

■ مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می‌پردازید،

در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت

نخواندن آن پرداخت خواهید کرد،

بسیار ناچیز است ...

# نخسن نامه



آیامی دانید برای تخم‌سیمی بهترین کافند ۱۷ صلد درخت سبقت می شود؟ آیامی اند برای تولید یک عنوان کتابت ۲ صفحای قطع علی در شمارگان ۲۰۰۰ نسخه یک تن کافند صرف می شود؟ لذا شاید سته اپس از مطالعه می کتاب صبر آن رادوب سایت mygaj.com قرار دهید تا از تولید سته آن جلوگیری و در مصرف کافند صرفه جویی شود. باشد که شما دوست دارید ایم با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کرده‌ی زمین برداشته باشید.

ارادت شما  
الفضل ابو جکار

## مقدمهٔ مدیریت تألیف

♦ ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم...  
هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم.

## مقدمه مؤلفین

■ در اولین مسابقه که مربیگری کردم دعا کردم که برنده باشم؛ اما نبردییم. فهمیدم تیم مقابل هم خدا دارد. پس از آن به بعد تلاش کردم.

■ سرآکس فرگوسن

# فهرست ریاضیات دهم

فصل ۱	مجموعه، الگو و دنباله
۱۰	درس اول: مجموعه‌های منتهای و نامتناهی
۱۶	درس دوم: متمم یک مجموعه
۲۳	درس سوم: الگو و دنباله
۳۰	درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی
فصل ۲	مثلثات
۴۶	درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
۵۵	درس دوم: دایره مثلثاتی
۶۲	درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
فصل ۳	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۷۰	درس اول: ریشه و توان
۷۳	درس دوم: ریشه $n$ ام
۷۶	درس سوم: توان‌های گویا
۸۱	درس چهارم: عبارت‌های جبری
فصل ۴	معادله‌ها و نامعادله‌ها
۱۰۰	درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۱۰۹	درس دوم: سهمی
۱۱۸	درس سوم: تعیین علامت
فصل ۵	تابع
۱۳۸	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۱۴۴	درس دوم: دامنه و برد توابع
۱۵۶	درس سوم: انواع تابع
فصل ۶	شمارش، بدون شمردن
۱۶۶	درس اول: شمارش
۱۸۰	درس دوم: جایگشت
۱۸۸	درس سوم: ترکیب
فصل ۷	آمار و احتمال
۱۹۸	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۲۲۲	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۲۲۳	درس سوم: متغیر و انواع آن

# فهرست ریاضیات یازدهم

<b>فصل ۱</b>	<b>هندسهٔ تحلیلی و جبر</b>
درس اول: هندسهٔ تحلیلی	۲۲۶
درس دوم: معادلات درجه دوم و تابع درجهٔ ۲	۲۴۴
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۲۵۸
<b>فصل ۲</b>	<b>هندسه</b>
درس اول: ترسیم‌های هندسی	۲۷۲
درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس	۲۸۶
درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۳۱۹
<b>فصل ۳</b>	<b>تابع</b>
درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع	۳۴۰
درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک	۳۵۲
درس سوم: اعمال جبری روی توابع	۳۶۲
<b>فصل ۴</b>	<b>مثلثات</b>
درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۳۶۸
درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۳۷۰
درس سوم: توابع مثلثاتی	۳۷۸
<b>فصل ۵</b>	<b>توابع نمایی و لگاریتمی</b>
درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۳۹۰
درس دوم و سوم: لگاریتم	۳۹۹
<b>فصل ۶</b>	<b>حد و پیوستگی</b>
درس اول: فرایندهای حدی	۴۱۸
درس دوم: محاسبهٔ حد توابع	۴۳۶
درس سوم: پیوستگی	۴۵۱
<b>فصل ۷</b>	<b>آمار و احتمال</b>
درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۴۶۰
درس دوم: آمار توصیفی	۴۷۹

## فهرست

# ریاضیات دوازدهم

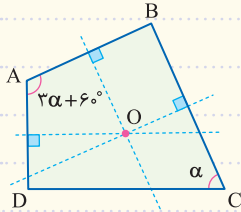
فصل ۱	تابع
درس اول: توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی	۵۰۲
درس دوم: ترکیب توابع	۵۲۹
درس سوم: تابع وارون	۵۴۴
فصل ۲	مثلثات
درس اول: تناوب و تنازانت	۵۵۴
درس دوم: معادلات مثلثاتی	۵۶۷
فصل ۳	حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
درس اول: حد بی‌نهایت	۵۹۰
درس دوم: حد در بی‌نهایت	۶۰۳
فصل ۴	مشتق
درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق	۶۱۴
درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی	۶۳۶
درس سوم: آهنگ تغییر	۶۶۰
فصل ۵	کاربرد مشتق
درس اول: اکسترم‌های تابع	۶۶۸
درس دوم: بهینه‌سازی	۶۹۲
فصل ۶	هندسه
درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی	۷۰۰
درس دوم: دایره	۷۳۱
فصل ۷	احتمال
قانون احتمال کل	۷۵۸



چهارضلعی محاطی

TEST 244

اگر عمودمنصف‌های سه ضلع از چهارضلعی ABCD مطابق شکل زیر، در نقطه O هم‌رس باشند، آن‌گاه اندازه زاویه  $\alpha$  چقدر است؟



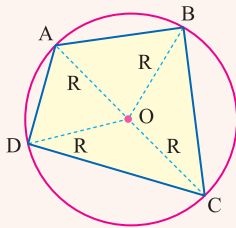
۲۵° (۱)

۳° (۲)

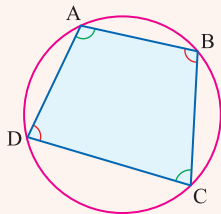
۳۵° (۳)

۳۲° (۴)

MiniBOX



اگر در شکل مقابل نقطه O، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی ABCD باشد، آن‌گاه  $OA=OB=OC=OD$  است. بنابراین دایره‌ای به مرکز نقطه O و شعاع OA (یا OB یا OC یا OD) از هر چهار رأس این چهارضلعی می‌گذرد. در این صورت چهارضلعی ABCD را، **چهارضلعی محاطی** و این دایره را **دایره محیطی** چهارضلعی ABCD می‌نامیم.



شرط لازم و کافی برای آن‌که چهارضلعی ABCD، محاطی باشد، آن است که **دو زاویه مقابل آن مکمل باشند**. به عبارت دیگر:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{چهارضلعی محاطی}$$

ANALYSE

اگر سه عمودمنصف اضلاع یک چهارضلعی، هم‌رس باشند آن چهارضلعی، محاطی است. بنابراین در این مسئله چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی محاطی است و در نتیجه دو زاویه مقابل آن، مکمل‌اند:

$$(3\alpha + 6^\circ) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha = 174^\circ \Rightarrow \alpha = 43.5^\circ$$

پاسخ گزینه ۲



در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطهٔ جزیره از دریا دورترین فاصله را دارد؟

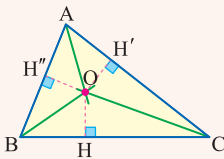
(۱) محل برخورد ارتفاع‌ها

(۲) محل برخورد میانه‌ها

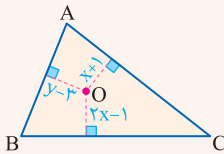
(۳) محل برخورد عمود منصف‌ها

(۴) محل برخورد نیمسازها

MiniBOX

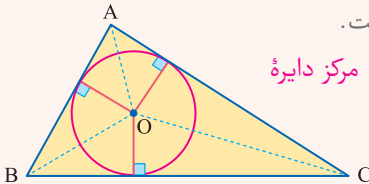


در هر مثلث، نیمسازهای داخلی هم‌رس هستند و نقطهٔ هم‌رسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است [چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است] یعنی در مثلث مقابل  $OH = OH' = OH''$  است.



مطابق شکل نقطهٔ  $O$  روی محل تلاقی نیمسازهای زوایای  $B$  و  $C$  قرار دارد، مقدار  $x + y$  کدام است؟  
 محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین:

$$\begin{cases} 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 \\ y - 3 = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow y = 6 \end{cases} \Rightarrow x + y = 8$$



محل تلاقی نیمسازهای داخلی همواره داخل مثلث است.  
 نقطهٔ هم‌رسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است.

ANALYSE

وقتی گفته می‌شود در جزیره‌ای به شکل مثلث، یعنی مطابق شکل، جزیره از هر سه طرف در محاصرهٔ دریا قرار گرفته است. بنابراین نقطه‌ای از دریا دورتر است که از هر سه ساحل به یک فاصله (دور) باشد. محل تلاقی نیمسازهای داخلی از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین این نقطه از همهٔ ساحل‌ها به یک اندازه دور است. دقت کنید اگر نقطه‌ای دیگر را در نظر بگیریم، ممکن است این نقطه از یک ساحل دورتر باشد اما در همان وضعیت به یک ساحل دیگر نزدیک‌تر خواهد بود.





## درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک

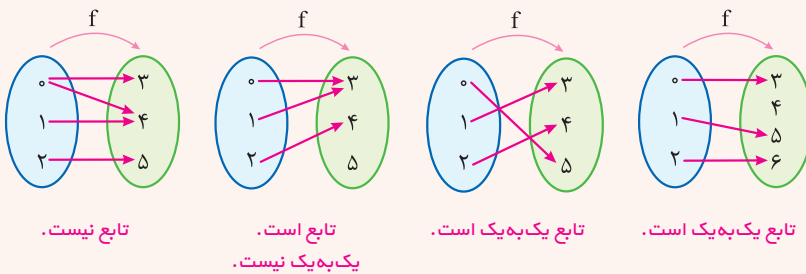
### تابع یک به یک

TEST 306

مجموعه اعضای برد تابع یک به یک  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (-1, 4)\}$  کدام است؟  
 ..... ۹ (۱) ..... ۱۱ (۲) ..... ۱۴ (۳) ..... ۴ (۴) .....

### MiniBOX

🍏 اگر در یک رابطه تشکیل شده از زوج مرتب‌ها، به صورت  $(x, y)$ ، به ازای هر  $x$ ، فقط یک  $y$  داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. همچنین اگر در تابع، به ازای هر  $y$ ، فقط یک  $x$  داشته باشیم، به این تابع، یک به یک گویند.



🍏 اگر تابع  $f$  به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل  $(x, y)$  باشد، به شرطی یک به یک است که هیچ دو  $x$  مختلفی دارای  $y$  یکسان نباشند.

### ANALYSE

■ برای  $x = 3$  دو مقدار  $y$  وجود دارد، پس برای این که  $f$  تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های  $(3, 2)$  و  $(3, a^2 - a)$  باهم برابر باشند، پس:

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \checkmark \\ a = -1 & \times \end{cases}$$

به ازای  $a = -1$  دو زوج مرتب  $(-1, 5)$ ،  $(-1, 4)$  را خواهیم داشت که در این صورت  $f$  تابع نیست.

بنابراین  $f = \{(3, 2), (2, 5), (-1, 4)\}$  بوده و مجموع اعضای برد برابر است با:  $2 + 5 + 4 = 11$

پاسخ گزینه ۲

تشخیص یک به یک بودن از روی ضابطه تابع

TEST 307

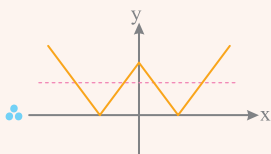
کدام تابع یک به یک نیست؟

- (۱)  $y = \sqrt{x}$  (۲)  $y = \frac{1}{x}$  (۳)  $y = x^2$  (۴)  $y = -x + 1$

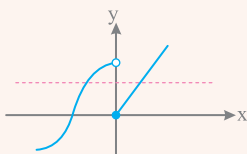
MiniBOX

برای تشخیص یک به یک بودن تابع در سؤالات، باید به موارد زیر توجه کنیم:

تابع  $f$  به شرطی یک به یک است که هر خط موازی محور  $x$ ها، نمودار  $f$  را در بیش از یک نقطه قطع نکند.



یک به یک نیست.



یک به یک نیست.

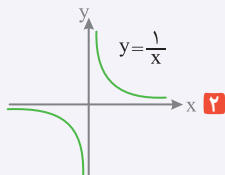


یک به یک است.

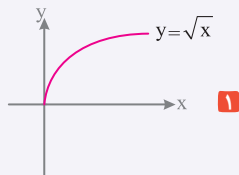
اگر تابع  $f$  به صورت ضابطه‌ای بیان شود، بهترین راه برای بررسی یک به یک بودن آن، رسم نمودار تابع است.

ANALYSE

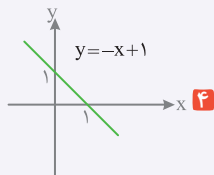
نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



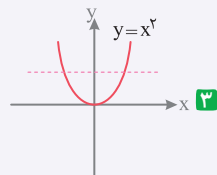
۲



۱



۴



۳

واضح است  $y = x^2$  یک به یک نیست.

پاسخ گزینه ۳



انتقال افقی تابع سینوس و کسینوس

TEST 333

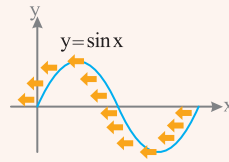
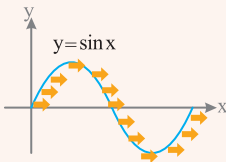
نمودار تابع  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{4}$  به سمت مثبت محور  $x$  ها انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل در بازه  $[0, \pi]$ ، محور  $x$  ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- ۱) صفر ..... ۲) ۱ ..... ۳) ۲ ..... ۴) ۳

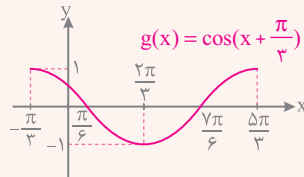
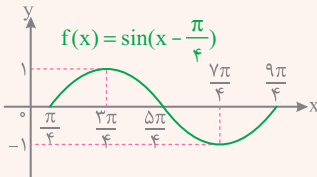
MiniBOX

برای رسم نمودار توابع مثلثاتی به صورت  $y = \sin(x+b)$  و  $y = \cos(x+b)$ ، باید نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  را به اندازه  $b$  واحد در راستای محور  $x$  ها جابه‌جا کنیم.

اگر  $b$  مثبت باشد، نمودار را به اندازه  $b$  واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. اگر  $b$  منفی باشد، نمودار را به اندازه  $b$  واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

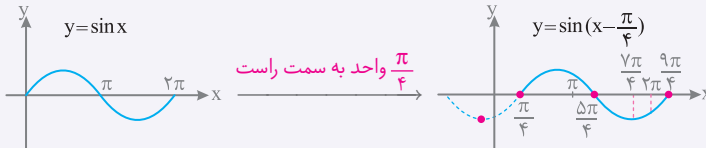


نمودار توابع  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  و  $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$  به صورت زیر است:



ANALYSE

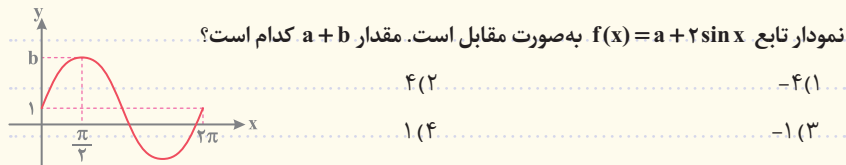
با توجه به قوانین انتقال داریم:



بنابراین طبق نمودار انتقال یافته، تابع  $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[0, \pi]$  فقط در  $x = \frac{\pi}{4}$  با محور  $x$  ها برخورد دارد.

پاسخ گزینه ۲

انبساط و انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس

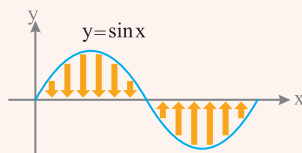
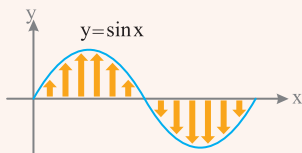


MiniBOX

برای رسم نمودار توابع مثلثاتی به صورت  $y = k \cos x$  و  $y = k \sin x$  باید عرض تمام نقاط  $y = \cos x$  و  $y = \sin x$  را در  $k$  ضرب کنیم.

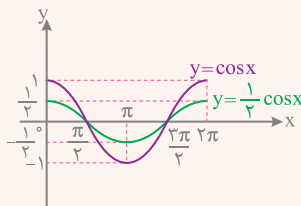
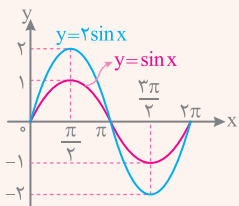
اگر  $k > 1$  باشد، آن گاه نمودار را در راستای محور  $y$  ها منبسط می‌کنیم.

اگر  $0 < k < 1$  باشد، آن گاه نمودار را در راستای محور  $y$  ها منقبض می‌کنیم.



نمودار توابع  $y = \cos x$  و  $y = \frac{1}{2} \cos x$  و همچنین  $y = \sin x$  و  $y = 2 \sin x$  در نمودارهای زیر

رسم شده‌اند:



ANALYSE

با توجه به نمودار، از آن جایی که مقدار تابع در  $x = 0$  برابر با ۱ است، پس:

$$f(0) = 1 \Rightarrow a + 2 \sin 0 = 1 \Rightarrow a + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی چون مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{2}$  برابر با  $b$  است، داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b \Rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{2} = b \Rightarrow 1 + 2(1) = b \Rightarrow b = 3$$

پس  $a + b = 4$ .

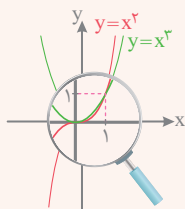
نمودار  $y = x^2$  و  $y = x^3$  زیر ذره بین

TEST 436

نمودار دو تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  در نقاطی به طول  $a$  و  $b$  متقاطع اند. مقدار  $|a-b|$  کدام است؟

..... ۱ (۱) ..... ۲ (۲) ..... ۳ (۳) ..... ۴ (۴) .....

## MiniBOX

با توجه به نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$ ، مشاهده می‌کنیم:

هر دو تابع در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی هستند.

این دو تابع یکدیگر را در دو نقطه با طول‌های  $x = 1$  و  $x = 0$  قطع می‌کنند.

در بازه  $(0, 1)$  نمودار تابع  $y = x^2$  بالاتراز نمودار تابع  $y = x^3$  است.

در بازه  $(1, +\infty)$  نمودار تابع  $y = x^3$  بالاتراز نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.

در بازه  $(-\infty, 0)$  تابع  $y = x^2$  همواره مثبت و تابع  $y = x^3$  منفی است. بنابراین در این بازه، نمودار تابع  $y = x^2$  در بالای  $y = x^3$  قرار دارد.

در بازه  $(-\infty, 0)$ ، دو نمودار هیچ نقطه برخوردی ندارند.

## ANALYSE

می‌دانیم نمودار دو تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  در دو نقطه به طول‌های  $0$  و  $1$  متقاطع اند. پس  $a = 0$  و  $b = 1$  (یا برعکس). بنابراین مقدار  $|a-b|$  برابر است با:

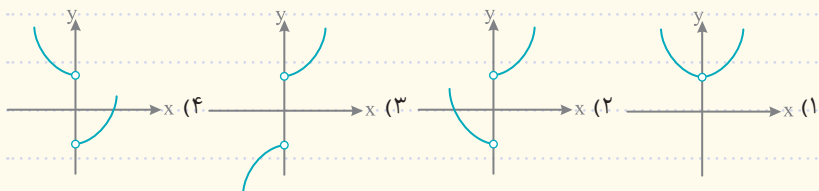
$$|1-0| = |1| = 1$$

پاسخ گزینه ۳

انتقال نمودار  $y = x^3$

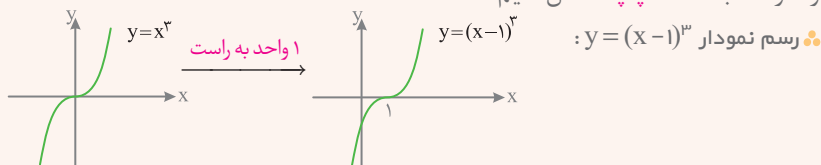
TEST 437

نمودار تابع  $y = |x|(x^2 - \frac{1}{x})$  به کدام صورت است؟

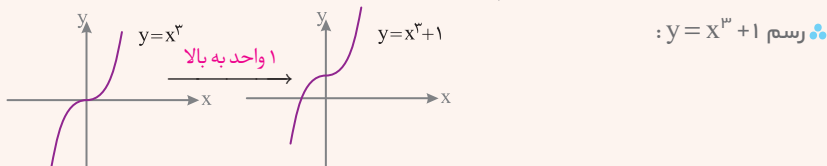


MiniBOX

برای رسم نمودار  $y = (x-a)^3$ ، باید نمودار تابع  $y = x^3$  را  $a$  واحد در راستای افقی جابه‌جا کنیم. اگر  $a > 0$  باشد، باید نمودار  $y = x^3$  را  $a$  واحد به سمت راست و اگر  $a < 0$  باشد، باید نمودار را  $a$  واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

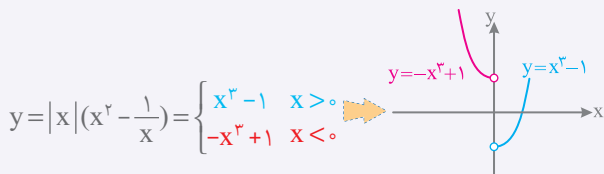


برای رسم نمودار  $y = x^3 + k$ ، باید نمودار  $y = x^3$  را  $k$  واحد در راستای قائم جابه‌جا کنیم. اگر  $k > 0$  باشد، باید نمودار  $y = x^3$  را  $k$  واحد به سمت بالا و اگر  $k < 0$  باشد، باید نمودار را  $k$  واحد به سمت پایین منتقل کنیم.



ANALYSE

برای رسم نمودار، برای از بین بردن قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:



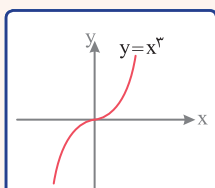
پاسخ گزینه ۴

کدام تابع اکیداً صعودی است؟

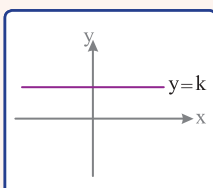
 (۱)  $y = -x^2$  (۲)  $y = x^2$  (۳)  $y = x^3$  (۴)  $y = -x^3$ 
**MiniBOX**

در سؤالاتی که ضابطه تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است.

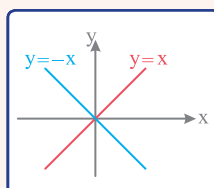
نمودار همه توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در جدول زیر آورده شده است. در این نمودارها، قسمت‌های **صعودی** با رنگ **قرمز** و قسمت‌های **نزولی** با رنگ **آبی** مشخص شده است.



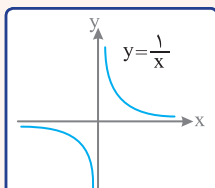
تابع  $y = x^3$  تابعی اکیداً صعودی است.



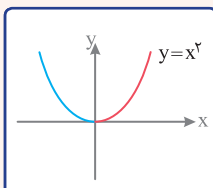
تابع  $y = c$ ، تنها تابعی است که هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.



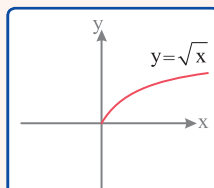
تابع  $y = x$  اکیداً صعودی است.  
تابع  $y = -x$  اکیداً نزولی است.



تابع در هر یک از بازه‌های  $(0, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$  اکیداً نزولی است. اما در  $\mathbb{R}$  غیر یکنوا است.

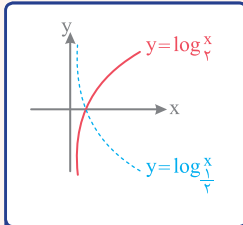


تابع در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی است.  
تابع در بازه  $(-\infty, 0]$  اکیداً نزولی است.

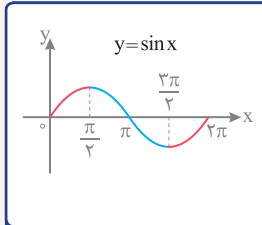


تابع  $y = \sqrt{x}$  اکیداً صعودی است.

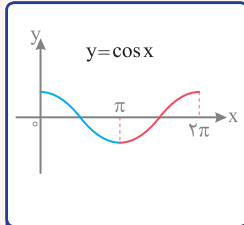




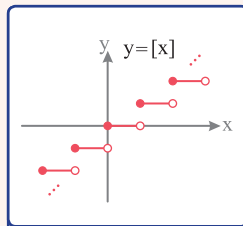
برای مبنای بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای مبنای بین ۰ و ۱، تابع اکیداً نزولی است.



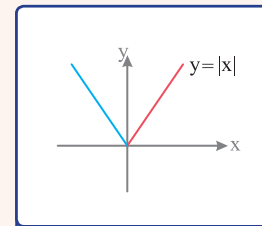
تابع در بازه  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  اکیداً نزولی است. تابع در بازه‌های  $[0, \frac{\pi}{3}]$  و  $[\frac{3\pi}{3}, 2\pi]$  اکیداً صعودی است.



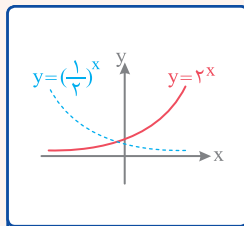
تابع در بازه  $[0, \pi]$  اکیداً نزولی است. تابع در بازه  $[\pi, 2\pi]$  اکیداً صعودی است.



تابع صعودی است.



تابع در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی است. تابع در بازه  $(-\infty, 0]$  اکیداً نزولی است.



برای پایه بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای پایه بین صفر و یک، تابع اکیداً نزولی است.

## ANALYSE

با توجه به نمودار توابع، واضح است تابع  $y = x^2$  تابعی اکیداً صعودی است:

