فهرست

فصل هفتم

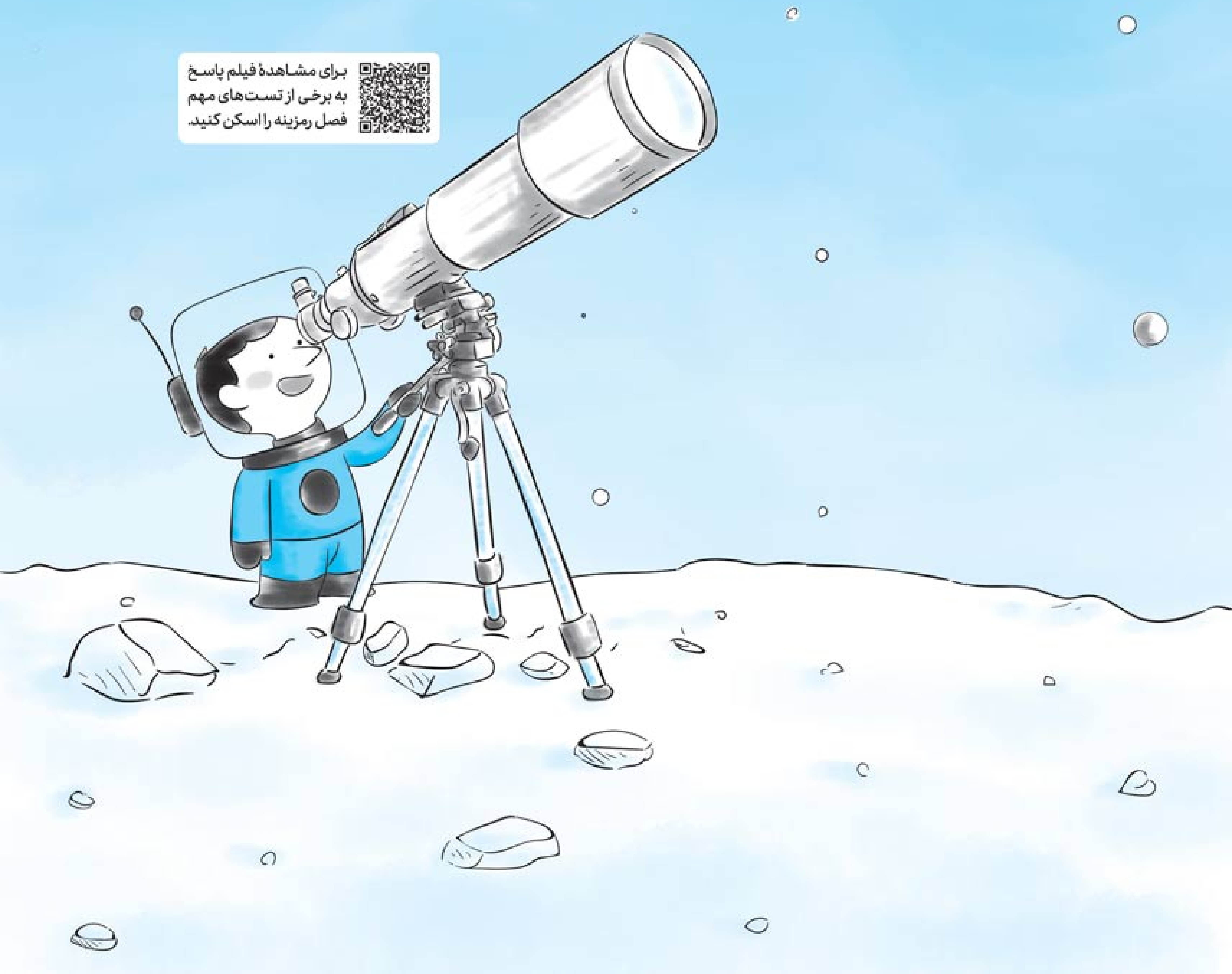
حد و پیوستگی

بررسی رفتار تابع در اطراف یک نقطه از دامنه‌اش، هدف اصلی این فصل است. در ادامهٔ فصل به بررسی پیوستگی و در نهایت حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت می‌پردازیم. با یادگیری این فصل، درک مفهوم مشتق و مسائل مربوط به آن آسان‌تر می‌شود.

رویکرد مؤلفان کتاب درسی: این فصل با حذف شدن مطالبی مانند مجانب‌های قائم و افقی ساده‌تر شده است. در کنکور نظام جدید، ۴ تست از این فصل طرح شده است.

مهم‌ترین مباحث: پیوستگی، قاعدهٔ هوپیتال و ابهام بی‌نهایت بر بی‌نهایت

برای مشاهدهٔ فیلم پاسخ به برخی از تست‌های مهم فصل رمزینه را اسکن کنید.



جلسهٔ اول

حد و پیوستگی

پایهٔ یازدهم

- **بخش‌پذیری**
- **تعریف حد**
  - حد راست
  - حد چپ
- **محاسبهٔ حد**
  - از طریق نمودار
  - حدهای کسری به صورت $\frac{0}{0}$
    - تجزیه
    - محاسبهٔ حدهای کسری شامل عبارات گنگ
      - حدهای رادیکالی با فرجهٔ ۲
      - حدهای رادیکالی با فرجهٔ ۳
      - حدهای رادیکالی با فرجهٔ ۴
  - توابع شامل جزء صحیح
  - توابع شامل قدر مطلق
  - توابع مثلثاتی
- **تعریف همسایگی**
  - همسایگی محذوف
  - همسایگی یک‌طرفه
- **قاعدهٔ هوپیتال**
- **پیوستگی**
  - در نقطه
  - روی بازه

بخش‌پذیری

برای تدریس این بحث می‌خواهیم سفری به دوران ابتدایی تا نهم دبیرستان داشته باشیم.

می‌خواهم عدد ۱۳ را به ۵ تقسیم کنم. مراحل تقسیم را می‌نویسم:

مقسوم   مقسوم‌علیه

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \cline{2-2} -10 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

باقی‌مانده   خارج قسمت

فکر می‌کنم این روش را در سال سوم ابتدایی یاد گرفتید. در سال چهارم ابتدایی به شما یاد دادند که تقسیم خود را امتحان کنید.

مقسوم باید برابر جمع باقی‌مانده با حاصل‌ضرب خارج قسمت در مقسوم‌علیه باشد، یعنی: باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

برای نمونه در مثال بالا می‌گوییم: $13 = 5 \times 2 + 3$

حالا از ابتدایی برویم به سال نهم! اگر یادتان باشد در این سال تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتید.

مثلاً یاد گرفتید که $x^3 + 2x - 1$ را بر $x+1$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & + & 2x & -1 & x+1 \\ \cline{5-5}
-(x^3 + x^2) & & & & x^2 - x + 3 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & + 2x & -1 & \\
-(-x^2 & -x) & & & \\ \cline{1-4}
 & & 3x & -1 & \\
 & & -(3x & +3) & \\ \cline{1-4}
 & & & -4 &
\end{array}$$

امتحان تقسیم را می‌نویسیم: $x^3 + 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x + 3) + (-4)$

چگونه می‌توانم باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + 2x - 1$ را بر $x+1$ بیابم بدون این‌که عملیات تقسیم را انجام دهم؟

به رابطهٔ امتحان تقسیم دقت کنید: $x^3 + 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x + 3) + (-4)$

مهم اگر x_0 روی دامنهٔ f تغییر کند، می‌توانیم x_0 را با متغیر x جایگزین کنیم. دراین‌صورت تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آن‌که حد فوق موجود باشد.

آقا زیر دیپلم صحبت کنید ما هم بفهمیم! من که هیچی نفهمیدم.

اجازه بدید یک مثال دیگر بزنم.

فرض کنید می‌خواهیم مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ را در نقطه‌ای مانند x_0 پیدا کنیم.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+(x_0+h)-(x_0^2+x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)+(x_0+h)-x_0^2-x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2+h}{h}==\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}2x_0+h+1=2x_0+1$$

اگر x_0 بتواند همهٔ مقادیر دامنهٔ $f(x)$ را اختیار کند، می‌توان جای x_0، x قرارداد، یعنی: $f'(x)=2x+1$

درواقع تابع مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ برابر $f'(x)=2x+1$ است. با دانستن ضابطهٔ تابع مشتق، دیگر نیازی به محاسبهٔ حد نیست.

مثلاً اگر بخواهیم مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ را در $x=3$ بیابیم، از فرمول $f'(x)=2x+1$ استفاده می‌کنیم. $f'(3)=2(3)+1=7$

یعنی دیگه لازم نیست حد رو حساب کنیم؟

خیر، اگر تابع مشتق را داشته باشیم فقط کافی است x را در آن جای‌گذاری کنیم.

دامنهٔ تابع مشتق

این تابع (مشتق) مانند هر تابعی دامنه‌ای دارد که می‌توان (آن) را این‌گونه تعریف کرد «دامنهٔ تابع به **استثنای** نقاطی که تابع در آن نقاط **مشتق‌پذیر نیست**.» به زبان ساده‌تر می‌توان نوشت:

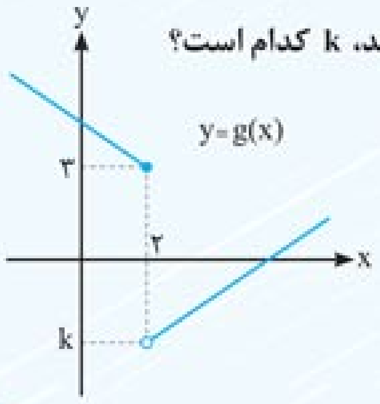
مهم $D_{f'}=D_f-\{x\,|$ در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست $f\}$

مثلاً تابع $f(x)=|x^2-4|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، در $x=\pm 2$ مشتق‌پذیر نیست، دامنهٔ تابع مشتق $f(x)$ برابر $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ است.

در تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$، مشتق در $x=1$ وجود ندارد و با توجه به این‌که دامنهٔ تابع، بازهٔ $[1,+\infty)$ است، دامنهٔ تابع مشتق برابر است با:

$$D_{f'}=D_f-\{x=1\}=[1,+\infty)-\{1\}=(1,+\infty)$$

تست آموزشی: **اگر دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=|x-2|g(x)$ برابر $\mathbb{R}$ و نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، k کدام است؟**



۱) -1

۲) -2

۳) -3

۴) -4

ازآن‌جایی‌که دامنهٔ تابع مشتق، برابر $\mathbb{R}$ است، تابع $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f در $x=2$ نیز مشتق‌پذیر است:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|g(x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}g(x)=k$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|g(x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-g(x)=-3$$

مشتق چپ و راست تابع در $x=2$ برابرند، پس $k=-3$ است.

اتحاد x^n-a^n

می‌خواهیم خارج‌قسمت تقسیم a^n-b^n را بر $a-b$ پیدا کنیم یا به‌عبارت‌دیگر می‌خواهیم a^n-b^n را تجزیه کنیم.

اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر را که به یاد دارید:

فلش‌بک

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

به نظر شما اگر من اتحاد $a^4 - b^4$ را بنویسم به چه صورتی خواهد شد؟

استاد پرانتز اول که تغییر نمی‌کنه ولی پرانتز دوم بزرگ‌تر می‌شه. من حدس میزنم از a^3 شروع بشه و یکی‌یکی از توان a کم شه و به توان b اضافه شه. تا جایی‌که دیگه a از بین بره، یعنی اتحادش بشه:

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

دقیقاً. با همین منطق می‌شه اتحاد $a^n - b^n$ را نوشت:

مهم

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$

مثال در تجزیهٔ $128a^7 - b^{14} = (2a - b^2) \times A$ ضریب جملهٔ شامل a^2 در عبارت A کدام است؟

۱) $2b^3$ ۲) $8b^3$ ۳) $2b^6$ ۴) $4b^8$

بله آقا، اگه $128a^7$ رو $(2a)^7$ و b^{14} رو $(b^2)^7$ درنظر بگیریم، می‌شه گفت:

$$128a^7 - b^{14} = (2a)^7 - (b^2)^7 = (2a - b^2)((2a)^6 + (2a)^5b^2 + (2a)^4(b^2)^2 + (2a)^3(b^2)^3 + (2a)^2(b^2)^4 + (2a)(b^2)^5 + (b^2)^6)$$

حالا پرانتز دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$64a^6 + 32a^5b^2 + 16a^4b^4 + 8a^3b^6 + 4a^2b^8 + 2ab^{10} + b^{12}$$

مشخص است که ضریب a^2 در این چندجمله‌ای، $4b^8$ است، پس گزینه «۴» درست است.

محاسبهٔ مشتق برخی از توابع

بچه‌های عزیز! محاسبهٔ حد برای تعیین مقدار مشتق کار دشوار و خسته‌کننده‌ای است، به همین دلیل قواعدی را به شما یاد می‌دهم که بدون استفاده از حد، تابع مشتق را بیابید.

۱) مشتق تابع ثابت، **صفر** است، مثلاً اگر $f(x) = 5$ باشد، $f'(x) = 0$ است.

۲) مشتق تابع $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{Z} - \{0\}$، برابر $f'(x) = nx^{n-1}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = x^5$ برابر $f'(x) = 5x^4$ است یا مثلاً مشتق $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ برابر $f'(x) = -3x^{-4}$ است. اجازه بدهید این فرمول را برایتان ثابت کنم.

مثال ثابت کنید مشتق در هر نقطه‌ای مانند x_0 از تابع $f(x) = x^n$ برابر $f'(x) = nx_0^{\,n-1}$ است.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^{\,n}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^{\,2} + \cdots + x_0^{\,n-1})}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^{\,2} + \cdots + x_0^{\,n-1} = x_0^{\,n-1} + x_0^{\,n-1} + x_0^{\,n-1} + \cdots + x_0^{\,n-1} = nx_0^{\,n-1}$$

اگه توان عددی غیرصحیح باشه چی؟ باز این رابطه درسته؟

بله، به شرط مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x) = x^P ; (P \in \mathbb{Q} - \{0\})$، مشتق آن $f'(x) = P.x^{P-1}$ است. مثلاً مشتق تابع $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ برابر $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ است.

۳) مشتق تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ برابر $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = \sqrt{5x-1}$ برابر $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$ است.

۴) مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$ برابر $f'(x) = \frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ برابر $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$ است.

۵) **ضریب** تأثیری در مشتق‌گیری **ندارد**! یعنی اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $g(x) = kf(x)$ (k عددی ثابت است) نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر و مشتق آن نیز برابر است با: $g'(x) = kf'(x)$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = \frac{-7}{3x^4} = -\frac{7}{3}x^{-4}$ برابر $f'(x) = -\frac{7}{3}(-4x^{-5}) = \frac{28}{3x^5}$ است.

۶ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $f \pm g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند.

۷ مشتق **مجموع** یا **تفاضل** دو تابع، برابر مجموع یا تفاضل مشتق دو تابع است.

مهم $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = 3x^2 - \frac{x^5}{15}$ برابر $f'(x) = 3(2x) - \frac{5x^4}{15} = 6x - \frac{x^4}{3}$ است.

این قاعده برای محاسبهٔ مشتق مجموع یا تفاضل سه تابع و بیشتر نیز معتبر است.

۸ برای محاسبهٔ مشتق **حاصل ضرب** دو تابع، از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

مهم $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3+1)'(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-x^2+7x-2)' \\ &= 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7) \end{aligned}$$

استاد اگه ضرب سه تابع باشه چی؟

مشتق ضرب سه تابع یا بیشتر، به این صورت محاسبه می‌شودکه: «مشتق تابع اول ضرب در سایر توابع به‌علاوهٔ مشتق تابع دوم ضرب در سایر توابع به‌علاوهٔ ...»

مهم $(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = (\frac{x^3}{2} - \frac{1}{5})(x^2 - \frac{7x}{3})\sqrt{\frac{x}{5}+2}$ برابر است با:

$$f'(x) = (\frac{3x^2}{2})(x^2 - \frac{7x}{3})\sqrt{\frac{x}{5}+2} + (\frac{x^3}{2} - \frac{1}{5})(2x - \frac{7}{3})\sqrt{\frac{x}{5}+2} + (\frac{x^3}{2} - \frac{1}{5})(x^2 - \frac{7x}{3})\frac{\frac{1}{5}}{2\sqrt{\frac{x}{5}+2}}$$

۹ برای محاسبهٔ مشتق **خارج قسمت** دو تابع، از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

مهم $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^3+2}$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x^3+2) - (3x^2)(3x^2-x)}{(x^3+2)^2}$$

۱۰ مشتق **تابع مرکب** fog از فرمول روبه‌رو قابل محاسبه است:

$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

مثال **اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + x - 3$ باشند، مشتق تابع fog(x) را بیابید.**

$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

با توجه به این‌که $g'(x) = 2x+1$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$، به محاسبهٔ مشتق خواسته شده می‌پردازیم:

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-3) = (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-3}}$$

آقا چطوری $f'(g(x))$ رو حساب کردید؟

اول ضابطهٔ $f'(x)$ را حساب کردیم، بعد به‌جای xهای اون $g(x)$ را قرار دادیم. این فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد:

مهم $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$

مثلاً اگر $f'(x) = 3x^2 - x$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f(\frac{1}{x})$ به‌صورت زیر است:

$$(f(\frac{1}{x}))' = (\frac{1}{x})' \cdot f'(\frac{1}{x}) = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}(3(\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x})$$

نکته با استفاده از فرمول مشتق تابع مرکب، می‌توان فرمول مشتق‌های توابع $f(x) = x^n$، $f(x) = \sqrt{x}$، $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ را تعمیم و گسترش داد.

مهم آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع و آهنگ تغییر لحظه‌ای با مفهوم مشتق در آن نقطه متناظرند. آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[a\,,b]$ برابر است با: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

تست آموزشی: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۴۴}$ نسبت به x روی بازه‌ای از $x=۵$ تا $x=۹$ کدام است؟

۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۰/۶$ ۴) $۰/۷$

اگر a را ۵ فرض کنیم دراین‌صورت h برابر ۴ می‌شود،یعنی $[a,a+h]=[۵,۵+۴]$ است. آهنگ تغییر متوسط را به این‌صورت می‌نویسیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(۵+۴)-f(۵)}{۴}=\frac{\sqrt{(۵+۴)^۲+۱۴۴}-\sqrt{۵^۲+۱۴۴}}{۴}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

برای حل این سؤال می‌توانستیم از همان ابتدا بدون پیدا کردن a و h بنویسیم:

$$\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=۰/۵$$

تست آموزشی: در تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[۲,۲/۰۲]$، از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۲$ چقدر بیشتر است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲۰۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۵۱}$ ۴) $\dfrac{۲}{۵۱}$

اول آهنگ تغییر متوسط رو پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(۲/۰۲)-f(۲)}{۲/۰۲-۲}=\frac{\frac{۲/۰۲}{۲/۰۲-۱}-\frac{۲}{۲-۱}}{۰/۰۲}=\frac{\frac{۲/۰۲}{۱/۰۲}-۲}{۰/۰۲}=\frac{\frac{۲/۰۲-۲/۰۴}{۱/۰۲}}{۰/۰۲}=-\frac{۰/۰۲}{۱/۰۲}\times\frac{۱}{۰/۰۲}=\frac{-۱}{۱/۰۲}=\frac{-۱}{\frac{۱۰۲}{۱۰۰}}=\frac{-۱۰۰}{۱۰۲}$$

بعد از تابع مشتق می‌گیریم و بهش ۲ میدیم تا آهنگ تغییر لحظه‌ای رو پیدا کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱(x-۱)-۱(x)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{-۱}{(۲-۱)^۲}=-۱$$

چون گفته آهنگ تغییر متوسط چقدر از آهنگ تغییر لحظه‌ای بیشتره، پس آهنگ آنی رو از متوسط کم می‌کنیم:

$$-\frac{۱۰۰}{۱۰۲}-(-۱)=-\frac{۱۰۰}{۱۰۲}+۱=\frac{-۱۰۰+۱۰۲}{۱۰۲}=\frac{۲}{۱۰۲}=\frac{۱}{۵۱}$$

آقا اون‌جا برای چی گفته نسبت به متغیر x ؟ تو قبلی‌ها نگفته بود!

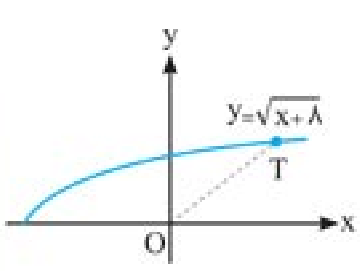
حواست باشه در توابع $y=f(x)$ که x متغیر مستقل است همیشه آهنگ تغییر، نسبت به متغیر x می‌باشد، چه در صورت سوال قید کند چه نکند.

تست آموزشی: نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x+۸}$ در حال حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبداء مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ای T در نقطهٔ $x=۷$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{۱۵}{۸}$ ۳) $\dfrac{۳}{۷}$ ۴) $\dfrac{۵}{۴}$

خوب نوبتی هم باشه، نوبت منه!

کاری نداره از y مشتق می‌گیریم و به جاش ۷ رو قرار میدیم.



نه! نه! در این تست آهنگ تغییر y را نخواسته که از آن مشتق بگیریم. آهنگ تغییر T را خواسته و باید از T مشتق بگیریم.

اصلاً T وجود نداره که از چی مشتق بگیریم؟

خوب خودمان آن را می‌سازیم!

ما بسازیمش! چطوری؟

سؤالات تستی

۱۱۸۶. چند نقطه روی خط $y=x+1$ یافت می‌شود که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ $B(1,2)$ و $A(0,1)$ برابر ۶ باشد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

۱۱۸۷. اگر $B(-2,-3)$ و $F(1,1)$ به ترتیب یک رأس ناکانونی و کانون یک بیضی قائم باشند، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟

۱) $\frac{32}{5}$　　۲) $\frac{18}{5}$　　۳) $\frac{25}{3}$　　۴) $\frac{32}{3}$

۱۱۸۸. اگر زاویهٔ بین خطی که کانون و رأس ناکانونی را به هم وصل می‌کند با محور کانونی 60° باشد، طول وتر کانونی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}b$　　۲) $3b$　　۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}b$　　۴) $\sqrt{3}b$

۱۱۸۹. اگر فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس به آن برابر ۱ باشد و فاصلهٔ کانون تا رأس ناکانونی برابر ۵ باشد، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟

۱) $\frac{32}{5}$　　۲) $\frac{18}{5}$　　۳) $\frac{25}{3}$　　۴) $\frac{32}{3}$

۱۱۹۰. دو رأس کانونی یک بیضی $A(7,1)$ و $A'(-3,1)$ هستند. اگر بیضی بر محور xها مماس باشد، فاصلهٔ کانونی آن چقدر است؟

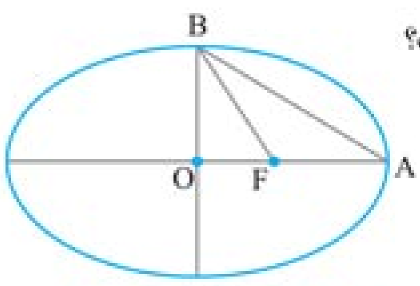
۱) $2\sqrt{26}$　　۲) $2\sqrt{6}$　　۳) $4\sqrt{6}$　　۴) ۸

۱۱۹۱. از نقطهٔ $M(5,3)$ چند مماس بر بیضی با طول قطر بزرگ ۶ و فاصلهٔ کانونی $2\sqrt{5}$ و مرکز $O(2,1)$ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) دو مماس عمود بر هم　　۴) دو مماس غیرعمود

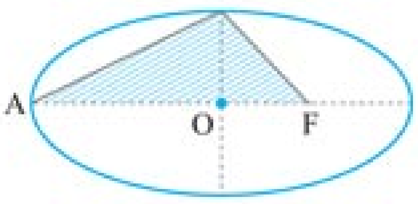
۱۱۹۲. نقطهٔ M روی محیط یک بیضی با طول قطر بزرگ ۱۰ و طول قطر کوچک ۶ تغییر مکان می‌دهد. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، بیشترین مساحت مثلث FMF' کدام است؟

۱) ۱۴　　۲) ۱۸　　۳) ۲۲　　۴) ۱۲



۱۱۹۳. در شکل مقابل اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{4}{5}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث OBF کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{1}{2}$



۱۱۹۴. اگر طول قطر بزرگ و کوچک بیضی ۶ و ۴ باشند، مساحت ناحیهٔ هاشور خورده برابر کدام است؟

۱) $3+\sqrt{7}$　　۲) ۴　　۳) $3+\sqrt{5}$　　۴) ۵

۱۱۹۵. در یک بیضی افقی به مرکز $O(3,1)$، اگر طول قطر کانونی آن برابر ۱۰ و طول فاصلهٔ کانونی آن برابر ۸ باشند، آن‌گاه حاصل جمع کمترین مقدار طول و بیشترین مقدار عرض نقاط روی محیط بیضی کدام است؟

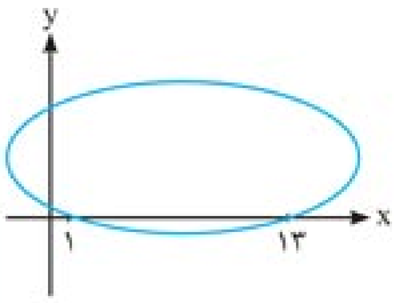
۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۱۹۶. در یک بیضی نقاط $A'(-2,1)$ و $A(6,1)$ دو سر قطر بزرگ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. محدودهٔ تغییرات y کدام است؟

۱) $[-1,3]$　　۲) $[-1,2]$　　۳) $[-3,1]$　　۴) $[-2,1]$

۱۱۹۷. خروج از مرکز یک بیضی قائم برابر $\frac{4}{5}$ است. اگر نقطهٔ $O(-4,-1)$ مرکز بیضی و طول یکی از رأس‌های ناکانونی بیضی برابر -1 باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۹　　۴) ۱۰

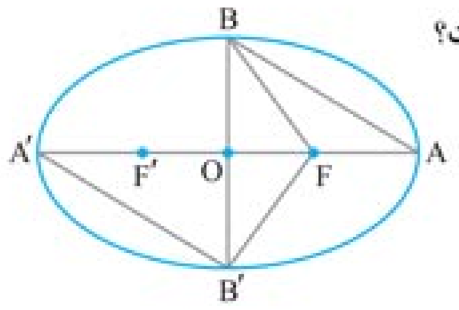


۱۱۹۸. در شکل مقابل، اگر $F(13,5)$ یکی از کانون‌های بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　۴) $\frac{2}{3}$

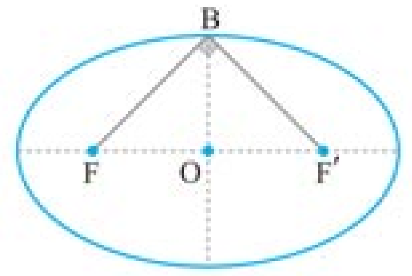
۱۱۹۹. اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۱}{۲}$ باشد، زاویهٔ بین خطی که از کانون و رأس ناکانونی می‌گذرد با محور کانونی کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۱۲۰°



۱۲۰۰. در شکل مقابل، مساحت مثلث $A'B'F$ ، ۵ برابر مساحت مثلث BFA است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$



۱۲۰۱. با توجه به شکل مقابل، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

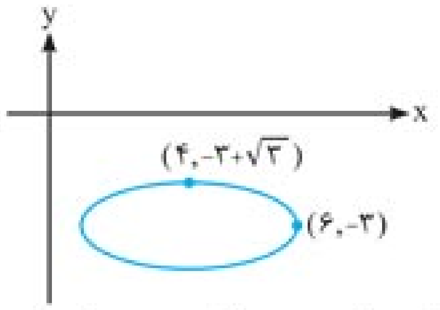
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۱۲۰۲. در یک بیضی فاصلهٔ مرکز تا کانون، $\sqrt{۳}$ برابر فاصلهٔ مرکز تا رأس ناکانونی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۰۳. اگر $F(-۱,۱)$ و $F'(-۳,۱)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$



۱۲۰۴. با توجه به شکل مقابل، مجموع فواصل هر نقطه از بیضی از دو کانون آن کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۲۰۵. نقطهٔ M روی محیط یک بیضی با طول قطر بزرگ ۱۰ و طول قطر کوچک ۶ تغییر مکان می‌دهد. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، محیط مثلث FMF' کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) مقدار ثابتی نیست.

۱۲۰۶. اگر بیشترین و کمترین فاصلهٔ دو مماس موازی که بر یک بیضی رسم می‌شوند، به‌ترتیب ۱۶ و ۸ باشند، فاصلهٔ کانونی بیضی کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۱۲۰۷. حاصل‌ضرب فاصلهٔ رأس کانونی یک بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}b$ ۲) $۲b$ ۳) $۲b^۲$ ۴) $b^۲$

۱۲۰۸. A و B دو نقطهٔ ثابت در صفحه هستند و نقطهٔ متحرک M در صفحه طوری حرکت می‌کند که $\frac{MA-۲MB}{MA-۴}=۳$. در این صورت بیشترین فاصلهٔ نقاط مکان هندسی نقطهٔ M از یکدیگر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۰۹. روی یک بیضی حداکثر چند نقطه مانند M وجود دارد به‌طوری‌که $F\widehat{M}F'=۹۰^\circ$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱۰. اگر مساحت چهارضلعی $BF'B'F$ در یک بیضی برابر ۲۴ و محیط آن برابر ۲۰ بوده، b و c به‌ترتیب نصف قطر کوچک و نصف فاصلهٔ کانونی باشند، آن‌گاه حاصل $(b-c)^۲$ کدام است؟ (B و B' نقاط دو سر قطر کوچک و F و F' کانون‌های بیضی هستند.) (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱۱. در یک بیضی به مرکز $O(۲,۰)$ و کانون‌های $F(۳,۰)$ و $F'(۱,۰)$ و قطر بزرگ ۴، مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی در هر رأس کانونی و غیر کانونی کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰ با کمی تغییر)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۰۵.

راهبرد می‌دانیم که برای حل نامعادلات قدرمطلقی به فرم $|A|<|B|$ یا $|A|>|B|$ می‌توان طرفین نامعادله را به توان ۲ رساند که قدرمطلق‌ها حذف شوند و پس از مرتب کردن نامعادله به دست آمده داریم:

$$|A|<|B| \xrightarrow{\text{به توان }2} A^2<B^2 \Rightarrow A^2-B^2<0 \Rightarrow (A-B)(A+B)<0$$

پس برای حل نامعادلهٔ $|A|<|B|$ کافی است نامعادلهٔ $(A-B)(A+B)<0$ را حل کنیم و برای حل نامعادلهٔ $|A|>|B|$ باید نامعادلهٔ $(A-B)(A+B)>0$ را حل کنیم.

$$\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|}>1 \xrightarrow[\text{چون مخرج باید مخالف صفر باشد.}]{x\neq -\frac{1}{2}} |x-2|>|2x+1|$$

$$\Rightarrow (x-2-2x-1)(x-2+2x+1)>0$$

$$\Rightarrow (-x-3)(3x-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow S=(-3,\frac{1}{3})-\{-\frac{1}{2}\}=(-3,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$$

۱۰۶.

ابتدا به کمک ویژگی $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ نامعادله را کمی ساده کرده و سپس با به توان ۲ رساندن طرفین، حل را ادامه می‌دهیم:

$$\left|\frac{2-x}{2x-3}\right|>1 \Rightarrow \frac{|2-x|}{|2x-3|}>1$$

$$\xrightarrow[x\neq\frac{3}{2}]{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} |2-x|>|2x-3|$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان }2} (2-x)^2>(2x-3)^2$$

$$\Rightarrow 4+x^2-4x>4x^2-12x+9 \Rightarrow 3x^2-8x+5<0$$

$$\Rightarrow \Delta=4 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{بعد از}} 1<x<\frac{5}{3}$$

حواست باشه در نامعادلهٔ داده‌شده، $x=\frac{3}{2}$ ریشهٔ مخرج است، پس دامنهٔ نامعادله به‌صورت $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ می‌باشد. با توجه به مجموعه جواب به‌دست‌آمده، $x=\frac{3}{2}$ در بازهٔ $(1,\frac{5}{3})$ قرار دارد که احتمالاً طراح محترم به این مطلب توجه نکرده‌اند، پس جواب کلی این نامعادله به‌صورت $(1,\frac{5}{3})-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ می‌باشد که در بین گزینه‌ها نیست و ما همان جواب بازهٔ $(1,\frac{5}{3})$ را انتخاب کرده‌ایم.

۱۰۷.

روش اول:

$$2x+1-|x-2|>|\underbrace{x^2+1}_{+}| \Rightarrow 2x+1-|x-2|>x^2+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 2:\ 2x+1-x+2>x^2+1 \Rightarrow \underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}<0 \\ \Rightarrow -1<x<2 \xrightarrow[x\geq 2\text{ با}]{\text{اشتراک}} x\in\varnothing \\ x<2:\ 2x+1+x-2>x^2+1 \Rightarrow \underbrace{x^2-3x+2}_{(x-2)(x-1)}<0 \\ \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow[x<2\text{ با}]{\text{اشتراک}} 1<x<2 \end{cases}$$

جواب نهایی، اجتماع دو جواب $\varnothing$ و $1<x<2$ است که برابر $1<x<2$ می‌شود.

روش دوم: **فرمول ممنوع** (عددگذاری): ابتدا عددی مانند $\frac{3}{2}$ را در رابطهٔ اصلی قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{3}{2} \Rightarrow 2(\frac{3}{2})+1-|\frac{3}{2}-2|>|\frac{9}{4}+1|$$

$$\Rightarrow 4-\frac{1}{2}>\frac{13}{4} \Rightarrow \frac{7}{2}>\frac{13}{4} \Rightarrow \frac{14}{4}>\frac{13}{4} \quad ✓$$

چون $x=\frac{3}{2}$ در رابطه صدق کرد پس گزینه‌های «۱» و «۲» که فاقد $\frac{3}{2}$ هستند، رد می‌شوند. از طرفی $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ «۳» که شامل صفر می‌باشد، رد می‌شود و لذا گزینهٔ «۴» صحیح است.

۱۰۸.

روش اول:

$$-1<\frac{3x-1}{x-3}<3 \xrightarrow{-1} -2<\frac{3x-1}{x-3}-1<2$$

$$\Rightarrow -2<\frac{3x+1-x+3}{x-3}<2 \Rightarrow -2<\frac{2x+4}{x-3}<2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2(x+2)}{x-3}\right|<2 \xrightarrow{\div 2} \left|\frac{x+2}{x-3}\right|<1$$

$$\Rightarrow |x+2|<|x-3| \xrightarrow{\text{توان }2} x^2+4x+4<x^2-6x+9$$

$$\Rightarrow 10x<5 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

روش دوم: **فرمول ممنوع** با توجه به گزینه‌ها، $x=2$ را در نامعادله بررسی می‌کنیم:

$$-1<\frac{3x+1}{x-3}<3 \xrightarrow{x=2} -1<\frac{7}{-1}<3 \Rightarrow \underbrace{-1<-7}_{\text{غیرقابل قبول}}<3$$

پس $x=2$ جزء جواب‌های مسأله نباید باشد، لذا گزینهٔ «۱» پاسخ صحیح است.

۱۰۹.

وقتی نمودار تابع $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار تابع $y=2x+|x|$ است، یعنی:

$$-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}>2x+|x|$$

برای حل این نامعادله باید یک بار $x\geq 0$ و بار دیگر $x<0$ فرض کنیم.

$$x\geq 0 \Rightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}>2x+x$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{7}{2}x-\frac{9}{2}<0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2+7x-9<0 \Rightarrow \Delta=121$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-7-11}{4}=-\frac{9}{2} \\ x_2=\frac{-7+11}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{9}{2}<x<1$$

اشتراک با شرط $x \geq ۰$، بازهٔ $[۰,۱)$ است.

$$x<۰ \Rightarrow -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x-x \Rightarrow x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۹}{۲}<۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲+۳x-۹<۰ \Rightarrow \Delta=۸۱$$

$$\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۸۱}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۳-۹}{۴}=-۳ \\ x_۲=\frac{-۳+۹}{۴}=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow -۳<x<\frac{۳}{۲}$$

اشتراک با شرط $x < ۰$، بازهٔ $(-۳,۰)$ است.

اجتماع مجموعهٔ جواب‌ها $-۳ < x < ۱$ و مرکز بازه -۱ است.

.۱۱۰

بالاتر بودن تابع $y=\sqrt{۵+۴x-x^۲}$ از $y=|x-۳|+۲$، یعنی حل نامعادلهٔ $\sqrt{۵+۴x-x^۲}>|x-۳|+۲$. اکنون بایـد این نامعادلـه را از روش تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و حالت‌بندی آن حل کنیم.

الف) $x \geq ۳ \xrightarrow[|x-۳|=x-۳]{(x-۳)\geq ۰} \sqrt{۵+۴x-x^۲}>x-۱$

$$\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{مجذور}} ۵+۴x-x^۲>x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۶x-۴<۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۲<۰ \Rightarrow \Delta=۱۷$$

$$\Rightarrow \frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \xrightarrow[\text{اولیهٔ } x\geq ۳]{\text{اعمال شرط}} ۳\leq x<\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \quad ①$$

ب) $x \leq ۳ \xrightarrow[|x-۳|=-x+۳]{(x-۳)\leq ۰} \sqrt{۵+۴x-x^۲}>-x+۵$

$$\xrightarrow{\text{مجذور طرفین}} ۵+۴-x^۲>x^۲-۱۰x+۲۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۴x+۲۰<۰ \Rightarrow x^۲-۷x+۱۰<۰ \Rightarrow ۲<x<۵$$

$$\xrightarrow[\text{اولیهٔ } x\leq ۳]{\text{اعمال شرط}} ۲<x\leq ۳ \quad ②$$

$$\Rightarrow \text{جواب اصلی} = A\bigcup B=[۳,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})\bigcup(۲,۳]=(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})$$

.۱۱۱

$(x+۱)f(x)\geq ۰ \Rightarrow$

x	$-\infty$		-۳		-۱		۲		$+\infty$
$x+۱$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$(x+۱)f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow D=(-\infty,-۳]\bigcup[۲,+\infty)\bigcup\{-۱\} \Rightarrow \text{تابع غیرنقطه‌ای} \Rightarrow \mathbb{R}-(-۳,۲)$$

.۱۱۲

با توجه به شکل $A \subseteq B$ است، بنابراین $A-B=\varnothing$ است و نیازی به محاسبهٔ این عبارت به کمک اعضا نیست.

$$C-A=\{۱,۲,۳,۴,۷,۸,۹\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۷,۸,۹\}$$

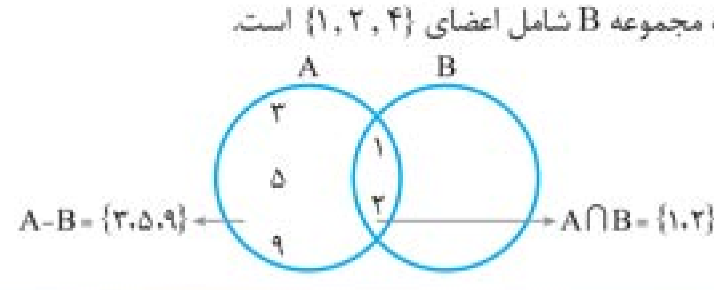
همان‌طور که می‌بینید این مجموعه پنج عضو دارد.

.۱۱۳

بهتر است حل این سؤال را به کمک شکل شروع کنیم.

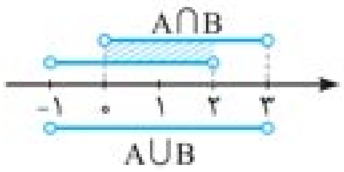
اکنون چون $A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۹\}$ می‌باشد، متوجه می‌شویم که عدد ۴ تنها عددی است که فقط عضو B است.

در نتیجه مجموعه B شامل اعضای $\{۱,۲,۴\}$ است.



.۱۱۴

ابتدا اجتماع و اشـــتراک دو مجموعه را می‌یابیم. برای این کار بهتر است به نمودار محور طول‌ها بپردازیم.



$A\bigcap B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰<x<۲\}$

،

$A\bigcup B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x<۳\}$

حال کافی است اشتراک را از اجتماع کم کنیم:

$$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x\leq ۰ \text{ یا } ۲\leq x<۳\}$$

.۱۱۵

توجه کنید اگر از اعضای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ قدرمطلق بگیریم، همهٔ اعضای آن مثبت یا صفرمی‌شوندیعنی $|\mathbb{Z}|=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\}$ بنابراین:

$$B=\{۲^{|x|}\,|\,x\in\mathbb{Z}\}=\{۲^۰,۲^۱,۲^۲,۲^۳,\ldots\}=\{۱,۲,۴,۸,\ldots\}$$

از طرفی در مورد A داریم:

$$A=\{۲^x\,|\,x\in\mathbb{N}\}=\{۲^۱,۲^۲,۲^۳,\ldots\}=\{۲,۴,۸,\ldots\}$$

و در نتیجه $B-A$ به مجموعهٔ تک عضوی $\{۱\}$ تبدیل می‌شود.

.۱۱۶

مجموعه‌های $(-۱,۲)$ و $[-۱,۲)$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $[-۱,۲]$. توجه کنید مجموعهٔ $\{\varnothing\}$، تهی نیست!

.۱۱۷

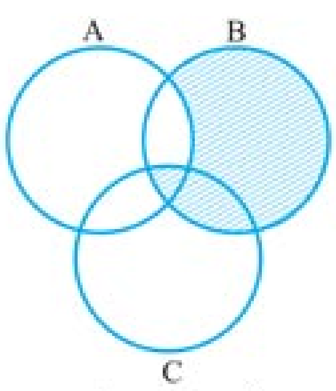
فلش‌بک تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی ۲^n است.

اگر به اعضای یک مجموعهٔ n عضوی یک عضو دیگر اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+۱$ می‌گردد. پس اگر قبلاً تعداد زیر مجموعه‌ها ۲^n بوده، تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ جدید $۲^{n+۱}$ است.

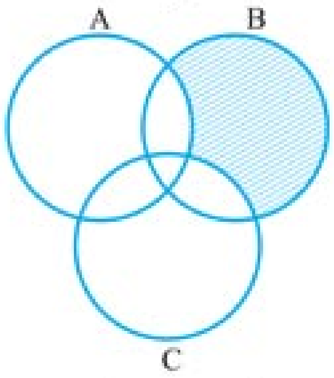
$$\frac{۲^{n+۱}}{۲^n}=\frac{۲^n\times ۲^۱}{۲^n}=۲$$

.۱۱۸

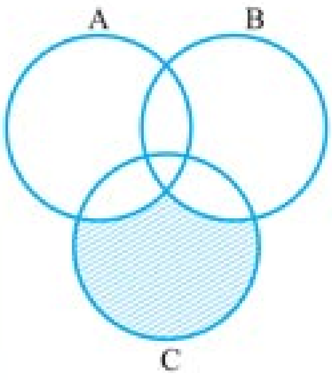
با توجه به این‌که همهٔ گزینه‌ها شـــامل $A\bigcap B\bigcap C$ یعنی قسمت مشترک سه مجموعه هستند، بهتر است در هر گزینه فقط قسمت‌های متفاوت را بررسی کنیم.



گزینهٔ ۱: $B-(A-C)$

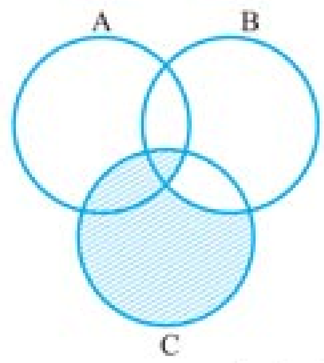


گزینهٔ ۲: $(B-A)-C$



گزینهٔ ۳: $(C-B)-A$

گزینه ۴: $C-(B-A)$

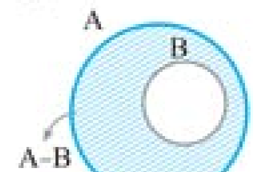


با توجه به نمودارها مشخص می‌گردد گزینهٔ «۲» صحیح است.

۱۱۹.

از آن‌جایی‌که $A\cup B=A$ است، بنابراین B زیر مجموعهٔ A است. حال به کمک شکل، حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.

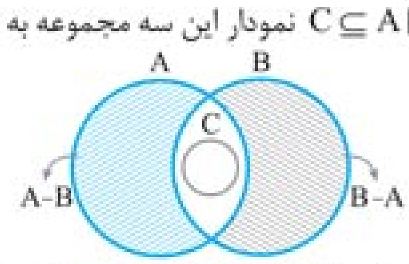
از آنجاکه $B\subseteq A$، پس $A\cap B=B$ است. کافی است $A-B$ را هاشور بزنیم.



همان‌طور که می‌بینید اجتماع قسمت هاشورخورده با $A\cap B$ که همان B است، مجموعهٔ A را به‌طور کامل پوشش می‌دهد و $(A\cap B)\cup(A-B)=A$ می‌شود.

۱۲۰.

با توجه به این‌که $C\subseteq A\cap B$ نمودار این سه مجموعه به صورت مقابل است:



همان‌طور که می‌بینید $C\not\subset A-B , C\not\subset B-A$ و $C\not\subset(B-A)\cup(A-B)$ می‌باشند و فقط C می‌تواند زیر مجموعهٔ $A\cup B$ باشد.

۱۲۱.

با توجه به مطالب درسنامه می‌توان گفت قسمت «الف» و «پ» درست هستند ولی قسمت‌های «ب» و «ت» درست نیستند، یعنی در مورد $A-B=\varnothing$ نمی‌توان قطعاً گفت $A=B$ است چرا که مثلاً ممکن است $A\subseteq B$ باشد.

همین‌طور از این‌که قسمت مشترک A و B با قسمت مشترک A و C برابر است نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

نکته نمی‌توان از طرفین یک تساوی چیزی را خط زد، یعنی:

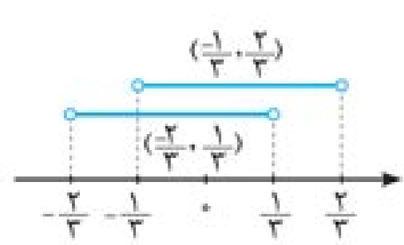
$\cancel{A}\cap C=\cancel{A}\cap B \not\Rightarrow C=B$

۱۲۲.

$$A_3=(\frac{-2}{3},\frac{3-2}{3})=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$$

$$A_6=(\frac{-2}{6},\frac{6-2}{6})=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

$$(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$



۱۲۳.

$$\begin{cases}-a>1\Rightarrow a<-1\\ 2a+7>-a\Rightarrow a>-\frac{7}{3}\end{cases}\xrightarrow{\cap}-\frac{7}{3}<a<-1$$

یا

$$\begin{cases}2a+7<-1\Rightarrow a<-4\\ 2a+7>-a\Rightarrow a>-\frac{7}{3}\end{cases}\xrightarrow{\cap}\varnothing$$

جواب $-\frac{7}{3}<a<-1$ است که فقط یک عدد صحیح در آن وجود دارد.

۱۲۴.

ابتدا باید کمترین و بیشترین مقادیر بازهٔ $(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ را به x در عبارت $\frac{3-2x}{2}$ بدهیم تا بیشترین و کمترین مقدار عبارت $\frac{3-2x}{2}$ پیدا شود.

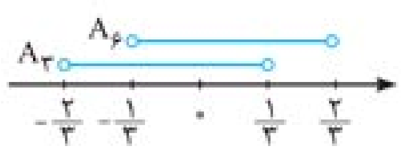
$$x=-\frac{1}{2}:\frac{3-2(-\frac{1}{2})}{2}=\frac{3+1}{2}=2$$

$$x=\frac{5}{2}:\frac{3-2(\frac{5}{2})}{2}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

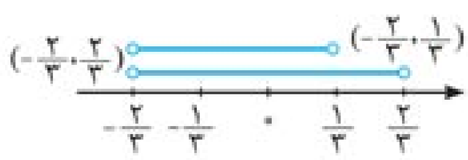
بنابراین بیشترین و کمترین مقادیر عبارت مطلوب به ترتیب ۲ و ۱- می‌باشند، پس بازهٔ حاصل $[-1,2)$ است.

تذکر از آن‌جایی‌که خود $x=-\frac{1}{2}$ در بازهٔ $(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ وجود ندارد پس عدد ۲ هم که حاصل قرار دادن $x=-\frac{1}{2}$ در عبارت $\frac{3-2x}{2}$ بوده، وجود ندارد و بازه در ۲ باید باز باشد.

۱۲۵.



$$A_3=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}),\ A_6=(-\frac{2}{6},\frac{4}{6})=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

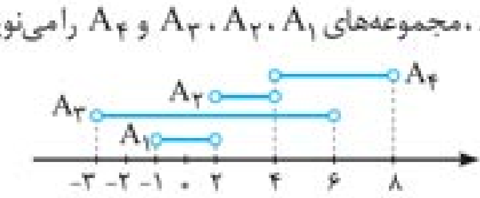


$$A_3\cup A_6=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})\Rightarrow(A_3\cup A_6)-A_3$$

$$=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})-(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})=[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

۱۲۶.

با توجه به تعریف A_n، مجموعه‌های A_1، A_2، A_3 و A_4 را می‌نویسیم:



$$A_1=(-1,2),\ A_2=(2,4),\ A_3=(-3,6),\ A_4=(4,8)$$

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=(-3,8)$$

اعداد صحیح این بازه عبارتند از:

$$\{-2,-1,0,1,2,\dots,7\}$$

پس ۱۰ عدد صحیح متعلق به این بازه است.

۱۲۷.

با استفاده از قوانین مجموعه‌ها داریم و توجه به این‌که اگه $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $(A-B')'=(A\cap B)'=A'$

گزینه ۲: $(A-(B'\cap A'))'=(A-B')'=(A\cap B)'=A'$

گزینه ۳: $B'\cup A'=A'$

گزینه ۴: $A-(A'-B)=A-(A'\cap B')=A-B'=A\cap B=A$

روش اول: با فرض $\cos 2x \neq 0$، طرفین تساوی را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0 \Rightarrow 1+\tan 2x=0 \Rightarrow \tan 2x=-1$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\div 2}x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

روش دوم:

فلش‌بک
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ و $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

با توجه به یادآوری فوق در معادلهٔ $\cos 2x+\sin 2x=0$ داریم:

$$\cos 2x+\sin 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow 0=2k\pi+\frac{\pi}{2} & \times \\ -2x=(2k+1)\pi-(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow -2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}+2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

تذکر در دایرهٔ مثلثاتی نقاط نشان‌دهندهٔ $\frac{k\pi}{2}+\alpha$ با $-\frac{k\pi}{2}+\alpha$ یکی هستند. به این دلیل که k عددی صحیح است و اگر پشت آن منفی هم قرار بگیرد باز عدد صحیح است.

بنابراین، داریم: $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

.۷۲۷

راهبرد در حل معادلات مثلثاتی که در آن‌ها کسینوس توان ۱ و سینوس توان ۲ دارد، با اتحاد $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ سینوس را به کسینوس تبدیل می‌کنیم، درنتیجه معادله به‌صورت یک معادلهٔ درجهٔ دو در می‌آید که باید آن را حل کنیم. اگر در معادله، سینوس توان ۱ و کسینوس توان ۲ داشت، کسینوس را به سینوس تبدیل و معادله را حل می‌کنیم.

$$2\sin^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$$

با فرض این‌که $-1 \le t \le 1$ باشد، کسینوس را مساوی t در نظر می‌گیریم:

$$2t^2-3t-2=0 \Rightarrow \Delta=9-4(2)(-2)=25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{3+\sqrt{25}}{4}=2 & \times \\ t_2=\frac{3-\sqrt{25}}{4}=-\frac{1}{2} & ✓ \end{cases}$$

$t=2$ غیرقابل قبول است، چون در بازهٔ $[-1,1]$ قرار ندارد. کسینوس $\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، بنابراین کسینوس $(\pi-\frac{\pi}{3})$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود:

$$t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

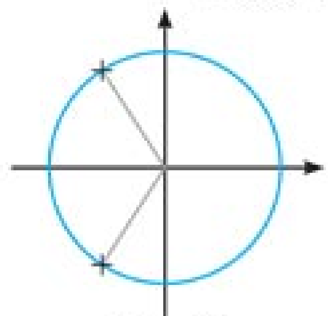
.۷۲۸

برای ساده کردن معادله، از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم:

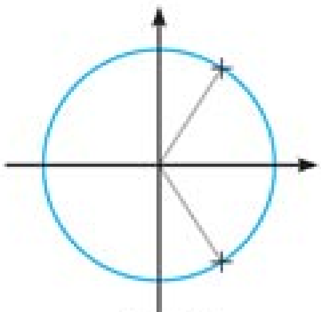
$$\cos 2x+2\cos^2 x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

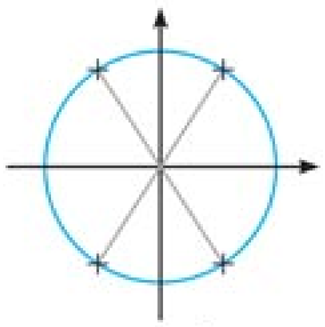
تذکر کسینوس زاویهٔ $(\frac{\pi}{3})$ برابر $\frac{1}{2}$ و کسینوس زاویهٔ $(\frac{2\pi}{3})$ برابر $(-\frac{1}{2})$ است. بین جواب‌های به‌دست آمده، اجتماع می‌گیریم. (همهٔ جواب‌ها را روی هم می‌ریزیم.)



$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$



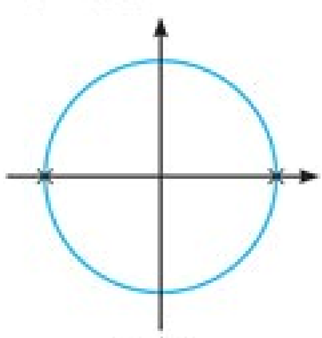
$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$



$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

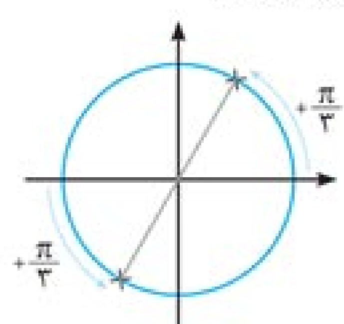
پس جواب کلی معادله به‌صورت $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ می‌شود.

برای توضیح بیشتر نقاط معادلهٔ $x=k\pi$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر است:



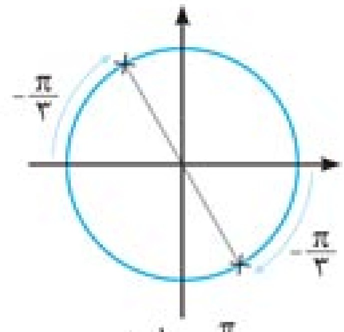
$x=k\pi$

اگر این دو نقطه را در جهت مثبت به اندازهٔ $+\frac{\pi}{3}$ حرکت دهیم، به معادلهٔ $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



$x=k\pi+\frac{\pi}{3}$

اگر این دو نقطه را در جهت منفی به اندازهٔ $(\frac{\pi}{3})$ حرکت دهیم، به معادلهٔ $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



$x=k\pi-\frac{\pi}{3}$

بنابراین در این حالت نیز جواب کلی معادله برابر $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ است.

.۷۲۹

در سمت چپ تساوی و در کمان کسینوس، زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ وجود دارد، پس نسبت مثلثاتی به سینوس تغییر می‌کند، ازطرفی انتهای کمان $(\frac{\pi}{2}-x)$ در ربع اول دایره مثلثاتی قرار دارد، درنتیجه علامت کسینوس مثبت است:

$$\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0 \Rightarrow \sin 2x+\sin x=0$$

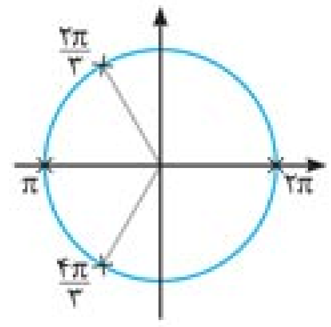
در ادامه از دو روش مسئله را حل می‌کنیم:

روش اول:

$$\sin 2x+\sin x=0\Rightarrow \sin 2x=-\sin x\Rightarrow \sin 2x=\sin(-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi-x\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\\ 2x=(2k+1)\pi-(-x)\Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{2\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{3}+2\pi=5\pi$$

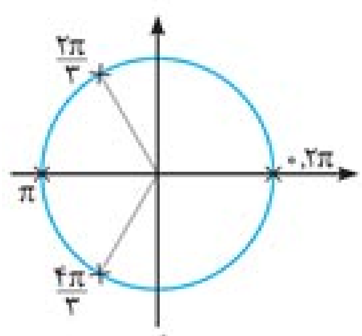
روش دوم: در این روش از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2x+\sin x=0\Rightarrow 2\sin x\cos x+\sin x=0\Rightarrow \sin x(2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ 2\cos x+1=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

به k، اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{2\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{3}+2\pi=5\pi$$

.۷۳۰

سمت راست تساوی را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$$

$$\Rightarrow \sin 4x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\overbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}^{1}$$

در سمت راست تساوی از اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ و در سمت چپ تساوی از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که $4x$ برابر 2α و متناظر با آن $2x$ برابر α است:

$$\sin 4x=-(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x$$

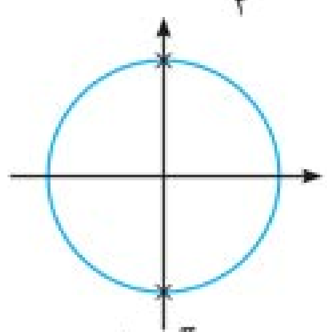
$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x+\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(2\sin 2x+1)=0$$

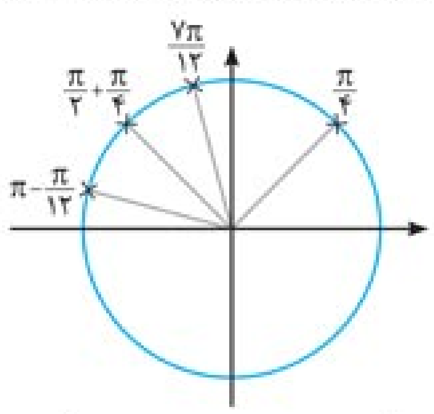
$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \quad (1)\\ 2\sin 2x+1=0\Rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=\sin(-\frac{\pi}{6})\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}\begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\ 2x=(2k+1)\pi-(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases}$$

تذکر کسینوس در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{2}$ که در دایره مشخص شده‌اند، صفر می‌شود:



با توجه به جواب‌های به دست آمده به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌های موجود را در بازهٔ $[0,\pi]$ (که به‌صورت زیر می‌شوند) با هم جمع می‌کنیم:



$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$$

.۷۳۱

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1 \quad (1)$$

$$\begin{cases}\alpha=x+\frac{\pi}{8}\\ \beta=x-\frac{3\pi}{8}\end{cases}\Rightarrow \alpha-\beta=x+\frac{\pi}{8}-x+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ } (1)}\sin\alpha+\cos\beta=1$$

$$\underbrace{\cancel{\sin(\beta+\frac{\pi}{2})}}_{\cos\beta}+\cos\beta=1\Rightarrow 2\cos\beta=1\Rightarrow \cos\beta=\frac{1}{2}$$

$$\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x-\frac{3\pi}{8}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\begin{cases}\nearrow x=2k\pi+\frac{17\pi}{24}\\ \searrow x=2k\pi+\frac{\pi}{24}\end{cases}$$

تنها جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,2\pi]$ واقعند، $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{17\pi}{24}$ می‌باشند.

$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{24}+\frac{17\pi}{24}=\frac{3\pi}{4}$$