به نام پروردگار مهربان

جمع‌بندی

دهم • یازدهم • دوازدهم

ریاضیات تجربی

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت

• نصیر کریمی جونی

• محمدامین مـولایی

• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

مقدمه

سلام دکترای آینده، گرچه در طول تاریخ همواره ریاضیات با چالش و سختی همراه بوده، اما شکایت بچه‌های تجربی از درس ریاضی، بیشتر برای حجم زیاد، گستردگی و تنوع مباحث است. کم بودن زمان برای جمع‌بندی درس‌ها و قطر زیاد کتاب‌های ریاضی سبب شد به این موضوع فکر کنم که تجربهٔ ناچیز خودم را برای برداشتن باری از دوش شما به‌کار گیرم. در کتابی که پیش روی شما است، تلاش کرده‌ام که با حجمی کم، همهٔ آنچه یک دانش‌آموز خوب رشتهٔ تجربی برای موفقیت در کنکور باید بداند، گرد آوردم. این کتاب برای دوران جمع‌بندی است، بنابراین از آوردن بسیاری از تست‌ها و فرمول‌ها که تنها جنبهٔ تزئینی دارند، خودداری کرده‌ام. همچنین مباحثی که در سال‌های دهم، یادهم و دوازدهم، چندبار گفته شده‌اند به شکل یک‌جا و در یک فصل آورده‌ام. افزون بر آن، تلاش کرده‌ام ترتیب مباحث مرتبط در سال‌های مختلف را نگاه داشته و در کنار هم بیاورم تا سبب فهم بهتر و عمیق‌تر آن‌ها شود. لابه‌لای درس‌نامه‌ها، تست‌هایی از کنکورهای سراسری یا تألیفی گذاشته‌ام تا مهارت شما در به‌کار بردن نکته‌ها بالا رود. در پایان هر فصل هم تعدادی تست آورده‌ام تا با حل آن‌ها بر مباحث فصل تسلط پیدا کنید. گرچه آنچه غلط ندارد، نامهٔ نانوشته است، اما همهٔ تلاشم این بوده است که اشتباه‌های کتاب را به حداقل برسانم.

ساختار و ویژگی‌های کتاب

دکترای عزیز با تغییر نظام آموزشی، درس ریاضی دچار تغییرات زیادی شده است. بخش‌های زیادی از هندسه، مشتق، مثلثات و انتگرال حذف شده و مطالبی مانند اتحادها، معادلات درجهٔ دوم، ریشه‌ها و مجموعه‌ها به سر فصل‌های کنکور اضافه شده است.

این کتاب بر طبق کتاب‌های درسی دهم، یازدهم و دوازدهم، در ۱۰ فصل و به‌صورت موضوعی در کم‌ترین حجم تمامی مباحث کنکور را پوشش می‌دهد که شامل قسمت‌های زیر است:

- **درسنامه:** تمامی مطالبی که در کنکور به آن نیاز دارید به صورت عمیق توضیح دادیم و قسمت‌هایی تحت عنوان مشاوره که توضیحات بیشتری در رابطه با چگونگی حل برخی از سؤالات یا اهمیت آن‌ها داده شده است به این قسمت‌ها توجه ویژه‌ای داشته باشید و که میزان نزدیکی به سؤالات کنکور ۹۸ از طریق کم یا زیاد شدن آنتن نشان داده شده است. آنتن پر به معنی مهم بودن تست است.

- **پرسش‌های چهارگزینه‌ای:** شامل تست‌های تألیفی و تست‌های کنکورهای دهۀ ۹۰ است.
- **پاسخنامه تشریحی:** به تمامی سؤالات به صورت کاملاً دقیق و مفهومی پاسخ داده‌ایم.
- **آزمون‌های جامع:** دو دوره آزمون شبیه‌سازی کنکور برای تسلط بیشتر بر مطالب آورده شده است.
- **فرمول نامه:** تمامی فرمول‌های مورد نیاز را گردآوری کردیم.

سپاس و قدردانی

در اینجا لازم است از تمامی عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:
- از جناب آقای احمد اختیاری، مدیر انتشارات که فرصت نوشتن این کتاب را برایم ایجاد کردند.
- جناب آقای محمدحسین انوشه، مدیر شورای تألیف که همواره با برخورد پدرانه‌شان مرا راهنمایی کرده‌اند.
- دوست و استاد گران‌قدر عباس اشرفی، مدیر واحد ریاضی که اگر پیگیری‌ها و همراهی شبانه‌روزی ایشان نبود، شاید هیچ‌گاه این کتاب به چاپ نمی‌رسید.
- سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری و خانم آزاده فلاح‌زاده ویراستار علمی کتاب که زحمات این کتاب بر دوش آن‌ها بود.
- سرکار خانم مریم تاجداری صفحه‌آرای کتاب که تلاش فراوانی برای تولید این اثر داشتند.

و تشکر می‌کنم از همۀ دوستان دیگری که شاید نامشان نیامد، اما اگر تلاش‌ها و کمک‌های آن‌ها نبود، این کتاب به ثمر نمی‌رسید.

در پایان امیدوارم این کتاب، هرچند اندک اما مسیر موفقیت‌های روزافزون شما دانش‌آموزان عزیز را هموارتر کند و از همۀ استادان، معلمان، دانش‌آموزان و دوستان خواهش می‌کنم مرا از نقد خود محروم نسازند.

نصیر کریمی جونی

فهرست

- عبارت‌های جبری (دهم - یازدهم) ۷
- مثلثات (دهم - یازدهم - دوازدهم) ۴۳
- تابع (دهم - یازدهم - دوازدهم) ۷۱
- الگو و دنباله (دهم) ۱۲۳
- توابع نمایی و لگاریتمی (یازدهم) ۱۴۳
- مجموعه، آنالیز ترکیبی، آمار و احتمال (دهم - یازدهم - دوازدهم) ۱۶۳
- حد و پیوستگی (یازدهم - دوازدهم) ۲۱۳
- هندسه تحلیلی و مقاطع مخروطی (یازدهم - دوازدهم) ۲۴۱
- مشتق و کاربرد آن (دوازدهم) ۲۶۵
- هندسه اقلیدسی (یازدهم - دوازدهم) ۳۰۳
- پیوست ۳۳۷

تقدیـم به همســر و فرزندانم کــه در این مدت کاستی‌هایم را تحمل کردند.

نصیر کریمی جونی

فصل ۲

مثلثات

حضور پررنگ مثلثات در مباحث دیگر مانند تابع، حد، پیوستگی و هندسه سبب می‌شود که با همهٔ دشواری‌های این مبحث نتوان از خیر این فصل گذشت. تسلط بر مثلثات یعنی خیالت راحت از پس ریاضی برمیایی. معمولاً از این فصل دو یا سه تست در کنکور می‌آید که اهمیت فصل را بیشتر نشان می‌دهد.

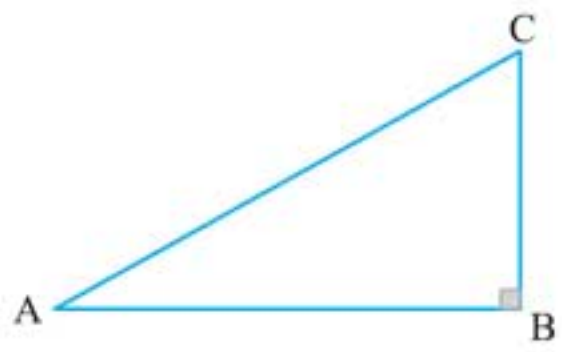
پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم

مثلثات

۱ معرفی دایره و نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی

مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{B}=۹۰)$ را در نظر بگیرید. در این مثلث نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده A برابر است با:



۱) $\sin\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}$

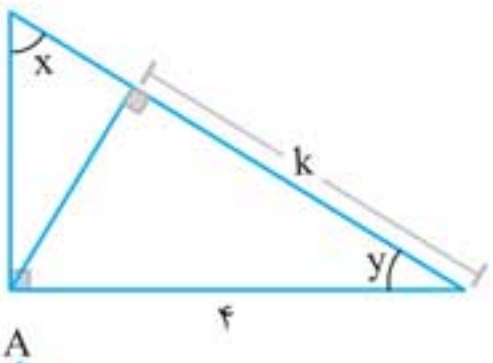
۲) $\cos\hat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}$

۳) $\tan\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{BC}{AB}$

۴) $\cot\hat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{AB}{BC}$

مشاوره نسبت‌های بالا در این فصل بسیار پرکاربرد هستند، آن‌ها را به خاطر بسپارید.

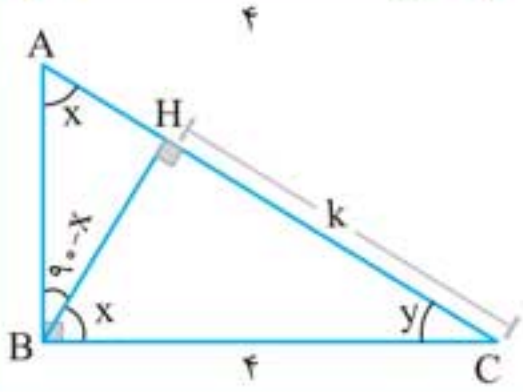
تست در شکل مقابل، مقدار **k** کدام است؟



۱) $۴\sin x$ ۲) $۴\sin y$

۳) $\frac{۱}{۴}\sin x$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sin y$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به شکل مقابل، $C\hat{B}H=B\hat{A}H=x$، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{BHC}$ می‌توان گفت:



$$\sin x=\frac{HC}{BC}=\frac{k}{۴}\Rightarrow k=۴\sin x$$

نکته: برای زاویهٔ A روابط زیر بین نسبت‌های مثلثاتی این زاویه برقرار است:

الف) $\cot\hat{A}=\frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}}$ ، ب) $\tan\hat{A}=\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$

پ) $\tan\hat{A}\times\cot\hat{A}=۱$, ت) $\cot\hat{A}=\frac{۱}{\tan\hat{A}}$

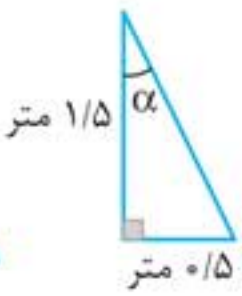
ث) $۱+\tan^۲\hat{A}=\frac{۱}{\cos^۲\hat{A}}$, ج) $۱+\cot^۲\hat{A}=\frac{۱}{\sin^۲\hat{A}}$

چ) $\sin^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{A}=۱$

تست آرش می‌خواهد ارتفاع ساختمانی را که طول سایهٔ آن بر روی زمین ۱۰ متر است، بیابد. اگر قد آرش ۱/۵ متر و طول سایهٔ او ۰/۵ متر باشد، ارتفاع ساختمان چند متر است؟

(تمرین کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰



پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر زاویهٔ تابش آفتاب نسبت به قائم را α در نظر بگیریم، با توجه به شکل‌های مقابل داریم: (دقت کنید که برای آرش و ساختمان زاویه تابش برابر α است.)

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۰/۵}{۱/۵}=\frac{۱۰}{x}\Rightarrow x=۳۰ \text{ متر}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم

مشاوره نسبت‌های جدول زیر رو حتماً حفظ باشید.

نسبت‌های مثلثاتی \ α	۰	$\frac{\pi}{۶}(۳۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۴}(۴۵^\circ)$	$\frac{\pi}{۳}(۶۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۲}(۹۰^\circ)$	$\pi(۱۸۰^\circ)$	$\frac{۳\pi}{۲}(۲۷۰^\circ)$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰

تست حاصل عبارت $\frac{۱+\tan^۲۶۰^\circ+\sin^۲۶۰^\circ}{\cot۴۵^\circ+\cos^۲۳۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۱۹}{۷}$ ۳) $\frac{۱+۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۴}$

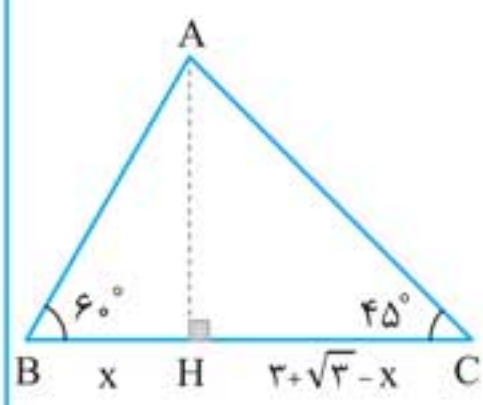
پاسخ **گزینهٔ «۲»** مقادیر هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را در کسر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱+(\sqrt{۳})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۱+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}=\frac{۱+۳+\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱۹}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱۹}{۷}$$

در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC=۳+\sqrt{۳}$ و زاویه‌های $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۵^\circ$، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** مثلث ABC و سپس ارتفاع AH را رسم می‌نماییم:



$$\text{در مثلث } \overset{\triangle}{ABH}: \tan ۶۰^\circ=\frac{AH}{x}=\sqrt{۳}\Rightarrow AH=x\sqrt{۳} \quad (۱)$$

$$\text{در مثلث } \overset{\triangle}{AHC}: \tan ۴۵^\circ=\frac{AH}{HC}=۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۱=\frac{x\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}-x}\Rightarrow x\sqrt{۳}=۳+\sqrt{۳}-x$$

$$\Rightarrow x(۱+\sqrt{۳})=\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)\Rightarrow x=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۳$$

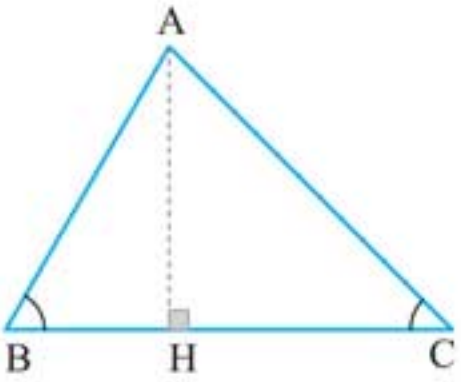
پس:

$$\text{در مثلث } \overset{\triangle}{AHC}: \sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{AC}\Rightarrow AC=۳\sqrt{۲}$$

دستور محاسبهٔ مساحت اشکال هندسی

در این قسمت فرمول مساحت اشکال مختلف هندسی (مثلث، متوازی‌الاضلاع و ...) را می‌خوانیم.

مساحت مثلث: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب یک ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع است. حال با جای‌گذاری ارتفاع و ضلع متناظر برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ مناسب، رابطه‌های زیر را برای محاسبهٔ مساحت مثلث به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC \\ AH=AB\sin\hat{B} \end{cases}$$

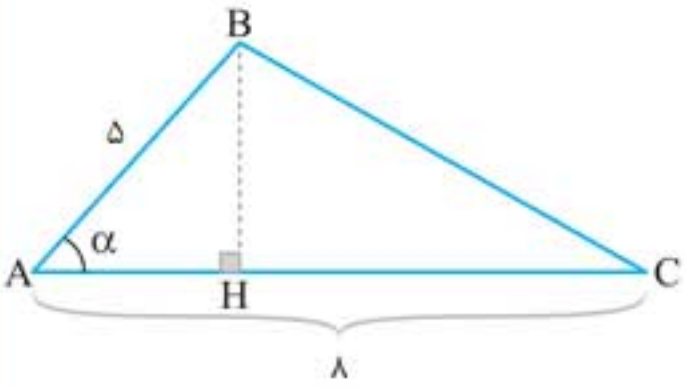
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}BC\times AB\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}BC\times AC\sin\hat{C}$$

$$=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin\hat{A}$$

تست مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b=۸$ و $c=۵$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $\sqrt{۳۹}$ ۲) $\sqrt{۴۱}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ **گزینهٔ«۲»** برای آن‌که BC ضلع متوسط مثلث باشد، باید زاویهٔ α حاده باشد:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}bc\sin\alpha \Rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲}(۸)(۵)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۴}{۵} \xrightarrow{\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha}$$

$$\cos^۲\alpha = ۱-(\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha>۰]{\text{حاده }\alpha} \cos\alpha = +\frac{۳}{۵}$$

بدین ترتیب با رسم ارتفاع BH می‌توان گفت:

$$\overset{\triangle}{ABH}\text{ در مثلث} \begin{cases} \cos\alpha = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{AH}{۵} \Rightarrow AH = ۳ \xrightarrow{HC=AC-AH} HC = ۵ \\ \sin\alpha = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{BH}{۵} \Rightarrow BH = ۴ \end{cases}$$

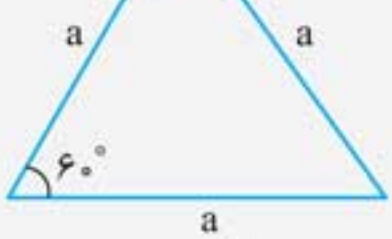
یادآوری برای مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ $(A = ۹۰^\circ)$ می‌توان گفت:

رابطهٔ فیثاغورس $\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$

در آخر با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BHC داریم:

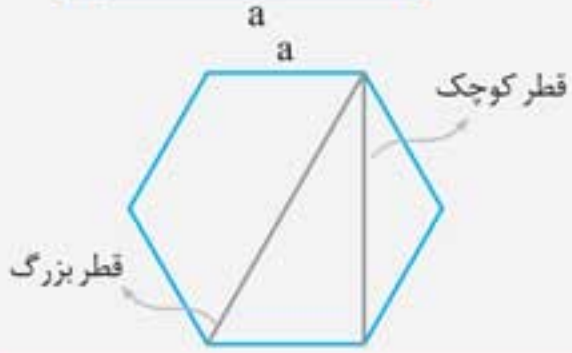
$$BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱ \Rightarrow BC = \sqrt{۴۱}$$

نکته‌ها:



۱ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع a برابر است با: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

۲ اگر اندازهٔ ضلع یک شش ضلعی منتظم برابر a باشد، آن‌گاه:



الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

تست قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم، ضلع یک شش‌ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش‌ضلعی جدید چند برابر مساحت شش‌ضلعی اولیه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

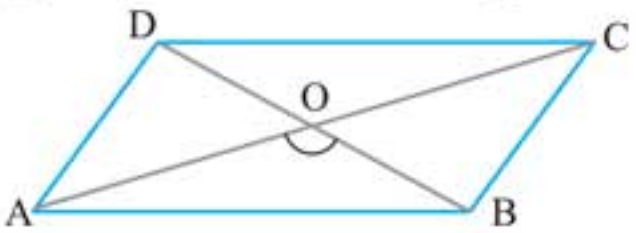
پاسخ **گزینهٔ«۳»** اگر ضلع شش‌ضلعی اولیه a باشد، طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است، پس دربارهٔ مساحت آن‌ها می‌توان گفت:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a\sqrt{۳})^۲}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲} = \frac{۳a^۲}{a^۲} = ۳$$

مساحت متوازی‌الاضلاع: مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با:

۱) حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع در زاویهٔ بین آن‌ها:

$$S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin \hat{A}$$



۲) نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطر در زاویهٔ بین آن‌ها:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin A\hat{O}B$$

تست اندازهٔ دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

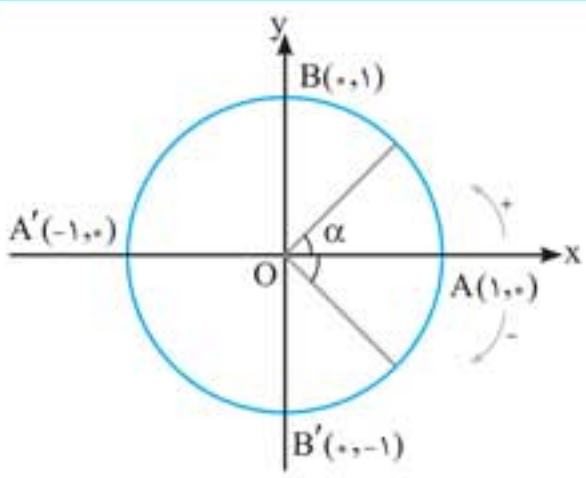
۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

پاسخ **گزینهٔ «۴»** با توجه به نکتهٔ گفته شده، مساحت متوازی‌الاضلاع با دو قطر داده‌شده و زاویهٔ بین آن‌ها برابر است با:

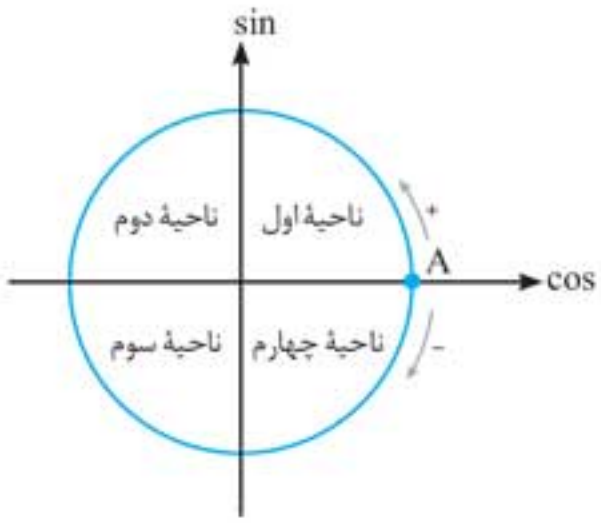
$$S = \frac{1}{2} \times (12) \times (8\sqrt{3}) \times \sin 60^\circ = 48\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

دایرهٔ مثلثاتی

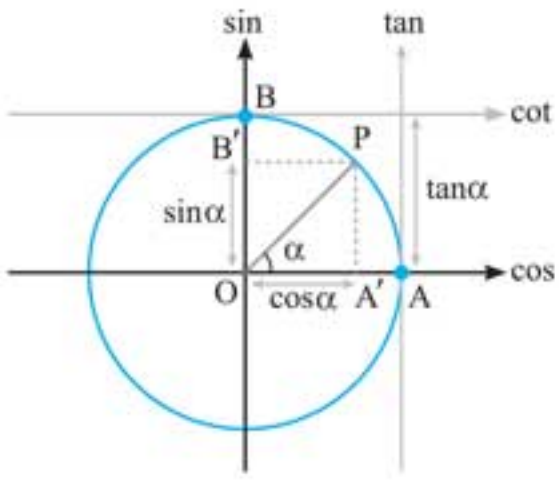
دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع واحد که در آن نقطهٔ A (محل برخورد محور x ها با دایره) مبدأ حرکت برای رسم زاویه‌ها است و جهت پادساعتگرد (خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت) جهت مثبت آن در نظر گرفته می‌شود، دایرهٔ مثلثاتی نامیده می‌شود.

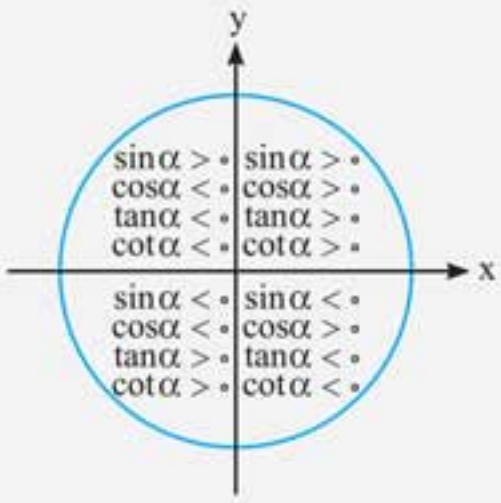


در دایرهٔ مثلثاتی محور کسینوس‌ها (محور افقی) و محور سینوس‌ها (محور عمودی) این دایره را به چهار بخش تقسیم می‌کنند که هر یک از آن‌ها را یک ناحیه یا ربع مثلثاتی می‌نامند. این ناحیه‌ها و مرزهای آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است.



همچنین محور عمودی مماس بر دایره (موازی محور سینوس‌ها) را محور تانژانت‌ها می‌نامند که مبدأ آن، نقطهٔ A است و محور افقی مماس بر دایره (موازی کسینوس‌ها) را محور کتانژانت‌ها می‌نامند که مبدأ آن، نقطهٔ B است.





نکته: به کمک دایرهٔ مثلثاتی و ویژگی‌های آن، می‌توان علامت نسبت‌های مثلثاتی و حدود تغییرات زاویه‌ها را در هر ربع دایرهٔ مثلثاتی به‌دست آورد.

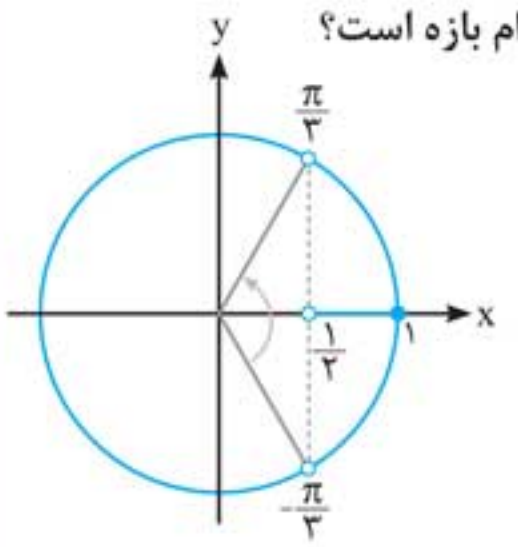
تست اگر $\cos\theta - ۱ = \frac{۵}{۴}$ و $\tan\theta < ۰$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ **گزینهٔ «۲»** طبق فرض $\cos\theta = -\frac{۱}{۴}$ و کسینوس در ربع‌های دوم و سوم منفی است. هم‌چنین $\tan\theta$ در ربع‌های دوم و چهارم منفی است. اشتراک این نواحی، ربع دوم است.

اگر $\frac{-\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\cos ۳x = \frac{m-۱}{۲}$ باشند، مقدار m در کدام بازه است؟

۱) $(۱, ۲]$ ۲) $(۰, ۲)$
۳) $(۲, ۳]$ ۴) $[۳, ۴)$



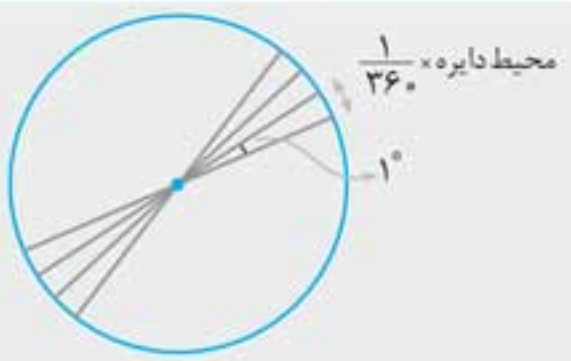
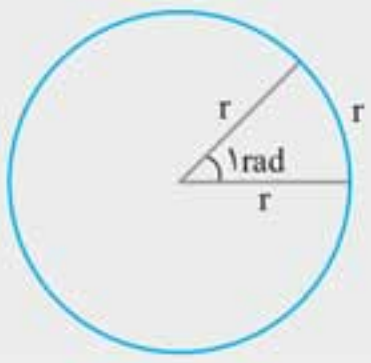
پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \xrightarrow{\times ۳} -\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \cos ۳x \leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \leq ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۱ < m-۱ \leq ۲$$

$$\xrightarrow{+۱} ۲ < m \leq ۳ \Rightarrow m \in (۲, ۳]$$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

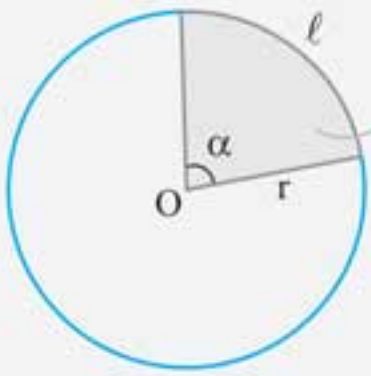
شکل	تعریف	واحد اندازه‌گیری
	اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم نماییم، اندازهٔ زاویه مرکزی هر یک از این کمان‌ها، ۱ درجه است. به عبارت دیگر اندازهٔ هر کمان $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است.	درجه D
	اندازه زاویه مرکزی را که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع دایره برابر باشد، ۱ رادیان می‌نامیم، بدین ترتیب یک دایرهٔ کامل ۲π رادیان خواهد بود.	رادیان R

تذکر مقدار تقریبی π برابر ۳/۱۴ است، برابر ۱۸۰ نیست، اشتباه نکنید.

نکته‌ها:

۱) اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه: $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$

۲) اگر ℓ طول کمان و S مساحت قطاع روبه‌روی زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ α رادیان در دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه:

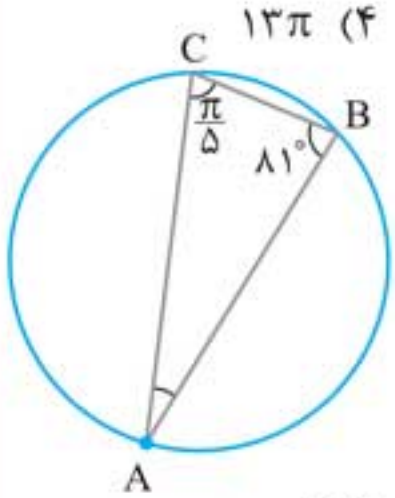


الف) $\ell=r\alpha$، که در آن ℓ و r واحدهای یکسان دارند. (α بر حسب رادیان است.)

ب) $S=\frac{۱}{۲}r^۲\alpha$

تست رأس‌های مثلث ABC روی دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر قرار دارند. اگر $\hat{B}=۸۱^\circ$ و $\hat{C}=\frac{\pi}{۵}$ باشند، آن‌گاه طول کمان BC چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۲}$ ۳) ۷π ۴) ۱۳π



پاسخ **گزینهٔ «۳»** A زاویهٔ محاطی است، پس زاویهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ دو برابر زاویهٔ $\hat{A}$ می‌باشد.

$\hat{B}=۸۱^\circ\Rightarrow\frac{۸۱^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\hat{B}\text{ رادیان}}{\pi}\Rightarrow\hat{B}=\frac{۹}{۲۰}\pi$ رادیان

$\hat{A}=\pi-\hat{B}-\hat{C}=\pi-\frac{۹}{۲۰}\pi-\frac{\pi}{۵}=\frac{۷}{۲۰}\pi$

$\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=۲\times\frac{۷}{۲۰}\pi=\frac{۷}{۱۰}\pi$

هم‌چنین می‌توان گفت: $\alpha=\frac{\ell}{r}\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=\frac{\text{BC طول}}{۱۰}\Rightarrow\text{BC طول}=\frac{۷\pi}{۱۰}\times۱۰=۷\pi$

طول کمان زاویهٔ ۶۰ درجه، $۲\sqrt{۳}\pi$ سانتی‌متر است. طول شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

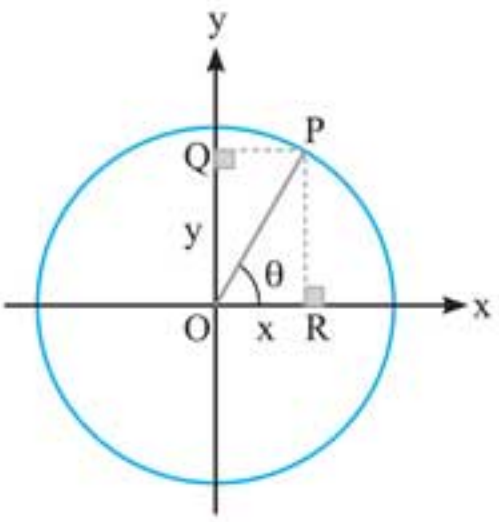
پاسخ **گزینهٔ «۴»** ابتدا زاویهٔ ۶۰° را برحسب رادیان به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم از فرمول $\alpha=\frac{\ell}{r}$ استفاده نماییم:

$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۶۰}{۱۸۰}\pi=\frac{\pi}{۳}$ رادیان

$\alpha=\frac{\ell}{r}\Rightarrow R=\frac{\ell}{r}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}\,\pi}{r}\Rightarrow r=۶\sqrt{۳}$

نکته: دو زاویهٔ α و β را در دایره، هم‌انتها می‌نامند، هرگاه ضلع‌های انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شوند. اگر دو زاویه هم‌انتها باشند، اختلاف آن‌ها مضرب زوجی از π رادیان یا ۱۸۰° است.

نسبت‌های مثلثاتی در دایره



فرض کنید $P(x , y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی باشد. θ نیز زاویه‌ای است که نیم‌خط OP با محور Ox می‌سازد. از نقطهٔ P خط‌هایی بر Ox و Oy عمود می‌کنیم تا به ترتیب آن‌ها را در R و Q قطع کنند. در این صورت $(OP = ۱)$:

$$\begin{cases}\cos\theta = x \\ \sin\theta = y\end{cases} \Rightarrow P(\cos\theta , \sin\theta)$$

اگر شعاع دایره، واحد نباشد، آن‌گاه $P(r\cos\theta , r\sin\theta)$ می‌باشد که در آن r شعاع دایره‌ای است که P روی آن قرار دارد.

نکته: اگر نقطهٔ $P(x , y)$ از مبدأ مختصات با زاویهٔ α دیده شود، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی α به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

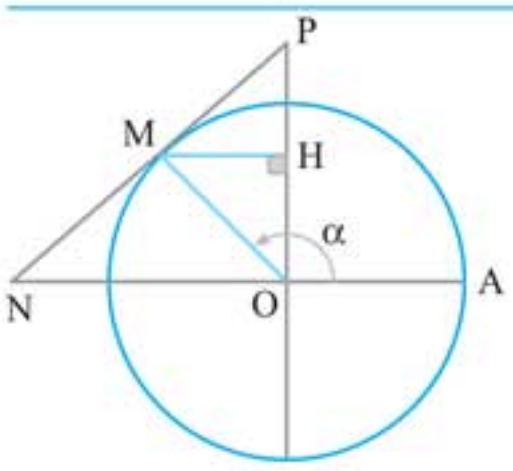
تست اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $P(\frac{-۱}{۲}, y)$ باشد و $y > ۰$، آن‌گاه $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$P(-\frac{۱}{۲}, y) \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} \frac{۱}{۴} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{y>۰} y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

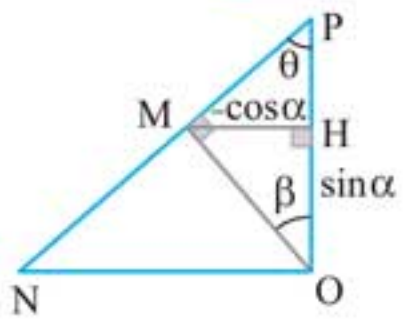
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{(-\frac{۱}{۲})} = -\sqrt{۳}$$



در دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل مقابل، **OA** روی محور کسینوس‌ها و **OP** روی محور سینوس‌ها قرار دارد. اگر **MH** عمود بر **OP** و زاویهٔ $A\hat{O}M = \alpha$ فرض شود، **HP** چقدر است؟

۱) $\sin\alpha\tan\alpha$ ۲) $\cos^۲\alpha$

۳) $\cos\alpha\cot\alpha$ ۴) $\sin^۲\alpha$



پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به دایرهٔ مثلثاتی بالا داریم:

$$\sin\alpha = OH \quad , \quad \cos\alpha = -MH$$

هم‌چنین NP مماس بر دایره و بر OM شعاع دایره عمود است،

پس می‌توان گفت: در مثلث $\overset{\Delta}{MPH}$: $\tan\theta = \frac{MH}{HP}$

$$\Rightarrow \tan(۹۰-\beta)=\frac{-\cos\alpha}{HP} \Rightarrow \cot\beta=\frac{-\cos\alpha}{HP}$$ ①

حال در مثلث OMH داریم:

$$\Rightarrow \cot\beta=\frac{OH}{MH}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} \xrightarrow{①} \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{HP} \Rightarrow HP=\frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha\times\cot\alpha$$

نکته: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی برای هر زاویهٔ دلخواه θ می‌توان گفت:

$$-۱\le\sin\theta\le۱ \quad , \quad -۱\le\cos\theta\le۱$$

تست بیشترین مقدار عبارت $\sin(x+y)+\cos(x-y)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۴»** به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ و $y=\frac{\pi}{۴}$، می‌توان گفت:

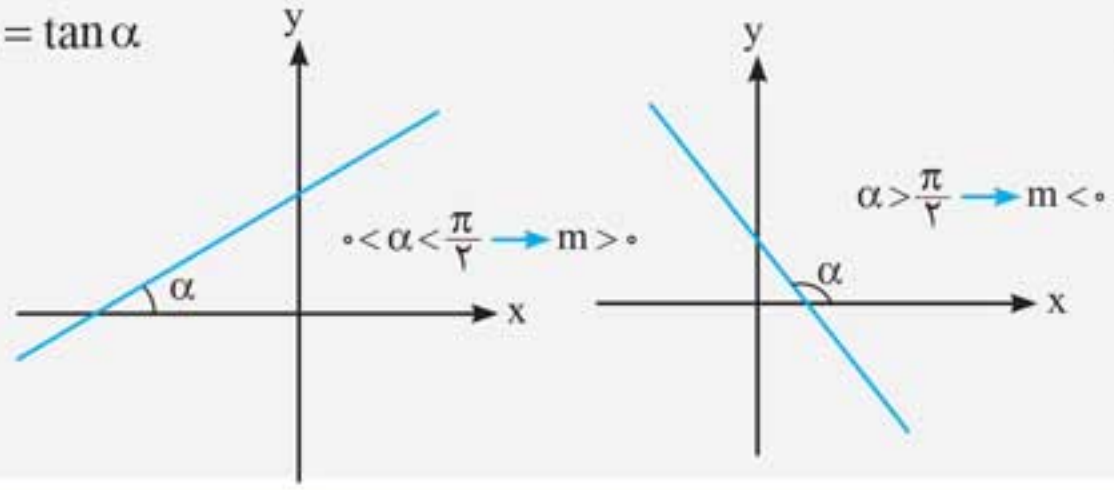
$$\sin(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})+\cos(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲})+\cos(۰)=۱+۱=۲$$

دقت کنید که:

$$\left.\begin{matrix}-۱\le\sin(x+y)\le۱\\ -۱\le\cos(x-y)\le۱\end{matrix}\right\} \Rightarrow -۲\le\sin(x+y)+\cos(x-y)\le۲$$

نکته: شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور xها (محور افقی). به عبارت دیگر اگر α زاویه‌ای باشد که خط $y=mx+n$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد، آن‌گاه:

$m=\tan\alpha$



تست اگر خط گذرا از نقطه‌های $A(a\sqrt{۳}\ ,۹)$ و $B(۲\sqrt{۳}\ ,a)$ با جهت مثبت محور افقی زاویهٔ ۳۰° بسازد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $-۶/۵$ ۲) $-۵/۵$ ۳) $۵/۵$ ۴) $۶/۵$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توان گفت:

$$\left.\begin{matrix}A(x_A\ ,y_A)\\ B(x_B\ ,y_B)\end{matrix}\right\} \Rightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Rightarrow m=\tan۳۰^\circ=\frac{a-۹}{۲\sqrt{۳}-a\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{a-۹}{\sqrt{۳}(۲-a)} \Rightarrow ۶-۳a=۳a-۲۷ \xrightarrow{+۳} ۲-a=a-۹ \Rightarrow a=۵/۵$$

محاسبهٔ زاویه‌های ترکیبی

برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی به شکل $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$، الگوریتم زیر را به‌کار می‌بریم:

۱) برای مقدارهای فرد k، نسبت را عوض می‌کنیم $(\sin\theta\leftrightarrow\cos\theta\ ,\ \tan\theta\leftrightarrow\cot\theta)$، اما برای مقدارهای زوج، نسبت ثابت می‌ماند.

۲) با توجه به مقدار k، انتهای کمان مربوط به زاویه را به‌دست می‌آوریم و با توجه به آن، علامت نسبت پایانی را از روی نسبت آغازین تعیین می‌کنیم.

۳) مقدار $\frac{k\pi}{۲}\pm$ را حذف می‌کنیم و عبارت را برحسب α می‌نویسیم.

تست حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵^\circ+\sin ۷۰^\circ}{\cos ۵۶^\circ+\cos ۱۱^\circ}$، با فرض $\tan ۲۰^\circ=۰/۴$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$A=\frac{\sin(\overbrace{۲۷۰}^{\frac{۳\pi}{۲}}-۲۰)+\sin(\overbrace{۷۲۰}^{۴\pi}-۲۰)}{\cos(\underbrace{۵۴۰}_{۳\pi}+۲۰)-\cos(\underbrace{۹۰}_{\frac{\pi}{۲}}+۲۰)}=\frac{-\cos ۲۰-\sin ۲۰}{-\cos ۲۰+\sin ۲۰}$$

$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌نماییم}]{\text{صورت و مخرج را بر } (-\cos ۲۰)} A=\frac{۱+\tan ۲۰}{۱-\tan ۲۰}=\frac{۱/۴}{۰/۶}=\frac{۷}{۳}$

اگر $\tan\theta=۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۳\frac{\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) -۲ ۲) $۱/۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}\Rightarrow A=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲(۰/۲)}=۰/۵+\frac{۱۰}{۴}=۳$$

اتحادهای مثلثاتی

هر تساوی مثلثاتی که به ازای هر x قابل قبول (یعنی مقداری از x که در دامنهٔ تساوی باشد) همواره برقرار باشد، اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود. مهم‌ترین اتحادهای مثلثاتی که باید آن‌ها را به ذهن بسپاریم، عبارت‌اند از:

۱) $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

۲) $(x\neq\frac{k\pi}{۲})\ \tan x\cot x=۱$

۳) $(x\neq k\pi)\ ۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$

۴) $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲})\ ۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$

۵) $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$

۶) $\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x$

۷) $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

۸) $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$

۹) $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$

۱۰) $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$

۱۱) $\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$

۱۲) $\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$

۱۳) $\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$

۱۴) $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$

۱۵) $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$

۱۶) $\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۱-\cos x}{\sin x}$

۱۷) $\cot x+\tan x=\frac{۲}{\sin ۲x}$

۱۸) $\cot x-\tan x=۲\cot ۲x$

تست حاصل $\tan^۲\theta-۲(\frac{۱}{۱+\sin\theta}+\frac{۱}{۱-\sin\theta})$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{۱+\sin\theta+۱-\sin\theta}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}-۲\tan^۲\theta=\frac{۲}{۱-\sin^۲\theta}-۲\tan^۲\theta$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲}{\cos^۲\theta}-۲\tan^۲\theta=۲(۱+\tan^۲\theta)-۲\tan^۲\theta=۲$$

ساده شدهٔ کسر $\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $۸\cos^{-۲}۲\theta$ ۲) $۸\sin^{-۲}۲\theta$ ۳) $۱۶\cos^{-۴}۲\theta$ ۴) $۱۶\sin^{-۴}۲\theta$

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{(\frac{۱}{\cos^۲\theta})(\frac{۱}{\sin^۲\theta})}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta(\underbrace{۱-\cos^۲\theta}_{\sin^۲\theta})}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{(\sin\theta\cos\theta)^۴}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)^۴}=\frac{۱۶}{\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴}۲\theta$$

اگر $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱$ باشد، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{-۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow\cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=-۱\Rightarrow ۲\cot(۲(\frac{x}{۲}))=-۱$$

$$\Rightarrow\cot x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan x=-۲\Rightarrow\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{-۴}{۱-۴}=\frac{۴}{۳}$$

اگر $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) -۲ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ«۱»

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin\alpha=1+\cos\alpha\Rightarrow 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \cot(\frac{\alpha}{2})=2$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot(\frac{\alpha}{2})=-2$$

اگر $\tan\beta=\frac{1}{2}$ و $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

پاسخ گزینهٔ«۲»

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\beta\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{2(3)}{1+3^2}=\frac{6}{10}=0/6$$

۲ تابع متناوب

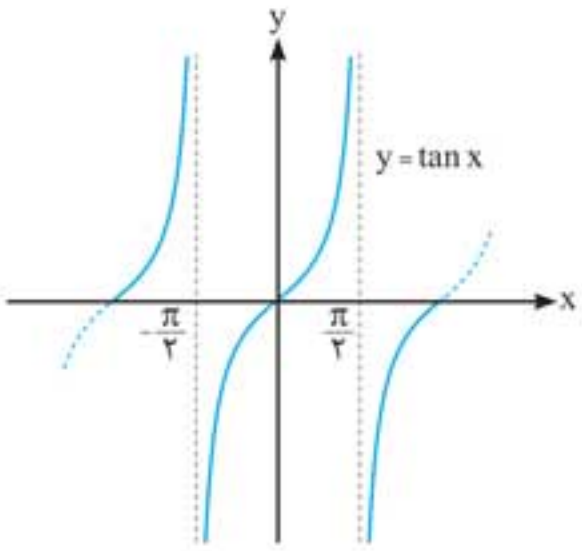
تابع f را متناوب می‌نامند، هرگاه عدد حقیقی مثبتی مانند T یافت شود به گونه‌ای که برای هر $x\in D_f$ هر دو شرط زیر برقرار باشد:

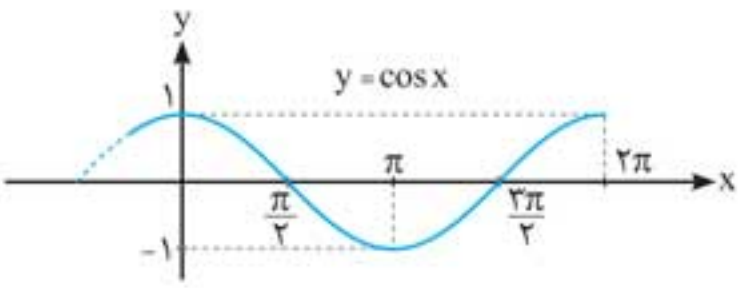
۱) $x\pm T\in D_f$ ۲) $f(x\pm T)=f(x)$

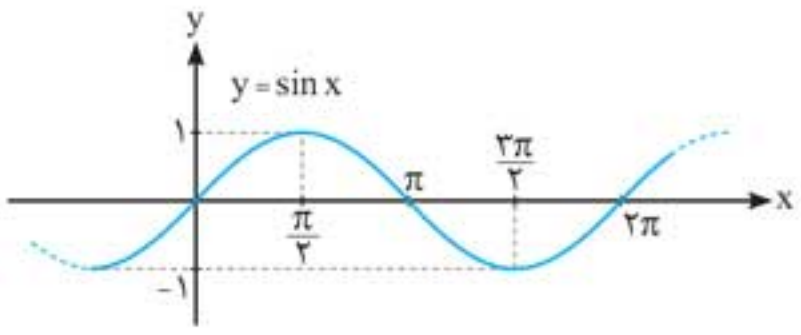
کوچک‌ترین عدد مثبت T را که در دو شرط بالا صدق می‌کند، دورهٔ تناوب اصلی f می‌نامند.

توابع مثلثاتی

در حالت کلی تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را تابع سینوس، تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ را تابع کسینوس و تابع با ضابطهٔ $y=\tan x$ را تابع تانژانت می‌نامند. نمودار این توابع به صورت زیر است:







نکته‌ها:

۱) اگر دورهٔ تناوب اصلی توابع $y=a\sin^k(bx+d)+c$ و $y=a\cos^k(bx+d)+c$ برابر T باشد، آن‌گاه:

الف) اگر k عددی زوج باشد، $T=\frac{\pi}{|b|}$.

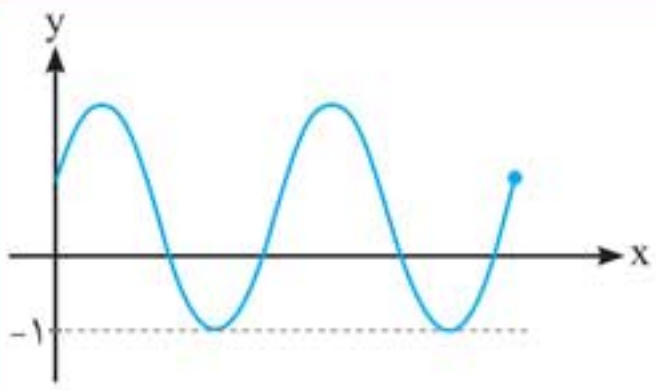
ب) اگر k عددی فرد باشد، $T=\frac{۲\pi}{|b|}$.

۲) دورهٔ تناوب اصلی توابع $y=|a\sin^k(bx+d)+c|$ و $y=|a\cos^k(bx+d)+c|$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۳) توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$ دارای ماکزیمم $|a|+c$ و مینیمم $-|a|+c$ است.

۴) دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست شکل مقابل، نمودار تابع $y=۱+a\sin(b\pi x)$، در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

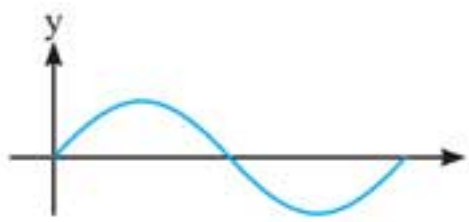
پاسخ گزینهٔ «۳» نمودار تابع در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ دارای دو دورهٔ تناوب است (دوبار تکرار شده است)، پس داریم:

$$۲T=\frac{۴}{۳}-۰\Rightarrow T=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}}\frac{۲}{۳}=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\Rightarrow|b|=۳$$

با توجه به نمودار تابع، کمترین مقدار برابر -۱ است، پس:

$$-۱-|a|=-۱\Rightarrow|a|=۲$$

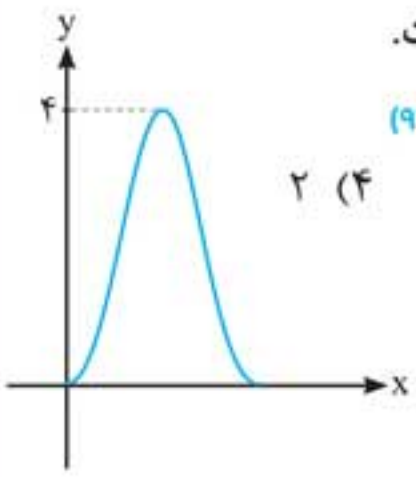
با توجه به این‌که نمودار، مشابه



است، پس $ab>۰$:

$$\begin{cases}a=۲\ ,\ b=۳\Rightarrow a+b=۵\\ a=-۲\ ,\ b=-۳\Rightarrow a+b=-۵\end{cases}$$

شکل مقابل، نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، در بازهٔ $(۰,۴)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

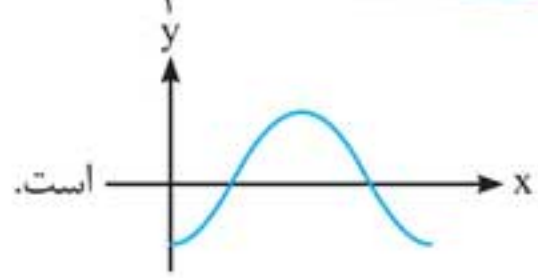


۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۱» با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$\left.\begin{array}{l}\text{نقطهٔ }(۰,۰)\text{ روی تابع}\Rightarrow ۰=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}(۰))\Rightarrow a+b=۰\\ \text{ماکزیمم}:۴=a+|b|\xrightarrow{b<۰}۴=a-b\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۲\end{cases}$$

تذکر ضریب $\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ یعنی b باید منفی باشد، چرا که پس از $x=۰$، نمودار مشابه



است.

۳ معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه برقرار باشد و هدف حل آن یافتن زاویه یا زاویه‌هایی باشد که در این معادله صدق کنند را معادلهٔ مثلثاتی می‌نامند. برای حل این‌گونه معادلات، الگوریتم زیر را به‌کار می‌بریم:

۱) به کمک اتحادهای جبری و مثلثاتی، معادله را ساده می‌کنیم تا به معادلاتی به شکل زیر برسیم:

$$\sin x = a \quad \text{یا} \quad \cos x = a \quad \text{یا} \quad \tan x = a$$

۲) زاویه مانند α را به گونه‌ای می‌یابیم که:

$$\sin\alpha = a\,,\ \alpha \in [\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$$

$$\cos\alpha = a \ \text{و} \ \alpha \in [-\pi, \pi]$$

$$\tan\alpha = a \ \text{و} \ \alpha \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

۳) بنابراین معادلاتی به شکل زیر داریم که جواب‌هایشان را در حالت کلی می‌دانیم:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \ \text{یا} \ x = ۲k\pi + (\pi - a)$$

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ می‌توان گفت: $۲(۱-\cos^۲ x) + ۳\cos x = ۰$

$$\Rightarrow -۲\cos^۲ x + ۳\cos x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-۳ + \sqrt{۲۵}}{-۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ \cos x = \frac{-۳ - \sqrt{۲۵}}{-۴} = ۲ \Rightarrow \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر، کدام است؟

$$۲\sin(\pi - x)\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$$

۱) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$۲\sin x\sin x+۳\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x)=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x-۳\cos x=۰$$

$$\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)-۳\cos x=۰\Rightarrow -۲\cos^۲ x-۳\cos x+۲=۰$$

$$\Delta=(-۳)^۲-۴(-۲)(۲)=۲۵\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{۳+\sqrt{۲۵}}{-۴}=-۲ & \text{غیرقابل قبول}\\ \cos x=\frac{۳-\sqrt{۲۵}}{-۴}=\frac{۱}{۲} & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا تغییر متغیر $x-\frac{۳\pi}{۸}=\alpha$ را در نظر می‌گیریم:

$$x-\frac{۳\pi}{۸}=\alpha\Rightarrow x=\alpha+\frac{۳\pi}{۸}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\frac{۳\pi}{۸}+\frac{\pi}{۸})+\cos(\alpha)=۱\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\cos\alpha=۱\Rightarrow ۲\cos\alpha=۱$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \alpha=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x-\frac{۳\pi}{۸}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸}$$

حال برای آن‌که جواب‌ها را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابیم، به k اعداد مختلف می‌دهیم:

$$k=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸} & \checkmark\\ x_۲=-\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸} & \checkmark\end{cases}$$

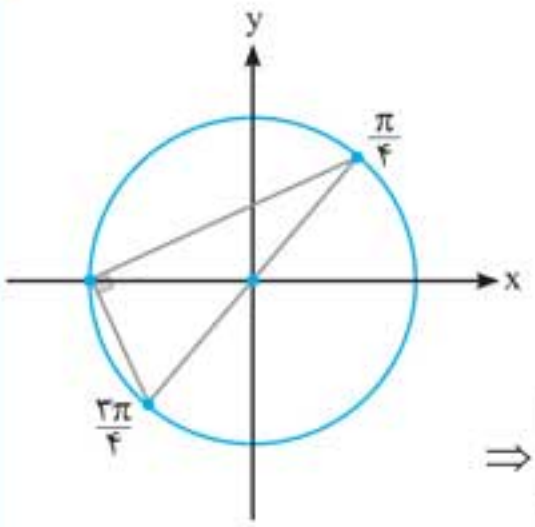
$$k=۱\Rightarrow\begin{cases}x_۳=۲\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸} & \Rightarrow \text{در بازهٔ } [۰,۲\pi] \text{ قرار ندارد} \quad \times\\ x_۴=۲\pi-\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸} & \Rightarrow \text{در بازهٔ } [۰,۲\pi] \text{ قرار ندارد} \quad \times\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها در بازهٔ } [۰,۲\pi]=(\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸})+(-\frac{\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۸})=\frac{۳\pi}{۴}$$

نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x\cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی الساقین



پاسخ **گزینهٔ«۳»** با در نظر گرفتن این‌که $\cos x \neq ۱$، می‌توان گفت:

$$\xrightarrow[۱-\cos x]{\text{طرفین ضرب در}} \sin x\cos x = ۱-\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x = \sin^۲ x \Rightarrow \sin^۲ x - \sin x\cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - \cos x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \sin x - \cos x = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰, \pi \xrightarrow{\cos x \neq ۱} x = \pi \\ x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

همان‌طور که از شکل مشخص است، ۳ نقطه تشکیل مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. (زاویهٔ روبه‌رو به قطر ۹۰° است.)

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۵π

پاسخ **گزینهٔ«۴»**

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = \sin ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi \\ ۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{۰ \leq x \leq ۲\pi} \begin{cases} x = \frac{۲\pi}{۳} \\ x = \frac{۴\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها: $۰ + \pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \sqrt{۳}$، به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$

پاسخ **گزینهٔ«۲»**

$$\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \tan ۲x = \sqrt{۳} = \tan(\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

در معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x(\sin x + \cos x) = \cos ۲x(\cos x - \sin x)$، مجموع تمام جواب‌ها در بازهٔ $[۰, \pi]$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ«۲»**

$$\sin ۲x(\sin x + \cos x) = \cos ۲x(\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

مشخص است که اگر $\cos x+\sin x=0$ باشد، معادله برقرار است، پس:

$$\cos x+\sin x=0\Rightarrow \sin x=-\cos x\Rightarrow \tan x=-1\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\frac{3\pi}{4}$$

حال اگر $\sin x+\cos x\neq 0$ باشد، می‌توان گفت:

$$2\sin x\cos x=\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow 4\sin x\cos x=1\Rightarrow 2\sin 2x=1\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\frac{\pi}{12}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\frac{5\pi}{12}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}}\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$$

نکته: به معادلات مثلثاتی زیر، معادلات مثلثاتی خاص گفته می‌شود که به خاطر سپردن جواب‌های عمومی آن‌ها در حل تست‌ها بسیار کارساز است:

الف) $\sin\theta=0\Rightarrow\theta=k\pi$

ب) $\cos\theta=0\Rightarrow\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$

پ) $\sin\theta=1\Rightarrow\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

ت) $\cos\theta=1\Rightarrow\theta=2k\pi$

ث) $\sin\theta=-1\Rightarrow\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

ج) $\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=(2k+1)\pi$

تست نمودار تابع $y=-4\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$، روی بازهٔ $[-1,1]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** بیش‌ترین مقدار این تابع هنگامی است که:

$$\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1\Rightarrow\frac{\pi}{4}-3\pi x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{1}{3\pi}(\frac{\pi}{4}-(2k+1)\pi)$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{12}-\frac{2k+1}{3}$$

حال به ازای kهای مختلف، تعداد جواب‌های بین $[-1,1]$ را می‌یابیم:

$k=-2\Rightarrow x=\frac{1}{12}+1\notin[-1,1]$ ×

$k=-1\Rightarrow x=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\in[-1,1]$ ✓

$k=0\Rightarrow x=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\in[-1,1]$ ✓

$k=1\Rightarrow x=\frac{1}{12}-1\in[-1,1]$ ✓

$k=2\Rightarrow x=\frac{1}{12}-\frac{5}{3}\notin[-1,1]$ ×

نمودار تابع $y=۳\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$۳\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\frac{k\pi}{۲}$$

$k=۳\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\frac{۳\pi}{۲}\notin[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ×

$k=۲\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\pi\in[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ✓

$k=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۲}\in[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ✓

$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}\in[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ✓

$k=-۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}+\frac{\pi}{۲}\in[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ✓

$k=-۲\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}+\pi\in[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ✓

$k=-۳\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۲}\notin[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ ×

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan ۴۰^\circ=۰/۸)$

(ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

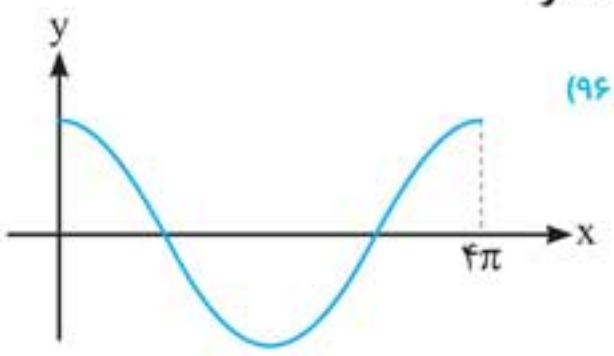
۲. اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳. در متوازی الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟ (تجربی ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

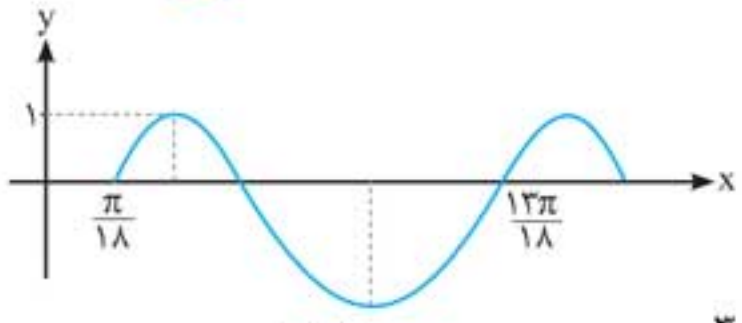
۴. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}+۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱۶\pi}{۳}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)



۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

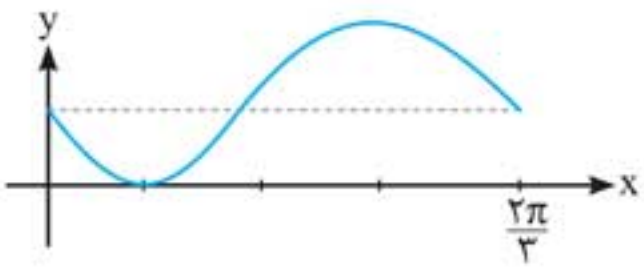
۳) ۱ ۴) صفر

۵. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)



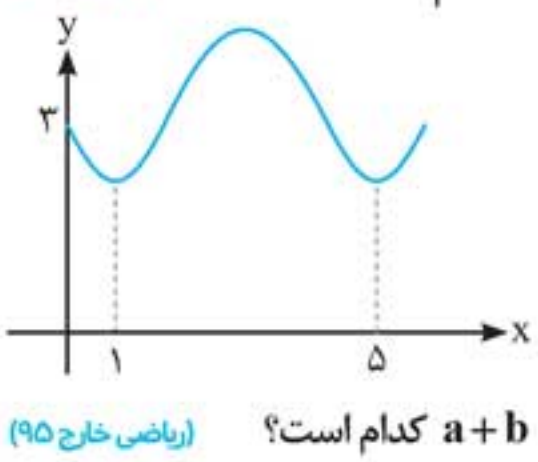
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{۷\pi}{۶}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)



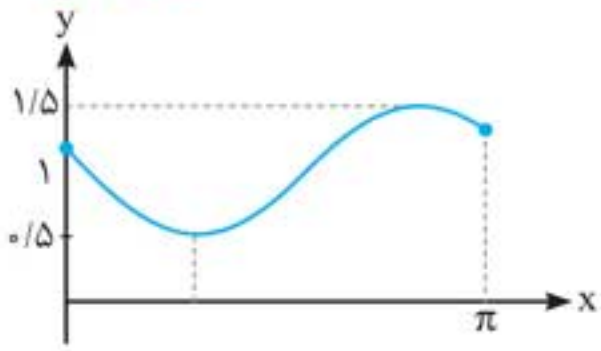
۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

۷. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



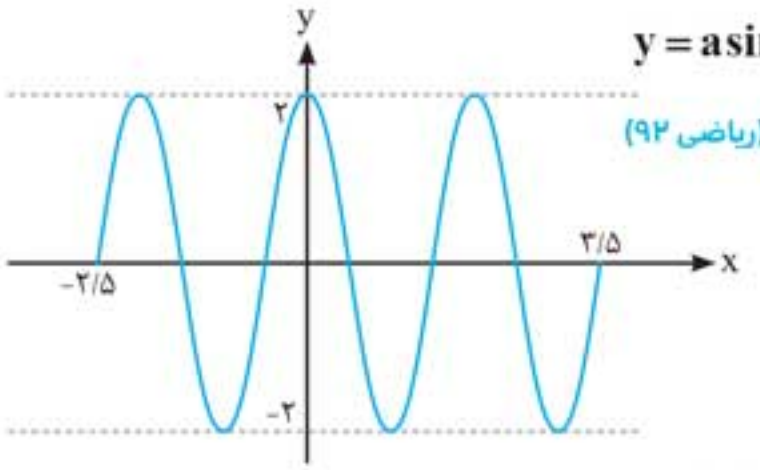
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۸. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۹. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. ab کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۱۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۱۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=۱$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۸}$

۱۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x-\cos^۴ x=\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۱۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)-۲\sin(\pi-x)+۱=۰$، کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$

۱۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x-\tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۶. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۱۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $(\hat{A}=\frac{\pi}{۲})$ حاصل عبارت $\frac{۱+\cos ۲\hat{C}}{\sin ۲\hat{B}}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos\hat{C}$ ۲) $\cot\hat{C}$ ۳) $\sin\hat{C}$ ۴) $\tan\hat{C}$

۱۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $(\hat{A}=\frac{\pi}{۲})$ و $\tan\hat{C}=\frac{۳}{۵}$، تصویر ضلع c بر روی ضلع a برابر ۳/۶ واحد است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۵/۴ ۴) ۶

۱۹. اگر $\sin ۲\alpha>۰$ و $\cos\alpha\tan\alpha<۰$ باشد، آن‌گاه انتهای α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۰. اگر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\cos x\le ۱$ باشد، آن‌گاه تغییرات x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\pi\le x\le\frac{۵\pi}{۴}$

۲۱. اگر $\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cos ۲\alpha=\frac{۱}{۱-m}$ باشند، آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)$

۲۲. اگر $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳. حاصل عبارت $۸\cos ۸۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\sin ۲۰^\circ$ ۳) $\cos ۲۰^\circ$ ۴) ۱

۲۴. اگر $\pi < x < ۲\pi$ باشد، آن‌گاه عبارت $\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\cot \frac{x}{۲}$ ۲) $-\tan \frac{x}{۲}$ ۳) $\tan \frac{x}{۲}$ ۴) $\cot \frac{x}{۲}$

۲۵. کدام‌یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$ ۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$ ۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

۲۶. ماکزیمم عبارت $\sin^۴ x + \cos^۴ x$ که در آن $x \in \mathbb{R}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۷. مقدار $۲\sin ۵۰^\circ \sin ۴۰^\circ + \cos ۱۷۰^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۸. جواب‌های معادلهٔ $\tan ۴x = \cot(\frac{\pi}{۳} + ۴x)$ کدام‌اند؟

۱) $x = \frac{۱}{۴}(k\pi + \frac{\pi}{۳})$ ۲) $x = \frac{۱}{۸}(k\pi + \frac{\pi}{۳})$

۳) $x = \frac{۱}{۴}(k\pi + \frac{\pi}{۶})$ ۴) $x = \frac{۱}{۸}(k\pi + \frac{\pi}{۶})$

۲۹. اگر دورهٔ تناوب تابع $y = \sin^۲ ax$ با دورهٔ تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{۲}$ برابر باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

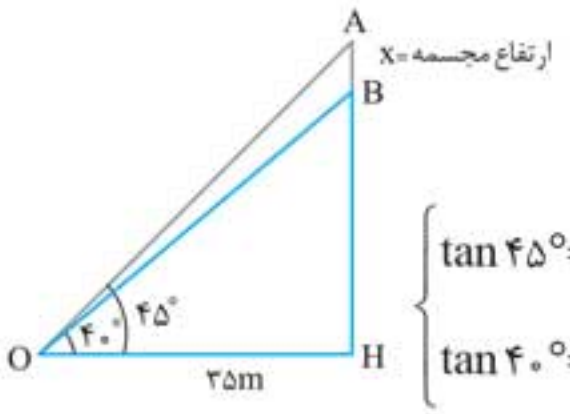
۳۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{x}{۴} + \pi)$ که در شرط $۰ \le x \le \pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۸\pi}{۵}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۳»

ابتدا شکل مناسب را رسم می‌کنیم:



بنابراین:

$$\begin{cases} \tan ۴۵^\circ = \frac{AH}{OH} \Rightarrow ۱ = \frac{AH}{۳۵} \Rightarrow AH = ۳۵\,m \\ \tan ۴۰^\circ = \frac{BH}{OH} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{BH}{۳۵} \Rightarrow BH = ۲۸\,m \end{cases} \Rightarrow x = AH - BH = ۷\,m$$

۲. گزینهٔ «۱»

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\sin ۲\alpha$$

حال باید $\sin ۲\alpha$ را به‌دست آوریم. برای این کار می‌توانیم طرفین معادلهٔ داده شده را به توان ۲ برسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=(\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow \underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱}-\overbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}^{\sin ۲\alpha}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin ۲\alpha=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

۳. گزینهٔ «۲»

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر نصف حاصل‌ضرب قطرها در سینوس زاویهٔ بین دو قطر است:

$$S=\frac{۱}{۲}(۸)(۱۲)\sin(۱۳۵^\circ)=۴۸\sin(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=۴۸\sin ۴۵^\circ=۴۸(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۲۴\sqrt{۲}$$

۴. گزینهٔ «۱»

با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت: $T=۴\pi\Rightarrow \frac{۲\pi}{|m|}=۴\pi\Rightarrow |m|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$

$$x=\frac{۱۶\pi}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\pm\frac{۱}{۲}(\frac{۱۶\pi}{۳}))\xrightarrow{\cos\text{منفی خوراست.}} y=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۸\pi}{۳})$$

$$=\frac{۱}{۲}+۲\cos(۲\pi+\frac{۲\pi}{۳})\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۵. گزینهٔ «۴»

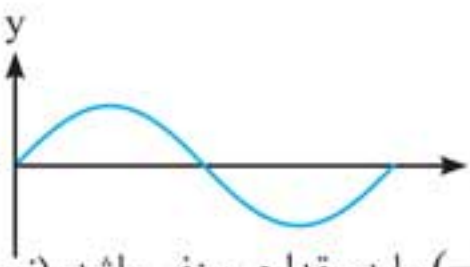
ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})\Rightarrow y=a-۲(-\sin(bx))$

$$\Rightarrow y=a+۲\sin(bx)\Rightarrow\begin{cases}\text{ماکزیمم تابع}: |a|+۲=۱\Rightarrow a=-۱\\ \text{دورهٔ تناوب تابع}: \frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow |b|=۳\Rightarrow b=\pm۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۴ & \times\ \text{در بین گزینه‌هانیست}\\ a+b=۲ & \checkmark\end{cases}$$

۶. گزینهٔ «۴»

$$T=\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|m|}\Rightarrow |m|=۳\Rightarrow m=\pm۳$$

از آن‌جا که نمودار $\sin x$ به صورت 

می‌باشد، می‌توان گفت که در نمودار $y=۱-\sin mx$ حاصل‌ضرب $(-۱)(m)$ باید مقداری منفی باشد. (نمودار سینوس قرینه شده است):

$$-m<۰\Rightarrow m>۰\xrightarrow{m=\pm۳} m=۳$$

در آخر: $x=\frac{۷\pi}{۶}\Rightarrow y=۱-\sin(۳\times\frac{۷\pi}{۶})=۱-\sin(\frac{۷\pi}{۲})=۱-\sin(\frac{۳\pi}{۲})=۱-(-۱)=۲$

۷. گزینهٔ «۲»

نمودار تابع نسبت به $y=\sin x$ قرینه است، پس $b<۰$. حال می‌توان گفت:

$$\text{دورهٔ تناوب}: \frac{۲\pi}{|b\pi|}=۵-۱\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b<۰} b=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=۰\ \text{مقدار تابع در}\Rightarrow ۳=a+\sin(b\pi(۰))\Rightarrow ۳=a$$

در آخر نیز: $x=\frac{۲۵}{۳}\Rightarrow y=۳+\sin(-\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۵}{۳}\pi)$

$$=۳-\sin(\frac{۲۵}{۶}\pi)\Rightarrow y=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=۲/۵$$

۸. گزینهٔ «۳»

با توجه به نمودار باید $ab<0$ باشد. هم‌چنین: $y_{max}=1/5 \Rightarrow 1+|a|=1/5 \Rightarrow |a|=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

از طرف دیگر دوره تناوب برابر π است، پس: $T=\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$

در این صورت دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}, b=-2 \Rightarrow a+b=-\frac{3}{2} \Rightarrow \text{در بین گزینه‌ها وجود ندارد.} \times \\ a=-\frac{1}{2}, b=2 \Rightarrow a+b=\frac{3}{2} \checkmark \end{cases}$$

تذکر توجه کنید که مقادیر $b=-2$ و $a=\frac{1}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا:

$$y=1+\frac{1}{2}\sin(-2x-\frac{\pi}{6})=1-\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

در این صورت نقطهٔ $A(0,k)$ که $1<k<1/5$ در نمودار صدق می‌کند. اما در ضابطهٔ تابع با جای‌گذاری $x=0$، مقدار $y=\frac{3}{4}$ به‌دست می‌آید که در شرط $1<k<1/5$ صدق نمی‌کند.

۹. گزینهٔ «۱»

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $y=a\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)=a\cos(b\pi x)$

با توجه به شکل نمودار تابع در بازهٔ $[-2/5, 3/5]$ شامل ۳ دورهٔ تناوب است، پس:

$$3T=3/5-(-2/5)=6 \Rightarrow T=2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=2 \Rightarrow |b|=1 \Rightarrow b=\pm 1$$

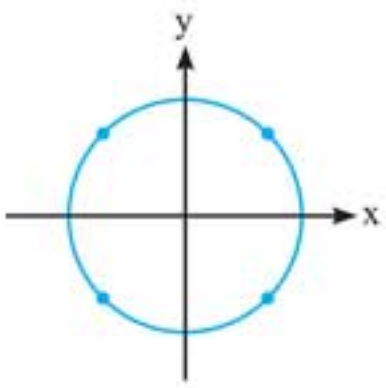
هم‌چنین: $x=0 \Rightarrow 2=a\cos(b\pi(0)) \Rightarrow a=2$

در نتیجه: $ab=\pm 2$

۱۰. گزینهٔ «۳»

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



$$\xrightarrow[\text{دایرهٔ مثلثاتی}]{\text{با توجه به}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۱۱. گزینهٔ «۱»

اگر $x+\frac{\pi}{4}=\alpha$ را در نظر بگیریم:

$$x=\alpha-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(\alpha)\cos(\alpha-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \underbrace{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}_{=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha} =\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \xrightarrow{\alpha = x + \frac{\pi}{4}} x = k\pi + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2\alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \xrightarrow{\alpha = x + \frac{\pi}{4}} x = k\pi + \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۲. گزینهٔ «۱»

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 \Rightarrow \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x} + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\xrightarrow{\cos 2x \neq 0} \tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۱۳. گزینهٔ «۴»

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2(\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = (-\sin\frac{\pi}{4})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۴. گزینهٔ «۳»

$$\underbrace{\sin(\pi + x)}_{(-\sin x)}\cos(\frac{\pi}{2} + x) - \underbrace{2\sin(\pi - x)}_{2\sin x} + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۵. گزینهٔ «۳»

$$(\sin x - \tan x)\cot(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x - \frac{\sin x}{\cos x})(\frac{\cos x}{\sin x}) = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\cos x \neq 0]{\sin x \neq 0} \cos x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۶. گزینهٔ «۳»

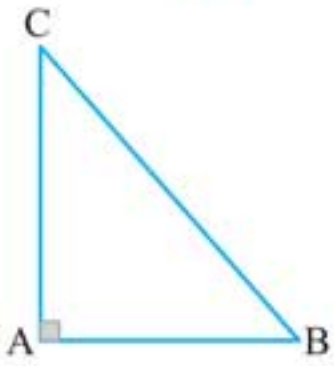
$$\sin 4x = \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow[k=0,1]{x\in[0,\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ 2\sin 2x = -1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها: $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

۱۷. گزینهٔ «۲»

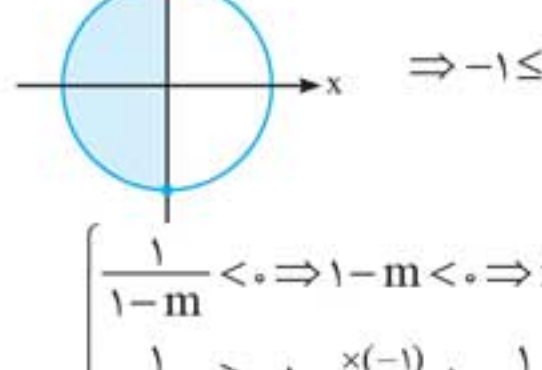


$$\frac{1+\cos 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B}}=\frac{1+2\cos^2\hat{C}-1}{2\sin\hat{B}\cos\hat{B}}=\frac{\cos^2\hat{C}}{\sin\hat{B}\cos\hat{B}}$$

با توجه به این‌که در مثلث قائم‌الزاویه $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}$، می‌توان گفت:

$$\frac{\cos^2\hat{C}}{\cos\hat{C}\sin\hat{C}}=\frac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}}=\cot\hat{C}$$

۱۸. گزینهٔ «۴»



در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل می‌توان نوشت:

$$\tan\hat{C}=\cot\hat{B}=\frac{3}{5}\Rightarrow\cot\hat{B}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{3/6}{AH}\Rightarrow AH=6$$

۱۹. گزینهٔ «۳»

$$\cos\alpha\tan\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0\Rightarrow\sin\alpha<0 \quad (1)$$

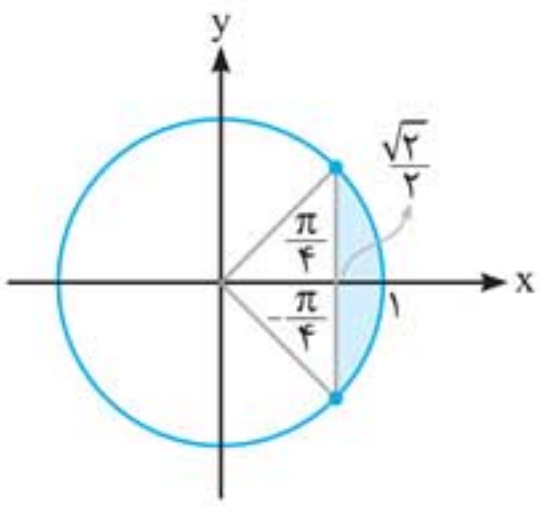
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha>0\xrightarrow{(1)}\cos\alpha<0 \quad (2)$$

هم‌چنین:

با توجه به (۱) و (۲) در ربع سوم هر دو نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی هستند.

۲۰. گزینهٔ «۱»

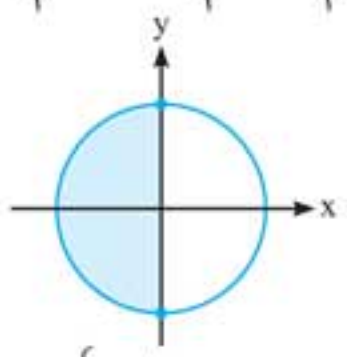
از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم:



$$\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$$

۲۱. گزینهٔ «۳»

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$$



$$\Rightarrow-1\le\cos 2\alpha<0\Rightarrow-1\le\frac{1}{1-m}<0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{1-m}<0\Rightarrow 1-m<0\Rightarrow m>1 & (1)\\ \frac{1}{1-m}\ge-1\xrightarrow{\times(-1)}\frac{1}{m-1}\le 1\Rightarrow\frac{1}{m-1}-\frac{m-1}{m-1}\le 0\Rightarrow\frac{-m+2}{m-1}\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & 1 & & 2 & & +\infty\\ \hline \frac{-m+2}{m-1} & & - & \text{ن} & + & 0 & - & \\ & & \text{ج} & & & & \text{ج} & \end{array}\Rightarrow\begin{cases}m\ge 2\\ \text{یا} \quad (2)\\ m<1\end{cases}$$

اشتراک دو جواب به‌دست آمده $m\ge 2$ یا $[2,+\infty)$ است.

۲۲. گزینهٔ «۱»

$$\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴\Rightarrow ۱-\sin x=۴+۴\sin x\Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}$$

$$\cos x=\pm\sqrt{۱-(\frac{۳}{۵})^۲}=\pm\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{-(\frac{۳}{۵})}{۱\pm\frac{۴}{۵}}\Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{x}{۲}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{\frac{۹}{۵}}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{در بین گزینه‌ها وجود ندارد.} & \times\\ \tan\frac{x}{۲}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۵}}=-۳ & \checkmark\end{cases}$$

۲۳. گزینهٔ «۴»

عبارت را در $\frac{\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}$ ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{۸\cos ۸۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۸\cos ۸۰^\circ\cos ۴۰^\circ(\frac{۱}{۲}\sin ۴۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۴\cos ۸۰^\circ(\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{\sin ۱۶۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{\sin(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=۱$$

۲۴. گزینهٔ «۲»

$$A=\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۱-(۱-۲\sin^۲\frac{x}{۲})}{۱+۲\cos^۲\frac{x}{۲}-۱}}=\sqrt{\frac{\sin^۲\frac{x}{۲}}{\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\sqrt{\tan^۲\frac{x}{۲}}=|\tan\frac{x}{۲}|$$

هنگامی که $\pi<x<۲\pi$ باشد، می‌توان گفت $\frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<\pi$ است یعنی ربع دوم که در آن تانژانت منفی است.

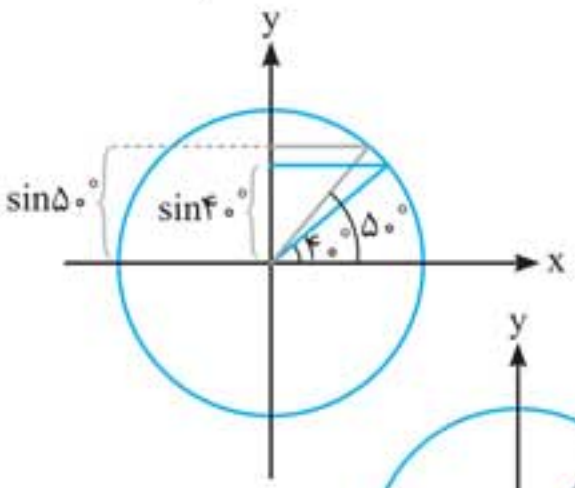
پس:

$$A=|\tan\frac{x}{۲}|\xrightarrow{\tan\frac{x}{۲}<۰}A=-\tan\frac{x}{۲}$$

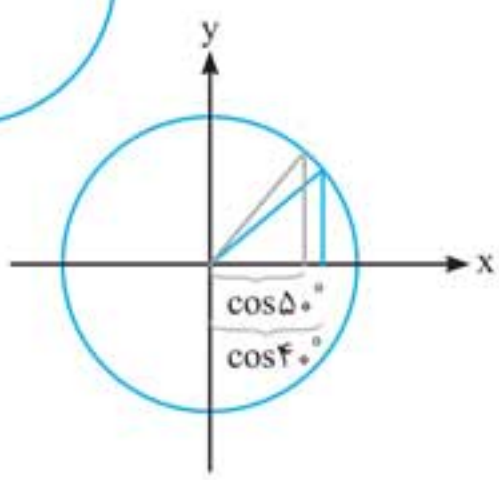
۲۵. گزینهٔ «۲»

از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم.

بررسی تک‌تک گزینه‌ها:



گزینهٔ «۱»: نادرست است. $\sin ۵۰^\circ>\sin ۴۰^\circ\Leftarrow$



گزینهٔ «۲»: درست است و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.

$\cos ۵۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$

۲۶. گزینهٔ «۱»

$$A=\sin^۴x+\cos^۴x=(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x\Rightarrow A=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲x$$

ماکزیمم این عبارت هنگامی رخ می‌دهد که $\sin۲x=۰$ باشد، بنابراین: $\xrightarrow{\sin۲x=۰}A=۱$

۲۷. گزینهٔ «۱»

$$A=۲\cos۴۰^\circ\sin۴۰^\circ+\cos۱۷۰^\circ=۲\cos۴۰^\circ\sin۴۰^\circ+\cos(۱۸۰^\circ-۱۰^\circ)$$
$$=\sin۸۰^\circ-\cos۱۰^\circ=\cos۱۰^\circ-\cos۱۰^\circ=۰$$

۲۸. گزینهٔ «۴»

همان‌طور که می‌دانیم $\cot(\alpha)=\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$، پس:

$$\tan۴x=\cot(\frac{\pi}{۳}+۴x)\Rightarrow\tan۴x=\tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}+۴x))=\tan(\frac{\pi}{۶}-۴x)$$
$$\Rightarrow۴x=k\pi+\frac{\pi}{۶}-۴x\Rightarrow۸x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{۱}{۸}(k\pi+\frac{\pi}{۶})$$

۲۹. گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}y=\sin^۲ax\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{|a|}\\ y=\tan\dfrac{x}{۲}\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{(\frac{۱}{۲})}=۲\pi\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{|a|}=۲\pi\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

۳۰. گزینهٔ «۴»

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{x}{۴}+\pi)\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm(\frac{x}{۴}+\pi)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{۴}=۲k\pi+\dfrac{x}{۴}+\pi\Rightarrow\dfrac{۳}{۴}x=۲k\pi+\dfrac{۳}{۴}\pi\Rightarrow x=\dfrac{۸}{۳}k\pi+\pi\xrightarrow{۰\le x\le\pi}x=\pi\\ x+\dfrac{\pi}{۴}=۲k\pi-\dfrac{x}{۴}-\pi\Rightarrow\dfrac{۵}{۴}x=۲k\pi-\dfrac{۵}{۴}\pi\Rightarrow x=\dfrac{۸}{۵}k\pi-\pi\xrightarrow{۰\le x\le\pi}x=\dfrac{۳}{۵}\pi\end{cases}$$

مجموع جواب‌ها : $\frac{۳}{۵}\pi+\pi=\frac{۸}{۵}\pi$

پیوست

دو دوره آزمون شبیه‌سازی کنکور بر اساس تغییرات کتاب‌های درسی جدید که بهترین ابزار برای جمع‌بندی است را همراه با پاسخ تشریحی آوردیم و یک فرمول نامهٔ کامل و جامع که می‌توانید با یک نگاه، تمام فرمول‌ها را دوره کنید.

آزمون جامع «۱»

(سراسری تجربی ۹۶)

۱. اگر A یک زیر مجموعهٔ متناهی و B یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ اعداد صحیح باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A-B$ مجموعه‌ای متناهی است.
۲) $B-A$ مجموعه‌ای نامتناهی است.
۳) $A-B'$ مجموعه‌ای متناهی است.
۴) $A'-B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۲. در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۲۰ و ضلع مقابل آن $۲\sqrt{۳}$ و زاویه‌ای دیگر ۴۰ و ضلع مقابل آن ۵ است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰\sqrt{۳}$ ۴) ۲/۵

۳. در تجزیهٔ عبارت $۴x^۲+۶\sqrt{x^۳}+۲x+۳\sqrt{x}$ کدام عامل وجود دارد؟ $(x>۰)$

۱) $۲x-۱$ ۲) $۲x-۳\sqrt{x}$ ۳) $۲x+۳\sqrt{x}$ ۴) $۲\sqrt{x}+۱$

۴. مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱<\frac{۳x+۱}{x-۳}<۳$، به کدام صورت است؟

۱) $x<\frac{۱}{۲}$ ۲) $x<۳$ ۳) $-\frac{۱}{۲}<x<۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}<x<۳$

۵. تابع $f(x)$ به‌گونه‌ای است که $f(x)=\frac{f(x+۱)+f(x-۱)}{۲}$، اگر $f(۰)=۲$ و $f(-۱)=۵$ باشند آن‌گاه $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) -۵

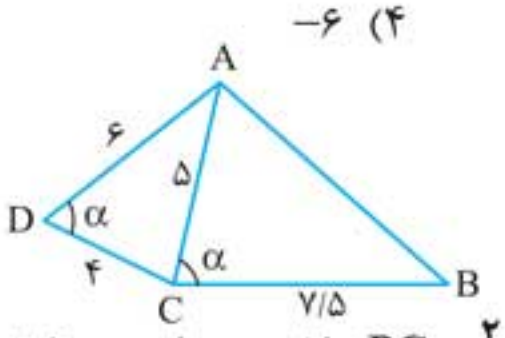
۶. در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۷. خط عمود منصف پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(۱,۳)$ و $B=(-۳,۵)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

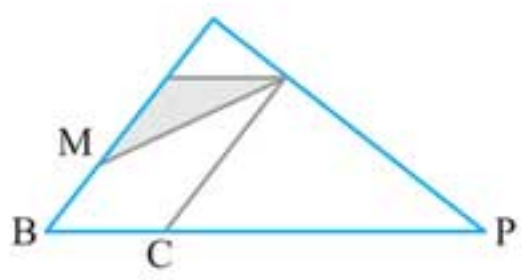
۱) ۲ ۲) -۵ ۳) -۳ ۴) -۶

۸. در شکل روبه‌رو طول AB کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵/۵
۳) ۶ ۴) ۶/۲۵

۹. در شکل زیر، نقطهٔ M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC=\frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگترین مثلث است؟

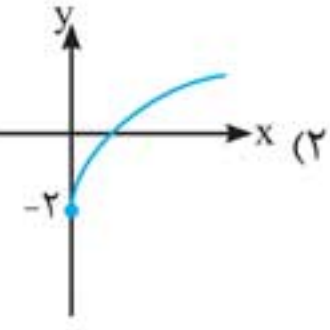


۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

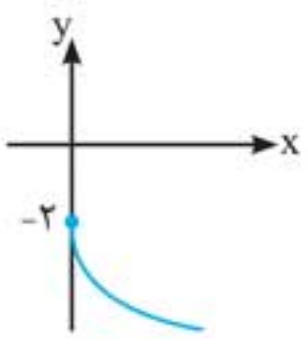
۱۰. دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟

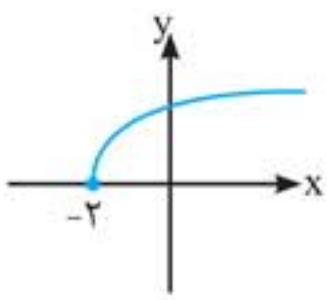
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۱. اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟

۱) 

۲)

۳) 

۴) 

۱۲. حاصل $\cos^۲\frac{۱۱\pi}{۲۴}+\cos^۲\frac{۷\pi}{۲۴}+\cos^۲\frac{۵\pi}{۲۴}+\cos^۲\frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳. از دو معادلهٔ دو مجهولی $۲^{x-۷}\times۴^{x+y}=۱$ و $\log y=۲\log۳+\log x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴. اگر تابع $f(x)=[-x]+m[x+۲]$ در $x=۱$ دارای حد باشد، m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) -۱ ۴) هیچ مقداری برای m وجود ندارد

۱۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} & ; \ x\neq۰\\ a & ; \ x=۰\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶. در یک کشور ۳۰٪ سرقت‌های مسلحانه در روز و ۸۵٪ درون شهرهای بزرگ صورت می‌گیرد و ۵٪ سرقت‌های مسلحانه در حومه شهر و در طول روز انجام می‌شود. اگر سرقت مسلحانه‌ای در حومه شهر رخ دهد، چقدر احتمال دارد در شب اتفاق افتاده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۷. ضریب تغییرات در داده‌های زیر کدام است؟

داده‌ها: $\underbrace{۶,\ldots,۶}_{\text{۷ تا}},\underbrace{۸,\ldots,۸}_{\text{۹ تا}},\underbrace{۱۰,\ldots,۱۰}_{\text{۱۷ تا}},\underbrace{۱۲,\ldots,۱۲}_{\text{۱۱ تا}},\underbrace{۱۴,\ldots,۱۴}_{\text{۶ تا}}$

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۸

۱۸. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \ x\geq۰\\ -\sqrt{-x} & ; \ x<۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۱۹. اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-۱$ ۲) $x+۱$ ۳) x ۴) $۲x$

۲۰. اگر $\tan x=\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۲۲. حاصل $\lim_{x\to ۲}(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۳. حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}{x^۳+۴x^۲-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۴. مشتق تابع $f(x)=(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)^۳$ در نقطهٔ $x=-۸$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) ۲۵ ۳) -۲۵ ۴) $-\frac{۲۵}{۳}$

۲۵. معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $۲y-x\sqrt{x}=\frac{۱}{x}$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $۴y-x=۳$ ۲) $۴y+x=۵$ ۳) $x-۴y=-۳$ ۴) $۴x+y=۵$

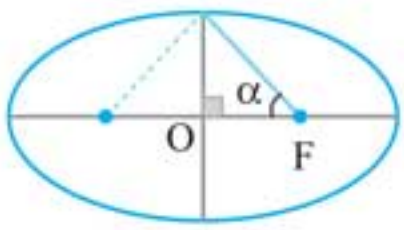
۲۶. اگر تابع $f(x)=x^۳-۴x^۲+mx-۱$ به‌ازای هر x صعودی اکید باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $m<\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $m>\frac{۳}{۸}$ ۴) $m<\frac{۳}{۸}$

۲۷. اگر نقطهٔ $(-۲,۱)$ و اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۴-ax+b$ باشد، دوتایی (a,b) و نوع اکسترمم تابع f در این نقطه کدام است؟

۱) $(۴,۳)$، ماکزیمم نسبی ۲) $(۴,-۳)$، مینیمم نسبی
۳) $(-۴,۳)$، مینیمم نسبی ۴) $(۴,-۳)$، ماکزیمم نسبی

۲۸. در بیضی مقابل $\tan\alpha=۲$ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$
۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

۲۹. معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن $(-۱,۵)$ باشد و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰$ مماس برون باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۱۰x+۲y+۲۲=۰$
۲) $x^۲+y^۲-۱۰x+۲y+۲۰=۰$
۳) $x^۲+y^۲-۱۰x+۲y+۱۸=۰$
۴) $x^۲+y^۲-۱۰x+۲y+۲۴=۰$

۳۰. در یک شهرصنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵/۲
۲) ۱۵/۶
۳) ۱۵/۸
۴) ۱۶/۲

پاسخ‌نامه آزمون جامع «۱»

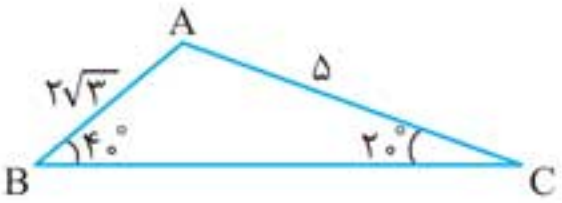
۱. گزینهٔ «۴»

فرض کنید: $B=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۵,۶,...\}, A=\{۱,۲\}$

آن‌گاه مجموعهٔ $A'-B=\{۳,۴\}$ به‌دست می‌آید که مجموعه‌ای متناهی است.

۲. گزینهٔ «۱»

مثلث را رسم می‌کنیم.



زاویهٔ A برابر $۱۸۰^\circ-(۲۰^\circ+۴۰^\circ)=۱۲۰^\circ$ است.

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.Sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})(۵)Sin۱۲۰=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})(۵)(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۳. گزینهٔ «۳»

اگر جملات اول و سوم را با هم و دوم و چهارم را نیز با هم در نظر بگیریم، داریم:

$$(۴x^۲+۲x)+(۶\sqrt{x^۳}+۳\sqrt{x})=۲x(۲x+۱)+۳\sqrt{x}(۲x+۱)=(۲x+۳\sqrt{x})(۲x+۱)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، دو عامل $(۲x+۱)$ و $(۲x+۳\sqrt{x})$ وجود دارد.

۴. گزینهٔ «۱»

روش اول:

$$-۱<\frac{۳x+۱}{x-۳}<۳\xrightarrow{-۱}-۲<\frac{۳x+۱}{x-۳}-۱<۲\Rightarrow-۲<\frac{۳x+۱-x+۳}{x-۳}<۲\Rightarrow-۲<\frac{۲x+۴}{x-۳}<۲$$

$$\Rightarrow\left|\frac{۲(x+۲)}{x-۳}\right|<۲\xrightarrow{\div ۲}\left|\frac{x+۲}{x-۳}\right|<۱\Rightarrow|x+۲|<|x-۳|$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲}x^۲+۴x+۴<x^۲-۶x+۹\Rightarrow ۱۰x<۵\Rightarrow x<\frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

با توجه به گزینه‌ها، $x=۲$ را در نامعادله بررسی می‌کنیم:

$$-۱<\frac{۳x+۱}{x-۳}<۳\xrightarrow{x=۲}-۱<\frac{۷}{-۱}<۳\Rightarrow\underbrace{-۱<-۷}_{\text{غ ق ق}}<۳$$

پس $x=۲$ جزء جواب‌های مسأله نباید باشد، لذا فقط گزینهٔ «۱» پاسخ صحیح است.

۵. گزینهٔ «۲»

تابع $f(x)$ تابع خطی است.

$$f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=a(۰)+b=۲\\f(-۱)=a(-۱)+b=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=-۳x+۲\Rightarrow f(۲)=-۶+۲=-۴$$

۶. گزینهٔ «۲»

برای آن‌که رنگ مهره‌ها متفاوت باشد کافی است از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم، پس:

$$n(S)=\binom{۵+۴+۳}{۳}=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}=۲۲۰$$
$$n(A)=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}=۵\times۴\times۳=۶۰\Rightarrow P(A)=\frac{۶۰}{۲۲۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

۷. گزینهٔ «۳»

مختصات نقطهٔ وسط و شیب خط گذرنده از ۲ نقطهٔ A و B را می‌یابیم.

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱\\y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۵+۳}{۲}=۴\end{cases}$$
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵-۳}{-۳-۱}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$$

شیب خط عمودمنصف، عکس و قرینهٔ شیب خط AB است و از نقطهٔ M می‌گذرد پس:

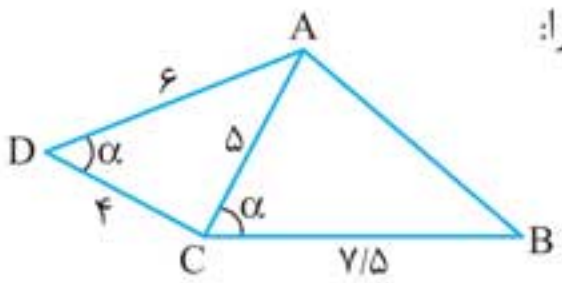
$$y-y_M=m'(x-x_M)\Rightarrow y-۴=۲(x+۱)$$

برای یافتن مختصات محل برخورد این خط با محور طول‌ها، عرض آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$۰-۴=۲(x+۱)\Rightarrow x+۱=-۲\Rightarrow x=-۳$$

۸. گزینهٔ «۴»

مثلث‌های ABC و ACD به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین متشابه‌اند، زیرا:



$$\left.\begin{matrix}A\hat{D}C=A\hat{C}B=\alpha\\\frac{AD}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{۴}{۵}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{ض‌زض}}\overset{\triangle}{A}BC\sim\overset{\triangle}{A}CD$$

حال با توجه به نسبت تشابه داریم:

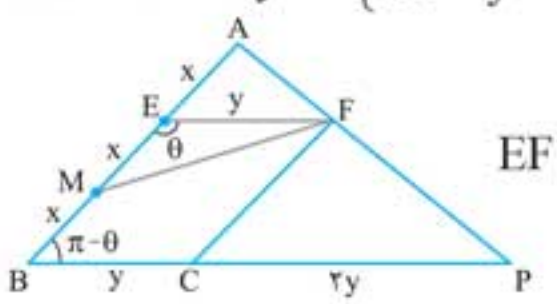
$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۵}{AB}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow AB=\frac{۲۵}{۴}=۶/۲۵$$

۹. گزینهٔ «۲»

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۲}{۳}=\frac{۲y}{۳y}\Rightarrow\begin{cases}PC=۲y\\BC=y\end{cases}$$

حال با توجه به قضیه تالس شکل زیر را داریم:



$$EF\parallel BP\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BP}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{x}{۳x}\Rightarrow\begin{cases}AE=x\\AB=۳x\end{cases}$$

با توجه به شکل داریم: $EB=۲x \Rightarrow EM=MB=x$

حال با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، نسبت مساحت دو مثلث را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}}=\frac{\frac{۱}{۲}EF\times EM\times\sin\theta}{\frac{۱}{۲}AB\times BP\times\sin(\pi-\theta)}\xrightarrow{\sin(\pi-\theta)=\sin\theta}\frac{EF\times EM}{AB\times BP}=\frac{y\times x}{۳x\times ۳y}=\frac{۱}{۹}$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

از ویژگی‌های تابع وارون می‌دانیم که: $f^{-۱}(u)=a\Leftrightarrow u=f(a)$

لذا داریم: $f^{-۱}(g(۲a))=۶\Rightarrow g(۲a)=f(۶)$ (۱)

از روی تابع f داریم $f(۶)=۳$ و هم‌چنین:

$$g(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow g(۲a)=\frac{۲a}{۲a-۱}\xrightarrow{(۱)}\frac{۲a}{۲a-۱}=۳\Rightarrow ۲a=۶a-۳\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۱. گزینهٔ «۲»

دامنهٔ تابع $f+g$، اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g است.

$$\begin{matrix}f(x)=x-۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_g: x\geq ۰\end{matrix}\xrightarrow{D_f\cap D_g} x\geq ۰$$

حال ضابطهٔ تابع $f+g$ را پیدا می‌کنیم. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-۲+\sqrt{x}=x+\sqrt{x}-۲$

این تابع اکیداً صعودی است و از نقطهٔ $(۰,-۲)$ با دامنهٔ $x\geq ۰$ عبور می‌کند.

۱۲. گزینهٔ «۴»

زوایا دو به دو متمم هم هستند.

$$\begin{cases}\frac{\pi}{۲۴}+\frac{۱۱\pi}{۲۴}=\frac{۱۲\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۲}\\ \frac{۵\pi}{۲۴}+\frac{۷\pi}{۲۴}=\frac{۱۲\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases}\cos\frac{۱۱\pi}{۲۴}=\sin\frac{\pi}{۲۴}\\ \cos\frac{۷\pi}{۲۴}=\sin\frac{۵\pi}{۲۴}\end{cases}$$

پس کل عبارت به صورت مقابل می‌شود: $\cos^۲\frac{\pi}{۲۴}+\cos^۲\frac{۵\pi}{۲۴}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۲۴}+\sin^۲\frac{\pi}{۲۴}$

از آن‌جا که $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ است، پس داریم:

$$\underbrace{(\cos^۲\frac{\pi}{۲۴}+\sin^۲\frac{\pi}{۲۴})}_{۱}+\underbrace{(\cos^۲\frac{۵\pi}{۲۴}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۲۴})}_{۱}=۲$$

۱۳. گزینهٔ «۳»

$$\begin{matrix}۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times(۲^۲)^{x+y}=۱\\ ۲^{x-۷}\times ۲^{۲x+۲y}=۱\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷}=۲^۰\end{matrix}\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰\ (۱)$$

از طرفی:

$$\log y=۲\log ۳+\log x\Rightarrow\log y=\log ۳^۲+\log x$$

$$\Rightarrow\log y=\log ۹x\Rightarrow y=۹x\xrightarrow{(۱)}۳x+۲(۹x)-۷=۰$$

$$\Rightarrow ۲۱x=۷\Rightarrow x=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۹x=۹\times\frac{۱}{۳}=۳$$

۱۴. گزینهٔ «۲»

ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=[-x]+m[x]+2m$ می‌نویسیم. می‌دانیم برای آن‌که f در $x=1$ دارای حد باشد، باید حدود راست و چپ در این نقطه موجود و با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[-x]+m[x]+2m=-2+m+2m=3m-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[-x]+m[x]+2m=-1+0+2m=2m-1\end{cases}$$

پس:

$$3m-2=2m-1\Rightarrow m=1$$

۱۵. گزینهٔ «۴»

شرط پیوستگی تابع در $x=0$ آن است که $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ باشد، پس:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-0})}{x}=2\Rightarrow f(0)=a=2$$

۱۶. گزینهٔ «۴»

سرقت مسلحانه در حومه شهر را پیشامد A و سرقت مسلحانه در طول شب را پیشامد B فرض می‌کنیم. بنابراین طبق فرض مسأله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P(B')=0/3,\ P(A')=0/85\Rightarrow P(A)=1-P(A')=0/15\\ P(A\cap B')=P(A-B)=0/05\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0/05\\ \Rightarrow P(A\cap B)=0/1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/1}{0/15}=\frac{2}{3}$$

۱۷. گزینهٔ «۳»

میانگین داده‌ها را می‌یابیم. دقت کنید تعداد کل داده‌ها، ۵۰ عدد است.

$$\bar{x}=\frac{\overbrace{6+\cdots+6}^{7\text{تا}}+\overbrace{8+\cdots+8}^{9\text{تا}}+\overbrace{10+\cdots+10}^{17\text{تا}}+\overbrace{12+\cdots+12}^{11\text{تا}}+\overbrace{14+\cdots+14}^{6\text{تا}}}{50}\Rightarrow \bar{x}=10$$

حالا واریانس داده‌ها را می‌یابیم:

$$\text{صورت واریانس}=\overbrace{(10-6)^2+\cdots+(10-6)^2}^{7\text{تا}}+\overbrace{(10-8)^2+\cdots+(10-8)^2}^{9\text{تا}}$$

$$+\overbrace{(12-10)^2+\cdots+(12-10)^2}^{11\text{تا}}+\overbrace{(14-10)^2+\cdots+(14-10)^2}^{6\text{تا}}$$

$$\sigma^2=\frac{288}{50}=5/76\Rightarrow\sigma=2/4\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2/4}{10}=0/24$$

۱۸. گزینهٔ «۳»

با توجه به ویژگی‌های تابع وارون می‌دانیم که، $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$، لذا با انتخاب عددی مناسب داریم:

❶ $f(-4)=-\sqrt{-(-4)}=-2\Rightarrow f^{-1}(-2)=-4\Rightarrow$ گزینهٔ ۱ یا ۳

❷ $f(1)=\sqrt{1}=1\Rightarrow f^{-1}(1)=1\Rightarrow$ گزینهٔ ۲ یا ۳

پس با اشتراک از ❶ و ❷ گزینهٔ «۳» صحیح است.