مقدمهٔ ناشر

شنیدین می‌گن ذهن سیاله؟ یعنی ولش کنی مثل گاز به هر طرفی می‌ره. حالا این سیالیت ذهن خوبه یا بد؟ من که می‌گم حرف نداره! چون باهاش می‌شه چیزایی رو تصور کرد و به جاهایی سرک کشید که امکان نداره تو واقعیت تجربه کنی. ویژگی مشترک همهٔ نابغه‌های دنیا اینه که ذهنشون از آدمای عادی سیال‌تره. مثلاً اینشتین وقتی داشت نسبیت رو می‌پروروند، معلوم نیست ذهنش تا کجاها رفت. در اون زمان نسبیت اون‌قدر عجیب و غریب به نظر می‌اومد که کسی باورش نمی‌شد یه روزی به یکی از مهم‌ترین نظریه‌های فیزیک تبدیل بشه. اون موقع اینشتین بابت این نظر، حتی یه تمبر پستی هم جایزه نگرفت. سی چهل سالی طول کشید تا کم‌کم یه چیزایی از این نظریه اثبات شد و هنوز هم که هنوزه، داره زوایای پنهانش آشکار می‌شه. این دیگه اوج سیالیت ذهنه.

حالا اگه تو هم یه وقت

«می‌نشـینی چند تمرین ریاضی حل کنی   خط‌کش و نقاله و پرگار شـاعر می‌شـود»[1]

خوشحال باش که اینم یه جور سیالیت ذهنه، اما در مسیر درست قرار نگرفته! یعنی این‌که یه چیز دیگه که به ظاهر نقطهٔ مقابل سیالیته لازم داری: تمرکز! یا همون از این شاخه به اون شاخه نپریدن.

خب! مشکل شد دوتا؛ حالا تمرکز داشته باشیم یا سیالیت؟ جوابش اینه: هر دو!

خلاصه‌اش این می‌شه وقتی که داری ریاضی می‌خونی، روی ریاضی تمرکز کن ولی بذار ذهنت هر جای ریاضی که دوست داره سرک بکشه و موضوع (یا مسئله) رو هر جور که دلش می‌خواد تحلیل کنه. اون وقت حتماً معجزهٔ سیالیت رو تجربه می‌کنی و لذتشو می‌بری.

کتابای ریاضی از جمله این کتاب، پر از سوژه‌های ناب برای سیالیت ذهنه. پس بخونید و حالشو ببرید.

مرسی از رفقای باسواد و بامراممون کوروش، رسول و سروش. خودم شاهد بودم که چه‌قدر زحمت کشیدن و برای نوشتن و بعدش بازنویسی این کتاب شب و روز نداشتن. مرسی از محسن فراهانی عزیز که پابه‌پای مولفای این کتاب جنگید و این پروژه سخت و طاقت‌فرسارو به سرانجام رسوند.

دم کارشناسا و ویراستارای این کتاب گرم. دم بچه‌های R&D و QC خیلی سبز گرم. دم بچه‌های تولید (که همین‌جوری گرمه) بازم گرم‌تر. دم شما هم گرم.

۱- بیتی از زنده‌یاد نجمه زارع

تقدیم به همه دانش‌آموزان و معلم‌های خوب ایران

مقدمهٔ مولفان

به کتاب ریاضیات ۳ خیلی‌سبز خوش آمدید.

نحوهٔ استفاده از کتاب:

(الف) اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که **«درس معلم زمزمهٔ محبت و موفقیت است»** پس از معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل‌کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، کمک بگیرید.

(ب) اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیهٔ ما این است که: (۱) اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. (۲) چیزهایی که از درس‌نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. (۳) یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. (۴) بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخ‌نامهٔ کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌ها را بخوانید. خیلی از وقت‌ها خواندن پاسخ تست‌هایی که درست حل کرده‌ایم هم بسیار کمکتان می‌کند.

ساختار کتاب:

(۱) قبل از هر چیزی لطفاً بروید سراغ QRcode مقدمات. در آن‌جا آن‌چه را که واجب است از محاسبات، درصد، ترتیب عملیات ریاضی و ... گفته‌ایم، سریعاً بخوانید و به یاد بسپارید. در تمام فصل‌های دیگر به این نکته‌ها نیاز دارید.

(۲) فصل‌های کتاب، به ترتیب فصل‌های ریاضی ۳ (دوازدهم) آمده‌اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال و مباحث پیش‌نیاز را آورده‌ایم. حواستان باشد که وقتی می‌گوییم پیش‌نیاز منظورمان این است که بهتر است روش‌های اصلی و مطالب بنیادی مباحث پیش‌نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید. ممکن است لازم باشد مباحث پیش‌نیاز را از مطالب کتاب‌های سال‌های پیش یاد بگیرید.

(۳) در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکن ☺ گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل تست‌ها و بررسی پاسخ‌نامه این آیکن‌ها را به ☺ یا 😐 یا ☹ تبدیل کنید:

☺ یعنی تست آسان 😐 یعنی تست متوسط ☹ یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست‌ها برای این کار استفاده کنید و روی سؤال‌ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این‌ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می‌خواهید می‌توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال‌ها برگردید)

برای بعضی از تست‌ها هم نماد 🌀 داریم که نشان‌دهندهٔ تست‌های دشوار است. این تست‌ها مختص دانش‌آموزان علاقه‌مند است و قرار نیست همهٔ دانش‌آموزان به این تست‌ها پاسخ دهند.

(۴) نماد کنار بعضی از تست‌ها به رنگ آبی (☺) آمده است. این‌ها تست‌های نشان‌دار هستند برای دورهٔ سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: (الف) دوره و جمع‌بندی فصل (ب) اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می‌توانید فقط این تست‌ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع‌بندی واقعی با این روش انجام می‌شود نه با جدول، نمودار و ... .

(۵) در تست‌ها کامنت‌هایی به رنگ آبی می‌بینید. این‌ها صرفاً برای یک یادآوری سادهٔ مطالب درس‌نامه یا یک اشارهٔ کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت‌ها را با فونت ریز و کم‌رنگ آورده‌ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست‌ها از رویشان رد شوید.

۶ در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **اشاره** و **خاطره** داریم:

نکته نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره نشان‌دهندهٔ یک اشارهٔ کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید.
این‌طور هم می‌توانیم بگوییم که **اشاره** یک **نکته** خیلی ساده و عادی است.

خاطره نشان‌دهندهٔ یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۷ درس‌نامهٔ کتاب دوباره و از اول نوشته شده است. سعی کرده‌ایم از جدول، نمودار، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

۸ تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این‌که درس‌نامهٔ هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

۹ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در پاسخ این نمادها را داریم:

راه I، **راه II** ... این‌ها نشان‌دهندهٔ روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه I** متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

عددگذاری در بعضی از تست‌ها که با بررسی گزینه‌ها و یا عددگذاری هم حل می‌شوند و یا بسیار سریع‌تر حل می‌شوند. در قسمت مقدمات به طور کامل در مورد استفاده از این روش هم صحبت کرده‌ایم. البته در این کتاب تأکید اصلی ما بر استفاده از راه‌های مفهومی و اصلی است ولی خب گاهی اوقات که ممکن بوده از **عددگذاری** استفاده کرده‌ایم، اگرچه حواسمان بوده که در استفاده از این روش افراط نکنیم.

۱۰ برای هر کدام از فصل‌ها و هم‌چنین برای نقطه‌های زمانی مشخص در سال (مثلاً پایان نیمسال اول و ...) یک **آزمون** داریم که می‌توانید آن‌ها را به همراه **حل تشریحی** و **ویدیویی** با اسکن‌کردن QR code مربوط به آن ببینید. توصیهٔ شدید و اکید داریم که تا وقتی همهٔ مطالب فصل را خوب یاد نگرفته‌اید و تست‌های فصل را حل و دوره نکرده‌اید سراغ آزمون نروید.

۱۱ توصیهٔ ما برای استفاده از پاسخ‌نامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰تا).

ب درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخ‌نامهٔ کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید (این بار بدون محدودیت وقت).

ت بروید سراغ پاسخ‌نامهٔ تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از اینکه این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همهٔ پاسخ‌ها بیندازید. بررسی **راه I**، **راه II**، **نکته**‌ها، **اشاره**‌ها و **عددگذاری** باعث می‌شود به همهٔ نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

۱۲ امسال یک ID هم داریم که می‌توانید هر سؤال یا اشکالی که داشته باشید بروید سراغ این ID. نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را هم از همین طریق برایمان بفرستید. @riazi_hamrah_konkoor

و حرف آخر هم این‌که:

- آقایان افشین ملاک‌پور و علی مقدم‌نیا که از اساتید برجسته و خوشنام‌اند با نظرات و پیشنهاداتشان سهم مهمی در بهترشدن کتاب داشته‌اند. بر خود واجب می‌دانیم از ایشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشیم.
- هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائهٔ نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.
- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.
- برای این‌که این کتاب خیلی بهتر از قبل شود کلی کار کرده‌ایم. به نظر خودمان بهترین کتاب ریاضیات تجربی است 🙂 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.
- اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم. از پیشنهادهایتان هم استقبال می‌کنیم.

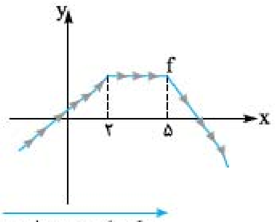
خوب و شاد و پیروز باشید!

@soroushmueeni @mathmohsenimanesh

فهرست

درس دوم یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

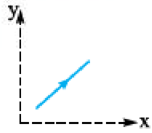
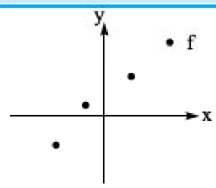
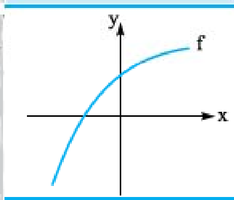
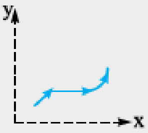
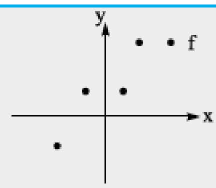
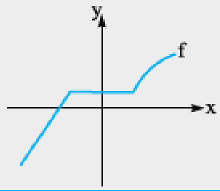
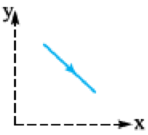
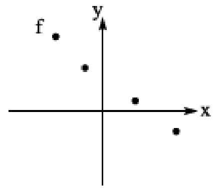
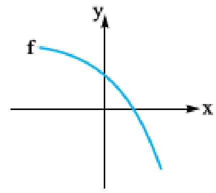
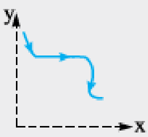
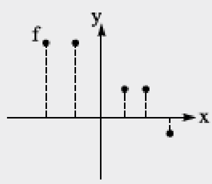
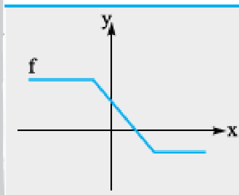
توابع صعودی و نزولی

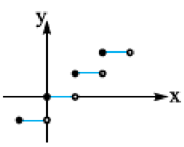


حرکت از چپ به راست

در تابع روبه‌رو اگر روی نمودار تابع از چپ به راست حرکت کنیم، گاهی اوقات yها در حال افزایش هستند، گاهی اوقات yها در حال کاهش‌اند و در قسمت‌هایی تابع ثابت می‌شود و عرض نقاط عوض نمی‌شود.

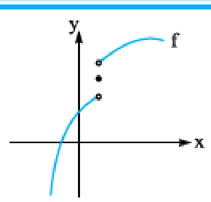
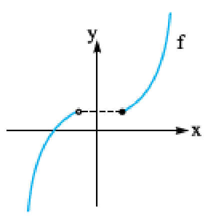
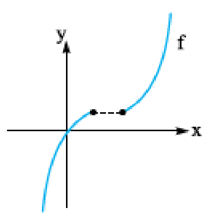
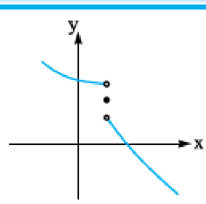
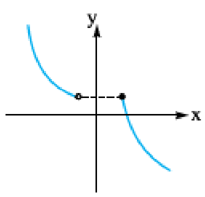
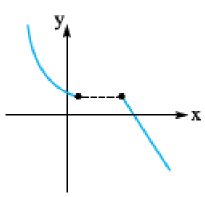
هر کدام از این وضعیت‌ها، یک اسمی دارد تا بتوانیم منظورمان را راحت‌تر برسانیم. مثلاً می‌گوییم تابع f در $(-\infty, 2]$ اکیداً صعودی است. بیایید حالت‌های مختلف را در جدول زیر ببینیم:

	تعریف ریاضی	تعریف فارسی	شماتیک	مثال
تابع اکیداً صعودی	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	با افزایش x، y هم افزایش پیدا می‌کند.		 
تابع صعودی	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	با افزایش x، y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.		 
تابع اکیداً نزولی	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	با افزایش x، y کاهش پیدا می‌کند.		 
تابع نزولی	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	با افزایش x، y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.		 

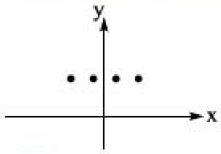


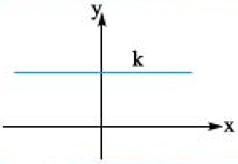
اشاره هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز به حساب می‌آید. دقت کنید عکس این حرف درست نیست یعنی نمی‌توانیم بگوییم که هر تابع صعودی، اکیداً صعودی است. مثلاً تابع $y = [x]$ فقط صعودی است.

البته تشخیص صعودی یا نزولی بودن از روی نمودار گاهی اوقات به دقت بیشتری احتیاج دارد، نمودارهای زیر را نگاه کنید:

اکیداً صعودی	صعودی	اکیداً نزولی	نزولی
 		 	

نکته اگر با افزایش x، y ثابت بماند ($x_۲ > x_۱ \Rightarrow y_۲ = y_۱$) می‌گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.





تست تابع $f(x) = (a-۱)x - ۲a$ ، هم صعودی است و هم نزولی. کدام جمله دربارهٔ این تابع درست است؟

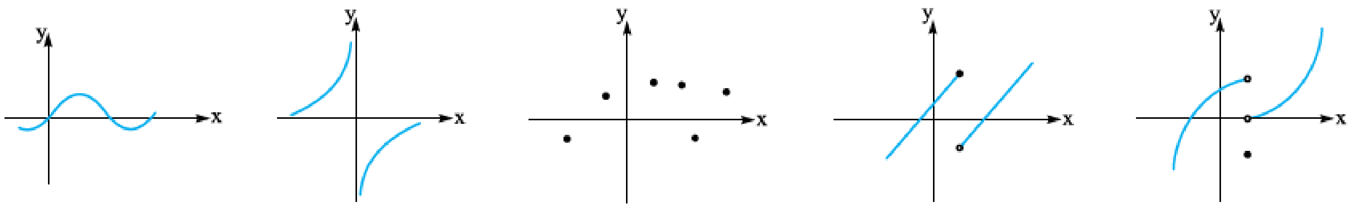
۱) f اکیداً صعودی است.
۲) f اکیداً نزولی است.
۳) $f(۳) = -۲$
۴) محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۲a}{a-۱}$ قطع می‌کند.

پاسخ ۳ تابع $f(x)$ هم صعودی است و هم نزولی؛ تنها تابعی که این ویژگی را دارد تابع ثابت است. می دانیم در تابع ثابت نباید x داشته باشیم پس باید ضریب x یعنی $a-۱$ برابر صفر باشد: $a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = -۲$

حالا برویم سراغ بررسی گزینه‌ها: در تابع $f(x) = -۲$ با افزایش x مقادیر y تغییری نمی‌کند، پس f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست و گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. تابع $f(x) = -۲$ یک تابع ثابت است، پس $f(۳) = -۲$ و ۳ درست است. حواسمان باشد که تابع $f(x) = -۲$ اصلاً محور xها را قطع نمی‌کند و ۴ هم نادرست است.

توابع یکنوا و غیریکنوا

به تابع‌های صعودی، اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی و ثابت، می‌گوییم: «یکنوا». به تابع‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، می‌گوییم: «اکیداً یکنوا». بعضی تابع‌ها، رفتار یکنوا ندارند، یعنی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y همیشه زیاد یا کم نمی‌شود یا ثابت نمی‌ماند بلکه گاهی افزایش و گاهی کاهش دارد. این تابع‌ها را غیریکنوا می‌نامیم. حالا بگویید چرا نمودارهای زیر غیریکنوا هستند؟



بررسی یکنوایی تابع

۱. یکنوایی در نمایش زوج مرتبی

در نمایش زوج مرتبی، xها را به ترتیب از کم به زیاد می‌چینیم و به yها نگاه می‌کنیم:

$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۱۰)\}$ اکیداً صعودی است (با افزایش x، yها همواره زیاد شده‌اند).

$g = \{(-۱,۱),(۰,۲),(۲,۲),(۳,۷)\}$ صعودی است (با افزایش x، yها زیاد شده یا ثابت مانده‌اند).

$h = \{(-۲,۴),(-۱,۲),(۰,۱)\}$ اکیداً نزولی است (با افزایش x، yها کم شده‌اند).

$k = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۰)\}$ یکنوا نیست (با افزایش x، yها زیاد و کم شده‌اند).

تست اگر $f = \{(-۱,۱),(۰,۲a-۱),(۱,a+۵),(۲,۷)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۱ < a < ۶$
۲) $۱ < a < ۲$
۳) $۲ < a < ۶$
۴) $a < ۱$

پاسخ ۲ **راه I** خوشبختانه xها از چپ به راست مرتب هستند.

$-۱,۰,۱,۲$

پس yها باید افزایشی باشند:

$$\underbrace{\underbrace{۱ < ۲a-۱}_{a>۱} < \underbrace{a+۵ < ۷}_{a<۲}}_{a<۶}$$

بنابراین به ازای $۱ < a < ۲$ همهٔ شرط‌ها تأمین می‌شوند.

عددگذاری به ازای $a = ۲$ تابع $\{(-۱,۰),(۰,۳),(۱,۷),(۲,۷)\}$ صعودی است اما اکید نیست، پس $a = ۲$ غلط است. به ازای $a = ۳$ تابع $\{(-۱,۱),(۰,۵),(۱,۸),(۲,۷)\}$ یکنوا نیست. پس $a = ۳$ هم غلط است. با قراردادن $a = ۰$ نیز تابع $\{(-۱,۱),(۰,-۱),(۱,۵),(۲,۷)\}$ یکنوا نیست. پس گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ نادرست‌اند.

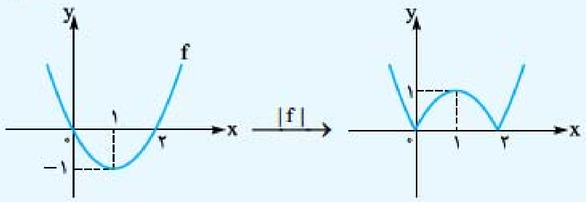
۲. یکنوایی در نمایش جبری

تا قبل از فصل کاربرد مشتق، بهترین راه تعیین یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است، خصوصاً اگر تابع ما دارای قدرمطلق یا براکت باشد و یا چندجمله‌ای باشد.

تست تابع $f(x) = x(x-۲)$ و $|f|$ در فاصلهٔ $(۰,a)$ یکنوا است. اگر a بیشترین مقدار را داشته باشد، مقدار a و وضع تابع در این بازه کدام است؟

۱) ۱، صعودی
۲) ۲، صعودی
۳) ۱، نزولی
۴) ۲، نزولی

پاسخ ۱ | نمودار $y=x(x-۲)$ ریشه‌هایش صفر و ۲ است و نمودارش به راحتی قابل رسم است. یادتان هست که برای رسم $|f|$ باید قسمت‌های زیر محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کردیم:



حالا با توجه به نمودار در فاصلهٔ $(۰,۱)$ اکیداً صعودی است پس $a=۱$ است.

خاطره رأس سهمی دقیقاً در وسط دو ریشه‌اش قرار دارد.

اگر در تست، فقط صحبت از یکنوا بودن و نبودن گزینه‌ها باشد، یکی از بهترین کارها، عددگذاری و استفاده از مفهوم یکنوایی است، تست زیر را ببینید:

تست ؟ | کدام تابع اکیداً صعودی است؟

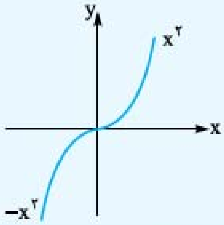
۱) $y=[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=\frac{|x|}{x}$ ۴) $y=x|x|$

پاسخ ۴ | ۱) اگر $x_۱=۰/۱$ و $x_۲=۰/۷$ را قرار دهیم، $y_۱=y_۲=۰$ می‌شود، پس تابع اکیداً صعودی نیست.

۲) اگر $x_۱=۲$ و $x_۲=۵$ باشند، $y_۱=y_۲=۰$ می‌شود، یعنی تابع اکیداً صعودی نیست.

۳) به ازای تمام xهای مثبت مقدار تابع برابر ۱ است، یعنی تابع ثابت می‌شود و در نتیجه اکیداً صعودی نیست.

پس ۴) درست است، نمودارش را هم ببینیم:

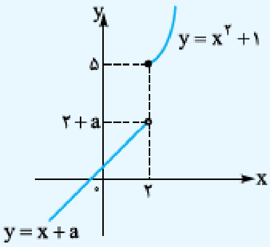


در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی وقت‌ها باید مقدار مجهول را طوری انتخاب کنیم که تابع مثلاً اکیداً صعودی شود. این تست را ببینید:

تست ؟ | اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۲ \\ x+a & x<۲ \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد. حدود a کدام است؟

۱) $a\leq ۲$ ۲) $a\leq ۳$ ۳) $a\leq ۱$ ۴) $a\leq ۰$

پاسخ ۲ | شکل را ببینید:



$y=x^۲+۱$ برای xهای ۲ یا بیشتر، قسمتی از شاخهٔ سمت راست سهمی را نشان می‌دهد که در $x=۲$، عرض آن ۵ است و در ادامه، اکیداً صعودی است.

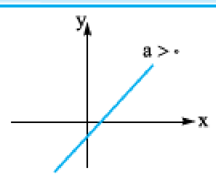
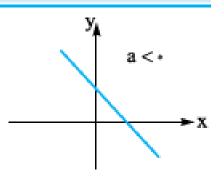
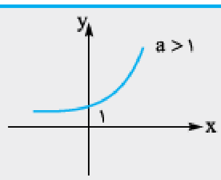
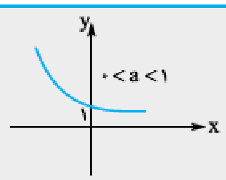
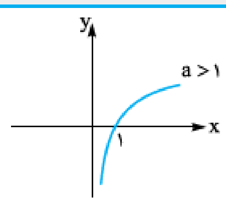
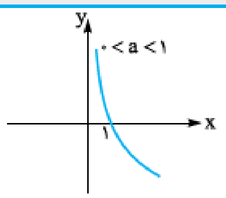
$y=x+a$، خطی با شیب ۱ است که در $x=۲$ مقدار نهایی آن $۲+a$ است.

حالا با توجه به شکل و اکیداً صعودی‌بودن تابع باید $۲+a\leq ۵$ باشد، پس $a\leq ۳$.

بررسی یکنوایی توابع خاص

الف. توابع معروف همواره یکنوا

بعضی توابعی که بلدیم همواره یکنوا هستند، توابعی مانند $y=\sqrt{x}$ و $y=x^۳$ اکیداً صعودی هستند و یا تابع $y=[x]$ صعودی است و ... در بین این تابع‌ها، توابع خطی، نمایی و لگاریتمی در تست‌ها بیشتر مورد توجه هستند، نکات این سه تابع را خیلی جمع‌وجور در جدول زیر می‌بینیم:

تابع	یکنوایی	نمودار
تابع خطی $f(x)=ax+b$	اگر $a>۰$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a<۰$ باشد، اکیداً نزولی است.	 
تابع نمایی $y=a^x$	اگر $a>۱$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $۰<a<۱$ باشد، اکیداً نزولی است.	 
تابع لگاریتمی $y=\log_a x$	اگر $a>۱$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $۰<a<۱$ باشد، اکیداً نزولی است.	 

تست اگر $f(x)=(a+2)x+3$ اکیداً صعودی و $g(x)=(a-1)x-1$ نزولی باشد. حدود a کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $[-2,1)$ ۳) $(-2,1]$ ۴) $[-2,1]$

پاسخ ۳ f و g هر دو تابع خطی‌اند f اکیداً صعودی است، پس باید شیب f مثبت باشد: $a+2>0$ پس $a>-2$

و g نزولی است پس باید شیب g منفی یا صفر باشد: $a-1\leq 0$، پس $a\leq 1$

دقت کنید که نگفته g اکیداً نزولی است و g می‌تواند ثابت باشد؛ پس داریم: $-2<a\leq 1$

تست اگر $f(x)=(\frac{m-1}{2})^x$ اکیداً نزولی و $g(x)=\log_{\frac{2}{m}} x$ صعودی باشد. m کدام مقادیر را دارد؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(1,3)$ ۴) نشدنی

پاسخ ۲ f یک تابع نمایی است، برای این‌که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید پایهٔ آن بین صفر و ۱ باشد:

$$0<\frac{m-1}{2}<1 \xrightarrow{\times 2} 0<m-1<2 \xrightarrow{+1} 1<m<3$$

از طرف دیگر در $g(x)=\log_{\frac{2}{m}} x$ برای آن‌که g صعودی باشد باید پایهٔ لگاریتم از ۱ بیشتر باشد، پس $\frac{2}{m}>1$ و در نتیجه $0<m<2$ و از اشتراک این‌ها $1<m<2$.

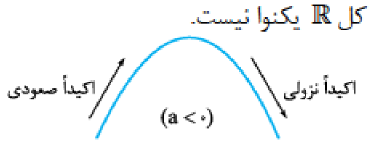
ب. توابع معروف غیریکنوا

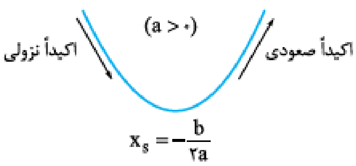
در بین تابع‌هایی که می‌شناسیم تابع درجه ۲ (سهمی) و تابع هموگرافیک همواره غیریکنوا هستند، البته در قسمت‌های محدودی از دامنه ممکن است این تابع‌ها هم یکنوا شوند.

۱. تابع درجه‌دوم

سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ در کل $\mathbb{R}$ یکنوا نیست.

سهمی رو به بالا قبل از رأس یعنی قبل از $x=-\frac{b}{2a}$ اکیداً نزولی و پس از آن اکیداً صعودی است. در سهمی رو به پایین برعکس است. یعنی قبل از رأس اکیداً صعودی و بعد از رأس اکیداً نزولی می‌شود:





مثلاً ۱- $y=x^2-4x-1$ سهمی رو به بالا با رأس در $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$ است، پس در فاصلهٔ $(-\infty,2)$ و هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در فاصلهٔ $(2,+\infty)$ و زیرمجموعه‌های آن اکیداً صعودی است.

نکته سهمی در هر بازه‌ای که رأس سهمی درون آن بازه باشد (*یعنی سر و ته بازه نباشد!*)، غیریکنوا است.

تست اگر $f(x)=-x^2+3x$ در $(-\infty,a)$ اکیداً یکنوا باشد. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ ۲ گفتیم سهمی در $(-\infty,x_S)$ و همچنین $(x_S,+\infty)$ اکیداً یکنوا است. پس حداکثر a، همان x_S است:

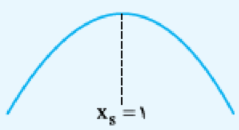
$$x_S=\frac{-(3)}{2(-1)}=\frac{3}{2}$$

گاهی اوقات باید به کلمه‌ها و قیدهای صورت سؤال خیلی دقت کنیم. تست زیر را ببینید:

تست اگر $y=ax^2+(a^2-3)x$ فقط در $(1,+\infty)$ نزولی باشد. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ ۲ این‌که گفته فقط در $(1,+\infty)$ نزولی است؛ یعنی سهمی باید این شکلی باشد:



پس داریم:

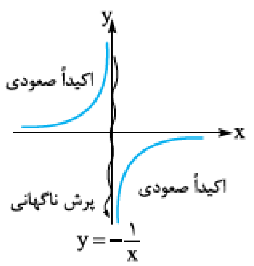
$$x_S=-\frac{a^2-3}{2a}=1 \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} a^2-3=-2a \Rightarrow a^2+2a-3=0 \xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} a=1 \text{ یا } -3$$

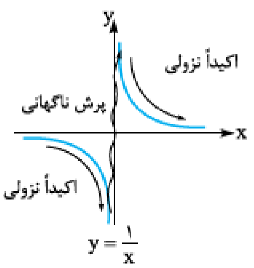
حالا دقت کنیم که سهمی باید رو به پایین باشد، پس $a<0$ است؛ پس فقط $a=-3$ قابل قبول است.

۲. تابع هموگرافیک

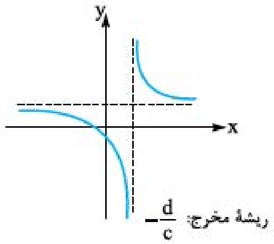
اول سراغ $y=\frac{1}{x}$ می‌رویم:

از $-\infty$ تا صفر اکیداً نزولی است، بعد در دو طرف صفر از پایین محور yها به بالای آن می‌آید و سپس دوباره از صفر تا $+\infty$ اکیداً نزولی است. پس $\frac{1}{x}$ با این‌که در هر کدام از شاخه‌هایش اکیداً نزولی است، در دامنهٔ خودش یکنوا نیست. $y=-\frac{1}{x}$ هم در هر کدام از شاخه‌هایش اکیداً صعودی است ولی در کل غیریکنواست.





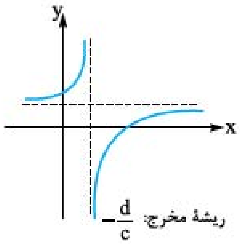
بقیهٔ تابع‌های هموگرافیک $(y=\frac{ax+b}{cx+d})$ هم همین‌طور هستند. یعنی در محل ریشهٔ مخرج یک پرش ناگهانی دارند. اما قبل و بعد از ریشهٔ مخرج یکنوا هستند. ببینید:



۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار اکیداً نزولی‌اند.

۲) تابع در $(-\infty,-\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳) در کل دامنه‌اش غیریکنوا است.



۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار صعودی اکید هستند.

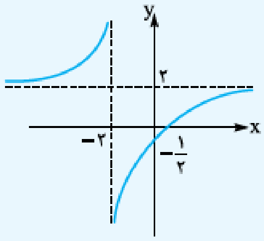
۲) تابع در $(-\infty,-\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c},+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۳) در کل دامنه‌اش غیریکنوا است.

تست تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ در کدام بازه، یکنوا است؟ نوع یکنوایی کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)$، نزولی ۲) $(-۲,۴)$، نزولی ۳) $(-۲,۴)$، صعودی ۴) $(-\infty,۰)$، صعودی

پاسخ ۳ دیدیم که مشکل در محل ریشهٔ مخرج است، پس الان این تابع در $x=-۲$ پرش خواهد کرد و باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل ۲− نباشد، پس گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند. برای تعیین صعودی یا نزولی بودن باید نمودار را ببینیم:



تابع در $(-\infty,-۲)$ و نیز در $(-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

خاطره اگر رسم شکل هموگرافیک یادتان رفته، نگاهی به قسمت‌های قبلی داشته باشید.

نکته بعداً در فصل کاربرد مشتق، خواهیم دید که در تابع هموگرافیک، اگر $ad-bc>۰$ باشد، شاخه‌هایش صعودی و اگر $ad-bc<۰$ باشد، شاخه‌هایش نزولی است و اگر $ad-bc=۰$ شد، اصلاً هموگرافیک نیست!

یکنوایی و نامساوی‌ها

گفتیم اگر f صعودی اکید باشد: $x_۲>x_۱ \Leftrightarrow f(x_۲)>f(x_۱)$

و اگر f نزولی اکید باشد: $x_۲>x_۱ \Leftrightarrow f(x_۲)<f(x_۱)$

حالا از این جهت به موضوع نگاه کنید که اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. اما وقتی f اکیداً نزولی است، با حذف آن از دو طرف جهت نامساوی تغییر می‌کند. این‌ها را ببینید:

$$f(a-۱)>f(۳-a)\xrightarrow[\text{است}]{\text{f اکیداً صعودی}} a-۱>۳-a$$ (جهت تغییر نکرد)

$$f(۶x+۱)>f(x^۲-۳)\xrightarrow[\text{است}]{\text{f اکیداً نزولی}} ۶x+۱<x^۲-۳$$ (جهت تغییر کرد)

تست اگر $f(a^۲+۱)<f(۳a-۱)$ و تابع f اکیداً نزولی باشد، a چند مقدار صحیح را اختیار نمی‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۳ خب تابع f اکیداً نزولی است، پس جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$a^۲+۱>۳a-۱ \Rightarrow a^۲-۳a+۲>۰$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} a=۱ \text{ یا } ۲ \Rightarrow$$

a	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow a<۱ \text{ یا } a>۲$$

پس a نمی‌تواند ۱ یا ۲ باشد و دو مقدار صحیح را نمی‌پذیرد.

یکنوایی توابع kf، $f\pm g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$

(۱) اگر $f(x)$ صعودی باشد، با استفاده از خواص نامساوی می‌توانیم نشان دهیم که $kf(x)$ برای $k>0$ صعودی و برای $k<0$ نزولی است.

مثلاً با توجه به صعودی‌بودن $\sqrt{x}$، مطمئن هستیم $2\sqrt{x}$ و $\frac{1}{5}\sqrt{x}$ نیز صعودی‌اند و $-\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ نزولی‌اند.

(۲) اگر f و g هر دو صعودی باشند، $f+g$ نیز صعودی است و در مورد $f\times g$، $\frac{f}{g}$ و $f-g$ حکم قطعی نمی‌توان داد.

مثلاً چون $\sqrt[3]{x}$ و 2^x صعودی‌اند، تابع $2^x+\sqrt[3]{x}$ نیز صعودی است. به عنوان مثال مهم‌تر، $[x]$ صعودی و x نیز صعودی اکید است، پس $x+[x]$ صعودی اکید است.

اشاره اگر در دو تابع صعودی که با هم جمع می‌شوند، حداقل یکی صعودی اکید باشد، مجموع آن‌ها هم صعودی اکید است.

این حرف‌ها در حالتی که توابع نزولی باشند هم درست است. مثلاً $(\frac{1}{2})^x$ و $-x$ هر دو نزولی هستند، پس $-x+(\frac{1}{2})^x$ نیز نزولی است.

(۳) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی و $g-f$ نزولی است.

تست کدام تابع نزولی است؟

۱) $-2x+\frac{1}{x}$ ۲) $(\frac{1}{2})^x+2^x$ ۳) $\log_{0/5}x+x^2$ ۴) $-\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

پاسخ ۴

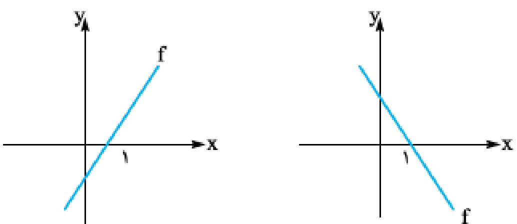
(۱) $-2x$ نزولی و $\frac{1}{x}$ غیریکنوا است. پس برای $-2x+\frac{1}{x}$ نظری نداریم.

(۲) $(\frac{1}{2})^x$ نزولی و 2^x صعودی است و از مجموع آن‌ها خبر نداریم.

(۳) $\log_{0/5}x$ نزولی است و ما را مجبور می‌کند فقط $x>0$ باشد، برای این xهای مثبت x^2 اکیداً صعودی است. پس در مورد مجموع آن‌ها حرفی نمی‌شود زد.

اما در (۴)، $-\sqrt{x}$ نزولی است و xهای مثبت را قبول می‌کند، $\frac{1}{x}$ هم برای $x>0$ نزولی است. پس جمع دو تابع نزولی را داریم که نزولی است.

یک تیپ مهم • یک مدل سؤال هم سال‌ها قبل در کنکور آمد که هنوز پس‌لرزه‌هایش دیده می‌شود. **مثلاً** می‌گوید f تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و $f(1)=0$. کلید حل تست این است که نمودار f را به شکل روبه‌رو رسم کنیم:



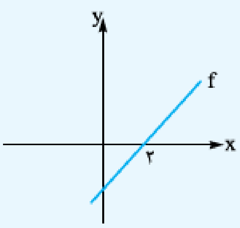
در حالت اکیداً نزولی   در حالت اکیداً صعودی

این تست را ببینید:

تست f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است که محور x را با طول ۲ قطع می‌کند. دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ شامل کدام نیست؟

۱) $(0,2)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(2,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

پاسخ ۱ گفتیم معنی صورت سؤال این است که نمودار تابع این شکلی می‌شود:



$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت } f}$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f	$-$	۰	$+$

و می‌توانیم $xf(x)$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	۰		۲	$+\infty$
x	$-$	۰	$+$		$+$
f(x)	$-$		$-$	۰	$+$
xf(x)	$+$	۰	$-$	۰	$+$

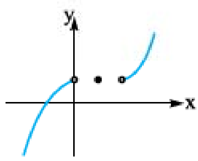
یعنی دامنهٔ $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(0,2)$ است. پس دامنه شامل $(0,2)$ نیست.

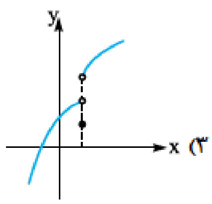
درس دوم: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

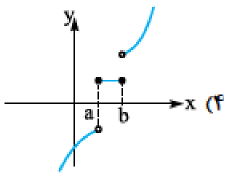
بررسی یکنوایی تابع

۲۴- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f(x)=\{(1,2),(-1,0),(3,3)\}$

۲) 

۳) 

۴) 

۲۵- اگر تابع $f=\{(1,1),(3,6),(\sqrt{2},m^2-2),(10,20)\}$ اکیداً صعودی باشد. حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۶- اگر $f=\{(1,3a+1),(-1,a+1),(2,4a+3)\}$ تابعی صعودی باشد. مقادیر a در کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $[0,+\infty)$

برای تعیین یکنوایی توابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلقی یا براکتی هستند. همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

۲۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\le 0 \\ -x^2 & x>0 \end{cases}$ چگونه است؟ (کتاب درسی)

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۲۸- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+x$ ۲) $f(x)=2-|x-1|$ ۳) $f(x)=2x-|x-1|$ ۴) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\le 0 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$

۲۹- تابع $f(x)=\begin{cases} -2 & x>1 \\ k & x=1 \\ +1 & x<1 \end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح k، در دامنه‌اش نزولی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ 3x+a & x<0 \end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۳۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -1 \\ g(x) & x>-1 \end{cases}$ تابعی نزولی باشد. ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=|x|$ ۲) $y=-x^2$ ۳) $y=-|x|-x$ ۴) $y=x+|x|$

۳۲- یکنوایی تابع $f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}$ در دامنهٔ $(-1,1)-\{0\}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۳۳- دو تابع $y=x[x]$ و $y=x+|x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[0,\frac{1}{2}]$ ۴) $[\frac{3}{2},\frac{7}{3}]$

۳۴- تابع $f(x)=|x|(x-1)$ در بازهٔ (a,b)، اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۵- تابع $x>0$ و $f(x)=|x^2-2x|$ در بازهٔ (a,b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (سراسری ۹۸)

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

۳۷- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|-|x-2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (خارج ۹۸)

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

بررسی یکنوایی توابع خاص

۳۸- کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک و غیریکنوا است؟ (کتاب درسی)

۱) $y=2^x-2$ ۲) $y=-\log_2 x+2$ ۳) $y=-2^{-x}$ ۴) $y=\frac{1}{x}$

۳۹- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m

۴۰- اگر تابع $f(x)=(a^2-3)^x$ در $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد. تابع $g(x)=a^x$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) اکیداً صعودی ۴) اکیداً نزولی

۴۱- تابع $f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) نه صعودی، نه نزولی ۴) هم صعودی، هم نزولی

۴۲- تابع $f(x)=\log_{0/5} x^2$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) نه صعودی، نه نزولی ۴) هم صعودی، هم نزولی

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۴۳- تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ روی بازهٔ $[-1,2]$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) نزولی ۴) صعودی

۴۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟

۱) نزولی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) منفی

۴۵- اگر تابع $f(x)=(\frac{1}{m})x^2-x+3$ در بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد. محدودهٔ m کدام است؟

۱) $-2\le m<0$ ۲) $0<m\le 2$ ۳) $m\le -2$ ۴) $m\ge 2$

۴۶- تابع $f(x)=x^2-(2m+1)x+1$ در بازهٔ $[-1,2]$ غیریکنوا است. بازهٔ m کدام است؟

۱) $-1\le m\le\frac{1}{2}$ ۲) $-1<m<\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$

۴۷- اگر تابع $f(x)=(a-2)x^2+2ax+3$ همواره یکنوا باشد. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

تابع هموگرافیک، هیچ‌گاه یکنوا نیست، مگر این‌که دامنهٔ تابع، محدود شده باشد.

۴۸- تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطهٔ $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$ برقرار است؟

۱) $(-3,-1)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

۴۹- تابع $f(x)=\frac{-1}{x-2}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۰- کدام‌یک از توابع زیر در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است؟

۱) $y=\frac{x-۱}{x+۳}$ ۲) $y=\frac{۲x-۳}{x+۱}$ ۳) $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ ۴) $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$

۵۱- اگر در بازهٔ $(۱,+\infty)$ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{۲x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $(-\infty,۲)-\{-۲\}$ ۴) $(-\infty,۲]-\{-۲\}$

برای حل بقیهٔ تست‌ها بهتر است، به مفهوم صعودی و نزولی بودن، توجه کنید.

۵۲- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(۳)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۳]$ ۲) $\mathbb{R}-(۰,۳)$ ۳) $(-\infty,۳]$ ۴) $[۳,+\infty)$

۵۳- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۲)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

شعار اکیداً صعودی‌ها: هر که xاش بیش، yاش بیشتر

۵۴- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۳-۲a)>f(۱+a)$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) -۲

۵۵- اگر $g(x)=\sqrt{f(۲x+۱)-f(x-۲)}$ و f اکیداً نزولی باشد. دامنهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $[-۳,+\infty)$ ۲) $(-۳,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۳]$ ۴) $(-\infty,-۳)$

۵۶- اگر $f(x)=۲^x$ باشد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(\frac{۱}{x})-f(x)}$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۲) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$ ۳) $[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۵۷- اگر $f(x)=\frac{۱-x}{x}$. آن‌گاه در کدام‌یک از بازه‌های زیر نمودار تابع $y=f(۱+x^۴)$ بالای نمودار تابع $y=f(۳+x^۲)$ قرار دارد؟

۱) $(۰,\sqrt{۲})$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۲,-\sqrt{۲})$

۵۸- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ اکیداً صعودی است.

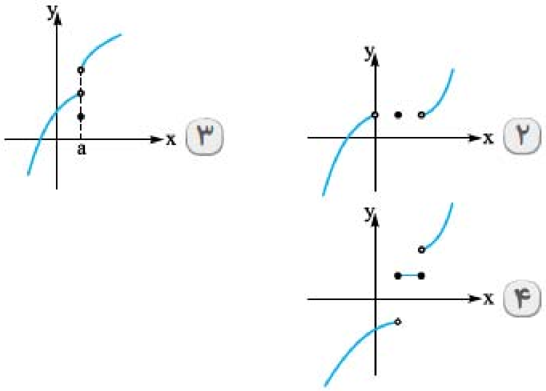
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- تابع $f(x)=|a+x^۳|$ در بازهٔ $(-\infty,a-۲)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۶۰- در مورد تابع با ضابطهٔ $y=(-\sqrt{۱-۲^{۵-x}})^۵$ کدام درست است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیریکنوا ۴) ثابت



در (۲) تابع اکیداً صعودی است. در (۳) چون در $x=a$ مقدار تابع نسبت به نقاط همسایگی چپش کم‌تر شده (نقطهٔ توپر) تابع نه صعودی است و نه نزولی ولی (۴) صعودی است، اکیداً صعودی نیست چون تابع در بازهٔ $[a,b]$ ثابت است.

۲۵. گزینه | ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

$$f=\{(۱,۱),(\sqrt{۲},m^۲-۲),(۳,۶),(۱۰,۲۰)\}$$

$x=\sqrt{۲}$ بین $۱<\sqrt{۲}<۳$ است. پس باید $f(۱)<f(\sqrt{۲})<f(۳)$ باشد:

$$۱<m^۲-۲<۶ \Rightarrow ۳<m^۲<۸ \Rightarrow \sqrt{۳}<|m|<۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۳}<m<۲\sqrt{۲} \Rightarrow m_{\text{مقدار صحیح}}=۲\\ -۲\sqrt{۲}<m<-\sqrt{۳} \Rightarrow m_{\text{مقدار صحیح}}=-۲\end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۲۶. گزینه | ۴

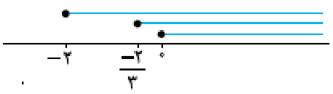
تابع $f=\{(۱,۳a+۱),(-۱,a+۱),(۲,۴a+۳)\}$ اگر بخواهد صعودی باشد باید با افزایش مقدار x، مقدار y زیاد شود (یا ثابت بماند)، پس:

$$-۱<۱ \Rightarrow a+۱\le ۳a+۱ \Rightarrow ۲a\ge ۰ \Rightarrow a\ge ۰$$

$$-۱<۲ \Rightarrow a+۱\le ۴a+۳ \Rightarrow ۳a\ge -۲ \Rightarrow a\ge -\frac{۲}{۳}$$

$$۱<۲ \Rightarrow ۳a+۱\le ۴a+۳ \Rightarrow a\ge -۲$$

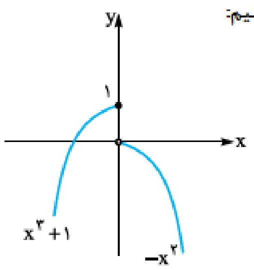
حالا با اشتراک این‌ها داریم:



پس جواب می‌شود $a\ge ۰$.

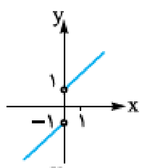
۲۷. گزینه | ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.



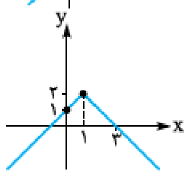
۲۸. گزینه | ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

(۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases}۱+x & x>۰\\ -۱+x & x<۰\end{cases}$



(۲) $f(x)=۲-|x-۱|$

$$f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x\ge ۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$$

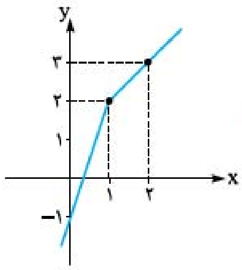


۲۴. گزینه | ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

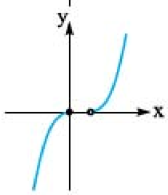
(۱) $f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۳,۳)\}$

با افزایش xها مقدار yها هم زیاد شده پس اکیداً صعودی است.

(۳) $f(x)=۲x-|x-۱| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\ge ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$

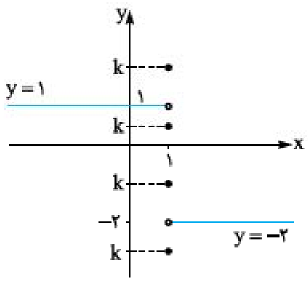


(۴) $f(x)=\begin{cases} -x^۲ & x\le ۰ \\ x^۲-۱ & x>۱ \end{cases}$



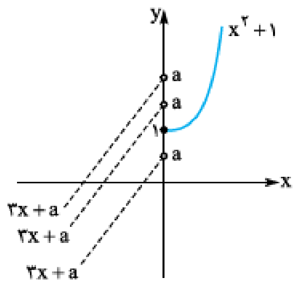
با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=۲-|x-۱|$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۲۹. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار تابع برای این‌که تابع نزولی باشد باید $-۲\le f(۱)=k\le ۱$ باشد، پس $-۲\le k\le ۱$ و مقادیر صحیح k عبارت‌اند از ۲−، ۱−، ۰ و ۱ یعنی چهار مقدار صحیح.

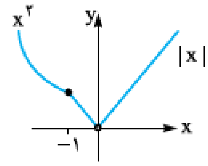
۳۰. گزینه ۲ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



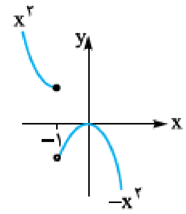
حالا با توجه به نمودار برای این‌که تابع در دامنه‌اش صعودی اکید باشد، حداکثر a می‌تواند برابر ۱ باشد.

۳۱. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۱ \\ g(x) & x>-۱ \end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

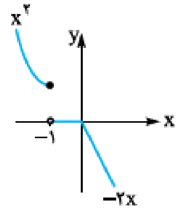
(۱) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۱ \\ |x| & x>-۱ \end{cases} \Rightarrow$



(۲) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۱ \\ -x^۲ & x>-۱ \end{cases} \Rightarrow$



(۳) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۱ \\ -|x|-x & x>-۱ \end{cases}$

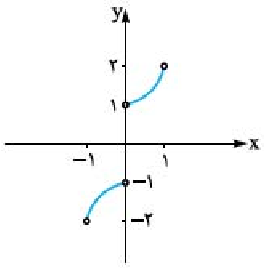


می‌بینیم که تابع f به ازای (۳) نزولی است پس جواب می‌شود (۳). نمودار (۴) را هم خودتان رسم کنید!

۳۲. گزینه ۱ اول ضابطهٔ تابع $f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}$ را به ازای $x>۰$ و $x<۰$ ساده می‌کنیم: (حواسمان هست که $x=۰$ در دامنه نیست)

$x>۰ \Rightarrow f(x)=x^۲+۱ \qquad x<۰ \Rightarrow f(x)=-x^۲-۱$

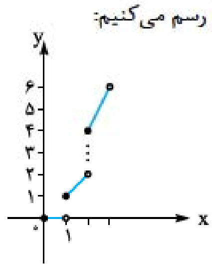
حالا نمودار تابع را در بازهٔ $(-۱,۱)$ رسم می‌کنیم.



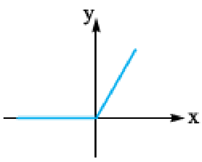
همان‌طور که در شکل می‌بینیم تابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ صعودی (اکید) است.

۳۳. گزینه ۴ نمودار هر دو تابع را در بازهٔ $[۰,۳)$ (بازه‌ای که شامل تمام گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

$y=x[x]=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۱ \\ x & ۱\le x<۲ \\ ۲x & ۲\le x<۳ \end{cases}$



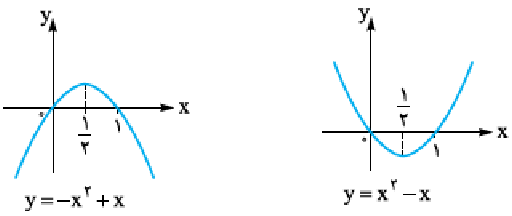
$y=x+|x|=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ ۲x & x\ge ۰ \end{cases}$



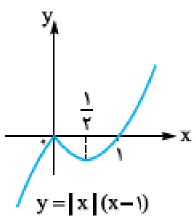
تابع $y=x+|x|$ به ازای $x\ge ۰$ صعودی اکید است. پس فقط کافی است تابع $y=x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y=x[x]$ در بازهٔ $[۰,۱)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازهٔ $[۰,۱)$ نباشد. یعنی بازهٔ $[\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۳}]$.

۳۴. گزینه ۲ نمودار تابع $y=|x|(x-۱)$ را رسم می‌کنیم:

$x<۰ \Rightarrow y=-x^۲+x$
$x\ge ۰ \Rightarrow y=x^۲-x$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^۲+x & x<۰ \\ x^۲-x & x\ge ۰ \end{cases}$



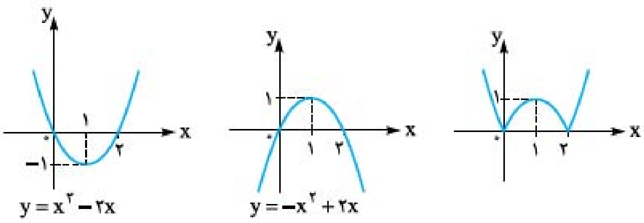
$\Rightarrow$



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[۰,\frac{۱}{۲}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}$ است.

۳۵. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ را رسم می‌کنیم:

$f(x)=|x^۲-۲x|=\begin{cases} x^۲-۲x & x\le ۰ \\ -x^۲+۲x & ۰\le x\le ۲ \\ x^۲-۲x & x\ge ۲ \end{cases}$

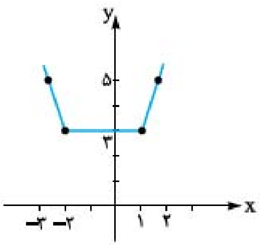


پس تابع در $(1,2)$ نزولی است و $b-a=2-1=1$.

۳۶. گزینه ۱ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=|x+2|+|x-1|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -3 & -2 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 3 & 5 \end{array}$$

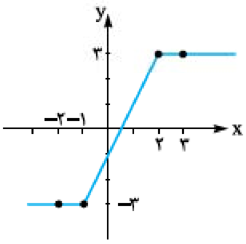


حالا طبق نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,-2]$ اکیداً نزولی است.

۳۷. گزینه ۳ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

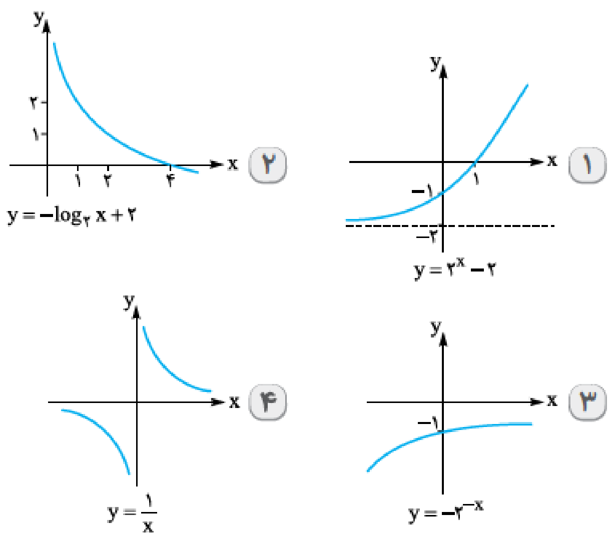
$$f(x)=|x+1|-|x-2|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & -3 & 3 & 3 \end{array}$$



حالا طبق نمودار تابع در بازهٔ $[-1,2]$ اکیداً صعودی است.

۳۸. گزینه ۴ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودارها، تابع $y=\frac{1}{x}$ غیرکنوا و یک‌به‌یک است. در درس‌نامه هم داشتیم که تابع هموگرافیک (و از جمله $\frac{1}{x}$ و $-\frac{1}{x}$) غیرکنوا هستند.

۳۹. گزینه ۲ می‌دانیم تابع $f(x)=a^x$ به ازای $0<a<1$، نزولی اکید است و از طرفی تابع به ازای $f(x)=0$ و $f(x)=1$ هم نزولی (ثابت) است. پس در تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ باید داشته باشیم:

$$0\le\frac{3m+1}{4}\le1 \Rightarrow 0\le 3m+1\le 4$$

$$\Rightarrow -1\le 3m\le 3 \Rightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$$

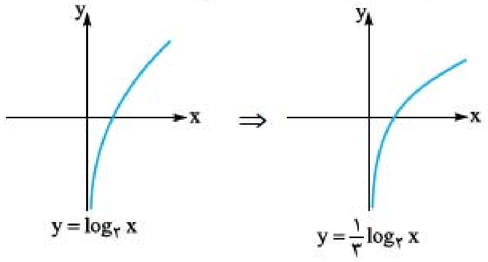
مقادیر صحیح بازهٔ $-\frac{1}{3}\le m\le 1$ عبارت‌اند از $m=0$ و $m=1$ یعنی دو مقدار صحیح.

۴۰. گزینه ۳ تابع ثابت یعنی $f(x)=k$ و تابع $f(x)=(a^2-3)^x$ وقتی ثابت است که $a^2-3=1$ باشد پس $a^2=4$ و در نتیجه $a=2$ یا $a=-2$.
حالا برای تابع $g(x)=a^x$ مقدار $a=-2$ غیر قابل قبول است پس $g(x)=2^x$ و در نتیجه تابع g، صعودی اکید است.

۴۱. گزینه ۱

راه I ضابطهٔ تابع را با استفاده از رابطهٔ $\log_b a^n=n\log_b a$ $(a>0)$ ساده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log_2 x$$



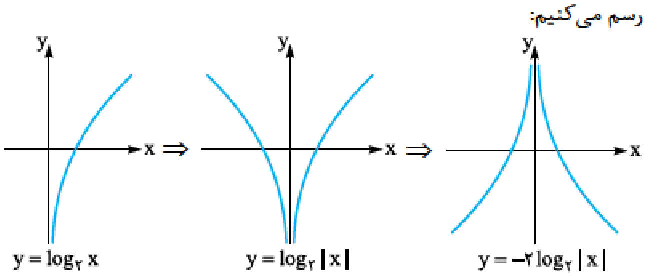
با توجه به شکل تابع اکیداً صعودی است.

راه II تابع $f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}$ را می‌توانیم به شکل ترکیب دو تابع $h(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=\log_2 x$ در نظر بگیریم یعنی $f(x)=(goh)(x)$.
حالا در goh، g و h هر دو صعودی اکیدند پس goh هم اکیداً صعودی است.

۴۲. گزینه ۳ راه I اولاً با استفاده از رابطهٔ $\log_b a^n=n\log_b a$ (با شرط $a>0$) می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\log_{0.5}x^2=2\log_{0.5}|x|=2\log_{\frac{1}{2}}|x|=-2\log_2|x|$$

حالا نمودار تابع $y=-2\log_2|x|$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\log_2 x$ رسم می‌کنیم:



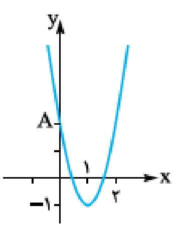
با توجه به نمودار، تابع نه صعودی است و نه نزولی.

راه II اگر دو تابع $h(x)=x^2$ و $g(x)=\log_{0.5}x$ را در نظر بگیریم $f(x)=(goh)(x)=\log_{0.5}x^2$ است.
تابع $g(x)=\log_{0.5}x$ نزولی است (چون $0<0.5<1$ است) و تابع درونی $h(x)=x^2$ نه صعودی است و نه نزولی، پس goh هم نه صعودی است و نه نزولی.

۴۳. گزینه ۲

نمودار تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.)

$$y=3x^2-6x+2$$



$$x_S=-\frac{-6}{2\times3}=\frac{6}{6}\Rightarrow x_S=1\Rightarrow y_S=3-6+2=-1\Rightarrow S(1,-1)$$

نقطهٔ برخورد با محور yها: $x=0\Rightarrow y=2\Rightarrow A(0,2)$

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ نزولی و در بازهٔ $[۱,۲]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۴۴. گزینه ۴ اول دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ را ساده می‌کنیم:

$$|x-۱|<۲ \Rightarrow -۲<x-۱<۲ \Rightarrow -۱<x<۳$$

حالا نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x-۳$ را رسم می‌کنیم:

$$y=x^۲-۲x-۳$$

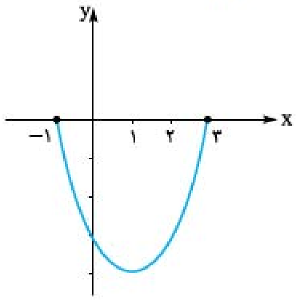
سهمی $\Rightarrow x_{\text{رأس}}=\frac{-(-۲)}{۲(۱)}=۱ \Rightarrow y=۱-۲-۳=-۴$

$$\Rightarrow S(۱,-۴)$$

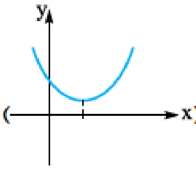
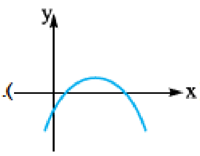
$$x=۰ \Rightarrow y=-۳ \Rightarrow (۰,-۳)$$

$$x=-۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow (-۱,۰)$$

$$x=۳ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow (۳,۰)$$



حالا با توجه به شکل، تابع در بازهٔ $[-۱,۳]$ همواره منفی است.

۴۵. گزینه ۲ نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{m})x^۲-x+۳$ یک سهمی است که یا مینیمم دارد () یا ماکزیمم ().

پس در صورتی می‌تواند در بازهٔ $(۱,+\infty)$ صعودی باشد که اولاً مینیمم داشته باشد و ثانیاً (طول رأس ≤ ۱) باشد. برقراری این دو شرط را بررسی می‌کنیم:

مینیمم $a>۰ \Rightarrow \frac{۱}{m}>۰ \Rightarrow m>۰$

طول رأس $\le ۱ \Rightarrow -\frac{-۱}{۲(\frac{۱}{m})}\le ۱ \Rightarrow \frac{m}{۲}\le ۱ \xrightarrow{m>۰} m\le ۲$

پس باید $۰<m\le ۲$ باشد.

۴۶. گزینه ۴ نمودار تابع $f(x)=x^۲-(۲m+۱)x+۱$ یک سهمی است پس به شرطی در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنواست که طول رأس سهمی بین -۱ و ۲ باشد: (طول رأس سهمی برابر بود با $-\frac{b}{۲a}$)

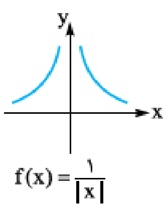
$$-۱<-\frac{-(۲m+۱)}{۲(۱)}<۲ \Rightarrow -۱<\frac{۲m+۱}{۲}<۲$$

$$\Rightarrow -۲<۲m+۱<۴ \Rightarrow -۳<۲m<۳ \Rightarrow \frac{-۳}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$$

۴۷. گزینه ۴ تابع $f(x)=(a-۲)x^۲+۲ax+۳$ یک تابع درجه‌دوم است پس نمی‌تواند یکنوا باشد. پس برای یکنوابودن تابع باید جملهٔ $x^۲$ حذف شود یعنی $a-۲=۰$ پس $a=۲$ و در نتیجه:

$$f(x)=۴x+۳ \Rightarrow f(۲)=۴(۲)+۳=۱۱$$

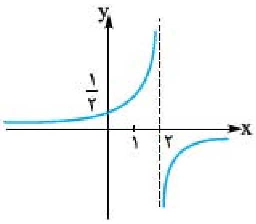
۴۸. گزینه ۴ عبارت «برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو این بازه رابطهٔ $x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ برقرار باشد»، یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیداکردن این بازه، تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ این بازه باشد که می‌شود بازهٔ $(۰,۱)$.

۴۹. گزینه ۱ می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{-۱}{x-۲}$ در همسایگی ریشهٔ مخرجش (مجانب قائمش) به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند. پس برای این‌که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی باشد باید a را طوری انتخاب کنیم که بازهٔ $(-\infty,a]$ شامل عدد ۲ (یعنی ریشهٔ مخرج) نشود و چون قرار است a عدد صحیح باشد پس حداکثر a برابر است با ۱.

البته می‌توانستیم از نمودار تابع هم استفاده کنیم:



با توجه به نمودار، حداکثر مقدار صحیح a که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی باشد، می‌شود ۱.

۵۰. گزینه ۱ طبق آن‌چه در سؤال قبل دیدیم ریشهٔ مخرج تابع باید در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ قرار نداشته باشد و با این حساب فقط (۱) یعنی $y=\frac{x-۱}{x+۳}$ قابل قبول است.

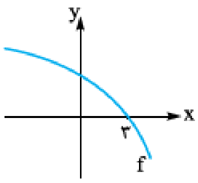
۵۱. گزینه ۴ گفتیم ریشهٔ مخرج دردسر درست می‌کند. پس الان $x=\frac{a}{۲}$ یعنی ریشهٔ مخرج نباید در فاصلهٔ $(۱,+\infty)$ باشد. پس داریم: $\frac{a}{۲}\le ۱$ و در نتیجه $a\le ۲$. اما دقت کنید که اگر $a=-۲$ باشد، اصلاً تابع هموگرافیک نداریم:

$$\xrightarrow{a=-۲} f(x)=\frac{x+۱}{۲x-(-۲)}$$

$$=\frac{x+۱}{۲x+۲}=\frac{x+۱}{۲(x+۱)}=\frac{۱}{۲},(x\ne -۱)$$

پس در این حالت، f به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که اکیداً یکنوا نیست. پس جواب کامل‌تر $a\le ۲$ به‌جز $a=-۲$ است. یعنی $(-\infty,۲]-\{-۲\}$.

۵۲. گزینه ۱ راه I: f یک تابع نزولی اکید است و $f(۳)=۰$؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:



نتیجه می‌گیریم برای $x<۳$ مقدار f مثبت و برای $x>۳$ مقدار f منفی است. حالا برای پیداکردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
f(x)		+		+	۰	−	
x		−	۰	+		+	
xf(x)		−	۰	+	۰	−	

$\Rightarrow ۰\le x\le ۳$

راه II: می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x)=-x+۳$ را در نظر می‌گیریم (۳+ را برای این نوشتیم که تابع محور xها را در نقطهٔ $x=۳$ قطع کند). حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x(-x+۳)}$$

$$x(-x+۳)\ge ۰$$

تعیین علامت $\rightarrow$

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
		−	۰	+	۰	−	

$\Rightarrow ۰\le x\le ۳$

۵۳. گزینه ۱ راه I: f تابعی صعودی است پس از $f(۲)=۰$ نتیجه می‌گیریم:

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
f(x)		−	۰	+	

حالا عبارت $(x^{۲}-x)f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		−		−		−		+	
$(x^{۲}-x)$		+		−		+		+	
$(x^{۲}-x)f(x)$		−		+		−		+	

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^{۲}-x)f(x)}$ برابر بازه‌ای است که $(x^{۲}-x)f(x)\ge ۰$ باشد، پس طبق جدول می‌شود $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطهٔ $x=۲$ قطع کند یعنی $f(x)=x-۲$.

حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^{۲}-x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x^{۲}-x)(x-۲)}=\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}$$

$$x(x-۱)(x-۲)\ge ۰$$

تعیین علامت →

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
		−		+		−		+	

پس دامنهٔ تابع برابر است با $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

۵۴. گزینهٔ ۲ می‌دانیم در یک تابع صعودی اگر $f(x_{۱})>f(x_{۲})$ باشد حتماً داریم $x_{۱}>x_{۲}$، پس: $f(۳-۲a)>f(۱+a)\Rightarrow ۳-۲a>۱+a$

$$\Rightarrow ۳a<۲\Rightarrow a<\frac{۲}{۳}$$

و حالا که $a<\frac{۲}{۳}$ است، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر صفر است.

۵۵. گزینهٔ ۳ **راه I** *طب شرط دامنهٔ رادیکال چی بود؟* باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد: $f(۲x+۱)-f(x-۲)\ge ۰$

$$\Rightarrow f(۲x+۱)\ge f(x-۲)\Rightarrow ۲x+۱\le x-۲$$

$$\Rightarrow x\le -۳\Rightarrow D=(-\infty,-۳]$$

عددگذاری f نزولی است، پس $f(۱)-f(-۲)$ منفی است و در $x=۰$ در $g(x)$ نمی‌خورد. یعنی گزینه‌های شامل صفر غلط هستند (۱ و ۲ نیست). به ازای $x=-۳$ زیر رادیکال صفر است که مشکلی ندارد؛ پس خود -۳ هست (۴ نیست).

۵۶. گزینهٔ ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{۱}{x})-f(x)\ge ۰\Rightarrow f(\frac{۱}{x})\ge f(x)$$

$f(x)=۲^{x}$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف fها، علامت برنمی‌گردد.

$$\frac{۱}{x}\ge x$$

نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}-x\ge ۰\Rightarrow \frac{۱-x^{۲}}{x}\ge ۰\Rightarrow \frac{(۱-x)(۱+x)}{x}\ge ۰$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		−۱		۰		۱	
کل	+		−	ت‌ن	+		−
	جواب				جواب		

$$\Rightarrow (-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$$

۵۷. گزینهٔ ۱ تابع f در $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است، پس:

$$f(۱+x^{۴})>f(۳+x^{۲})\Rightarrow ۱+x^{۴}<۳+x^{۲}\Rightarrow x^{۴}-x^{۲}-۲<۰$$

$$\Rightarrow (x^{۲}+۱)(x^{۲}-۲)<۰\Rightarrow -\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$$

حالا چون نامعادله را در بازهٔ $(۰,+\infty)$ حل کردیم جواب می‌شود $۰<x<\sqrt{۲}$.

۵۸. گزینهٔ ۲ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_{۱}>x_{۲}\Rightarrow f(x_{۱})>f(x_{۲})\\ x_{۱}>x_{۲}\Rightarrow g(x_{۱})\ge g(x_{۲})\end{array}\right\}\Rightarrow x_{۱}>x_{۲}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_{۱})>(f+g)(x_{۲})$$

اشاره اگر g نزولی باشد، $-g$ صعودی است.

برای نشان‌دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=۲x+۳\ \text{صعودی}\\ g(x)=-x\ \text{نزولی}\end{array}\right\}\Rightarrow (f+g)(x)=x+۳\ \text{صعودی}$$

ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ صعودی اکید است:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=۲x+۳\ \text{صعودی اکید}\\ g(x)=-۳\ \text{ثابت}\end{array}\right.\Rightarrow (f\times g)(x)=-۶x-۹\ \text{نزولی اکید}$$

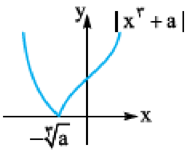
اگر توجه کنید، دو گزارهٔ (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۵۹. گزینهٔ ۲ نمودار f را رسم می‌کنیم باید بازهٔ $(-\infty,a-۲)$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $(-\infty,-\sqrt[۳]{a})$ باشد، یعنی:



$$a-۲\le -\sqrt[۳]{a}\Rightarrow a+\sqrt[۳]{a}-۲\le ۰$$

برای تجزیهٔ عبارت سمت چپ، دقت کنید که $a=۱$ یکی از ریشه‌های نامعادله است و داریم:

$$(a-۱)+(\sqrt[۳]{a}-۱)\le ۰\Rightarrow (\sqrt[۳]{a}-۱)(\underbrace{\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{a}+۲}_{\text{مثبت}})\le ۰$$

$\Rightarrow \sqrt[۳]{a}-۱\le ۰\Rightarrow a\le ۱$ پس تنها مقدار طبیعی a برابر ۱ است.

۶۰. گزینهٔ ۲ $۵-x$ نزولی است، پایهٔ ۲ صعودی است که ضریب منفی، آن را نزولی می‌کند. $\sqrt{\ }$ و توان ۵ صعودی‌اند و یک منفی در پشت رادیکال داریم که نزولی است. پس ۳تا عامل نزولی داریم که ضربشان $(-)$ می‌شود و تابع در کل نزولی است.

این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم:

$$y=(-\sqrt{۱-۲^{۵-x}})^{۵}$$

⊖⊕⊖⊕ ⊖ ⇒ ⊖ نزولی