \bigcirc$</td> </tr> </table>		x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow +\infty$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\bigcirc \leftarrow$	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	$\rightarrow \bigcirc$	<p>۱۳ با توجه به جدول زیر می توان گفت:</p> <p>الف) حد تابع f وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر است با</p> <p>ب) حد f وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است با</p>	
x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow +\infty$													
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\bigcirc \leftarrow$	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	$\rightarrow \bigcirc$													
۱/۵	<p>الف)</p>  <p style="text-align: center;">(حد در $x=2$)</p>		<p>۱۴ برای هر شکل، یک عبارت حدی مناسب بنویسید.</p> <p>ب)</p>  <p style="text-align: center;">(حد در $+\infty$)</p>																	
فصل چهارم																				
۱/۵	 <p style="text-align: center;">خط مماس</p>		<p>۱۵ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 2$ و $f(4) = 18$. مختصات نقاط B و C را به دست آورید.</p>																	
۱/۵	<p>۱۶ با فرض آن که $f(x) = -x^2 + 4x$ باشد به کمک تعریف مشتق، مقدار $f'(3)$ را به دست آورید. سپس معادله خط مماس بر نمودار $f(x)$ را در نقطه $x = 3$ بنویسید.</p>																			
۲۰	جمع نمرات		موفق باشید																	

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۰		آزمون شماره ۹	
۰/۵	<p>۱ درست‌ی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.</p>			
۰/۵	<p>۲ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر است. ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.</p>			
۰/۷۵	<p>۳ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.</p>			
۱/۲۵	<p>۴ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد: الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.</p>			
۱	<p>۵ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.</p>			
۱	<p>۶ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.</p>			
۲	<p>۷ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x+1 }$ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$</p>			
۱	<p>۸ برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.</p>			

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)
نمره	آزمون شماره ۹			ردیف
۱	<p>با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست.</p> 			۹
۱/۵	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$</p>			۱۰
۱/۵	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.</p> <p>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم 35 m/s است.</p>			۱۱
۱/۵	<p>اگر نقطه $(2, 1)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.</p>			۱۲
۱/۵	<p>در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.</p>			۱۳
۱/۵	<p>کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ هستند:</p> <p>الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.</p> <p>ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)</p>			۱۴
۱/۵	<p>مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.</p> 			۱۵
۲	<p>اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 0.8 و نوزاد دختر 0.3 باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟</p>			۱۶
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) نادرست؛ مثلاً اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشند، با آن که $f \neq g$ ولی تساوی $f \circ g = g \circ f$ برقرار است و هر دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با هم برابر می‌شوند:

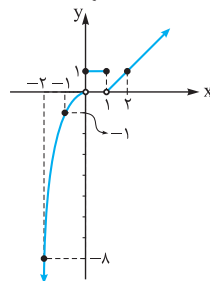
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$$

ب) درست، مثلاً اگر بُرد $f(x)$ برابر با $[0, 1]$ باشد بُرد $2f(x-1)$ برابر است با $[0, 2]$.
۲- ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن، تک تک نمودارها را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & -1 & -2 \\ y & 0 & -1 & -8 \end{array}$$

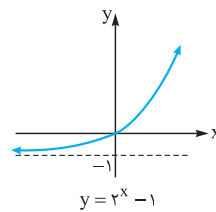
خط افقی $y=1$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$



واضح است که تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, 1]$ ثابت است.

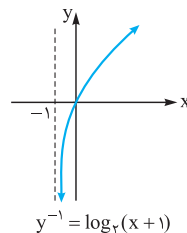
۳- با توجه به شکل مقابل، هر خط افقی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس این تابع، یک‌به‌یک است. لذا وارون پذیر هم می‌باشد. ضمناً تابع، اکیداً صعودی است. حال برای به دست آوردن تابع وارون، باید x را بر حسب y بنویسیم. ضمناً توجه دارید که وارون تابع نمایی، یک تابع لگاریتمی است و برعکس.



$$y = 2^x - 1 \Rightarrow 2^x = y + 1$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم}} \log_2 2^x = \log_2 (y+1) \Rightarrow x = \log_2 (y+1)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل اسم متغیرها به یکدیگر}} y^{-1}(x) = \log_2 (x+1)$$

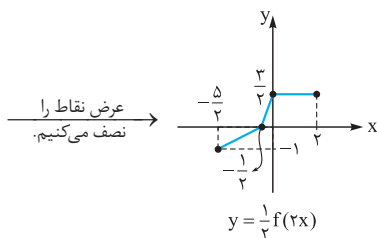
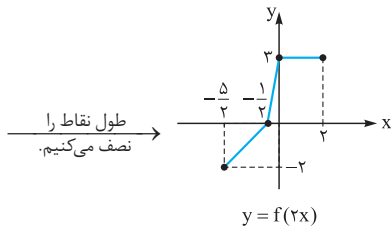
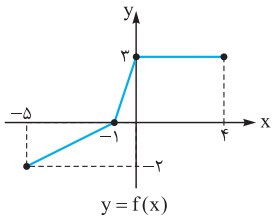


برای رسم نمودار y^{-1} باید نمودار $\log_2 x$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم؛ (یا می‌توانیم قرینهٔ نمودار $y = 2^x - 1$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم).

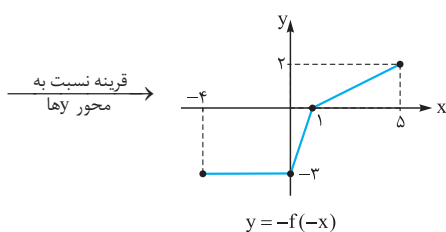
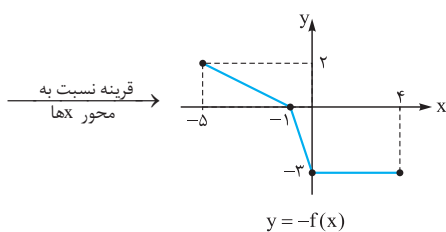
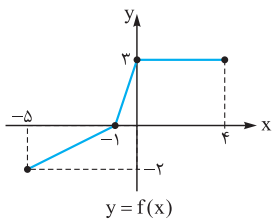
۴- دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-5, 4]$ می‌باشد. حالا برای یافتن دامنهٔ $f(2x)$ باید طول تمام

نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی دامنهٔ تابع $f(2x)$ به صورت $[-\frac{5}{2}, \frac{4}{2}]$ خواهد بود. زیرا:

$$-5 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{5}{2} \leq x \leq 2$$



حالا نمودار $y = -f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



۵- ابتدا دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست می‌آوریم. می‌دانید دامنهٔ توابع گویا به

شکل $\frac{\square}{\square}$ برابر است با {ریشه‌های معادلهٔ $\square = 0$ } و دامنهٔ توابع رادیکالی به

شکل $\sqrt{\square}$ برابر است با جواب نامعادلهٔ $\square \geq 0$.

(کسینوس یک زاویه نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد.)

$$t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \begin{cases} k=0 \rightarrow x = 0 \in [0, 4\pi] \\ k=1 \rightarrow x = 2\pi \in [0, 4\pi] \\ k=2 \rightarrow x = 4\pi \in [0, 4\pi] \end{cases}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad \text{مسئله ۹، } \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} x = \frac{\pi}{12}$$

۱۰- با توجه به شکل، $\max = 7$ و $\min = 1$ و همچنین دوره تناوب برابر با π است؛

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad \text{بنابراین:}$$

ضمناً توجه کنید که مقدار c همواره برابر است با میانگین \max و \min . لذا:

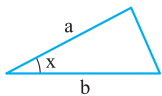
$$\max = 7, \min = 1 \Rightarrow c = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow |a| + 4 = 7 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به شکل a و b هر دو باید هم‌علامت باشند، لذا: $a = 3$ یا $b = 2$ و $a = -3$ یا $b = -2$

۱۱- اگر دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی را داشته باشیم (مانند شکل زیر) می‌توانیم

مساحت آن را به دست آوریم.



$$\Rightarrow \text{مساحت } S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin x$$

با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 18 \times \sin x = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد، یعنی ۲ مثلث با خواص ذکر شده وجود دارند.

(الف-۱۲)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

عامل صفرشونده $(x+2)$ است؛ پس صورت و مخرج را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم. البته مخرج به راحتی به کمک اتحاد جمله‌مشتربک قابل تجزیه است:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$

حالا صورت کسر را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 \quad | \quad x+2 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 - x + 1 \\ -(3x^2 + 6x) \\ \hline 5x + 1 \\ -(\Delta x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid \sqrt{x(1-x)} \neq \pm 1\}$$

طرفین به توان ۲
 $x(1-x) \neq 1$
 $\Delta < 0$
 $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, 1]$$

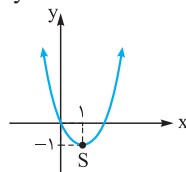
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1+g^2}{1-g^2} = \frac{1+(\sqrt{x(1-x)})^2}{1-(\sqrt{x(1-x)})^2}$$

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \quad \text{طول رأس) ۶-}$$

حالا عدد به دست آمده را در تابع سهمی قرار می‌دهیم تا عرض رأس هم به دست آید:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{x=1} y_S = 1^2 - 2(1) = -1 \quad \text{عرض رأس}$$

پس مختصات رأس به صورت $S(1, -1)$ است.



ضمناً سهمی \min دارد، چون ضریب x^2 مثبت است:

اگر مثلاً دامنه را به صورت $[1, +\infty)$ تعریف کنیم، f

یک‌به‌یک خواهد شد که در این صورت خواهیم داشت:

$$y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y+1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm \sqrt{y+1} \xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+1} \xrightarrow{\text{تبدیل اسم متغیرها به یکدیگر}} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

۷- نسبت‌های مثلثاتی $22/5^\circ$ را نمی‌دانیم ولی نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر آن یعنی 44° را می‌دانیم لذا از فرمول‌های 2α استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} \cos 44^\circ = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$2\sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}$$

$$\sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = 1 - \sin^2 22/5^\circ = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22/5^\circ = \frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$4 \cos^2 x - 9 \cos x + 5 = 0 \quad \text{۸-}$$

با فرض $\cos x = t$ خواهیم داشت:

$$4t^2 - 9t + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 - 20 = 61$$

$$\Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{8} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{8} = \frac{5}{4} > 1 \text{ غرق} \\ t = \frac{1}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-3x+5)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 5}{-2+1} = \frac{15}{-1} = -15$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-9t^3}{t^2+2t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-9t^3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-9t}{1} = -9 \times (-\infty) = +\infty \quad (\text{ب})$$

(پ) اگر به جای X ها ۱ بگذاریم، مخرج کسر صفر می‌شود، لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{f(1)}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{f(1)}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۱۳- به جای x در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ اعداد داده شده را جایگزین می‌کنیم تا ببینیم مقادیر تابع به سمت چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	$1000 \rightarrow$	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	$-0/001$	$-0/01$	تعریف نشده	$0/01$	$0/001 \rightarrow$	0

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۴- (الف) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط تابع f از هر عدد

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \text{مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، لذا:}$$

(ب) وقتی x به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع g به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \quad \text{می‌شوند، لذا:}$$

۱۵- در نقطه A خط بر منحنی تابع مماس است، لذا $f'(4)$ همان شیب خط مماس است، مختصات نقطه A هم که به شکل $(4, 18)$ می‌باشد، لذا ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \begin{matrix} A \\ \left. \begin{matrix} 4 \rightarrow x_1 \\ 18 \rightarrow y_1 \\ m=2 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \rightarrow y - 18 = 2(x - 4)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 8 + 18 \Rightarrow y = 2x + 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=3} y = 2(3) + 10 = 16 \Rightarrow C \begin{matrix} 3 \\ 16 \end{matrix} \\ \xrightarrow{x=5} y = 2(5) + 10 = 20 \Rightarrow B \begin{matrix} 5 \\ 20 \end{matrix} \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad -16$$

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x^2 - 4x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x-1)}{x-3} = -2$$

حالا به کمک $A(3, 3)$ و $m = -2$ معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 3)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{۴- الف}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 1) \in [1, +\infty)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &2x^2 - 1 \geq 1 \\ &\downarrow \\ &2x^2 \geq 2 \\ &\downarrow \\ &x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(\sqrt{2-1}) = g(1) = 2(1)^2 - 1 = 1 \quad \text{ب}$$

۵- با توجه به شکل می توان گفت: $T = 4\pi$ و $\max = 5$ و $\min = 1$

$$C = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$\max = c + |a| \Rightarrow 5 = 3 + |a| \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\xrightarrow{a > 0} \frac{2\pi}{a=2} T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

پس ضابطه تابع به صورت $y = 2 \cos(\pm \frac{1}{2}x) + 3$ می باشد.

تذکره به این علت گفتیم a باید مثبت باشد که نمودار داده شده، در متن سؤال، شبیه نمودار $\cos x$ است نه $-\cos x$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{۶- می دانیم:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} = \frac{0}{0} \quad \text{۷-}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } 2 + \sqrt{x-1}} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{[-\frac{1}{2}]}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{3 + \frac{1}{\infty}}{\frac{0}{\infty} - 5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$(A) \left| \frac{4}{24}, m \right|_{\frac{1}{5}} \quad \text{۸-}$$

$$\xrightarrow{y-y_1 = m(x-x_1)} y - 24 = 1/5(x-4)$$

$$y = 1/5x - 6 + 24 \Rightarrow y = 1/5x + 18$$

$$\xrightarrow{x=3} y = 1/5(3) + 18 = 22/5$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{x=5} y = 1/5(5) + 18 = 25/5$$

$$C \left| \frac{5}{25/5}, B \right|_{22/5}$$

پس می توان گفت:

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) درست ب) درست

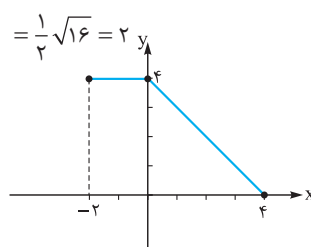
۲- الف) $(-1, 1)$ یا $[-1, 1]$ زیرا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		+	-	+
f		↗	↘	↗

ب) ۲؛ زیرا:

$$\text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4(-3)}$$

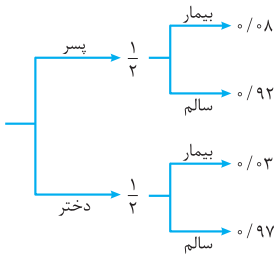


۳- برای رسم نمودار $y = f(-x) + 2$

ابتدا نمودار $f(x)$ را نسبت به محور لایها

قرینه می کنیم سپس نمودار حاصل را ۲

واحد به بالا انتقال می دهیم:



$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{100}\right) = \frac{8}{200} + \frac{3}{200} = \frac{11}{200}$$

-۱۶

۹- محاسبه مشتق چپ در A $y=1 \Rightarrow y'=0$

محاسبه مشتق راست در A $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$$\xrightarrow{x=1} y' = -\frac{1}{1^2} = -1$$

مشتق چپ در A با مشتق راست در A یکسان نشد لذا در نقطه A مشتق پذیر نیست. -۱۰

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\text{ب) } g'(x) = 6x(2x-5)^2 + 3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$$

$$h(t) = -5t^2 + 40t \quad \text{الف-۱۱}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [\delta, 8] = \frac{h(8) - h(\delta)}{8 - \delta} = \frac{0 - 7\delta}{3} = -2\delta \text{ m/s}$$

$$h'(t) = 3\delta \Rightarrow -10t + 40 = 3\delta \Rightarrow -10t = -5 \quad \text{ب}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\delta}{10} = \frac{1}{2} \text{ (s)}$$

۱۲- نقطه (۲, ۱) را در ضابطه تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + d$ قرار می‌دهیم:

$$1 = 2^2 + b(2)^2 + d \Rightarrow 4b + d = -7$$

از طرفی طول اکستریم نسبی در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=2} 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

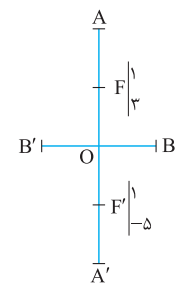
$$4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$$

۱۳- اگر طول و عرض این مستطیل‌ها را با x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\text{محیط} = 14 \Rightarrow (x+y) \times 2 = 14 \Rightarrow x+y = 7 \Rightarrow y = 7-x$$

$$\text{مساحت: } S = xy = x(7-x) = 7x - x^2 \Rightarrow S' = 0$$

$$\Rightarrow 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3.5 \Rightarrow y = 7 - x = 7 - 3.5 = 3.5$$



۱۴- الف) طول کانون‌های بیضی با هم مساوی است، پس بیضی قائم است:

$$FF' = 2C = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow C = 4$$

$$\text{مرکز بیضی } O \left(\frac{3-5}{2} \right) \Rightarrow O \left(-1 \right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\frac{a=6}{c=4}} 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20 \quad \text{ب)}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{20}$$

$$BB' = 2b = 2\sqrt{20}$$

۱۵- ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط را حساب می‌کنیم:

$$O \begin{cases} 2 \rightarrow x_1 \\ -3 \rightarrow y_1 \end{cases} \text{ و } 3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

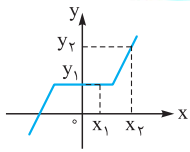
$$d = OH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) + (-4)(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

حالا رابطه فیثاغورس را در مثلث ایجادشده، می‌نویسیم:

$$R^2 = d^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 16 + 9 = 25$$

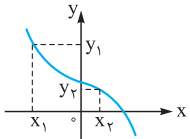
$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

درس نامه توپ برای شب امتحان



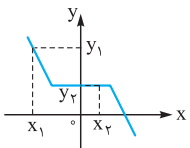
حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:
اگر $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$

اکنون به کمک تعاریف قبل، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.



اگر $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$

شکل (۱)



اگر $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$

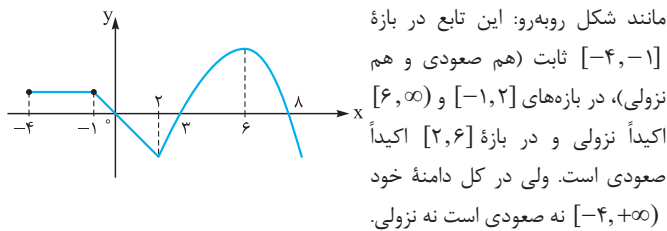
شکل (۲)

پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y = k$ می‌باشد. ($k \in \mathbb{R}$)

یکنواکردن تابع با محدود کردن دامنه

ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنه خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛



مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازه $[-4, -1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-1, 2]$ و $[6, \infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[2, 6]$ اکیداً صعودی است. ولی در کل دامنه خود $[-4, +\infty)$ نه صعودی است نه نزولی.

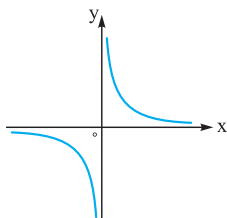
مثال: توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (فردا: ۹۰)

الف) $y = \frac{1}{x}$ ب) $y = -\frac{1}{x}$

پ) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$

نکته

الف) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow$



تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

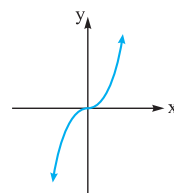
فصل ۱ تابع



درس: توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

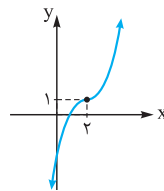
توابع چند جمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجه n نام دارد. (n عدد صحیح نامنفی و $a \neq 0$ است).
مثلاً تابع $f(x) = 5x^4 - 8x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۴ است.

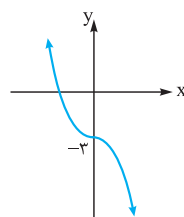


تابع درجه ۳: تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع درجه ۳ است ($a \neq 0$). البته در کتاب درسی، تابع $y = x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است: دامنه \mathbb{R} برد \mathbb{R}

مثال: نمودار توابع $y_1 = (x-2)^3 + 1$ و $y_2 = -x^3 - 3$ را به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کنید.



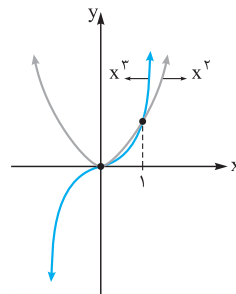
نکته: برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



برای رسم نمودار y_2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

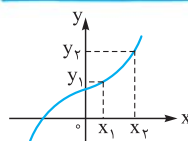
مقایسه نمودار $y = x^3$ و $y = x^2$

می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگتر از x^3 است، پس در بازه $(0, 1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیه x های مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.



در x های منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است، پس نمودار x^2 بالاتر است.

توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)



در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:
اگر $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$

$$پ) \left(\frac{g \circ f}{f \circ g}\right)(0) = \frac{(g \circ f)(0)}{f(0) - g(0)} = \frac{g(f(0))}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

به دست آوردن $g(x)$ با داشتن $(f \circ g)(x)$

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای x قرار می‌دهیم تا $f \circ g$ به دست آید. سپس جواب آن را با $f \circ g$ که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

(فرداد ۸۷)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{1+g(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x g(x) = 1 + g(x) \Rightarrow \underbrace{x g(x) - g(x)}_{\text{فاکتوراز } g(x)} = 1$$

$$\Rightarrow g(x)(x-1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

به دست آوردن $f(x)$ با داشتن $(f \circ g)(x)$

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x) = t$ ، سپس از این رابطه x را بر حسب t پیدا کرده و در رابطه $f \circ g$ که به ما داده شده قرار می‌دهیم. در نهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال: اگر $g(x) = 2x - 6$ و $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 7x$ ، آن‌گاه تابع $f(x)$ را به دست آورید.

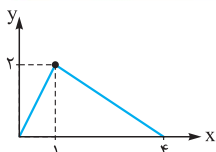
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(\underbrace{2x-6}_t) = 3x^2 - 7x$$

$$2x - 6 = t \Rightarrow 2x = t + 6 \Rightarrow x = \frac{t+6}{2}$$

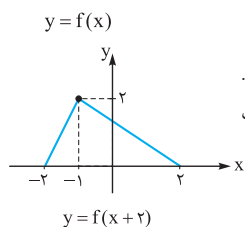
$$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t) = 3\left(\frac{t+6}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{t+6}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل } t \text{ به } x} f(x) = 3\left(\frac{x+6}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{x+6}{2}\right)$$

انتقال و تبدیل نمودارها



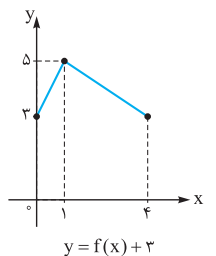
نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:



۱) برای رسم نمودار $y = f(x+k)$:

- اگر $k > 0$ نمودار را k واحد به سمت چپ می‌بریم.
- اگر $k < 0$ نمودار را k واحد به سمت راست می‌بریم.

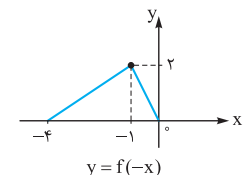
مثلاً برای رسم تابع $y = f(x+2)$ ، داریم:



۲) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$:

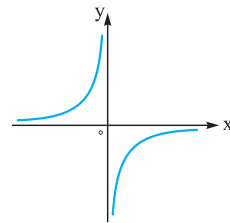
- اگر $k > 0$ نمودار را k واحد به سمت بالا می‌بریم.
- اگر $k < 0$ نمودار را k واحد به سمت پایین می‌بریم.

مثلاً برای رسم $y = f(x) + 3$ با توجه به نمودار اولیه f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم:



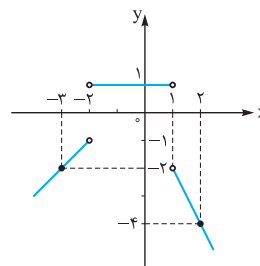
۳) برای رسم $y = f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):

ب) $y = -\frac{1}{x} \Rightarrow$



تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

$$پ) f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \Rightarrow \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \Rightarrow \end{cases}$$



پس تابع f در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی، در بازه $(-2, 1)$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) و در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای $f \circ g$ و $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)), D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)), D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال: اگر $f = \{(3, 4), (7, 8), (5, 2)\}$ و $g = \{(1, 3), (-2, 7), (5, 9)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

(فرداد ۸۹)

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ -2 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8 \\ 5 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} * \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 4), (-2, 8)\}$$

دقت کنید در دامنه f نیست! ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای $f \circ g$ می‌توان گفت:

$$(f \circ g)(1) = 4, (f \circ g)(-2) = 8$$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض‌اند. الف) دامنه توابع g و $f \circ g$ را تعیین کنید. ب) ضابطه $f \circ g$ را بیابید. پ) $(\frac{g \circ f}{f \circ g})(1)$ را محاسبه کنید.

ب) ضابطه $f \circ g$ را تعیین کنید. ب) ضابطه $f \circ g$ را بیابید. پ) $(\frac{g \circ f}{f \circ g})(1)$ را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} 4-x^2 \geq 0$

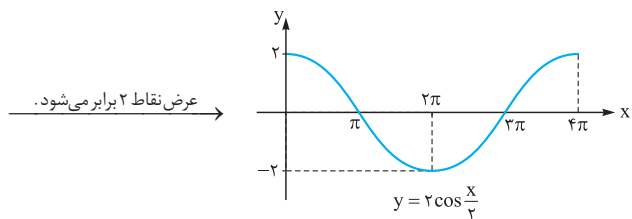
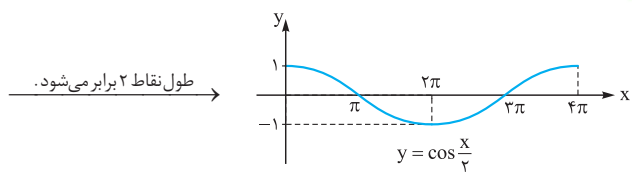
$$\Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = [-2, 2] - \{\pm\sqrt{3}\}$$

$$ب) (f \circ g)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{\sqrt{4-x^2} - 1}$$

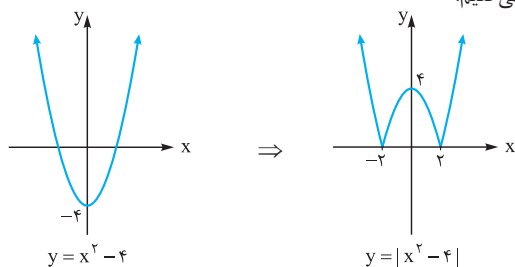


رسم نمودار |f|

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور x قرار دارند نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

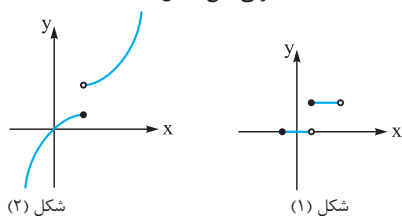
پاسخ: ابتدا نمودار $y = x^2 - 4$ را رسم کرده سپس قسمت پایین محور x را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم:



درس ۳: تابع وارون

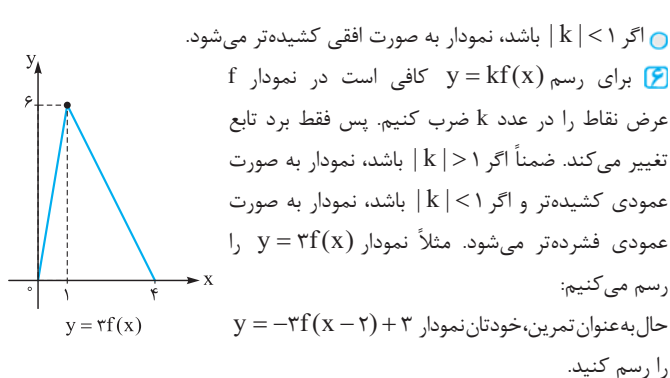
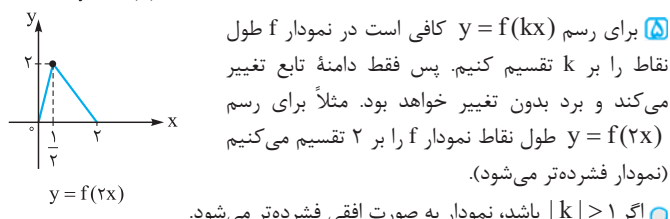
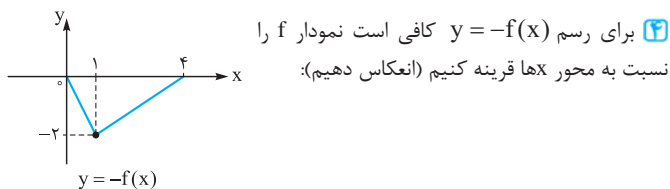
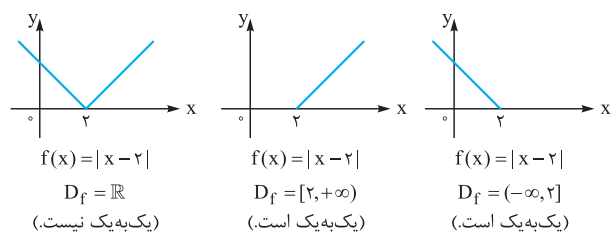
توابع یک‌به‌یک

هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتبها داده شود، این تابع وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. مثلاً تابع شکل (۱) یک‌به‌یک نیست ولی تابع شکل (۲) یک‌به‌یک است.



محدود کردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن تابع

گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x - 2|$ در دامنه‌اش یعنی \mathbb{R} یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه آن را به $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.)

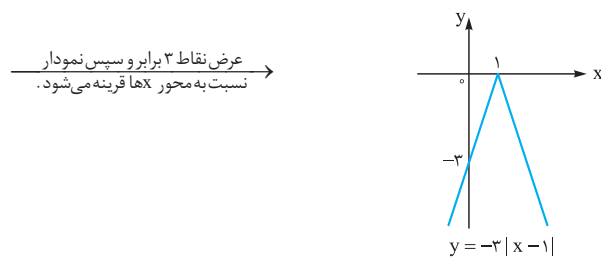
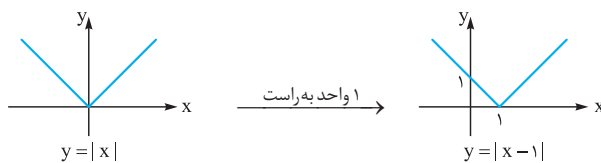


مثال: به کمک قوانین انتقال و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -3|x - 1| + 2$

ب) $y = \cos \frac{x}{2}$

پاسخ: الف) ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم:



ب) ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم:

