به نام پروردگار مهربان

مهروماه

+PLUS

ریاضیات تجربی

۱۰۰ آزمون برای ٪۱۰۰

• دکتر محمدرضا میرجلیلی • دکتر مهدی امیریان

زندگی مجذوب آینه است
زندگی گل به توان ابدیت...
زندگی ضرب رمز در طومار دل ما
زندگی هندسه‌ی ساده و یکسان نفس‌هاست...!

تقدیم به او...
که عهدش وفاست
به آن
خلوت پیدا نشده توی بهشت ...

مقدمه

دوست خوب کنکوری من، همراه عزیزم و دکترِ آینده، سلام به روی ماهت...
اول کار برایت آرزوی موفقیت و رتبه‌ی خوب در کنکورِ پیش رو می‌کنیم و البته درصدی بالا و شایسته برای ریاضی‌ات، بعدش بابت اعتماد مجدد به مؤلفین کتاب ریاضی جامع تجربی مهروماه و انتخاب کتاب آزمون‌مان ازت ممنونیم؛ حالا که چنین انتخاب فاخری داری، واجب است که حرف‌های ما را درباره‌ی استفاده‌ی درست و کامل از این کتاب بشنوی...

آزمون دادن، فرایندی لازم و جدایی‌ناپذیر برای موفقیت

همه ی دانش‌آموزان و اساتید محترم کنکور می‌دانند آزمون دادن چقدر به فرآیند یادگیری، تسلط و سنجش کمک می‌کند؛ آزمون یعنی **حل تعداد مشخصی تست استاندارد در زمان محدود**، برای روشن شدن وضعیت و سطح دانش‌آموز در آن مبحث. خب بعد از خواندنِ درس و حل تست‌های آخر فصل، این مهم باعث می‌شود ضعف خود را بشناسی و به موقع برای جبران اقدام کنی...
آزمون دادن نیازمند مرور، تمرکز و زمان‌بندی است؛ تمام چیزهایی که در کنکور به دادتان می‌رسد...!

ساختار کتاب ریاضی تجربی + مهروماه

این کتاب چهار بخش دارد: **بخش اول** «**آزمون‌های تفکیکی**» است به همراه درسنامه‌ی مختصر، **بخش دوم** «**آزمون‌های ترکیبی**» است مطابق با برنامه‌ی آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای کشوری، بخش سوم «**آزمون‌های جامع استاندارد**»، مطابق با کنکور سراسری و **بخش چهارم هم پاسخ تست‌های آزمون‌هاست**. در پایان کتاب یک **هدیه‌ی** با ارزش برایت گذاشته‌ایم؛ «**فرمول‌نامه**»! تمام فرمول‌های لازم برای ریاضی تجربی کنکورت؛ دسته‌بندی شده، کامل و آماده.

آشنایی با آزمون‌های هر بخش از کتاب

در بخش اول آزمون‌های موضوعی را می‌بینی، به‌ترتیبِ فصل‌های کتاب ریاضی جامع خودمان و در هر فصل سه سطح آزمون: پوشش دهنده و مطابق با کتاب درسی، شبیه به کنکور سراسری و اندکی سخت‌تر و فراتر برای ٪۱۰۰ . قبل از شروع هر آزمون

نکات، تکنیک‌ها و مطالب مهم درسی در قالب درسنامه‌ای کامل ولی مختصر آمده تا وظیفه‌ی مرور و جمع‌بندیِ فصل را ایفا کند.
زمان پرداختن به آزمون‌های بخش اول، بعد از اتمام مطالعه‌ی فصل و حل تست‌های چهارگزینه‌ای کتاب اصلی خودمان یا پایان درس دبیرتان در این فصل است...
در بخش دوم با برنامه‌ی آزمون‌های قلم‌چی و گزینه‌ی دو همراه شده‌ایم،آزمون‌هایی از مباحث مختلف ولی مرتبطِ کتاب‌های ریاضی ۱، ریاضی ۲ و ریاضی ۳تان که با هدفی خاص و هوشمندانه ترکیب شده و جلو می‌روند طراحی کرده‌ایم تا هم آماده‌ی آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای بشوی و هم در قالبی پوشش‌دهنده جمع‌بندی کنی. **زمان پرداختن به آزمون‌های بخش دوم قبل از آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای** و در طیِ سال تحصیلی است، برنامه‌ی ترکیبی هر آزمون در جدولی بالای آزمون آمده است...
در بخش سوم برای روزهای آخرِ درس خواندنت، کنکور طرح کرده‌ایم! آزمون‌هایی که از لحاظ تعداد تست، زمان، چیدمان و سطح سؤالات کاملاً مشابه کنکور نظام جدید باشد؛ این ها بهترین وسیله برای سنجش و ارزیابی ریاضی ات در دوران جمع‌بندی هستند. **زمان پرداختن به بخش سوم بعد از امتحانات نهایی خرداد است.** در پاسخ‌ها سعی شده بهترین،کوتاه‌ترین و خلاقانه‌ترین راه حل برای تست‌ها ارائه شود تا هم ایرادات را برطرف کند و هم شاید کمکی کند برای یادگیری راه‌حل هاو روش‌های جالب و سریع...

ویژگی‌های منحصر به فرد کتاب ریاضی تجربی+

اکثر دبیران محترم برای آزمون‌های کلاسی یا ارزیابی دانش‌آموزان خود از منابع موجود استفاده می‌کنند که یا مطابقتی با کتاب درسی جدید ندارد یا هدفمند و منسجم نیست! **طرح آزمون‌های منطبق بر کتاب درسی جدید، خلاقانه و هدفمند و البته سطح‌بندی شده** از مهم‌ترین شاخصه‌های این کتاب است. به این مطلب اضافه کنید **درسنامه‌های مختصر** برای بستن هر فصل در ذهنتان، **فرمول‌های لازم کنکورتان** و از همه مهم‌تر **آزمون‌های ترکیبی** کتاب که قدم به قدم فصل‌های کتاب‌های ریاضی را می‌بندد و دوباره برای پوشش بر می‌گردد و تو را جلو می‌برد...
و در آخر به یک ویژگی منحصر به فرد اشاره کنیم: **آزمون‌های جامع استاندارد!** که نقطه‌ی قوت کتاب مهروماه بوده و الان هم با تجربه‌ی سال‌ها طرح تست مؤلفان برای کنکورهای آزمایشی کشوری، در اختیار توست...

راه‌کار استفاده‌ی بهینه از کتاب ریاضی تجربی+

خوب است اول درس را در کلاس یاد بگیری، کتاب درسی را بخوانی و بروی سراغ ریاضی تجربی جامع‌مان. درسنامه‌های کتاب اصلی را بخوانی و تست‌های چهارگزینه‌ای آخر هر فصل را متناسب با سطح خودت حل کنی و پاسخ‌ها را خوانده و نکته‌ها را یادداشت‌برداری کنی، بعدش موقع مراجعه به این کتاب می‌شود!! برای هر فصل مطابق زمان پیشنهادی، از خودت آزمون بگیر و درصدت را بالای آزمون یادداشت کن برای مقایسه‌ی رشد خودت در درس... هر بار که آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای از راه رسیدند قبلش آزمون ترکیبی ما را بزن و اگر هم در آزمون‌های آزمایشی شرکت نمی‌کنی، از اول مهرماه هر دو هفته از خودت آزمون‌ها را بگیر...!

ریاضی تجربی + مناسب است برای تو...

این کتاب موجودیتی مستقل دارد؛ یعنی وابسته به کتاب ریاضی تجربی جامع مهروماه نیست و برای هر دانش‌آموز مستعدی که بخواهد آزمون ریاضی درست و حسابی از خودش بگیرد مفید خواهد بود؛ هرچند بهترین نتیجه زمانی به دست می‌آید که این کتاب را به همراه مرجع اصلی ریاضی تجربی کنکور، یعنی جامع خودمان توأم کنید...
این کتاب فقط یک کتابِ آزمون نیست؛ کتابی برای مرور، همراهی، یادگیری و تسلط هم هست. کتابی **با حجم کم و با همه چیز!** کتابی که مکمل خوبی برای هر کتاب کمک درسی ریاضی تجربی است...

توصیه‌ای به دانش‌آموزان عزیز

قبول شدن در رشته‌های پزشکی، سخت و هدفی رویایی نیست، اگر در مسیر درست و با ابزاری مناسب درس بخوانید قبول شدن

در رشته‌ی دلخواه‌تان هوشمندی هم می‌خواهد! کتاب‌های متعدد کمک درسی نخرید و از شاخه‌ای به دیگری نپرید...! بدانید برای هر درس، بسته‌ی موفقیت این است: **آموزش، تست و آزمون**. پس **نگران ریاضی‌ات نباش ما درستش می‌کنیم**... با کتاب ریاضی تجربی جامع و البته ریاضی تجربی+؛ فقط برای خودِ خودت...! برای ارتباط با ما سر بزن به... @dr.mehdiamirian

سخنی با اساتید محترم و همکارانِ جان...

این کتاب می‌تواند به عنوان تک کتابی باشد که برای ریاضی تجربی به دانش‌آموزتان معرفی می‌کنید؛ بیش از ۱۰۰۰ تست خلاقانه، هدفمند و کافی با درسنامه و فرمولنامه! اگر زمان محدودی برای ارائه‌ی تکلیف دارید یا دوره‌های فشرده را تدریس می‌کنید هم همینطور و البته می‌تواند مکمل هر کتاب کمک آموزشیِ مناسبی باشد که صلاح دانسته‌اید؛ **خیالتان را بابت آزمون‌ها راحت کرده‌ایم**. کتاب ریاضی تجربی جامع مهروماه به لطف حمایت، استفاده و معرفی همکاران فرهیخته و حرفه‌ای ریاضی تجربی، بهترین منبع مطالعاتی دانش‌آموزان برتر کشور است و حالا ریاضی تجربی+، آن را کامل می‌کند، با **آزمون دانش‌آموز را مسلح می‌کند** برای کسب بهترین درصد ریاضی...

مانند قبل نظرات ارزشمند، راه‌های خلاقانه، ایرادات احتمالی و رهنمودهای ارزشمندتان را به نشانی الکترونیکی mr-mirjalili@yahoo.com بفرستید.

صد آزمون برای صددرصد...

این کتاب مشتمل بر صد آزمون است، از سه نوع مختلف و برای سه زمان مختلف، هدف این است با این صد آزمون **پرواز کنی از نقطه‌ی شروع تا درصد ۱۰۰** ...

پس با هر سطحی و در هر مدرسه‌ای که هستی برنامه‌ی آزمونت را با کتاب ما تنظیم کن و آماده‌ی بهترین‌ها شو...

جدای از ایده‌پردازیِ منحصربه فرد و زحمات شبانه‌روزی در زمان محدود که برای ما اتفاق افتاد، این اثر مدیون است به همراهی و صبر خانواده‌هایمان، حمایت‌های آقای احمد اختیاری و دلسوزی‌های ویراستاران، زحمات گروه تولید و هنریِ مهروماه و...

رسم ادب این است که متواضعانه دست همگی گروه همراهمان را فشرده و صمیمانه از همگی تشکر کنیم: همان‌هایی که دلشان به موفقیت شما دانش‌آموزِ عزیز گرم است...

خدا پشت و پناهت و مراقب درصد ریاضی‌ات باش!

میرجلیلی. امیریان

فهرست

بخش ۱: آزمون‌های تفکیکی ۷

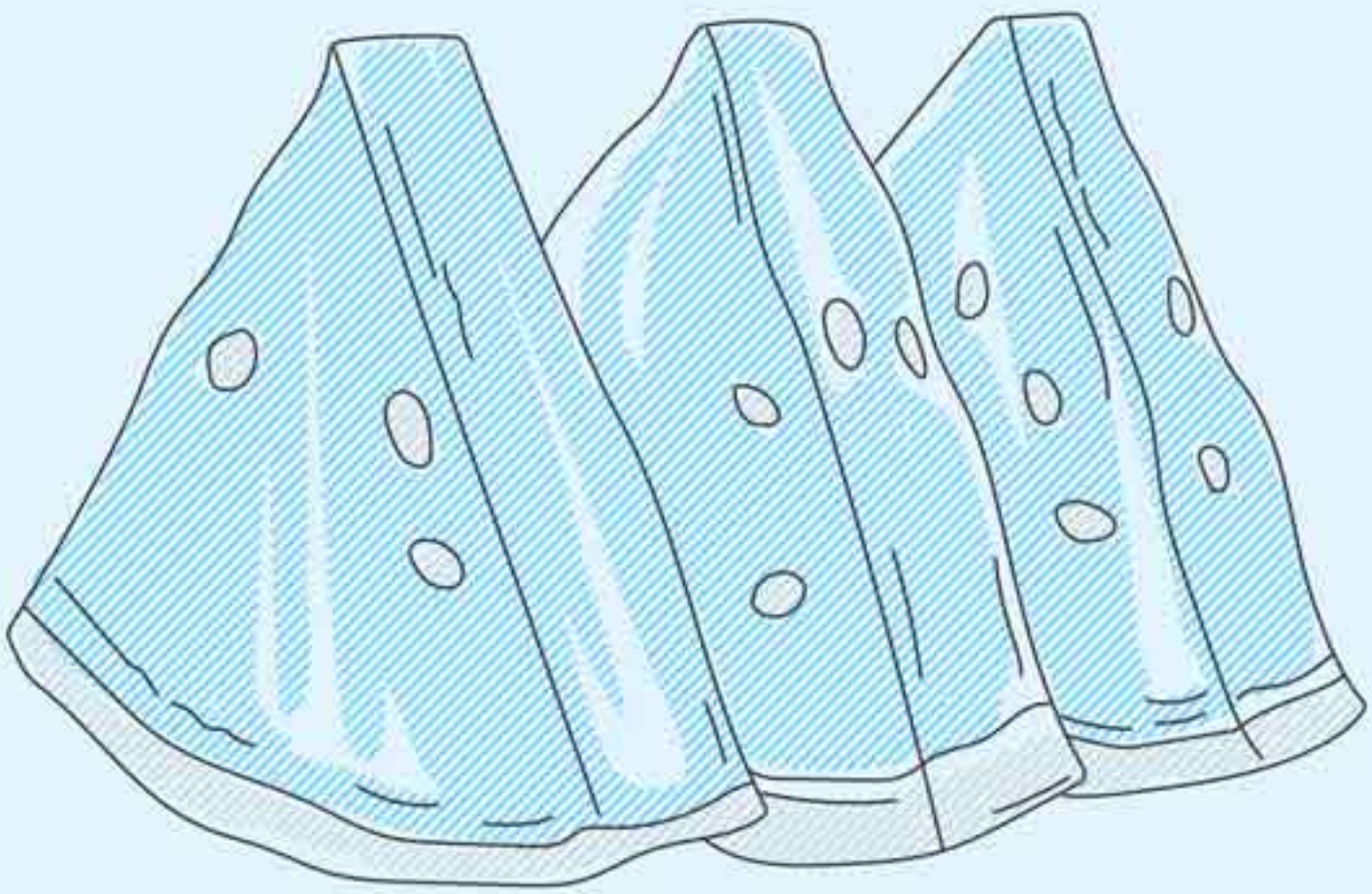
بخش ۲: آزمون‌های ترکیبی ۹۷

بخش ۳: آزمون‌های جامع ۱۵۳

بخش ۴: پاسخنامه ۱۸۳

بخش ۵: فرمولنامه ۳۹۱

بخش ۱



آزمون‌های تفکیکی

در این بخش، آزمون‌هایی دارید که هرکدام فقط از یکی از فصل‌های ریاضی‌تان طرح شده‌اند؛ آزمون‌هایی که هرکدام وظیفه‌ی سنجش شما و البته مرور آن فصل را به عهده دارند.
در این بخش و برای هر فصل، سه آزمون با سطح‌های مختلف طراحی کرده‌ایم: آزمونی در سطح مطالب کتاب درسی، آزمونی مشابه کنکور سراسری از آن فصل و در آخر آزمونی با سطح بالاتر برای تسلط بیشتر و آزمون‌های دشوارتر ... . یادتان باشد زمان زدن تست‌های این بخش، بعد از اتمامِ فصل در کلاس درسی یا مطالعه‌ی کاملِ خودتان از فصل موردنظر در کتاب ریاضی تجربی جامع و حل و تحلیل تست‌های آن فصل است؛ در ضمن اگر قرار است در آزمونی کلاسی از فصل شرکت کنید هم حتماً این بخشِ کتاب را حل کنید ...
برای هر فصل درسنامه‌ای مختصر ولی کامل، برای مرور مطالب و جمع‌بندیِ ایده‌ها گذاشته‌ایم که شما را آماده می‌کند برای آزمون دادنِ بهتر ...
هر فصل سه آزمون، با سه سطح متفاوت ولی مرحله‌ای؛ بستنِ فصل به فصل ریاضیِ کنکورتان ...

فصل هشتم: تابع و انواع آن

۱ مفاهیم ابتدایی و انواع

تعریف: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای است بین این دو مجموعه که در آن **به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B** نسبت داده می‌شود.

◄ هر خط موازی با محور y ها، نمودار تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع می‌کند.

◄ عضوهای تابع، زوج مرتب‌هایی هستند که اگر به آن‌ها نگاه کنید **هیچ دو زوجی با مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت ندارید!**

مدل ریاضی این تابع نیست: $f=\{(a,b),(a,c),\dots\}$، مگر $b=c$ شود.

◄ برای این‌که نشان دهید ضابطه‌ی داده‌شده توسط تست، تابع نیست؛ کافی است یک x به آن بدهید که دو تا y (یا بیشتر) تحویل بدهد...

الف) ضابطه‌ی تابع: $f(x)=\underbrace{\text{(عبارتی برحسب x)}}_{\text{ضابطه}}$، یعنی ضابطه‌ی تابع داده شده و برای پیدا کردنِ $f(a)$ به جای تمام x های ضابطه می‌گذاریم a. راستی $f(x)$ را گاهی y هم می‌نویسند.

ببین:
$$f(x)=\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x-3}}_{\text{ضابطه‌ی تابع}} \xrightarrow{x=1} f(1)=\frac{1^2+1+1}{1-2}=-3$$

◄ **این سه جمله معادل همدیگرند:** نقطه‌ی (a,b) روی نمودار تابع f است
$$(a,b)\in f \Leftrightarrow f(a)=b \Leftrightarrow$$

ب) برخورد تابع با محورها و تابعی دیگر

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی برخورد تابع با محور y ها را پیدا کنید به جای x های ضابطه‌ی آن بگذارید صفر؛ **در واقع $f(0)$ را پیدا کن...**

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی برخورد تابع با محور x ها را پیدا کنید به جای $f(x)$ یا همان y تابع بگذارید صفر و معادله‌ی حاصل را حل کنید تا x ها به دست بیایند؛ **در واقع ضابطه‌ی تابع را مساوی صفر بذار...**

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی تلاقی دو تابع f و g را پیدا کنید، **ضابطه‌های آن‌ها را مساوی هم بگذارید: $f(x)=g(x)$ و معادله‌ی حاصل را حل کنید...**

مدل ریاضی دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a متقاطع‌اند، نتیجه می‌دهد: $f(a)=g(a)$

ب) تابع‌های خاص

۱	تابع ثابت	$f(x)=c$، (c عددی ثابت است)
۲	تابع همانی	$f(x)=x$
۳	تابع خطی	$f(x)=ax+b$
۴	تابع قطعه‌ای (چند ضابطه‌ای)	$f(x)=\begin{cases}g(x) & \square\\ h(x) & \square\end{cases}$، ◻ ، ◻ دوتا محدوده برای x است.
۵	تابع گویا	تابع کسری که صورت و مخرجش، هر دو چندجمله‌ای هستند: $f(x)=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{cx^m+dx^{m-1}+\cdots}$ (مخرج $\neq 0$)

◄ برای پیدا کردنِ $f(a)$ در تابع چند ضابطه‌ای، اول ببینید a در کدام محدوده‌ی x صدق می‌کند، بعد a را به همان ضابطه‌ی نظیر آن محدوده بدهید.

۲ دامنه، برد و تساوی تابع‌ها

الف) دامنه‌ی تابع و پیداکردن آن: دامنه‌ی تابع همان مؤلفه‌های اول در زوج مرتب‌های تابع است؛ تمام x هایی که تابع به ازای آن‌ها تعریف شده است...

◄ در **تابع کسری**، مخرج را مخالف صفر بگذارید، **در تابع رادیکالی فرجه‌ی زوج**، زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهید.

مدل ریاضی $f(x)=\frac{\square}{u}$، دامنه‌اش می‌شود $u\neq 0$ و $f(x)=\sqrt[2k]{u}$، دامنه‌اش عبارت است از $u\geq 0$.

◄ برای پیدا کردن دامنه‌ی تابع از روی نمودار آن، تابع را روی محور x ها تصویر کنید و محدوده‌ای را که تشکیل می‌دهد، اعلام کنید.

ب) برد تابع و پیداکردن آن: برد تابع همان مؤلفه‌های دوم در زوج مرتب‌های تابع است؛ تمام y هایی که تابع به ازای مقادیر دامنه‌ی خود تحویل می‌دهد...

◄ معمولاً اولین قدم برای پیدا کردن برد، به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع است. بعد ببینیم ضابطه در چه محدوده‌ای (به ازای این x ها) قرار می‌گیرد. (مثلاً ضابطه را از روی دامنه بسازیم...)

◄ **برد چند جمله‌ای‌ها:** برد تابع چند جمله‌ای درجه‌ی سه، برابر $\mathbb{R}$ و برای تابع درجه‌ی دو اینطوری است:

$$y=ax^2+bx+c \begin{cases} a>0 \Rightarrow \text{برد}=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty) \\ a<0 \Rightarrow \text{برد}=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}] \end{cases}$$

◄ برد تابع‌هایی به فرم $y=\square^2\pm\square$، $\sqrt{\square}\pm\square$ و $y=|\square|\pm\square$ متناظر است با فکر کردن به کمترین و بیشترین مقدار ◻ها، آخه $\square^2$، $|\square|$ و $\sqrt{\square}$ همگی نامنفی‌اند...

◄ در تابع‌هایی که sin و cos حضور دارد از محدود بودن آن‌ها کمک بگیرید، آخه $\sin x\leq 1$ و $\cos x\leq 1$. **ببین:** $y=2\sin x-1 \xrightarrow{\text{برد}} [-3,1]$

◄ برد تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ می‌شود $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$.

◄ یادتان باشد برد تابع، مجموعه‌ی حاصل از تصویر تابع روی محور y هاست.

ب) دو تابع f و g مساوی‌اند هرگاه وقتی دامنه‌شان را پیدا کردید **(بدون ساده کردن ضابطه)**، دامنه‌ی مساوی هم داشته باشند و **(در صورت ساده‌کردن ضابطه‌ها)** ضابطه‌های آن‌ها هم یکی باشد...

۳ تابع یک‌به‌یک

در مجموعه‌ی زوج مرتب‌های این تابع، نه x ای تکراری وجود دارد و نه y ای تکراری، مگر این‌که زوج مرتبی را تکراری نوشته باشید!

◄ هر خط موازی محور x ها و همچنین هر خط موازی محور y ها، نمودار تابع یک‌به‌یک را یا قطع نمی‌کند یا فقط در یک قطع می‌کند.

◄ یکی از مطمئن‌ترین روش‌های بررسی یک‌به‌یک بودن تابع، رسم نمودار آن است...

◄ تابع چند ضابطه‌ای، درصورتی یک‌به‌یک است که هر ضابطه‌اش جداگانه یک‌به‌یک باشد و بُردهای ضابطه‌ها هم، اشتراک نداشته باشند.

الف **توابع یک‌به‌یک معروف:** $y=ax+b$ ، $y=\sqrt{ax+b}$ ، $y=ax^2+b$ ، $y=\log_c(ax+b)$ با شرط $a\neq 0$ و تابع $y=a^{mx+b}$ با شرط $m\neq 0$.

ب **توابع غیریک‌به‌یک معروف:** $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$، تابع ثابت $y=c$، $y=|ax+b|$، تابع جزءصحیح $y=[ax+b]$ و توابع مثلثاتی $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ و $y=\tan x$.

◄ برای تابع‌های غیریک‌به‌یک می‌توانید با ارائه‌ی محدوده‌ای برای x، کاری کنید که تابع در آن بازه یک‌به‌یک گردد؛ بهترین شیوه برای به‌دست آوردنِ این بازه معمولاً رسم تابع است...

۴ وارون تابع و ویژگی‌هایش

الف **مفاهیم مقدماتی تابع وارون:** اگر جای مولفه‌ها را در زوج مرتب‌های تابع f عوض کنیم به وارون تابع می‌رسیم و چنانچه این وارون،خودش تابع باشد به آن تابع وارون می‌گوییم و نمادش هم f^{-1} است، پس **شرط وارون‌پذیری تابع f، یک‌به‌یک بودن آن است.**

◄ برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار f، کافی است منحنی نمایش تابع را نسبت به $y=x$ (نیمساز ناحیه‌های اول و سوم) قرینه کنید.

◄ اگر جای دامنه و برد را در f عوض کنید، دامنه و برد f^{-1} به‌دست می‌آید.

مدل ریاضی $R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$

ب **پیداکردن ضابطه‌ی تابع وارون:**

در ابتدا جای x و y (یا همان f(x)) را در ضابطه‌ی تابع عوض کنید و بعد سعی کنید y را بر حسب x پیدا کنید. **ببین:**

$$y=\frac{x+1}{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=\frac{y+1}{y}\Rightarrow y+1=xy$$

$$\Rightarrow y(1-x)=-1\Rightarrow \underbrace{y=\frac{1}{x-1}}_{\text{ضابطه‌ی تابع وارون}}$$

◄ اگر برد تابع f محدود باشد، بعد از پیدا کردن ضابطه تابع وارون، در کنارش محدوده‌ی برد f را هم بنویسید...

نگاه‌کن: $y=1-\sqrt{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=1-\sqrt{y}\xrightarrow{\text{توان ۲}}y=(x-1)^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2\ ,\ \underbrace{x\leq 1}_{\text{برد } f}$$

روش تستی: اگر ضابطه‌ی تابع وارون f را خواسته‌باشند، در تابع f خودتان (که دارید) مقداری دلخواه به x داده و y را پیدا کنید؛ مثلاً $f(a)=b$ حالا گزینه‌ای درست است که اگر به x آن بدهیم b حاصل تابع بشود a؛ درست برعکس!

ب **وارون تابع درجه دو:**

تابع $y=ax^2+bx+c$ وارون‌پذیر نیست. (چون یک‌به‌یک نیست) پس با ارائه محدوده‌ای مناسب وارون‌پذیر می‌شود که عبارت است از:

یک بازه‌ای قبل از $-\frac{b}{2a}$ **یا بازه‌ای بعد از آن:** بعد با روش مربع کامل کردن وارونش را پیدا کنید:

نگاه‌کن:

$$y=x^2-4x+1\ ,\ x>2\xrightarrow{\text{مربع کامل}}y=(x-2)^2-4+1=(x-2)^2-3$$

$$\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=(y-2)^2-3$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=x+3\xrightarrow{\text{جذر}}|y-2|=\sqrt{x+3}\xrightarrow[\text{درواون می‌شود } y>2]{x>2}$$

$$y-2=\sqrt{x+3}\Rightarrow y=\sqrt{x+3}+2$$

۵ عملیات جبری و ترکیب روی دو تابع

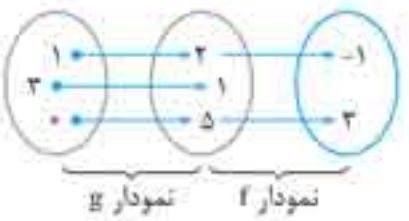
الف **دامنه و ضابطه:**

$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D=D_f\cap D_g$
$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	
$f\cdot g$	$(fg)(x)=f(x)g(x)$	
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D=D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq 0$
fog	$(fog)(x)=f(g(x))$	$D=\{x\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$

◄ اگر دو تابع را به‌صورت زوج مرتب‌هایشان داشتید و خواستید عملیاتی روی آن‌ها انجام دهید، حواستان باشد اول دامنه‌ی تابع مطلوب را پیدا کنید و بعد روی x هایی که قابل قبول‌اند، فرمول ضابطه را اجرا کنید...

ب **fog :** برای پیدا کردن fog، از روی اعضای f و g، تابع g را با نمایش پیکانی بنویسید، حالا نوبت f شده، آن را هم پیکانی می‌کشید ولی با این توجه که از مؤلفه‌های اول f فقط آن‌هایی را که در دایره‌ی دوم g هستند تصویر کنید و مابقی را بیخیال شوید! حالا مجموعه‌ی وسطی را نادیده بگیرید و هر فلش $a\to *\to b$ را به‌صورت زوج (a,b) پیاده کنید. خودتان برای gof مدلسازی کنید...

ببین: $f=\{(2,-1),(5,3)\}$ ، $g=\{(1,2),(3,1),(0,5)\}$

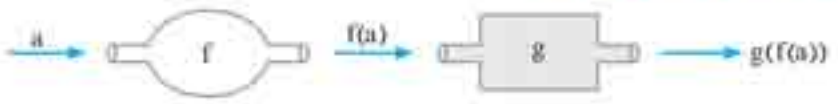


$$\xrightarrow{\text{وسطی رو بیخیال شو}}fog=\{(1,-1),(0,3)\}$$

ب **از روی نمودار:** اگر f و g را به‌صورت نمودارهایشان دارید، معمولاً بهتر است ضابطه‌ی f و g را (که معمولاً خط هستند یا خط شکسته) بنویسید و بعد عملیات خواسته‌شده را روی آن‌ها پیاده کنید...

◄ هر نمودار خط شکسته، حتماً تابعی چند ضابطه‌ای است که هر ضابطه‌اش معادله‌ی یک خط است...

ت **درباره‌ی تابع مرکب:**



$(gof)(\alpha)=g(f(\alpha))$ و $(fog)(\alpha)=f(g(\alpha))$

◄ **مقداریابی:**

از داخل حساب کن بیا بیرون!

◄ **اگر بدانیم عضوی در تابع مرکب وجود دارد:**

$$(a,b)\in fog\xrightarrow{\text{m را وارد کن}}(a,m)\in g\ ,\ (m,b)\in f$$

◄ **کار با ماشین تابع مرکب:**

خروجی را مساوی ضابطه‌ی دومی بگذارید و x قابل قبول را در آورید، حالا آن x را مساوی ضابطه‌ی اولی گذاشته و حل کنید، این‌طوری ورودی در می‌آید.

◄ بـرای دامنـه‌ی fog، دامنـه‌ی f و g را پیدا کنیـد و بعد g(x) را در محدوده‌ی دامنه‌ی f بگذارید هرچه درآمد با دامنه‌ی g اشـتراک بگیرید: $D_{fog}=\{x\mid x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\}$، برای gof خودت مدلسازی کن...

◄ اگـر ضابطـه‌ی f و fog را داشـتید، f(g(x)) را تشـکیل دهیـد (بـه جای تمام x ها در تابع f بذارید g(x) بعدش آن را مسـاوی داده‌ی سؤال قرار دهید، تنها مجهول، g(x) است که درمی‌آید.

◄ اگـر ضابطـه‌ی f و gof را داشـتید، g(f(x)) را تشـکیل دهیـد (جلوی g، ضابطه‌ی f را بذارید) حالا عبارت داخل پرانتز را t بگیرید و x را بر حسـب t پیدا کنید، در آخر در ضابطـه‌ی gof به جای تمام x ها، عبارتی را که بر حسب t پیدا کرده‌اید، قرار دهید تا ضابطه‌ی g را بیابید.

ببین: $f(x)=2x+1$ و $(gof)(x)=x^2-1\Rightarrow g(2x+1)=x^2-1$

$$\xrightarrow[x=\frac{t-1}{2}]{2x+1=t} g(t)=(\frac{t-1}{2})^2-1$$

۶ ترکیب تابع با وارون خودش

الف) ضابطـه‌ی هـر دو تابـع fof^{-1} و $f^{-1}of$، همانـی اسـت، یعنی $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)=x$ اما دامنه‌ی متفاوت دارند:

$D_{fof^{-1}}=R_f$ ، $D_{f^{-1}of}=D_f$

◄ شرط تساوی $f^{-1}of=fof^{-1}$، این است که $D_f=R_f$ شود.

تابع‌های f و g وارون همدیگرند هرگاه $(fog)(x)=x$ یا $(gof)(x)=x$ شود.

ب) **پخش شدن ۱ـ روی ترکیب:**

$(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ ، $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

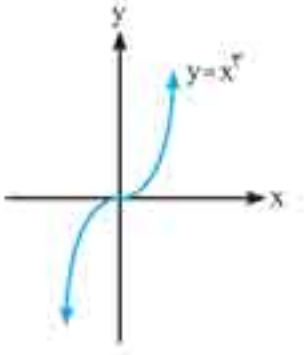
یعنـی اگر نمـاد وارون روی پرانتزی که دو تابع ترکیب شـده بودند، قرار داشت، به‌ترتیب برعکس روی هر دوی آن‌ها تأثیر می‌گذارد...

۷ توابع چندجمله‌ای

تابع‌هایی هستند که ضابطه‌شان یک چندجمله‌ای بر حسب x است، مثل $f(x)=2x^3-x^2+x-1$

الف) **شکل و ویژگی‌های $y=x^3$**، نمودار این تابع شبیه کلمه‌ی «لُر» است که روی مبدأ مختصات نشسته است!

◄ $y=x^2$، صعودی اکید، وارون‌پذیر (با تابع وارون $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$)، دامنه و بردش $\mathbb{R}$ بوده و نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



◄ هر تابع درجه‌ی سـه به فـرم کلی $y=a(bx+c)^3+d$ $(a,b\neq 0)$ با انتقال و کشش $y=x^3$ قابل رسم و بررسی است.

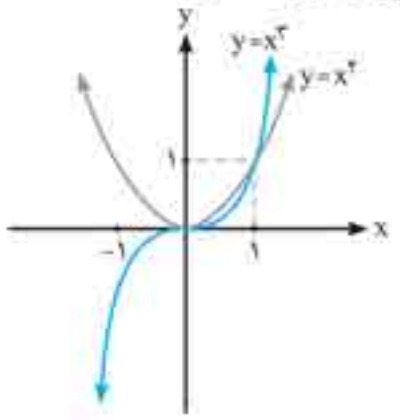
◄ اگر تابع درجه سـومی داشـتید که اتحاد مکعب دوجمله‌ای در آن دیده نمی‌شـد، اول بـا اتحاد $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$، بـه فرم خانواده‌ی $y=x^3$ تبدیلـش کنید (غیر از این در کنکور شـما نمی‌آیدا!)

ببین: $y=x^3+6x^2+12x+1=(x+2)^3-7$

◄ اگر خواسـتید از روی نمودار تابع درجه سومی، پارامترهای ضابطه‌ی آن را پیـدا کنید به نقطه‌های حسـاس تابع توجه کنید: **نقطه‌هـای برخورد با محورها، مرکز تقارن و نقطه‌ای داده شده توسط تست.**

ب) **ارتباط $y=x^3$ و $y=x^2$**

هر دو در نقطه‌ی (۱،۱) متقاطع و در مبدا مختصات (۰،۰) برهم مماس‌اند، اما $y=x^3$ از مبدأ و زیر $y=x^2$ شروع به حرکت می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی (۱،۱) می‌رود بالای $y=x^2$...



۸ رسم تابع با انتقال و کشش

فرض می‌کنیم نمودار $y=f(x)$ را بلد باشید، خب حالا می‌توانید تابع‌های زیر را هم رسم کنید:

الف) $y=f(x)+a$ $(a>0)$، نمودار f را a واحد ببر بالا. $y=f(x)+b$ $(b<0)$، یعنی f را b واحد در راستای محور y ها بیار پایین.

ب) $y=f(x+a)$ $(a>0)$، یعنی نمـودار $y=f(x)$ را a واحد منتقل کن به چپ و $y=f(x+b)$ $(b<0)$ به معنای انتقال دادن f در راسـتای محور x ها و به اندازه‌ی b واحد به راست است.

پ) $y=-f(x)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را **نسبت به محور x ها** کلاً قرینه کن.

ت) $y=kf(x)$، بدون تغییر در دامنه‌ی $y=f(x)$، تابع در راستای محور y ها کشیده یا فشرده می‌شود $(k>0)$: یادتان باشد همواره **نقطه‌ی (a , b) روی $y=f(x)$ بشود (a , kb)، یعنی در این حالت برد تابع k برابر می‌شود.**

ث) $y=f(kx)$، بدون تغییر در برد تابع، تابع در راستای محور x ها کشیده یا فشـرده می‌شـود $(k>0)$؛ یادتان باشـد همواره **نقطه‌ی (a , b) روی تابع $y=f(x)$ بشود $(\frac{a}{k},b)$، یعنی در این حالت دامنه‌ی تابع بر k تقسیم می‌شود.**

ج) $y=|f(x)|$، یعنی قسـمت‌های بالای محور x ها از تابع $y=f(x)$ را نگه‌دارید و قسمت‌های پایین محور x ها را (نسبت به محور x ها) قرینه کنید...

۹ توابع صعودی و نزولی

اگر I زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع f باشد و همچنین $x_1, x_2\in I$ باشند، آن‌وقت:

الف)

f صعودی اکید	$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$	رفتار زیاد شونده
f نزولی اکید	$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$	رفتار کم شونده
f صعودی	$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$	زیاد می‌شود ولی نقاط هم عرض هم دارد
f نزولی	$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$	کم می‌شود ولی نقاط هم عرض هم دارد

ب) **ویژگی‌ها:**

◄ اگر تابعی صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، به آن **یکنوای اکید** می‌گوییم و چنانچه صعودی یا نزولی باشد هم **یکنوا**.

◂ اگـر تابعی در فواصلی از دامنه‌ی خود صعودی و در فواصلی دیگر نزولی باشد، **غیریکنوا** نامیده می‌شود.

◂ معمولاً از راه رسـم تابع می‌توانید در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع‌ها اظهار نظر کنید: از سمت چپ شروع کنید به حرکت روی نمودار تابع؛ اگر همواره در حال بالا رفتن باشـید صعودی اکید است و در حال پایین آمدن هـم یعنی نزولی اکید و اگر جایی نقطه‌های هم عرض دیدید کلمه‌ی اکید را بردارید؛ اما اگر گاهی بالا می‌رود و گاهی پایین، این یعنی غیریکنوا، مثل $y=\sin x$.

◂ از بین تابع‌های معروف، $y=ax+b$ ، $y=a(x+b)^{۳}+c$ و $y=\sqrt{ax+b}$ بـا شـرط $a>۰$ صعـودی اکیـد و $y=ax+b$ ، $y=a(x+b)^{۳}+c$ و $y=\sqrt{ax+b}$ با شرط $a<۰$ نزولی اکید هستند.

◂ تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ $(a>۰)$ قبـل از $x=-\frac{b}{۲a}$ نزولی اکید و بعد از آن صعودی اکید است و برای حالت $a<۰$ برعکس.

ب) عملیات روی تابع‌های صعودی و نزولی

اگر r عددی مثبت و s عددی منفی بوده و o هم علامت ترکیب توابع، آن‌وقت:

◂
- rf صعودی $\Rightarrow f$ صعودی
- rf نزولی $\Rightarrow f$ نزولی
- sf نزولی $\Rightarrow f$ صعودی
- sf صعودی $\Rightarrow f$ نزولی

◂
- صعودی + صعودی = صعودی
- نزولی + نزولی = نزولی
- صعودی o صعودی = صعودی
- نزولی o نزولی = صعودی
- نزولی o صعودی = نزولی

ت) کاربردهای تابع وارون و صعودی.نزولی

◂ برخورد f و $f^{-۱}$: اگر تابع f صعودی اکید باشـد محل برخورد f، $f^{-۱}$ (در صورت وجود) روی خط $y=x$ است، پس به جای قطع دادنِ f و $f^{-۱}$ (در حالت f صعودی) f را با $y=x$ قطع دهید...

◂ در توابع یکنوای اکید، کافی اسـت اول و آخر دامنه را به تابع بدهید تا اول و آخر برد در بیاید...

◂
- اگر f صعودی اکید باشد، $f^{-۱}$ هم صعودی اکید است.
- اگر f نزولی اکید باشد، $f^{-۱}$ هم نزولی اکید است.

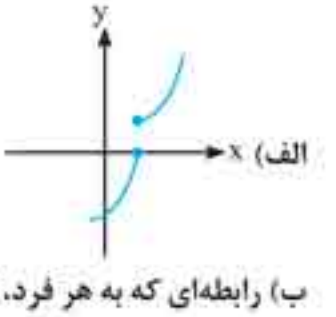
منابع	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
زمان پاسخ‌گویی: ۲۰ دقیقه	صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷	صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰	صفحه‌های ۱ تا ۳۰

آزمون ۲۲ منطبق برکتاب درسی

۱. اگر $f(x)=۳x^{۲}+x-۱$ و $g(x)=۱-۲x$ باشد، معادله‌ی $(gof)(x)=-۵$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲. چند مورد از موارد زیر نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟



ب) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستان او را نسبت می‌دهد.

ت) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌ی دوم آن را نسبت می‌دهد.

ث) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۳. تابع $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ درچه بازه‌ای یک‌به‌یک است و ضابطه‌ی تابع وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۱}-۲,[-۲,+\infty)$ ۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲,[۲,+\infty)$

۳) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۱}-۲,(-\infty,-۲]$ ۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲,(-\infty,۲]$

۴. نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(۳,۴)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد. $(f(-۱))^{۲}+۲f(-۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{-۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵. اگر تابع f در بازه‌ی اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{f(|x+۱|)-f(|x-۲|)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۲]$ ۲) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$

۶. یک تانکر گاز از یک اسـتوانه و دو نیم‌کره به شـعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد و حجم تانکر را بر حسب r به‌صورت $V(r)=۲\pi r^{۲}f(r)$ بنویسیم، $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۵ ۳) ۳۳ ۴) ۱۷

۷. تابع $f(x)=۲-\frac{۱}{x-۱}$ با کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-x}$ ۲) $y=\frac{۴x^۲-۹}{۲x^۲+x-۳}$ ۳) $y=\frac{۲x^۲+x-۳}{(x-۱)^۲}$ ۴) $y=\frac{۲x^۲-۵x+۳}{(x-۱)^۲}$

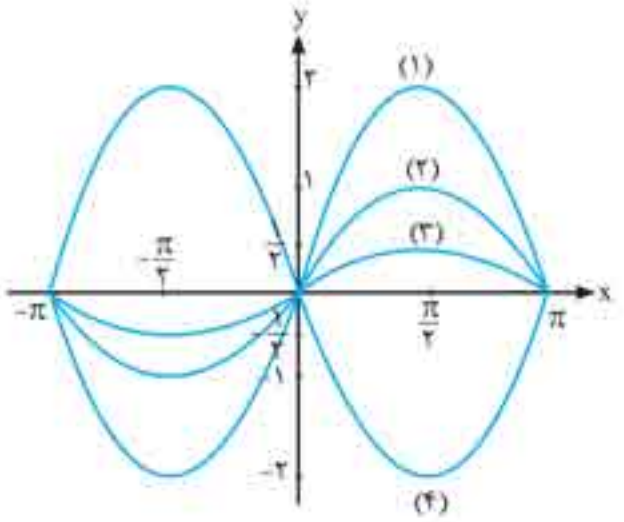
۸. اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\sin x$ باشد، آن‌گاه $D_{(gof)(x)}$ کدام است؟

۱) $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ ۲) $[-۲\pi, -\pi]$ ۳) $[\pi, ۲\pi]$ ۴) $[-\frac{\pi}{۲}, -۲\pi]$

۹. اگر $D_f=[-۴,۲]$ و $R_f=[-۳,۰]$ باشد، مساحت ناحیه‌ی محدود به $y=fof^{-۱}(x)$ و محور x ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۱۰. در شکل روبه‌رو نمودار توابع $y=\sin x$ ، $y=۲\sin x$ ، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودارهای $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ به‌ترتیب در کدام گزینه آمده است؟



۱) (۴)، (۲)
۲) (۲)، (۳)
۳) (۳)، (۴)
۴) (۲)، (۱)

آزمون ۲۳ شبیه‌ساز کنکور

زمان پاسخ‌گویی: ۲۰ دقیقه

۱. اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد به‌طوری که $f(۴)=f(۱)g(۳)-f(۳)g(۱)$ و $f(۱)g^۲(۱)$ باشد، آن‌گاه $g(۵)$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۴ ۲) ۱ یا ۴- ۳) ۱- یا ۱ ۴) ۴ یا ۴-

۲. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳. نمودار تابع $y=x^۲$ را ۳ واحد به سمت x های منفی و ۲ واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. معادله‌ی منحنی حاصل کدام است؟

۱) $y=x^۲+۶x+۱۱$ ۲) $y=x^۲-۶x+۱۱$ ۳) $y=x^۲+۶x+۷$ ۴) $y=x^۲-۶x+۷$

۴. اگر جزء صحیح عبارت $x^۲+x$ برابر ۱- باشد، حاصل $[x^۳]+[x^۲]-[x]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۳-

۵. هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x<a\\ x^۳+۱ & x\geq a\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$ ۲) $[-۲,+\infty)-\{۱\}$ ۳) $(-۲,+\infty)$ ۴) $(-۲,+\infty)-\{۱\}$

۶. اگر $f=\{(۰,۲),(۱,-۲),(-۱,۱)\}$ و $g=\{(۰,۴),(-۲,۱),(۱,-۱)\}$، تابع $f^۲og$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۱),(۲,۴)\}$ ۲) $\{(۱,۱),(-۲,۴)\}$ ۳) $\{(۱,۱),(-۲,۴),(۴,۲)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۲,۴),(-۲,۴)\}$

۷. اگر $f(x)=۳x^۲-x-۲$ و $g(\frac{۱}{x})=\frac{۲-۳x}{x}$، آن‌گاه ریشه یا ریشه‌های معادله‌ی $(fog)(x)=۰$ کدام است؟

۱) ۲ و $\frac{۷}{۶}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۸. اگر تابع $f=\{(-۲,m^۲-۴),(۵,۴m-۱),(۳,۳m)\}$ صعودی باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱\leq m\leq ۴$ ۲) $۱\leq m\leq ۴$ ۳) $m\leq ۱$ ۴) $m\geq ۴$

۹. اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$ و $(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$ باشد، در اینصورت $(gof)(-۲)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۹- ۳) ۷ ۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۱۰. تابع با ضابطه‌ی $y=x|x-۲|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟ (کنکور ۹۴)

۱) $۱-\sqrt{۱+x}\ ;\ x<۰$ ۲) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ x<۱$ ۳) $۱+\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

آزمون ۲۴ شبیه‌سازکنکور

زمان پاسخ‌گویی: ۲۰ دقیقه

۱. اگر f تابعی ثابت بوده و $f(۲)=۵$ و تابع $g=\{(۵,a-۱),(-۱,-۱),(\frac{b}{۳},۲)\}$، همانی باشد، حاصل $f(b-۲)+g(\frac{a}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۸

۲. اگر در تابع خطی f داشته باشیم $f(۲-x)+f(۲x-۱)=۴x+۱$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $۲x+\frac{۱}{۲}$ ۲) $۴x-\frac{۳}{۲}$ ۳) $۴x+\frac{۳}{۲}$ ۴) $۴x+\frac{۱}{۲}$

۳. به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=a^۳-a+۲$ و $g(x)=\frac{۲x^۲+۲x-۲a}{x^۲+x-a}$ با هم مساوی هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. اگر $f(x)=۳\sqrt{۴-x}$ و $g(x)=\log_{\sqrt{۳}}(x^۲+۸x)$، دامنه‌ی تعریف تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۵. اگر $f(x)=۲x+۲a$، $g(x)=x^۲+bx+c$ و $(fog)(x)=۲x^۲+x+۱$ باشند، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۳

۶. اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a)=۰$ و $f(b)=۱$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x)=\sqrt{\log_{۰/۱}f(x)}$ کدام گزینه خواهد بود؟ (a کوچکتر از b است.)

۱) $(۰,b]$ ۲) $(a,b]$ ۳) $(a,+\infty)$ ۴) $[a,b)$

۷. اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$ باشد، حاصل $f^{-۱}(\frac{۱}{x})+f^{-۱}(x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۵)

۱) $۲x$ ۲) $\frac{۲}{x}$ ۳) $x^۲-۱$ ۴) صفر

۸. دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟ (کنکور ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

۹. اگر $f(\tan x)=\frac{\cos x}{\sin^۳ x}$ باشد، در این‌صورت ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۳}$ ۲) $f(x)=\frac{x+۱}{x^۳}$ ۳) $f(x)=x+x^۳$ ۴) $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x}$

۱۰. اگر $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، تابع $(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ چگونه است؟ (خارج ۹۱)

۱) ثابت ۲) همانی ۳) یک‌به‌یک ۴) خطی

آزمون ۲۵ یک گام فراتر از کنکور

زمان پاسخ‌گویی: ۲۰ دقیقه

۱. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$، $g(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ و $۰<a<۱$ باشد، حاصل $f(a+\frac{۱}{a})+g(a-\frac{۱}{a})$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{a}$

۲. منحنی معکوس تابع $y=-(x+۲)^۳-۲$، آن را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) قطع نمی‌کند. ۴) ۳

۳. ضابطه‌ی معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$، به کدام صورت است؟

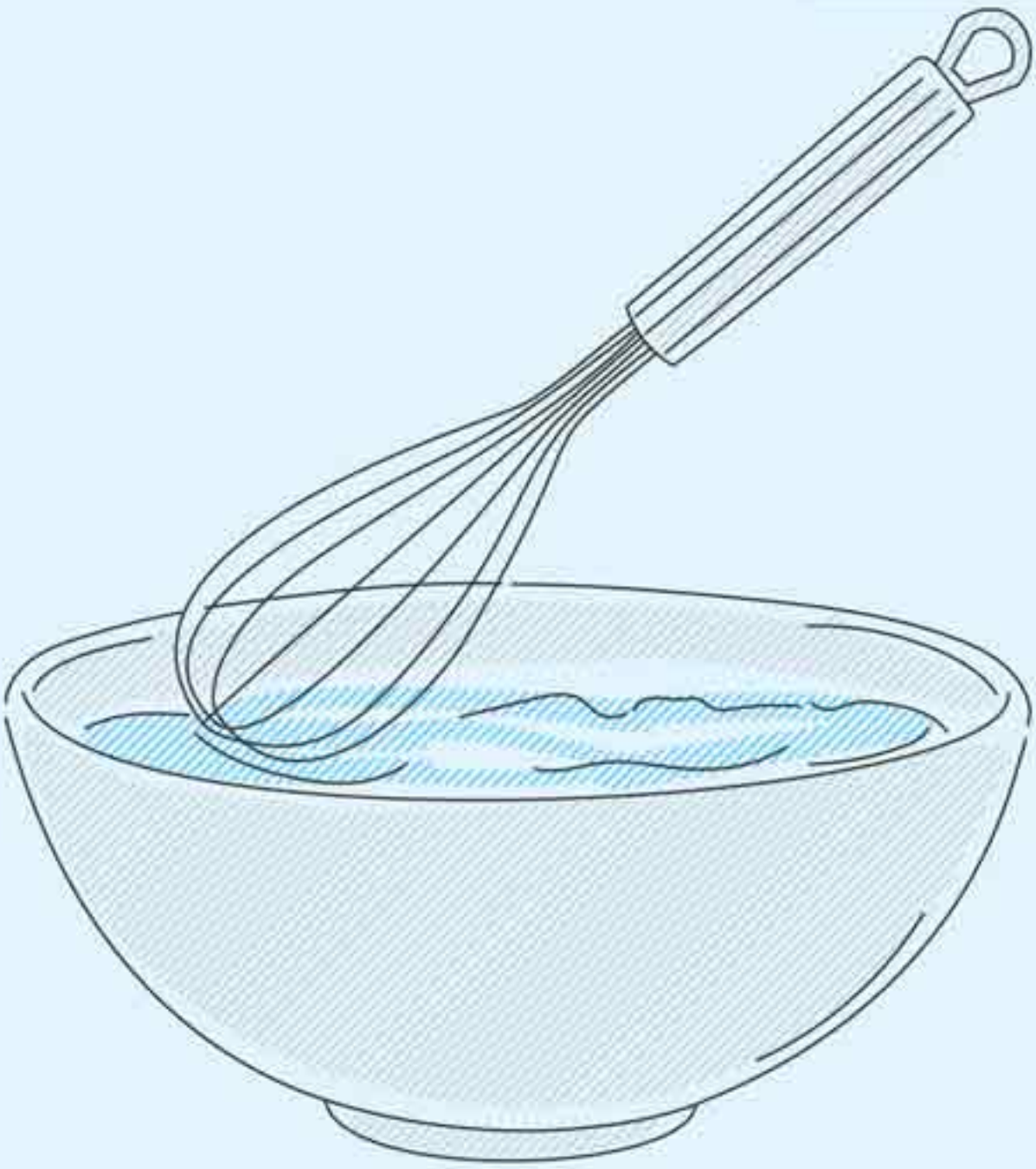
۱) $y=x\sqrt{|x|}\ ;\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|}\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{۰\}$

۳) $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$

۴. کدام تابع یک‌به‌یک است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=x-[\frac{x}{۳}]$ ۲) $y=x+[-\frac{x}{۳}]$ ۳) $y=x-[-\frac{x}{۳}]$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

بخش ۲



آزمون‌های ترکیبی

در این بخش شما را آماده می‌کنیم برای آزمون‌های آزمایشی کشوری!
ما مطابق با برنامه‌ی آزمون‌های قلم‌چی و گزینه دو (که بیشترین جامعه‌ی آماری شرکت‌کننده را در مجموع به خود اختصاص می‌دهند)، آزمون‌هایی طراحی کرده‌ایم برای جمع‌بندی و یادگیری‌تان... کافی است تمام آزمون‌های ترکیبی را حل کنید تا هم آماده‌ی آزمون‌های آزمایشی‌تان باشید و هم در آخرِ کار، تمام ریاضیِ کنکورتان را با برنامه‌ی منطقی پوشش داده باشید.
آزمون‌های موجود در این بخش از موضوعاتی تشکیل شده‌اند که برنامه‌شان را در بالای آزمون می‌بینید؛ از ریاضی ۱، ۲ و ۳. مهم‌ترین بخش این کتاب، جمع‌بندی مطالب ریاضی تجربی در قالب آزمون‌های ترکیبی است...
زمان حل تست‌های این آزمون‌ها قبل از آزمون‌های آزمایشیِ مرحله‌ای است و خب البته اگر زمانی بخواهید در قالب جمع‌بندیِ کل ریاضی‌تان آزمون‌هایی را حل کنید...
آزمون‌هایی با برنامه، پوشش‌دهنده، ترکیبی، منظم و پویا مطابق آزمون‌های آزمایشی کشوری؛ جمع‌بندیِ حرفه‌ای...

مهروماه

منابع	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه	صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷ و صفحه‌های ۲ تا ۲۷	صفحه‌های ۴۷ تا ۵۶	صفحه‌های ۱ تا ۱۰

آزمون ۶۱

منطبق بر آزمون اول قلم‌چی

۱. هرگاه تابع $f=\{(0,4),(3,m^2-3m),(-1,m^2),(5,10)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-2<m<-1$ ۲) $-2<m<2$ ۳) $-2<m<5$ ۴) $4<m<5$

۲. نمودار تابع $y=x^3+3x^2+3x$ از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) دوم و چهارم ۲) اول و سوم ۳) چهارم ۴) دوم

۳. کدام گزینه در مورد $x^3=\frac{1}{x}-2$ درست است؟

۱) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد. ۳) دو ریشه‌ی مثبت دارد. ۴) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

۴. تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4}+m & x\geq 0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$، به ازای چه مقادیری از m صعودی است؟

۱) $m\geq 0$ ۲) $m\geq -3$ ۳) $m\geq -2$ ۴) $m\geq -1$

۵. اگر f تابعی نزولی و دامنه‌ی آن $(-\infty,+\infty)$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x^2-x)-f(3x+5)}$ کدام است؟

۱) $[-1,5]$ ۲) $[0,5]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-5,1]$

۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2(x^{n+1}-3)+4$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۶ است. اگر $f(-1)=2$ باشد، حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) -48 ۲) 80 ۳) 56 ۴) -38

۷. تابع $f(x)=|x+a|-1$ در بازه‌ی $[-3,2]$ یکنواست، حدود a کدام است؟

۱) $[-2,3]$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-(-2,3)$ ۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

۸. چه تعداد از جملات زیر درست است؟

الف) نمودار تابع $y=x^2$ در بازه‌ی $(-\infty,1)$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^3$ است.

ب) نمودار تابع $y=x^3$ در بازه‌ی $(0,1)$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^2$ است.

پ) توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ هر دو اکیداً صعودی هستند.

ت) توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ هر دو یک‌به‌یک هستند.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۹. تابع $f(x)=2x^2-4x+5$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[-2,2)$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $(-\infty,2]$

۱۰. کدام تابع زیر در دامنه‌ی خود، تابعی نزولی است؟

۱) $y=2^{x+1}$ ۲) $y=x^3-1$ ۳) $y=\log_2 x$ ۴) $y=-\sqrt{x+1}$

۱۱. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{W}\subseteq\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{W}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ۴) $(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}$

۱۲. در کلاسی ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. اگر ۳ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ تیمی نباشند، کدام نادرست است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱۱ نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند. ۲) ۲۴ نفر فقط عضو یک تیم هستند.

۳) ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال نیستند. ۴) ۲۷ نفر حداکثر عضو یک تیم هستند.

۱۳. جمله‌ی هشتم یک دنباله‌ی حسابی ۶ واحد از جمله‌ی چهارم آن بیشتر است و مجذور جمله‌ی نهم، ۱۷۱ واحد از مجذور جمله‌ی سوم بیشتر است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۱۴. در یک دنباله‌ی حسابی، نسبت جمله‌ی ششم به جمله‌ی سوم $-\frac{1}{2}$ است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

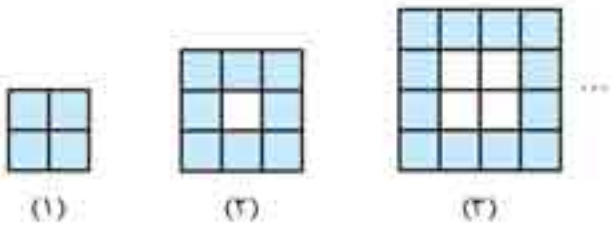
۱۵. در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، جمله‌ی نهم، ۹ برابر جمله‌ی پنجم است. اگر تفاضل این جمله‌ها ۱۴۴ باشد، جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$

۱۶. اعداد 3^9، $3\sqrt{3}$، ۹ و b جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۹

۱۷. در الگوی شکل زیر، جملات دنباله‌ی a_n، تعداد مربع‌های رنگی را در هر مرحله نمایش می‌دهد. کدام گزینه در مورد دنباله‌ی a_n درست است؟


(۱) (۲) (۳)

۱) a_n یک دنباله‌ی خطی و $a_{۲۵۰} = ۱۰۰۰$ است.
۲) a_n یک دنباله‌ی غیرخطی و $a_{۲۵۰} = ۱۰۰۰$ است.
۳) a_n یک دنباله‌ی خطی و $a_{۱۵۰} = ۵۰۰$ است.
۴) a_n یک دنباله‌ی غیرخطی و $a_{۱۵۰} = ۵۰۰$ است.

۱۸. در یک دنباله‌ی حسابی غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند به‌ترتیب سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی صفر است؟

۱) نهم ۲) دهم ۳) یازدهم ۴) دوازدهم

۱۹. در الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های توپر شکل دوازدهم از تعداد دایره‌های توخالی آن چندتا کمتر است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

(۱) (۲) (۳) (۴)

۱) ۱۲ ۲) ۶۶ ۳) ۳۶ ۴) ۷۸

۲۰. اگر $a_n = (m-۲)n^۲ + mn + ۷$ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $b_n = a_{۴n} - ۱۴m$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۶۲ منطبق بر آزمون اول گزینه دو

منابع	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
زمان پاسخ‌گویی: ۶۰ دقیقه	فصل‌های ۴ و ۵	فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳	فصل ۱، درس ۱ و ۲ تا ابتدای تبدیل نمودار توابع (صفحه‌ی ۱۵)

۱. هرگاه رابطه‌ی $\{(۳,b),(a-۱,۵),(a+۲,۳),(۲,a^۲-۳a),(۲,۴),(۱,-۱)\} = f$ یک تابع را مشخص کند، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(۴,۵)$ ۳) $(-۴,۵)$ ۴) $(۱,۳)$

۲. اگر نمودار تابع $y = (m-۲)x^۲ - ۴x + m + ۱$ همواره زیر محور x ها قرار داشته باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $m < ۲$ ۲) $m < -۲$ ۳) $-۲ < m < ۳$ ۴) $-۲ < m < ۲$

۳. اگر f یک تابع خطی باشد، به‌طوری که $f(۲) + f(-۱) = ۸$ و $f(۱) = ۳$، آن‌گاه نمودار تابع f با محورهای مختصات چه سطحی را تشکیل می‌دهد؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۴. اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{۳f^۲(۱) - ۴g(۳)}{۲f(۲)+۱} = ۳$، آن‌گاه مقدار $g(۰)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۵. در یک لوزی مجموع طول قطر بزرگ و کوچک آن ۶ واحد است. اگر مساحت لوزی $\frac{۲۷}{۸}$ واحد مربع باشد، اندازه‌ی محیط آن کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۱۰}$ ۳) $۳\sqrt{۱۰}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

۶. اگر تابع $f = \{(-۱,۳),(۰,۵),(۱,a)\}$، تابعی خطی و $g = \{(-۱,b),(c,۴),(۲,۲)\}$ تابع همانی باشد، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{ax+bc}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -\frac{۳}{۲}]$ ۲) $(-\infty, -\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[\frac{۷}{۴}, +\infty)$ ۴) $[\frac{۴}{۷}, +\infty)$

۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۳x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha\beta^۳ + \alpha^۳\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۱۰۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۷}$ ۳) $-\frac{۷}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۲۵}{۱۰۸}$

۸. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{۱}{x-۲} = \frac{۵}{x^۲+۲x+۴} - \frac{۶}{x^۳-۸}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۷ ۳) -۷ ۴) -۱۲

۹. معادله‌ی $x^۲ - ۲x + \sqrt{x-۱} = -۱$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰. به ازای چند مقدار صحیح m، معادله‌ی $(m-۳)x^۴-۴x^۲+m=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱. به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x)=(m-۴)x^۲-۶x+m+۷$ هیچ‌گاه بالاتر از خط $y=۳$ قرار نمی‌گیرد؟

۱) $m<۴$ ۲) $-۵\le m<۴$ ۳) $m\le -۵$ ۴) $۴<m\le ۵$

۱۲. کدام گزینه در مورد تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|x|=۱-x^۳$ درست است؟

۱) فقط یک ریشه مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشه منفی دارد.

۳) دو ریشه مثبت دارد. ۴) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

۱۳. نمودار تابع $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۱۰$ از کدام ناحیه‌های دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) فقط دوم ۲) فقط چهارم ۳) دوم و چهارم ۴) اول و سوم

۱۴. هرگاه $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=|\frac{۲x-۴}{x+۳}|$ باشند، دامنه‌ی تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-\infty,-\frac{۱}{۲})-\{-۳\}$ ۴) $(-\infty,-۲]$

۱۵. هرگاه $f=\{(۲,۶),(-۱,۴),(۳,۳),(-۲,۵)\}$ و $g=\{(-۲,۳),(۲,-۱),(۴,-۲)\}$ باشند، آن‌گاه تابع $\frac{f+g}{fog}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. توابع $f(x)=x^۲-x+۵$ و $g(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱}$ مفروض است. معادله‌ی $gof(x)=۱$ چند ریشه دارد؟

۱) فاقد ریشه است. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷. هرگاه $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$ و $gof(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱}$ باشند، آن‌گاه تابع $g(x+۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۳}{x^۶+۱}$ ۲) $\frac{۲x^۳}{x^۹+۱}$ ۳) $\frac{x^۳}{x^۹+۱}$ ۴) $\frac{۲x^۳}{x^۶+۱}$

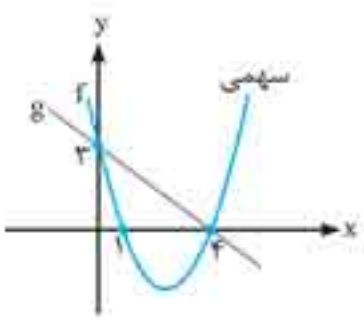
۱۸. تابع $y=\cos x$ در کدام بازه‌ی زیر صعودی است؟

۱) $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(۰,\pi)$ ۳) $(\pi,\frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(-\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳})$

۱۹. اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[۰,۳۲]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=f(۲x^۲)$ کدام است؟

۱) $[۰,۴]$ ۲) $[-۴,۴]$ ۳) $[۰,۲۰۴۸]$ ۴) $[-۴,۰]$

۲۰. شکل مقابل نمودار تابع f و g را نمایش می‌دهد. حاصل $fog(۶)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $-\frac{۱۶۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶۵}{۱۶}$

۲۱. کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟

۱) در بازه‌ی $(۰,۱)$ نمودار تابع $y=x^۲$ از نمودار تابع $y=x^۳$ بالاتر است.

۲) تابع $y=\sqrt{-x}-\sqrt{x+۱}$ نزولی است.

۳) تابع $f(x)=\begin{cases}۲ & ۰\le x<۲\\ ۳x-۴ & x\ge ۲\end{cases}$، در بازه‌ی $[۰,۲]$ ثابت است.

۴) هرگاه f و g توابعی نزولی باشند، تابع fog نیز نزولی است.

۲۲. اگر تابع $y=-۲x^۲+۸x-۳$ در بازه‌ی $(-\infty,a)$ اکیداً صعودی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۳. به ازای چه مقادیری از m، تابع $f=\{(۳,۸),(۱,m+۶),(-۱,m^۲),(۱۰,m^۲-۳m-۲)\}$ اکیداً نزولی است؟

۱) $m>۳$ ۲) $-۲<m<۳$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $-۲<m<۵$

۲۴. هرگاه f تابعی اکیداً صعودی و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x^۲-۲x)-f(۳x-x^۲-۲)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵. ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۷=۰$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-x-۱۶=۰$ ۲) $x^۲+x-۱۶=۰$ ۳) $x^۲+۵x-۱۰=۰$ ۴) $x^۲-۵x-۱۰=۰$

بخش ۳

آزمون‌های جامع

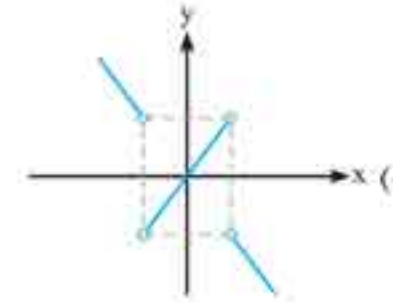
در این بخش آزمون‌هایی کلی خواهید داشت از تمام مباحث و فصل‌های ریاضیِ تجربی کنکور! کاملاً مشابهِ کنکور سراسری؛ چه از لحاظ تعداد سؤال و زمان پاسخ‌گویی و چه از لحاظ ترتیب، سطح و استاندارد بودنِ تست‌ها...

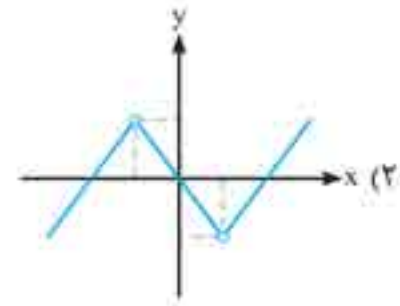
ما مؤلفان کتاب بر مبنای سال‌ها تجربه‌ی طرح سؤال برای آزمون‌های آزمایشی کشور، آزمون‌هایی جامع برایتان طرح کرده‌ایم مطابق با نظام و کتاب درسی جدید و با دیدگاه طراحان کنکور سراسری...

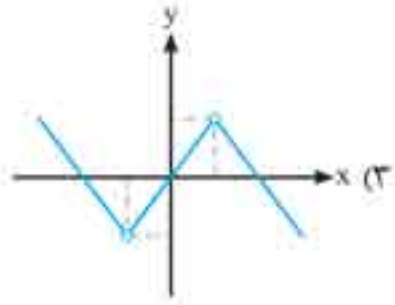
زمان حل این تست‌ها در دوران جمع‌بندی و نزدیک به زمانِ کنکور سراسری است. توصیه می‌کنیم زمانی سراغ این بخش بیایید که حتماً آزمون‌های ترکیبی و تفکیکی را پشت سر گذاشته باشید، هم حل و هم تحلیلِ پاسخ‌هایتان...

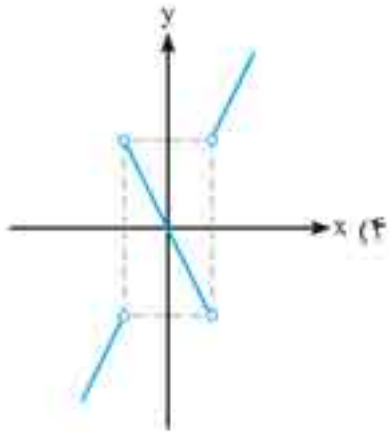
آزمون‌هایی کلی، شبیه‌ساز کنکور سراسری برای دوران طلایی جمع‌بندی و روزهای آخر، پیش‌بینی تست‌های کنکورتان...

۲۶. اگر $f(x)=|x^۲-۴|$ باشد، نمودار f' کدام است؟

۱) 

۲) 

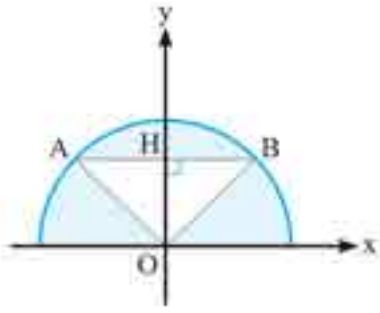
۳) 

۴) 

۲۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱۲x-۸x^۲}{x^۲+x+۳}$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) ۳ ۴) -۳

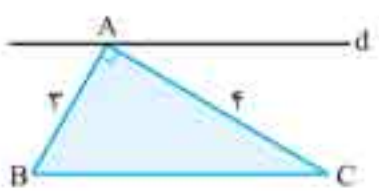
۲۸. مثلث OAB مطابق شکل در نیم‌دایره‌ی $y=\sqrt{۴-x^۲}$ محاط شده است. اگر مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده، کمترین مقدار ممکن باشد، طول ارتفاع OH کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۹. در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه و خط d با وتر آن موازی است. از دوران مثلث حول خط d، حجمی ایجاد می‌شود. اندازه‌ی حجم ناحیه‌ی توپر چقدر است؟



۱) $۱۹/۶\pi$ ۲) $۱۹/۲\pi$

۳) $۲۱/۲\pi$ ۴) $۱۸/۱\pi$

۳۰. مرکز دایره‌ای بر خط به معادله‌ی $y=۲x$ واقع است و این دایره نیمساز ربع اول را با طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. کدام‌یک از خط‌های زیر بر این دایره مماس است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $y=۱$ ۲) $y=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

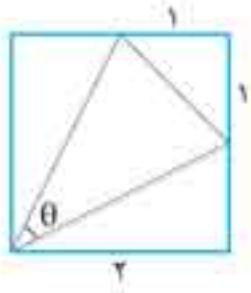
آزمون ۹۷ آزمون جامع مطابق با کنکور سراسری

زمان پاسخ‌گویی: ۵۵ دقیقه

۱. در یک دنباله‌ی هندسی حاصل‌ضرب جملات اول و پنجم برابر $\frac{۶۴}{۹}$ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۱۶ است. اگر جمله‌ی اول این دنباله منفی باشد، قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) -۶

۲. با توجه به مربع بودن شکل مقابل، حاصل $\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳. حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۶]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|\frac{۲x^۲+۱۱x+۵}{x+۵}-۲|\le ۳$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b]$ است. نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۵. اگر $|x-۲|=۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-۳|+|x-۴|$ و $g(x)=۲x^۲+x-۱۷$، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

۶. با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۵ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که مجموع ارقام آن مضرب ۴ باشند؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۷. دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۸. اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a برابر ۱۳ باشد، میانه‌ی آن‌ها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: ۲y-x=۳$ ، $AC: y-۲x=۵$ و $BC: ۲y+۳x=۶$ مفروض‌اند. خط گذرنده از ارتفاع AH در این مثلث محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۶}$

۱۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰$، دو ریشه‌ی حقیقی مثبت دارد؟

۱) $-۱<m<۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $۲<m<۸$ ۴) $m>۸$

۱۱. در ذوزنقه‌ی ABCD، قاعده‌ی بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده‌ی کوچک است و $AF=\frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۲. هرگاه $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۲-۳x+۲}$ و $g(x)=\frac{۴-x^۲}{|x+۱|}$ باشند. آن‌گاه دامنه‌ی تابع h با ضابطه‌ی $h(x)=(\frac{۲}{g}+\frac{۱}{f})$ چند نقطه از $\mathbb{R}$ را شامل نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳. حاصل عبارت $\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۳\alpha}+\frac{\sin \alpha}{\cos ۴\alpha}$، به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) صفر

۱۴. کدام‌یک از توابع زیر، با تابع $y=\log x^۲$ برابر است؟

۱) $y=۲\log x$ ۲) $y=۲\log|x|$ ۳) $y=۴\log\sqrt{x}$ ۴) $y=\log\sqrt{x^۲}$

۱۵. حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۶. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+۳} & x<۱\\ x^۲+ax & x\geq ۱\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته باشد، $f(-\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۷. قرینه‌ی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

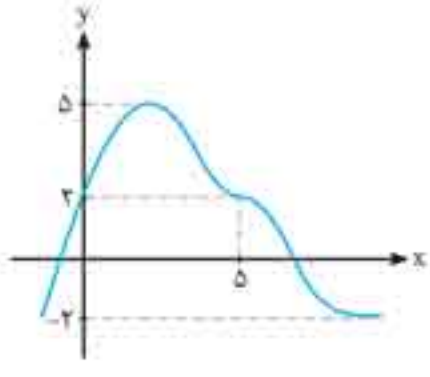
۱۸. اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادله‌ی $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $-۱,-۷$ ۲) $۱,-۷$ ۳) $-۱,۷$ ۴) $۱,۷$

۱۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x+\sin ۲x}{۱+\cos x}=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)}{۵}\pi$

۲۰. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ را نمایش می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to ۵^-}\frac{۲x}{f(x)-۲}$ کدام است؟



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) ۲-

۲۱. به ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y = 5x + a$، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

۲۲. مشتق چپ تابع $f(x) = \frac{x^3}{12}|-x| + |9 - x^2|$ در $x = 3$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -15 ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{51}{4}$

۲۳. هرگاه $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ و $g(x) = \sqrt{x + 1}$، آن‌گاه آهنگ لحظه‌ای تابع fog در $x = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۴. به ازای کدام مقدار b، نقطه‌ی $(-1, 6)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ است؟

۱) 4 ۲) -4 ۳) 2 ۴) -2

۲۵. می‌خواهیم یک مخزن استوانه‌ای با حجم 200π بسازیم. هزینه‌ی ساخت هر واحد سطح درپوش و کف مخزن ۸ واحد قیمت و هر واحد سطح دیوار مخزن ۱۰ واحد قیمت است. ارتفاع استوانه را چه مقدار انتخاب کنیم تا هزینه‌ی ساخت حداقل شود؟

۱) 8 ۲) 4 ۳) 10 ۴) 5

۲۶. اگر تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ فقط در بازه‌ی $(1, 3)$ نزولی باشد، آن‌گاه طول نقطه‌ی بحرانی تابع $g(x) = x^2 - (a + b)x + 1$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲۷. دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(-2, 1)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) 1.4 ۲) 1.5 ۳) 2.4 ۴) 2.5

۲۸. در یک مستطیل طلایی به عرض ۲، یک بیضی محاط شده است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 1}$ ۳) $\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5} - 1}$ ۴) $\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$

۲۹. در یک شهر ۱۰ درصد افراد فارغ‌التحصیل دانشگاه هستند که ۲ درصد آن‌ها بیکارند و درصد بیکاری بقیه افراد جامعه ۲۰ درصد است. اگر به‌طور تصادفی یک نفر از افراد بیکار این شهر انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد فارغ‌التحصیل دانشگاه است؟

۱) $\frac{1}{91}$ ۲) $\frac{2}{91}$ ۳) $\frac{3}{91}$ ۴) $\frac{4}{91}$

۳۰. نقطه‌ی M خارج از خط d و به فاصله‌ی ۶ واحد از آن قرار دارد. چند مثلث متساوی‌الساقین به مساحت ۳۶ واحد می‌توان رسم کرد که یک ضلع آن روی خط d و نقطه‌ی موردنظر رأس آن باشد؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) صفر

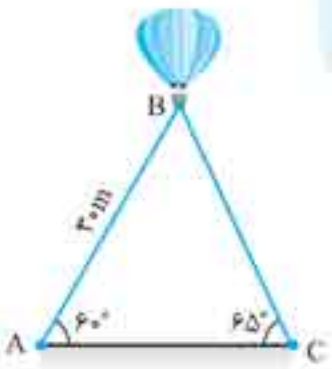
آزمون ۹۸ آزمون جامع مطابق با کنکور سراسری

زمان پاسخ‌گویی: ۵۵ دقیقه

۱. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آن‌ها عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

۱) 15 ۲) 16 ۳) 17 ۴) 18

۲. یک بالون تبلیغاتی مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب BC چند متر است؟ $(\sin 65^\circ \simeq 0/9)$



۱) $\frac{50}{3}$ ۲) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ ۳) 25 ۴) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

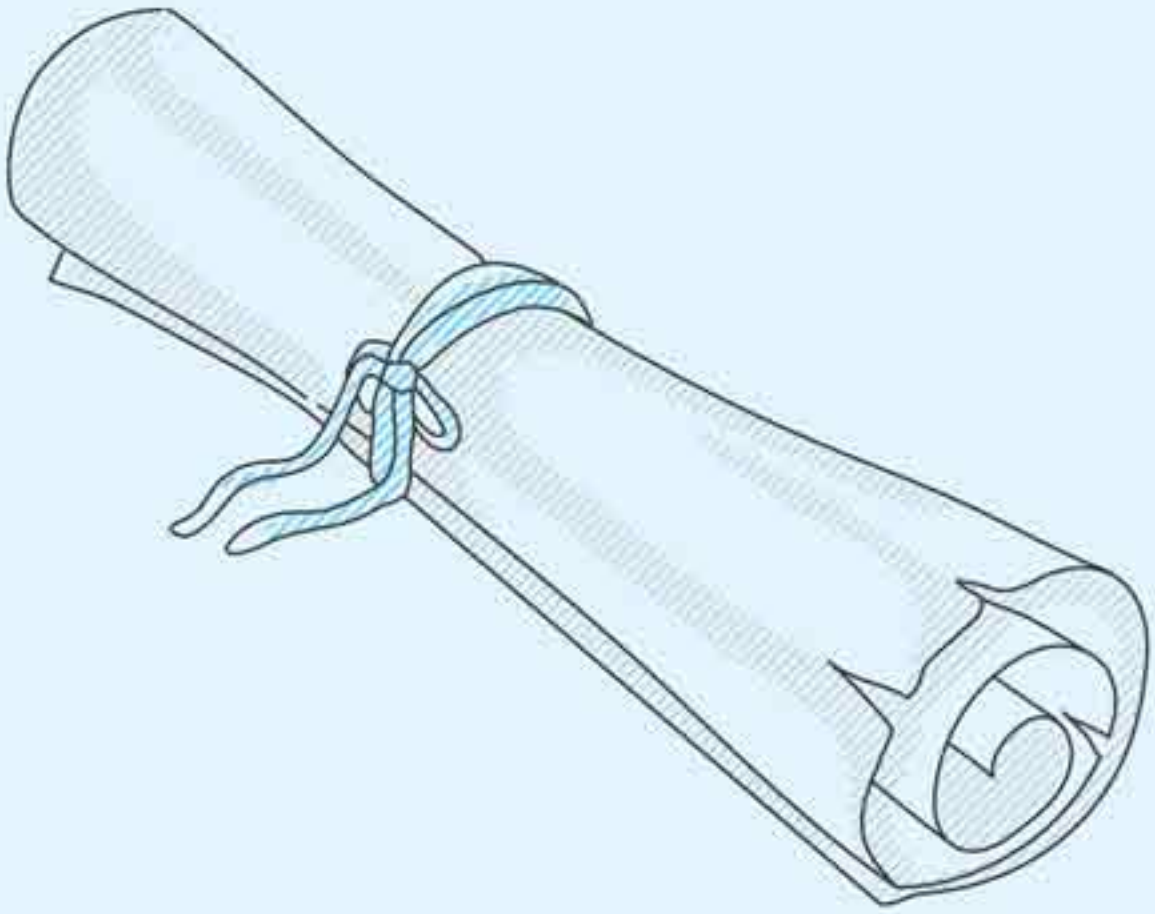
۳. اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

۱) $0/25$ ۲) $0/5$ ۳) $0/75$ ۴) 1

۴. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(2m - 1)x^2 + 6mx + m - 2 = 0$، دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $m > -1$ ۲) $m > \frac{2}{7}$ یا $m < -1$ ۳) $-1 < m < \frac{2}{7}$ ۴) $-1 < m < 3/5$

بخش ۴



پاسخ‌نامه تشریحی

در این بخش حلِ تشریحی و کاملِ تمام تست‌های موجود در بخش‌های مختلف کتاب را خواهید دید... سعی کرده‌ایم برای هر تست، ساده‌ترین، کوتاه‌ترین و خلاقانه‌ترین راهِ ممکن را بنویسیم و از آوردن جملات اضافی و راه‌های متعددِ طولانی، پرهیز کرده‌ایم! دیدنِ پاسخ‌های تست‌ها، فرایند تثبیتِ مطالب، آمادگی و تسلط شما را چند برابر می‌کند. چراکه می‌توانید دیدگاه‌های میان‌بُر و راه‌های خلاق هم یاد بگیرید.

پیشنهاد می‌کنیم پس از حل هر آزمون در زمانِ خودش، به سراغ پاسخ‌نامه بیایید و مطالبی که برایتان جدید جلوه کرد برای مرور نهایی، های‌لایت کنید؛ در آخر درصد خود را در هر آزمون بالای آن یادداشت کنید برای مقایسه‌ی پیشرفت خودتان...

حل کامل و تشریحی آزمون‌ها با راه‌های سریع و مطمئن، خلاقانه و استاندارد؛ تکمیل فرایند آمادگی‌تان...

۱۰. (گزینه ۲) میانگین ۲۰ داده‌ی جدید برابر است با:

$$\bar{x}_t = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2} = \frac{۱۰\times۵+۱۰\times۶}{۱۰+۱۰} = \frac{۱۱۰}{۲۰} = \frac{۱۱}{۲}$$ ①

اگر داده‌های گروه اول را با $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ و داده‌های گروه دوم را با $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\sigma_a^2 = \frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2}{10} - \bar{a}^2 \Rightarrow ۱ = \frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2}{10} - ۲۵$$

$$\Rightarrow a_1^2+\cdots+a_{10}^2 = ۲۶۰$$ ②

$$\sigma_b^2 = \frac{b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{10} - \bar{b}^2 \Rightarrow ۴ = \frac{b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{10} - ۳۶$$

$$\Rightarrow b_1^2+\cdots+b_{10}^2 = ۴۰۰$$ ③

اما واریانس ۲۰ داده برابر است با:

$$\sigma_t^2 = \frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2+b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{20} - \bar{x}_t^2$$

$$\xrightarrow{②,③,①} \sigma_t^2 = \frac{۲۶۰+۴۰۰}{20} - \frac{۱۲۱}{۴} = ۳۳ - \frac{۱۲۱}{۴} = \frac{۱۱}{۴} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

$$\Rightarrow cv_t = \frac{\sigma_t}{\bar{x}_t} = \frac{\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}}{\frac{۱۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} = \frac{۱}{\sqrt{۱۱}}$$

آزمون شماره ۶۱

۱. (گزینه ۱) ابتدا زوج مرتب‌ها را به‌گونه‌ای می‌نویسیم که مؤلفه‌های اول به‌صورت صعودی مرتب شوند: $f = \{(-۱, m^2), (۰, ۴), (۳, m^2-۳m), (۵, ۱۰)\}$

حال شرط اکیداً صعودی را اعمال می‌کنیم، یعنی:

$$-۱<۰<۳<۵ \Rightarrow f(-۱)<f(۰)<f(۳)<f(۵)$$

$$\Rightarrow m^2<۴<m^2-۳m<۱۰ \Rightarrow \begin{cases} m^2<۴ \\ m^2-۳m>۴ \\ m^2-۳m<۱۰ \end{cases}$$

از حل سه نامعادله‌ی فوق و اشتراک جواب‌ها، جواب نهایی به‌دست می‌آید:

$m^2<۴ \Rightarrow -۲<m<۲$ ①

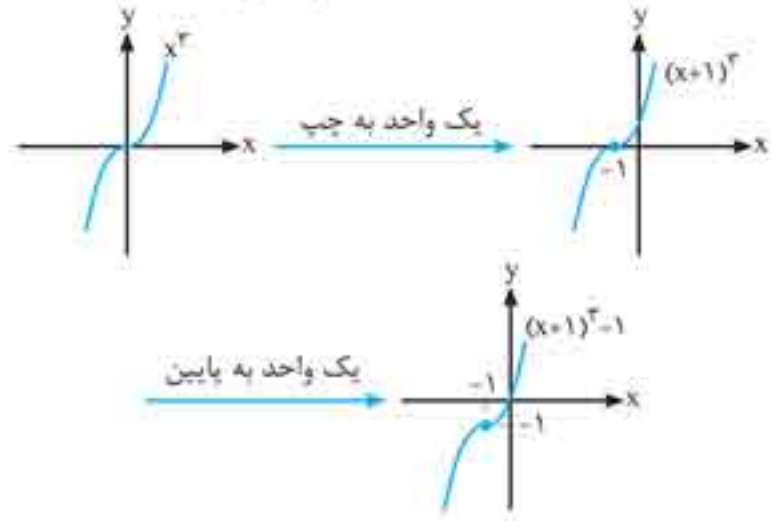
$m^2-۳m-۴>۰ \Rightarrow (m-۴)(m+۱)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-۱ \text{ یا } m>۴$ ②

$m^2-۳m-۱۰<۰ \Rightarrow (m-۵)(m+۲)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲<m<۵$ ③

$\xrightarrow{①\cap②\cap③} -۲<m<-۱$

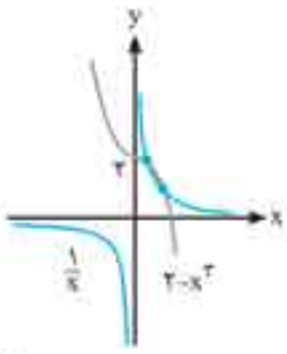
۲. (گزینه ۱) با توجه به اتحاد $(x+۱)^3$ داریم:

$$y = x^3+۳x^2+۳x = (x+۱)^3-۱ \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$



پس نمودار تابع از نواحی دوم و چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

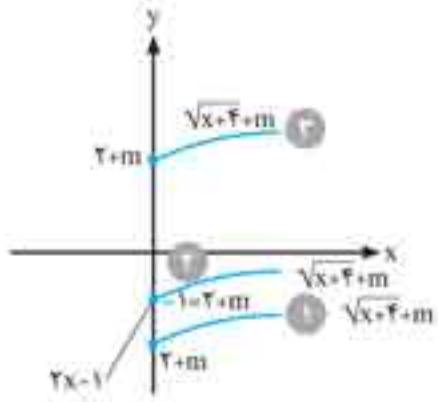
۳. (گزینه ۳) کافی است نمودار دو تابع $\frac{۱}{x}$ و $۲-x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:



همان‌طور که از شکل پیداست، این دو تابع در دو نقطه در سمت راست مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی معادله‌ی $\frac{۱}{x} = ۲-x^3$ دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۴. (گزینه ۲) کافی است نمودار تابع f را با فرض مقادیر مختلف برای m رسم کنیم. ابتدا بدون در نظر گرفتن m، نمودار ضابطه اول را رسم می‌کنیم:

حالا باید نمودار را در راستای y، به اندازه‌ی m واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، بنابراین برای رسم $\sqrt{x+۴}+m$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل در حالت‌های ② و ③، تابع صعودی و در حالت ① تابع غیریکنواست؛ چون ابتدا صعود کرده، سپس نزول و دوباره صعود می‌کند. بنابراین:



$$۲+m \geq -۱ \Rightarrow m \geq -۳$$

۵. (گزینه ۱) در تابع نزولی می‌دانیم که: $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$

$$f(x^2-x)-f(۳x+۵) \geq ۰ \Rightarrow f(\underbrace{x^2-x}_{x_1}) \geq f(\underbrace{۳x+۵}_{x_2})$$

$$\xrightarrow{f \text{ نزولی است}} x^2-x \leq ۳x+۵ \Rightarrow x^2-۴x-۵ \leq ۰$$

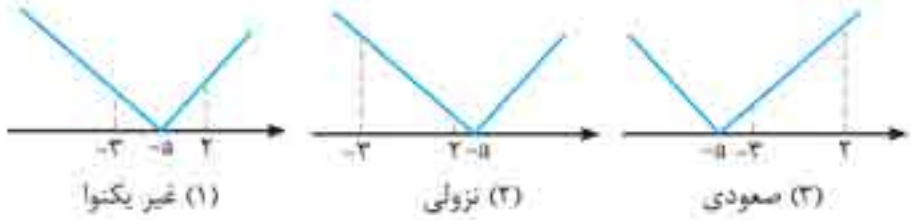
$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \leq x \leq ۵$$

۶. (گزینه ۳) $f(x) = ax^2(x^{n+1}-۳)+۴ = ax^{n+۳}-۳ax^2+۴$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ درجه‌ی تابع} = ۶ \Rightarrow n+۳=۶ \Rightarrow n=۳ \\ f(-۱)=a(-۱)^6-۳a(-۱)^2+۴=۲ \Rightarrow a=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^6-۳x^2+۴$$

$$\Rightarrow f(۲) = ۶۴-۳\times۴+۴ = ۵۶$$

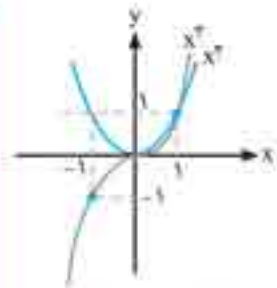
۷. (گزینه ۳) ریشه‌ی داخل قدرمطلق $x=-a$ است و عدد ثابت ۱- که به تابع اضافه شده، تأثیری در یکنوا بودن تابع ندارد، بنابراین یکنوا بودن تابع $|x+a|$ را در بازه‌ی $[-۳, ۲]$ بررسی می‌کنیم. برای این کار سه شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



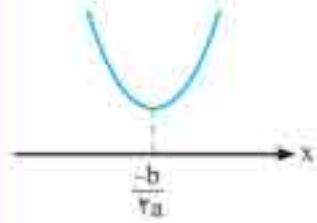
با توجه به شکل‌های رسم‌شده، نتیجه می‌گیریم که $-a$ نباید بین ۲ و ۳- باشد، پس:

$$-۳<-a<۲ \Rightarrow -۲<a<۳ \Rightarrow \text{جواب} = \mathbb{R}-(-۲, ۳)$$

۸. **گزینه ۱** فقط مورد (پ) درست است. درباره‌ی مورد (الف) نمودار دو تابع در $x=0$ بر هم منطبق هستند، پس در کل بازه‌ی $(-\infty,1)$ x^2 بالاتر از x^3 نیست. برای دیگر موارد، شکل زیر را ببینید:



۹. **گزینه ۳**

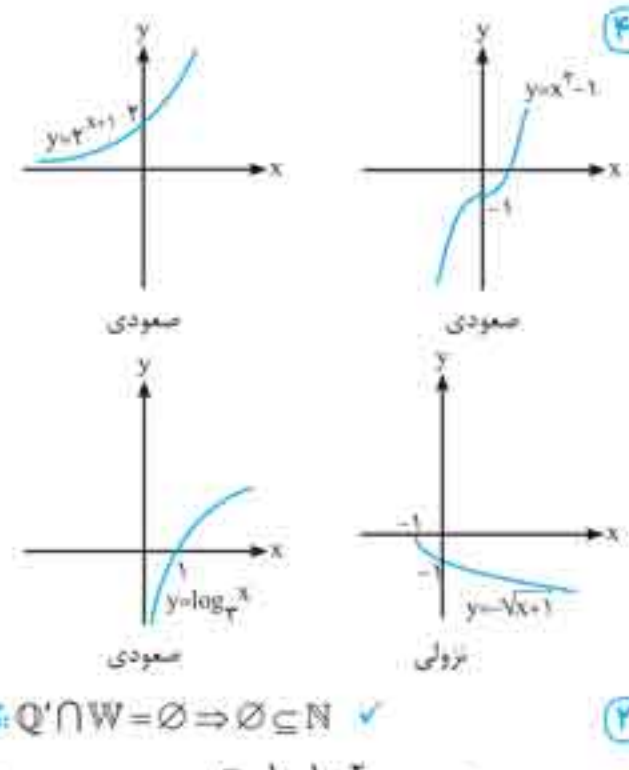


$$\xrightarrow{f\text{ نزولی است}} x\in(-\infty,-\frac{b}{2a}]$$

$$\xrightarrow{b=-4,a=2} x\in(-\infty,1]$$

تابع f در بازه‌ی $(-\infty,1]$ و هر زیرمجموعه از آن، همواره نزولی است، پس پاسخ درست، گزینه‌ی «۳» است.

۱۰. **گزینه ۴**



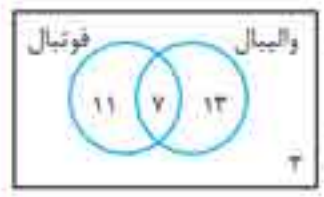
۱۱. **گزینه ۲** گزینه‌ی «۱»: $Q'\cap W=\varnothing\Rightarrow\varnothing\subset N$ ✓

گزینه‌ی «۲»: $R-Z=\{\ldots,\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\ldots\}\neq Q$

گزینه‌ی «۳»: $W\cap Z=\{0,1,2,\ldots\}=N\cup\{0\}$ ✓

گزینه‌ی «۴»: $Q-Q'=Q\Rightarrow Q\cap R=Q$ ✓

۱۲. **گزینه ۳** با توجه به فرضیات تست، نمودار ون روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:



با توجه به شکل ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال نیستند. دقت کنید: منظور از گزینه‌ی «۴»، افرادی است که یا عضو هیچ تیمی نیستند یا عضو یک تیم هستند.

۱۳. **گزینه ۲** طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases} t_8=t_4+6\Rightarrow t_8-t_4=6 \\ t_9^2=t_3^2+171\Rightarrow t_9^2-t_3^2=171\Rightarrow (t_9-t_3)(t_9+t_3)=171 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d}\begin{cases} (t_1+7d)-(t_1+3d)=6\Rightarrow 4d=6\Rightarrow d=\frac{3}{2} & ① \\ (t_1+8d-t_1-2d)(t_1+8d+t_1+2d)=171 & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②}(6d)(2t_1+10d)=171\xrightarrow{①}(6\times\frac{3}{2})(2t_1+10\times\frac{3}{2})=171$$

$$\Rightarrow 9(2t_1+15)=171\xrightarrow{\div 9}2t_1+15=19\Rightarrow 2t_1=4\Rightarrow t_1=2$$

۱۴. **گزینه ۲**

$$\frac{t_6}{t_3}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2t_6=-t_3\Rightarrow 2t_6+t_3=0\xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d}$$

$$2(t_1+5d)+(t_1+2d)=0\Rightarrow 3t_1+12d=0\xrightarrow{\div 3}\underbrace{t_1+4d}_{t_5}=0\Rightarrow t_5=0$$

۱۵. **گزینه ۱** طبق فرضیات تست داریم:

$$\begin{cases} t_9=9t_5 & ① \\ t_9-t_5=144 & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow[①]{t_n=t_1r^{n-1}}t_1r^8=9t_1r^4\xrightarrow{\div t_1r^4}r^4=9 \quad ③$$

$$\xrightarrow[①]{②}t_1r^8-t_1r^4=144\Rightarrow t_1r^4(r^4-1)=144$$

$$\xrightarrow{③}t_1\times 9(9-1)=144\Rightarrow t_1\times 9\times 8=144\Rightarrow t_1=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t_3=t_1r^2 \\ r^4=9\Rightarrow r^2=3 \end{cases}\Rightarrow t_3=2\times 3=6$$

۱۶. **گزینه ۱** $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی دنباله‌ی هندسی}}\begin{cases} (3\sqrt{3})^2=3^a\times 9\Rightarrow 27=3^a\times 9\Rightarrow a=1 \\ 9^2=3\sqrt{3}\times b\Rightarrow b=\frac{81}{3\sqrt{3}}=\frac{27}{\sqrt{3}} \quad (*) \end{cases}$$

اگر واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b را x بنامیم، داریم:

$$x^2=b\times a\sqrt{3}\xrightarrow{(*)}x^2=\frac{27}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}\Rightarrow x^2=27\Rightarrow x=\pm 3\sqrt{3}$$

۱۷. **گزینه ۱**

شماره‌ی شکل	n	۱	۲	۳
تعداد مربع‌های رنگی	a_n	۴	۸	۱۲

مشاهده می‌کنیم که مربع‌های رنگی، ۴ واحد ۴ واحد در حال افزایش است، یعنی یک الگوی خطی. (برای این‌که خیالتون راحت بشه شکل چهارم رو هم بکشید.) اما جمله‌ی عمومی دنباله‌ی a_n:

$$\xrightarrow{a_n\text{ خطی است}}a_n=bn+c\Rightarrow\begin{cases} a_1=4\Rightarrow b+c=4 \\ a_2=8\Rightarrow 2b+c=8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=4 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n=4n\Rightarrow a_{250}=4\times 250=1000$$

۱۸. **گزینه ۳**

$$t_2, t_7, t_9\xrightarrow{\text{شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی}}t_7^2=t_2\times t_9\xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d}$$

$$(t_1+6d)^2=(t_1+2d)(t_1+8d)\Rightarrow t_1^2+12t_1d+36d^2=t_1^2+10t_1d+16d^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}}20d^2+2t_1d=0\Rightarrow 2d(t_1+10d)=0\xrightarrow{d\neq 0}\underbrace{t_1+10d}_{t_{11}}=0$$

$$\Rightarrow t_{11}=0$$

۱۹. **گزینه ۱** هر دو دایره‌ی توخالی و توپر از الگوی مثلثی پیروی می‌کنند.

الگوی دایره‌های توخالی:

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow a_{12}=\frac{12\times 13}{2}=78$$

الگوی دایره‌های توپر:

$$b_n=\frac{(n-1)n}{2}\Rightarrow b_{12}=\frac{11\times 12}{2}=66$$

$$\Rightarrow a_{12}-b_{12}=78-66=12$$

۲۰. **گزینه ۲** می‌دانیم که دنباله‌های خطی، همانند توابع خطی از درجه‌ی اول هستند، بنابراین:

$$m-2=0\Rightarrow m=2\Rightarrow a_n=2n+7\Rightarrow a_2=2\times 2+7=13$$

$$b_n=a_2n-14m\xrightarrow[m=2]{a_2=13}b_n=13n-28<0\Rightarrow 13n<28$$

$$\Rightarrow n<\frac{28}{13}\simeq 2/1\xrightarrow{n\in N}n=1,2$$

پس دو جمله‌ی منفی در این دنباله وجود دارد.

آزمون شماره ۶۲

۱. (گزینه ۲)

$(۲,۴),(۲,a^۲-۳a)\in f \Rightarrow ۴=a^۲-۳a \Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰$

$\Rightarrow (a-۴)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a=-۱ \end{cases}$

$(a-۱,۵)\in f \xrightarrow{a=۴} (۳,۵)\in f \xrightarrow{(۳,b)\in f} b=۵$

$(a+۲,۳)\in f \xrightarrow{a=-۱} (۱,۳)\in f \xrightarrow{(۱,-۱)\in f}$ f تابع نمی‌شود

یعنی $a=-۱$، قابل قبول نیست و دوتایی مرتب (a,b) برابر است با: $(۴,۵)$

۲. (گزینه ۲)

باید نامعادله‌ی $y<۰$ را حل کنیم:

$(m-۲)x^۲-۴x+m+۱<۰ \xrightarrow{\text{شرط‌ها}} \begin{cases} a<۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$

$a=m-۲<۰ \Rightarrow m<۲$ ①

$\Delta=(-۴)^۲-۴(m-۲)(m+۱)<۰ \xrightarrow{\div(-۴)} (m-۲)(m+۱)-۴>۰$

$\Rightarrow m^۲-m-۲-۴>۰$

$\Rightarrow m^۲-m-۶>۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۲)>۰$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m<-۲ \\ \text{یا} \\ m>۳ \end{cases}$ ②

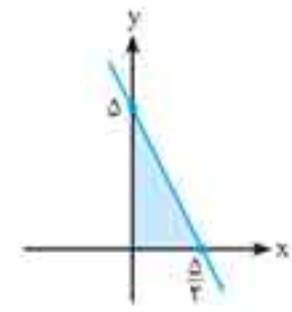
$\xrightarrow{①\cap②} m<-۲$

۳. (گزینه ۴) f تابعی خطی است، یعنی: $f(x)=ax+b$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{cases} f(۲)+f(-۱)=۸ \Rightarrow ۲a+b-a+b=۸ \Rightarrow a+۲b=۸ \\ f(۱)=۳ \Rightarrow a+b=۳ \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=-۲ \\ b=۵ \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=-۲x+۵ \xrightarrow{\text{رسم تابع}}$



$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times \frac{۵}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$

۴. (گزینه ۱) f تابعی همانی است، یعنی $f(x)=x$ و g تابعی ثابت است، یعنی $g(x)=k$.

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{۳f^۲(۱)-۴g(۳)}{۲f(۲)+۱}=۳ \Rightarrow \frac{۳\times ۱-۴\times k}{۲\times ۲+۱}=۳ \Rightarrow ۳-۴k=۱۵$

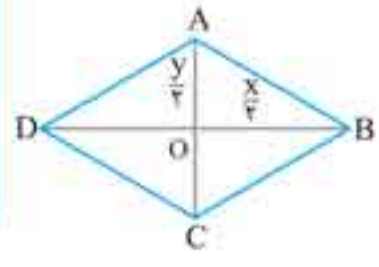
$\Rightarrow -۴k=۱۲ \Rightarrow k=-۳ \Rightarrow g(۰)=k=-۳$

۵. (گزینه ۳) اگر قطرهای لوزی را با x و y نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$\begin{cases} x+y=۶ \Rightarrow y=۶-x \\ S=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۲۷}{۸} \Rightarrow xy=\frac{۲۷}{۴} \end{cases} \Rightarrow x(۶-x)=\frac{۲۷}{۴} \Rightarrow x^۲-۶x+\frac{۲۷}{۴}=۰$

$\xrightarrow{\Delta=۳۶-۴\times\frac{۲۷}{۴}=۹} x=\frac{۶\pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۹}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۹}{۲} \end{cases}$

حال شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (\frac{x}{۲})^۲+(\frac{y}{۲})^۲=AB^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}=AB^۲$

$\Rightarrow AB^۲=\frac{\frac{۸۱}{۴}}{۴}+\frac{\frac{۹}{۴}}{۴}=\frac{۹۰}{۱۶} \Rightarrow AB=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow$ محیط لوزی $=۴AB=۳\sqrt{۱۰}$

۶. (گزینه ۴)

$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} (-۱,۳)\in f \Rightarrow -a+b=۳ \\ (۰,۵)\in f \Rightarrow ۰+b=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۵ \end{cases} \Rightarrow f(x)=۲x+۵$

$\xrightarrow{(۱,a)\in f} a=۲(۱)+۵ \Rightarrow a=۷$ ①

$g \Rightarrow g(x)=x$ همانی است $\Rightarrow \begin{cases} b=-۱ \\ c=۴ \end{cases}$ ②

$y=\sqrt{ax+bc} \xrightarrow{①\text{ و }②} y=\sqrt{۷x-۴} \Rightarrow ۷x-۴\geq ۰$

$\Rightarrow x\geq \frac{۴}{۷} \Rightarrow D_f=[\frac{۴}{۷},+\infty)$

۷. (گزینه ۳)

$۳x^۲-x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۳} \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$

$\alpha\beta^۲+\alpha^۲\beta=\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=P(S^۲-۲P)=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۹}-۲(-\frac{۱}{۳}))$

$=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۳})=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۷}{۹})=\frac{-۷}{۲۷}$

۸. (گزینه ۳)

$\frac{۶}{x^۳-۸}=\frac{۵}{x^۲+۲x+۴}+\frac{۱}{x-۲}$

$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۶}{x^۳-۸}=\frac{۵(x-۲)+x^۲+۲x+۴}{\underbrace{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}$

$\frac{۶}{x^۳-۸}=\frac{x^۲+۷x-۶}{x^۳-۸} \Rightarrow x^۲+۷x-۱۲=۰ \Rightarrow S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۷$

۹. (گزینه ۱)

$x^۲-۲x+۱+\sqrt{x-۱}=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+\sqrt{x-۱}=۰$

$\xrightarrow{\sqrt{x-۱}=t} t^۴+t=۰ \Rightarrow t(t^۳+۱)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} t=۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۰ \Rightarrow x=۱ \\ t=-۱ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=-۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

۱۰. (گزینه ۳)

$(m-۳)x^۴-۴x^۲+m=۰ \quad (*) \xrightarrow{x^۲=t} (m-۳)t^۲-۴t+m=۰ \quad (**)$

$x^۲=t \xrightarrow{t\geq ۰} x=\pm\sqrt{t}$

یعنی به ازای هر t مثبت، دو مقدار برای x به‌دست می‌آید. پس برای این‌که معادله‌ی $(*)$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

حالت اول معادله‌ی $(**)$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد. بنابراین باید $\frac{c}{a}$ این معادله منفی باشد:

$\xrightarrow{(**)} \frac{c}{a}=\frac{m}{m-۳}<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<m<۳ \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=۱,۲$

حالت دوم معادله‌ی $(**)$ ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین داریم:

$\begin{cases} \Delta=۰ \\ x=-\frac{b}{۲a}>۰ \end{cases}$

$$\Delta=16-4(m-3)(m)=0 \xrightarrow{\times(-4)} m^2-3m-4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=4 \end{cases} \quad (1)$$

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2(m-3)}>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)\text{ و }(1)} m=4$$

پس به ازای سه مقدار ۱-، ۲ و ۴، معادله‌ی (*) دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

۱۱. گزینه ۳ باید نامعادله‌ی $f(x)\leq 3$ را حل کنیم، پس داریم:

$$(m-4)x^2-6x+m+7\leq 3 \Rightarrow (m-4)x^2-6x+m+4\leq 0$$

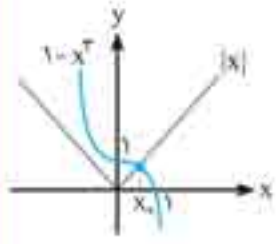
$$\xrightarrow{\text{شرط‌ها}} \begin{cases} a<0 \Rightarrow a=m-4<0 \Rightarrow m<4 \quad (1) \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta=(-6)^2-4(m-4)(m+4)\leq 0 \xrightarrow{\times(-4)} (m^2-16)-9\geq 0$$

$$\Rightarrow m^2\geq 25 \Rightarrow m\leq -5 \text{ یا } m\geq 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} m\leq -5$$

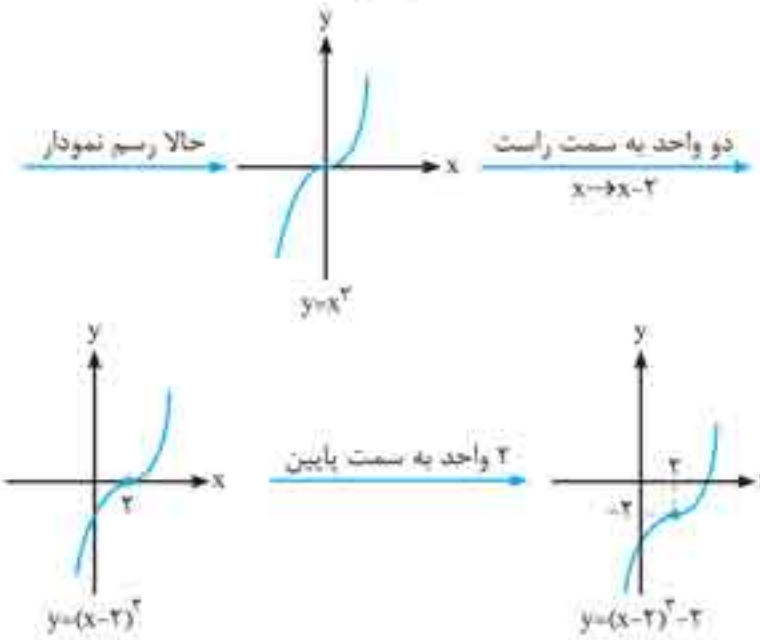
۱۲. گزینه ۱ کافی است نمودار تابع $y_1=|x|$ و $y_2=1-x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:



همان‌طور که در شکل مشخص است، این دو تابع در یک نقطه و در سمت راست مبدأ یکدیگر را قطع کرده‌اند، یعنی معادله یک ریشه‌ی مثبت دارد.

۱۳. گزینه ۱ سعی می‌کنیم تابع داده‌شده را به‌صورت مکعب کامل بنویسیم و سپس به کمک انتقال نمودار آن را رسم کنیم، پس داریم:

$$y=x^3-6x^2+12x-10=\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{(x-2)^3}-2 \Rightarrow y=(x-2)^3-2$$



پس نمودار تابع داده‌شده، فقط از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۱۴. گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{دامنه}} x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

$$g(x)=\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-3\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{\underbrace{x\neq -3}_{(1)} \mid \underbrace{\left|\frac{2x-4}{x+3}\right|\geq 2}_{(2)}\}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left|\frac{2x-4}{x+3}\right|\geq 2 \xrightarrow{\div 2} \left|\frac{x-2}{x+3}\right|\geq 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|x+3|}\geq 1$$

$$\Rightarrow |x-2|\geq |x+3| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2-4x+4\geq x^2+6x+9$$

$$\Rightarrow -10x\geq 5 \Rightarrow x\leq -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} D_{fog}=(-\infty,-\frac{1}{2}]-\{-3\}$$

۱۵. گزینه ۲

$$\begin{cases} f=\{(-2,5),(3,3),(-1,4),(2,6)\} \\ g=\{(-2,3),(2,-1),(4,-2)\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f+g=\{(-2,8),(2,5)\} \\ fog=\{(-2,3),(2,4),(4,5)\} \end{cases}$$

می‌دانیم که دامنه‌ی تابع $\frac{f+g}{fog}$ اشتراک دامنه‌ی توابع $f+g$ و fog است به شرطی که $fog\neq 0$ باشد، پس:

$$\frac{f+g}{fog}=\{(-2,\frac{8}{3}),(2,\frac{5}{4})\}$$

۱۶. گزینه ۱

$$\begin{cases} f(x)=x^2-x+5 \\ g(x)=\frac{2x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow gof(x)=g(f(x))=1 \xrightarrow{f(x)=t \ (*)} g(t)=1$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{t^2+1}=1 \Rightarrow t^2+1=2t \Rightarrow t^2-2t+1=0 \Rightarrow (t-1)^2=0$$

$$\Rightarrow t=1 \xrightarrow{(*)} f(x)=1 \Rightarrow x^2-x+5=1 \Rightarrow x^2-x+4=0$$

$$\Rightarrow \Delta=1-16<0 \Rightarrow \text{معادله فاقد ریشه است}$$

۱۷. گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x}+1 \Rightarrow gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt[3]{x}+1) \quad (1) \\ gof(x)=\frac{2x}{x^2+1} \quad (2) \text{ (فرض تست)} \end{cases}$$

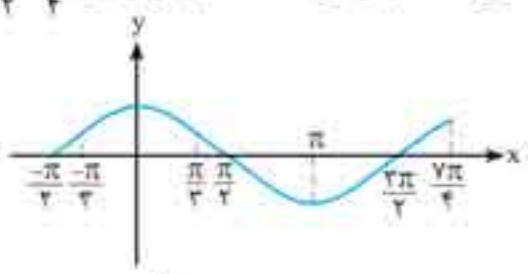
$$\xrightarrow{(2)\text{ و }(1)} g(\sqrt[3]{x}+1)=\frac{2x}{x^2+1} \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{x}+1=t \Rightarrow \sqrt[3]{x}=t-1 \Rightarrow x=(t-1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{در }(3)} g(t)=\frac{2(t-1)^3}{((t-1)^3)^2+1}=\frac{2(t-1)^3}{(t-1)^6+1}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} g(x+1)=\frac{2(x+1-1)^3}{(x+1-1)^6+1} \Rightarrow g(x+1)=\frac{2x^3}{x^6+1}$$

۱۸. گزینه ۳ کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$ رسم کنیم:



با توجه به گزینه‌های داده‌شده، تابع در بازه‌ی $(\pi,\frac{7\pi}{4})$ صعودی است.

۱۹. گزینه ۲

$$D_{f(x)}=[0,32] \Rightarrow 0\leq x\leq 32 \quad (*)$$

$$D_{f(2x^2)}=? \xrightarrow{(*)} 0\leq 2x^2\leq 32 \Rightarrow 0\leq x^2\leq 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2\geq 0 \quad \text{همواره درست} \\ x^2\leq 16 \Rightarrow -4\leq x\leq 4 \end{cases}$$

۲۰. گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌ی توابع f و g را به‌دست می‌آوریم. g تابعی خطی است که از دو نقطه‌ی $(0,3)$ و $(4,0)$ گذشته است:

$$g(x)=mx+h \Rightarrow \begin{cases} g(0)=0+h=3 \Rightarrow h=3 \\ g(4)=4m+h=0 \Rightarrow 4m+3=0 \Rightarrow m=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{۳}{۴}x+۳\Rightarrow g(۶)=-\frac{۳}{۴}\times ۶+۳=\frac{-۳}{۲} \quad (*)$$

نمودار تابع f یک سهمی است که محور x ها را در دو نقطه به‌طول‌های ۱ و ۴ قطع کرده است. پس:

$$f(x)=a(x-۱)(x-۴)\xrightarrow{(۰,۳)\in f} a(۰-۱)(۰-۴)=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۴}(x-۱)(x-۴)$$

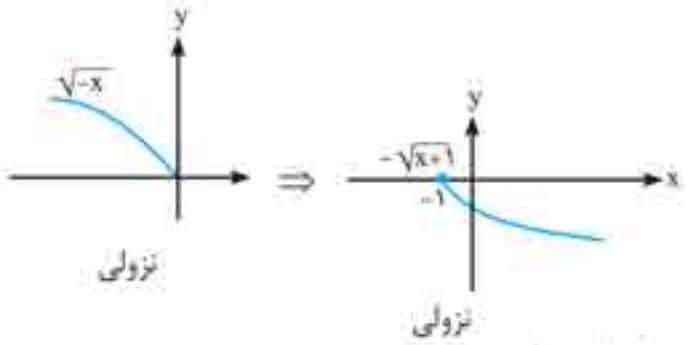
$$\Rightarrow fog(۶)=f(g(۶))\overset{(*)}{=\!=}f(-\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۴}(-\frac{۳}{۲}-۱)(-\frac{۳}{۲}-۴)$$

$$=\frac{۳}{۴}(-\frac{۵}{۲})(-\frac{۱۱}{۲})=\frac{۱۶۵}{۱۶}$$

۲۱. **گزینه ۴** همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

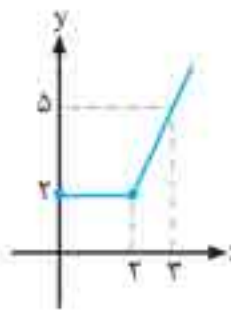
گزینه‌ی «۱»: $۰<x<۱\Rightarrow x^۲>x^۳$ ✓

گزینه‌ی «۲»:



جمع دو تابع نزولی، نزولی است. ✓

گزینه‌ی «۳»:



تابع در $[۲,۳]$، ثابت است. ⇒

گزینه‌ی «۴»: ترکیب دو تابع نزولی، تابعی صعودی است. ×

۲۲. **گزینه ۴**

می‌دانیم در توابع درجه‌ی دو با ضریب $x^۲$ منفی، تابع در بازه‌ی $(-\infty, x_S]$ اکیداً صعودی است، پس در این تست داریم:

$$y=-۲x^۲+۸x-۳\Rightarrow x_S=-\frac{B}{۲A}=-\frac{۸}{۲(-۲)}=۲$$

یعنی تابع در بازه‌ی $(-\infty, ۲]$ اکیداً صعودی است و در نتیجه بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

۲۳. **گزینه ۳** در توابع اکیداً نزولی داریم:

$$-۱<۱<۳<۱۰\Rightarrow f(-۱)>f(۱)>f(۳)>f(۱۰)$$

$$\Rightarrow m^۲>m+۶>۸>m^۲-۳m-۲$$

حال باید سه نامعادله‌ی زیر را حل کرده و سپس بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

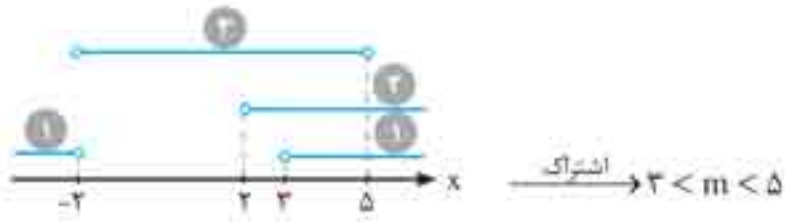
$$m^۲>m+۶\Rightarrow m^۲-m-۶>۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)(m+۲)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-۲ \text{ یا } m>۳ \quad (۱)$$

$$m+۶>۸\Rightarrow m>۲ \quad (۲)$$

$$۸>m^۲-۳m-۲\Rightarrow m^۲-۳m-۱۰<۰$$

$$\Rightarrow (m-۵)(m+۲)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲<m<۵ \quad (۳)$$



اشتراک ⟶ $۳<m<۵$

۲۴. **گزینه ۲**

$$f(x^۲-۲x)-f(۳x-x^۲-۲)\geq ۰\Rightarrow f(x^۲-۲x)\geq f(۳x-x^۲-۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی است}} x^۲-۲\geq ۳x-x^۲-۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x\geq ۰\Rightarrow$$

$$x(۲x-۳)\geq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\leq ۰ \text{ یا } x\geq \frac{۳}{۲}$$

یعنی دامنه‌ی تابع داده‌شده، فقط شامل عدد صحیح ۱ نیست.

۲۵. **گزینه ۱**

اگر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۷=۰$ را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۲} \\ P=\alpha\beta=-\frac{۷}{۲} \end{cases} \quad (*)$$

حال اگر معادله‌ی خواسته‌شده را با $x^۲-S'x+P'=۰$ نمایش دهیم، طبق فرض تست داریم:

$$S'=X_۱+X_۲=(۲\alpha-۱)+(۲\beta-۱)=۲(\alpha+\beta)-۲\overset{(*)}{=\!=}۲(\frac{۳}{۲})-۲=۱$$

$$P'=X_۱X_۲=(۲\alpha-۱)(۲\beta-۱)$$

$$=۴\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۱\overset{(*)}{=\!=}۴(-\frac{۷}{۲})-۲(\frac{۳}{۲})+۱=-۱۶$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی $x^۲-S'x+P'=۰$ داریم: $x^۲-x-۱۶=۰$

آزمون شماره ۶۳

۱. **گزینه ۴** f تابعی خطی است، پس:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow \begin{cases} f(-۲x)=-۲ax+b \\ f(-۲)=-۲a+b \quad (۱) \\ f(-۱)=-a+b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} f(x)-f(-۲x)=۶x\xrightarrow{(۱)}(ax+b)-(-۲ax+b)=۳ax=۶x$$

$$\Rightarrow a=۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} f(-۲)=۳f(-۱)+۴\xrightarrow{(۱)}-۲a+b=۳(-a+b)+۴$$

$$\xrightarrow{(۲)}-۴+b=-۶+۳b+۴\Rightarrow ۲b=-۲\Rightarrow b=-۱ \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۲)\text{ و }(۳)} f(x)=۲x-۱\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=۲f(x)-۱$$

$$=۲(۲x-۱)-۱=۴x-۳\xrightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با محور yها}} y=-۳$$

۲. **گزینه ۳**

$$f=\{(۱-m,n),(۲,m),(-۱,m^۲-m),(۴,۲)\}$$

$$\xrightarrow{\text{ثابت است}}\begin{cases} n=m=۲ \ (*) \\ m=m^۲-m \end{cases}\Rightarrow m^۲-m=m\Rightarrow m^۲-۲m=۰\Rightarrow m=۰,۲$$

با توجه به (*) $m=۰$ غیرقابل‌قبول است، پس به ازای $m=۲$ داریم:

$$f=\{(-۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۴,۲)\}\Rightarrow f \text{ ثابت است}$$

$$\xrightarrow{n=۲} g(x)=\sqrt{۸+۲x-x^۲}\xrightarrow{\text{دامنه}} ۸+۲x-x^۲\geq ۰$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-۲x-۸\leq ۰\Rightarrow (x-۴)(x+۲)\leq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\leq m\leq ۴$$

$$\Rightarrow D_g=[-۲,۴], D_f=\{-۱,۲,۴\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\{-۱,۲,۴\}-\{-۲,۴\}=\{-۱,۲\}$$

۳. **گزینه ۴**

$$\begin{cases} f=\{(-۲,۴),(۱,۵),(۰,۷),(۴,۱۰)\} \\ g=\{(۱,-۲),(۳,۴),(۷,۴),(۲,۰)\} \end{cases}\Rightarrow fog=\{(۱,۴),(۳,۱۰),(۷,۱۰),(۲,۷)\}$$

۳۰. گزینه ۱

$$y=۲x \xrightarrow[\text{در خط صدق بده}]{\text{مرکز: } O(\alpha,\beta)} \beta=۲\alpha \Rightarrow O(\alpha,۲\alpha)$$

چون دایره، نیمساز ربع اول ($y=x$) را در نقطه‌هایی با طول ۱ و ۲ قطع می‌کند، پس نقطه‌های (۱،۱) و (۲،۲) روی دایره هستند. فاصله‌ی هر نقطه روی دایره تا مرکز، برابر شعاع است، بنابراین:

$$A(۱,۱), B(۲,۲) \xrightarrow{O(\alpha,۲\alpha)} OA=OB=r$$

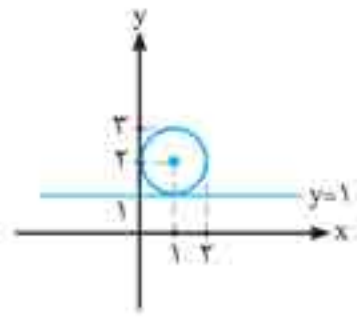
$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۲)^۲}$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد رو باز کن}]{\text{توان ۲ برسون}} \alpha^۲-۲\alpha+۱+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱$$

$$=\alpha^۲-۴\alpha+۴+۴\alpha^۲-۸\alpha+۴$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} ۶\alpha-۶=۰ \Rightarrow \alpha=۱ \Rightarrow \beta=۲$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱)^۲} \xrightarrow{\alpha=۱} r=۱$$



همان‌طور که می‌بینید، فقط $y=۱$ در بین گزینه‌ها بر دایره مماس است.

آزمون شماره ۹۷

۱. گزینه ۱

$$t_۱t_۵=\frac{۶۴}{۹} \xrightarrow{t_n=t_۱r^{n-۱}} t_۱\times t_۱r^۴=\frac{۶۴}{۹} \Rightarrow t_۱^۲r^۴=\frac{۶۴}{۹}$$

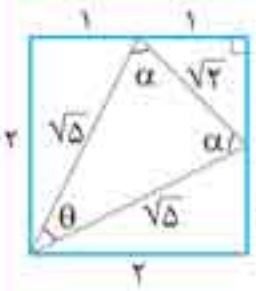
$$\xrightarrow{\text{جذر}} |t_۱r^۲|=\frac{۸}{۳} \xrightarrow{t_۱<۰} -t_۱r^۲=\frac{۸}{۳} \Rightarrow t_۱r^۲=-\frac{۸}{۳} \quad (*)$$

$$t_۳+t_۴=۱۶ \Rightarrow t_۱r^۲+t_۱r^۳=۱۶ \Rightarrow t_۱r^۲(۱+r)=۱۶$$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{۸}{۳}(۱+r)=۱۶ \Rightarrow ۱+r=-۶ \Rightarrow r=-۷$$

۲. گزینه ۳

ابتدا اندازه‌ی ضلع‌ها را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس پیدا می‌کنیم، سپس با توجه به شکل داریم:



$$\alpha+\alpha+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰^\circ-\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha=۹۰^\circ-\frac{\theta}{۲}$$

حال قضیه‌ی سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{۵}}{\sin(۹۰^\circ-\frac{\theta}{۲})} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{۵}}{\cos\frac{\theta}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول } ۲\alpha} \frac{\sqrt{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{\cos\frac{\theta}{۲}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}=۲\sqrt{۵}\sin\frac{\theta}{۲} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\sin^۲\frac{\theta}{۲}+\cos^۲\frac{\theta}{۲}=۱} \cos^۲\frac{\theta}{۲}=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{۲}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول } ۲\alpha} \cos\theta=۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}-۱=۲\times\frac{۹}{۱۰}-۱=\frac{۸}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta=۱-\frac{۶۴}{۱۰۰}=\frac{۳۶}{۱۰۰} \Rightarrow \sin\theta=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

۳. گزینه ۲

$$\frac{\sqrt[۶]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt[۶]{(۲-\sqrt{۳})^۲}\times\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{(۲+\sqrt{۲})^۲}}$$

$$\xrightarrow[\text{مشت خارج کن!}]{\text{فرجه و توان را ساده کن}} \frac{\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲(۲-\sqrt{۲})}\times\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}}{\sqrt{۲}\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{\sqrt[۳]{۴-۳}}{\sqrt{۲}\sqrt{۴-۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

۴. گزینه ۱

ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را ساده می‌کنیم:

$$|\frac{(x+۵)(۲x+۱)}{x+۵}-۲|\le ۳ \xrightarrow{x\neq -۵} |۲x+۱-۲|\le ۳$$

$$\Rightarrow |۲x-۱|\le ۳ \Rightarrow -۳\le ۲x-۱\le ۳ \Rightarrow -۱\le x\le ۲$$

$$\text{وسط بازه}=\frac{-۱+۲}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۵. گزینه ۲

۱) $[x-۲]=۱ \xrightarrow{\text{مفهوم جزصحیح}} ۱\le x-۲<۲ \xrightarrow{+۲} ۳\le x<۴$

۲) $f(x)=|x-۳|+|x-۴| \xrightarrow{۳\le x<۴} f(x)=+(x-۳)-(x-۴)=۱$

۳) تعداد نقاط مشترک دو تابع $\xrightarrow{f(x)=g(x)} ۲x^۲+x-۱۷=۱ \Rightarrow ۲x^۲+x-۱۸=۰$

$$\xrightarrow[\text{دو ریشه حقیقی دارد}]{\Delta=۱۴۵>۰} x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۴۵}}{۴} \xrightarrow{\sqrt{۱۴۵}\simeq ۱۲} x=-\frac{۱۳}{۴}, \frac{۱۱}{۴}$$

دقت کنید که هیچ کدام از ریشه‌های به‌دست آمده در محدوده‌ی $۳\le x<۴$ نیست، بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۶. گزینه ۳

برای این‌که مجموع سه رقم مضرب ۴ باشد باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

$$\begin{cases} \{۱,۲,۵\} \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} n_۱=۳!=۶ \\ \{۱,۳,۴\} \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} n_۲=۳!=۶ \\ \{۰,۵,۳\} \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} n_۳=۲\times۲\times۱=۴ \end{cases} \Rightarrow n(A)=۶+۶+۴=۱۶$$

۷. گزینه ۲

مجموع اعداد روشده باید ۹،۶،۳ و ۱۲ شود تا مضرب ۳ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{حالت‌های مجموع ۳} : (۱,۲),(۲,۱) \\ \text{حالت‌های مجموع ۶} : (۳,۳),(۵,۱),(۱,۵),(۴,۲),(۲,۴) \\ \text{حالت‌های مجموع ۹} : (۵,۴),(۴,۵),(۶,۳),(۳,۶) \\ \text{حالت‌های مجموع ۱۲} : (۶,۶) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}} ۲+۵+۴+۱=۱۲$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۶\times۶}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

۸. گزینه ۳

$$\bar{x}=\frac{a+۷+۱۰+۱۴+۱۱+۱۶+۱۸+۹+۲۰}{۹}=\frac{a+۱۰۵}{۹} \xrightarrow{\text{فرض}} ۱۳$$

$$\Rightarrow a+۱۰۵=۱۱۷ \Rightarrow a=۱۲$$

حالا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$۷,۹,۱۰,۱۱,\boxed{۱۲},۱۴,۱۶,۱۸,۲۰ \Rightarrow \text{میانه}=۱۲$$

۹. گزینه ۲

ارتفاع AH، از رأس A می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است، پس مختصات A و شیب BC را لازم داریم تا بتوانیم معادله‌ی AH را بنویسیم. (شیب AH، عکس و قرینه‌ی شیب BC است)

$$\text{مختصات A} = \text{محل تلاقی AC و AB} \begin{cases} y-2x=5 \xrightarrow{\times(-2)} -2y+4x=-10 \\ 2y-x=3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=\frac{-7}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x=-\frac{7}{3} \xrightarrow{y-2x=5} y=2x+5=-\frac{14}{3}+5=\frac{1}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$BC: 2y+3x=6 \xrightarrow{\text{شیب}} m_{BC}=-\frac{\text{ضریب x}}{\text{ضریب y}}=-\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH}=\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی AH}} y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(x+\frac{7}{3}\right) \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور xها}} -\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(x+\frac{7}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\times 3} -1=2x+\frac{14}{3} \Rightarrow 2x=\frac{-17}{3} \Rightarrow x=-\frac{17}{6}$$

۱۰. گزینه ۱

شرط وجود دو ریشه مثبت آن است که $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ باشد، پس:

$$\Delta=(m-2)^2-4(m+1)>0 \Rightarrow m^2-8m>0$$

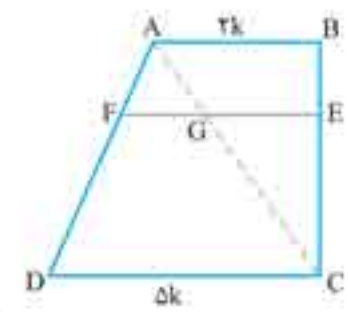
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<0 \text{ یا } m>8 \quad (1)$$

$$S=-\frac{b}{a}=-m+2>0 \Rightarrow m<2 \quad (2)$$

$$P>0 \Rightarrow m+1>0 \Rightarrow m>-1 \quad (3)$$

$$(1)\cap(2)\cap(3) \longrightarrow -1<m<0$$

۱۱. گزینه ۱



$$CD=\frac{5}{2}AB \Rightarrow \frac{CD}{AB}=\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض کسر}} CD=5k,\ AB=2k \quad (1)$$

$$AF=\frac{1}{4}AD \Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: FG \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FG}{DC}=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4} \xrightarrow{DC=5k} FG=\frac{5}{4}k \quad (2)$$

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: GE \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{GE}{AB}=\frac{CE}{CB} \\ FE \parallel AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس در دورنقه}} \frac{DF}{AD}=\frac{CE}{CB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{AB}=\frac{DF}{AD}=\frac{3}{4} \xrightarrow{AB=2k} GE=\frac{3}{2}k \quad (3)$$

$$\frac{EF}{CD}=\frac{FG+GE}{CD} \xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{\frac{5}{4}k+\frac{3}{2}k}{5k}=\frac{\frac{11}{4}k}{5k}=\frac{11}{20}$$

۱۲. گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1,2\} \\ g(x)=\frac{4-x^2}{|x+1|} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-1\} \end{cases}$$

$$D_{\frac{1}{g}}=D_g-\{x \mid \boxed{g(x)=0}\}=\mathbb{R}-\{-1\}-\{2,-2\}=\mathbb{R}-\{-1,\pm 2\} \quad (1)$$

$$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$D_{\frac{1}{f}}=D_f-\{x \mid \boxed{f(x)=0}\}=\mathbb{R}-\{1,2\}-\{\frac{1}{2}\}=\mathbb{R}-\{1,2,\frac{1}{2}\} \quad (2)$$

$$2x-1^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$D_h=D_{\frac{2}{g}} \cap D_{\frac{1}{f}} \xrightarrow{(1),(2)} \mathbb{R}-\{-1,2,-2,1,\frac{1}{2}\}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد نقاطی که در } \mathbb{R} \text{ نیست}} 5 \text{ تا}$$

۱۳. گزینه ۱

با کمی توجه به رابطه‌ی کمان‌ها، داریم:

$$\alpha=\frac{\pi}{10} \xrightarrow[\text{کن}]{\text{جای‌گذاری}} \frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{10}}+\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{4\pi}{10}} \quad (*)$$

$$\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{4\pi}{10}$$

$$\xrightarrow[(*)]{\text{جای‌گذاری در}} \frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{2\pi}{10}}+\frac{\cos\frac{4\pi}{10}}{\cos\frac{4\pi}{10}}=1+1=2$$

۱۴. گزینه ۲

$$y=\log x^2 \xrightarrow{\text{دامنه}} x^2>0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0\}$$

در بین گزینه‌ها، فقط دامنه‌ی توابع گزینه‌های «۲» و «۴»، $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اما گزینه‌ی «۴» با تابع داده‌شده برابر نیست، ببینید:

$$\log\sqrt{x^2}=\log|x| \neq \log x^2$$

اما تابع گزینه‌ی «۲» با تابع داده‌شده، برابر است:

$$\log x^2=2\log|x|$$

۱۵. گزینه ۳

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه‌ایم!

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to 1}\frac{4x+5}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}=\frac{-4+5}{\frac{1}{4}}=16$$

$$0-\frac{-1}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}} \qquad \frac{1}{4}$$

۱۶. گزینه ۳

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\sqrt{ax+3})=\sqrt{a+3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax)=1+a=f(1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \sqrt{a+3}=1+a \xrightarrow{\text{به توان دو برسون}} a+3=(a+1)^2$$

$$\Rightarrow a+3=a^2+2a+1 \Rightarrow a^2+a-2=0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفره}}\begin{cases}a=1\\ a=-2\end{cases}$$ (در معادله صدق نمی‌کند) غ‌ق‌ق

حالا بریم سراغ خواسته‌ی تست:

$$f(-\frac{3}{4})=?\xrightarrow[\text{ضابطه‌ی بالا}]{\frac{3}{4}<1} f(-\frac{3}{4})=\sqrt{a(-\frac{3}{4})+3}$$

$$\xrightarrow{a=1} f(-\frac{3}{4})=\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1/5$$

۱۷. گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow[y=f(x-2)]{\text{۲ واحد به‌طرف‌راست}} y=\sqrt{2-x}$$

حالا باید تابع جدید را با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم ($y=x$) قطع دهیم، بنابراین داریم:

$$\sqrt{2-x}=x\Rightarrow 2-x=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-2\end{cases}$$ (در معادله صدق نمی‌کند) غ‌ق‌ق

۱۸. گزینه ۱

۱ $(fog)(x)=f(g(x))=f(x+4)=\frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2}\xrightarrow{\text{ساده کن}}\frac{2x+7}{x+6}$

۲ $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x-1}{x+2})=(\frac{2x-1}{x+2})+4\xrightarrow{\text{ساده کن}}\frac{6x+7}{x+2}$

حالا شرط تساوی این دو تابع را اجرا می‌کنیم:

$$\frac{2x+7}{x+6}=\frac{6x+7}{x+2}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}(2x+7)(x+2)=(x+6)(6x+7)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}}2x^2+4x+7x+14=6x^2+7x+36x+42$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}}-4x^2-32x-28=0\xrightarrow{+(-4)}x^2+8x+7=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=-1,-7$$

۱۹. گزینه ۲

یک کسر زمانی برابر صفر است که صورت آن صفر شود، البته ریشه‌های مخرج قابل قبول نیستند!

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi-2x\Rightarrow 5x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}\\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x)\Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

به ازای $x=2k\pi+\pi$ که در دایره مثلثاتی، همگی روی π می‌افتند، $\cos x=-1$ شده و مخرج صفر می‌شود، پس این دسته جواب قابل قبول نیست. بنابراین جواب نهایی $x=\frac{2k\pi}{5}$ است.

۲۰. گزینه ۲

با توجه به شکل داریم:

$$x\to 5^-\Rightarrow f(x)\to 2^+\Rightarrow \lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{f(x)-2}=\frac{10}{2^+-2}=\frac{10}{0^+}=+\infty=L_1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2=L_2$$

بنابراین جواب تست برابر است با: $L_1\times L_2=(+\infty)(-2)=-\infty$

۲۱. گزینه ۲

مماس بودن دو تابع یعنی ابتدا ضابطه‌ها را تلاقی بده، سپس بعد دلتای معادله‌ی حاصل را صفر کن. بنابراین:

$$2x^2-3x+6=5x+a\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}}2x^2-8x+(6-a)=0$$

$$\xrightarrow{\text{شرط مماس بودن}}\Delta=0\Rightarrow(-8)^2-4(2)(6-a)=0\Rightarrow 64-8(6-a)=0$$

$$\Rightarrow 64=8(6-a)\xrightarrow{\div 8}8=6-a\Rightarrow a=-2$$

۲۲. گزینه ۴

$$x\to 3^-\Rightarrow\begin{cases}[-x]=-3\\ |9-x^2|=9-x^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{12}(-3)+9-x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{x^3}{4}-x^2+9\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-2x$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}}f'_-(3)=-\frac{3}{4}\times 9-2\times 3=\frac{-51}{4}$$

۲۳. گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3}{2}$$

آهنگ لحظه‌ای fog در $x=0$ $=(fog)'(0)=g'(0)f'(g(0))$

$$\xrightarrow{g(0)=\sqrt{0+1}=1}g'(0)\times f'(1)=g'(0)\times\frac{3}{2}$$

حالا بریم سراغ محاسبه‌ی $g'(0)$

$$g(x)=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\xrightarrow{x=0}g'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

پس:

$$(fog)'(0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

۲۴. گزینه ۲

نقطه‌ی $(-1,6)$ اکسترمم نسبی است، پس در تابع صدق کرده و مشتق در آن صفر می‌شود.

۱ $f(x)=ax^2+\frac{b}{x}\xrightarrow{\text{در تابع صدق بده}}6=a(-1)^2+\frac{b}{-1}\Rightarrow 6=a-b$

$$f'(x)=2ax-\frac{b}{x^2}\xrightarrow[f'(-1)=0]{x=-1\text{ مشتق را صفر می‌کند}}$$

۲ $\Rightarrow 2a(-1)-\frac{b}{(-1)^2}=0\Rightarrow -2a-b=0$

$$\xrightarrow[\text{۱ و ۲}]{\text{دستگاه ساز}}\begin{cases}a-b=6\xrightarrow{\times 2}2a-2b=12\\ -2a-b=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع کن}}-3b=12\Rightarrow b=-4$$

۲۵. گزینه ۱

مخزن استوانه‌ای روبه‌رو، برای ساخت نیاز به دوتا دریوش دایره‌ای با مساحت πr^2 و یک ورقه‌ی مستطیلی‌شکل به طول محیط قاعده $(2\pi r)$ و عرض h دارد، پس مساحت ورقه‌هایی که روی هم نیاز است، عبارت‌اند از: $2\pi r^2+2\pi rh$

براساس قیمت ساخت داریم: $P=2\pi r^2\times 8+2\pi rh\times 10$ (*) تابع هدف

حالا باید تابع هدف را تک‌مجهولی کنیم:

$$\text{حجم استوانه}=\pi r^2 h\xrightarrow{\text{فرض}}200\pi\Rightarrow h=\frac{200}{r^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (*)}}P=16\pi r^2+20\pi r\times\frac{200}{r^2}=16\pi r^2+\frac{4000\pi}{r}$$

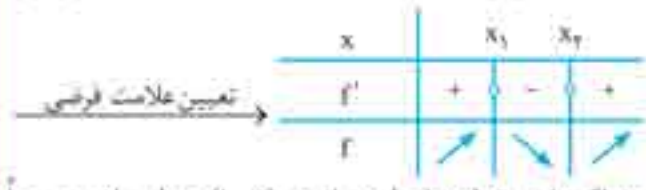
$$\Rightarrow P'=32\pi r+\frac{-4000\pi}{r^2}\xrightarrow{P'=0}32\pi r=\frac{4000\pi}{r^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}32r^3=4000\Rightarrow r^3=125\Rightarrow r=5$$

$$\Rightarrow h=\frac{200}{r^2}=\frac{200}{25}=8$$

۲۶. گزینه ۱

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=3x^2+2ax+b$$



همان‌طور که می‌بینید، اگر تابع بخواهد فقط در بازه‌ی $(1,3)$ نزولی باشد، حتماً $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های مشتق بوده‌اند! پس:

$$3x^2+2ax+b \begin{cases} \xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} S=\frac{-2a}{3}=1+3\Rightarrow a=-6 \\ \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P=\frac{b}{3}=1\times 3\Rightarrow b=9 \end{cases}$$

پس برای $g(x)$ داریم:

$$g(x)=x^2-(a+b)x+1=x^2-3x+1$$

$$\xrightarrow[g'(x)=0]{\text{نقطه‌ی بحرانی}} 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۲۷. گزینه ۲

در دایره‌ای به مرکز (α,β) که بر هر دو محور مختصات مماس باشد، $|\alpha|=|\beta|=r$ است.

چون دایره از نقطه‌ی $(-2,-1)$ گذشته (در ناحیه‌ی چهارم)، پس کل دایره در ناحیه‌ی چهارم واقع است و در نتیجه مرکزش هم در این ناحیه است، پس $\alpha>0$ و $\beta<0$ است؛ بنابراین داریم: $\alpha=-\beta=r$

معادله‌ی کلی دایره را می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow[\beta=-r]{\alpha=r} (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

$$\xrightarrow{\text{(-2,-1) نقطه را صدق بده}} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$\Rightarrow 1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2\Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفره}]{\text{حل معادله}} r=1,5$$

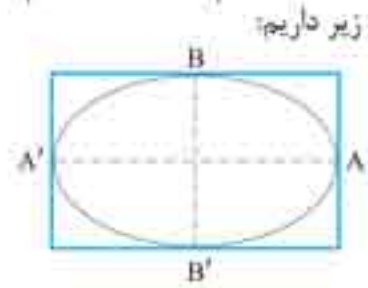
۲۸. گزینه ۱

برای هر مستطیل طلایی به طول x و عرض y داریم:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\xrightarrow{y=2}\frac{x+2}{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2x+4=x^2\Rightarrow x^2-2x-4=0$$

$$\xrightarrow{x>0} x=\frac{2+\sqrt{4-4(-4)}}{2}=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}+1$$

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:



$$\begin{cases} BB'=2b=2\Rightarrow b=1 \\ AA'=2a=\sqrt{5}+1\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-4}{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$$

۲۹. گزینه ۱

احتمال بیکار بودن شخص، به‌صورت زیر حساب می‌شود:

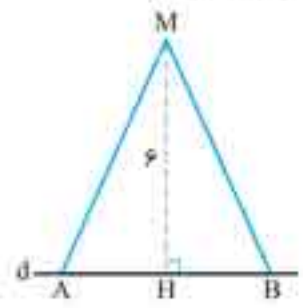
$$\xrightarrow{\text{احتمال کل}} \frac{10}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{90}{100}\times\frac{20}{100}=0/182$$

$$P(\text{فارغ‌التحصیل دانشگاه باشد} \mid \text{بیکار باشد})=\frac{P(\text{هم فارغ‌التحصیل دانشگاه باشد و هم بیکار})}{P(\text{بیکار باشد})}$$

$$=\frac{\frac{10}{100}\times\frac{2}{100}}{0/182}=\frac{0/002}{0/182}=\frac{2}{182}=\frac{1}{91}$$

۳۰. گزینه ۱

شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:



$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times MH\times AB=36\Rightarrow\frac{1}{2}\times 6\times AB=36\Rightarrow AB=12\Rightarrow BH=6$$

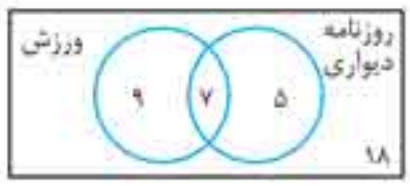
$$\overset{\triangle}{MHB}: MB^2=MH^2+BH^2=36+36=72\Rightarrow MB=6\sqrt{2}$$

پس اگر به مرکز M و شعاع $6\sqrt{2}$ کمانی بزنیم، فقط در نقاط A و B خط d را قطع می‌کند و در نتیجه فقط یک مثلث وجود دارد.

آزمون شماره ۹۸

۱. گزینه ۴

روش اول:



$$\Rightarrow 39-(9+7+5)=18$$

روش دوم:

اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه دیواری را با B نمایش دهیم، داریم:

$$n(\text{فقط ورزش})=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

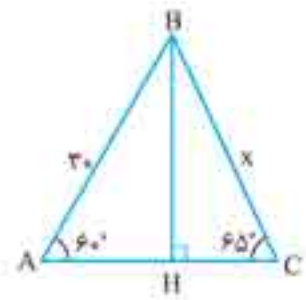
$$\Rightarrow 9=16-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=7$$

$$n(\text{نه ورزش نه روزنامه})=n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=39-(16+12-7)=18$$

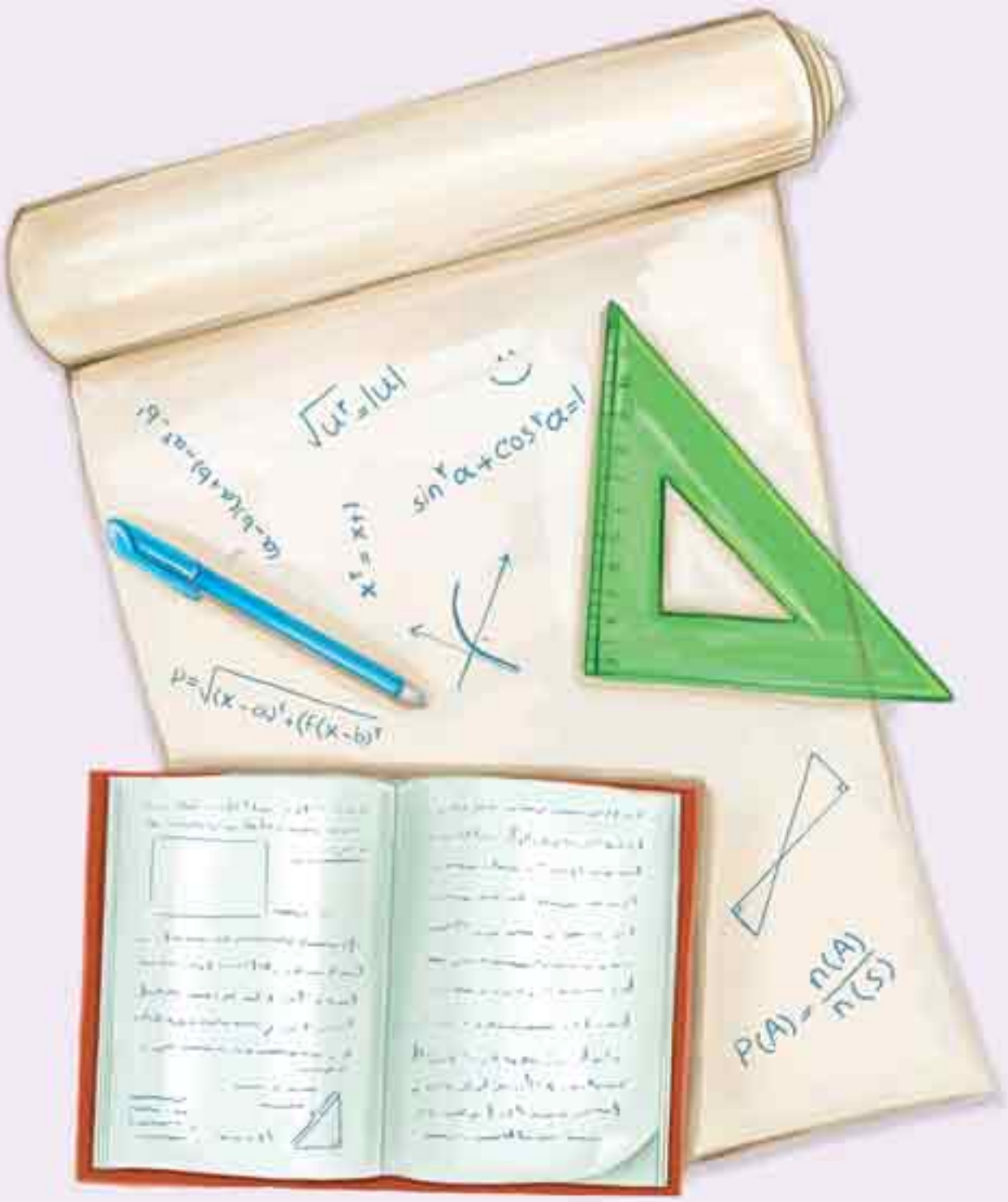
۲. گزینه ۲

$$\overset{\triangle}{ABH}: \sin 60^\circ=\frac{BH}{AB}$$



$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{30}\Rightarrow BH=15\sqrt{3}$$

بخش ۵



فرمولنامه

ریاضی، درسی مفهومی و فهمیدنی است! با این حال نمی‌توانیم از اهمیت فرمول‌ها و رابطه‌ها و البته به‌خاطر سپاریِ آن‌ها برای حل تست غفلت کنیم...

ایـن بخش پایانی اختصاص بـه فرمول‌ها و رابطه‌هایی دارد که در هر فصـل ریاضی کنکورتان با آن‌ها مواجه شده‌اید؛ قبل از شروع هر آزمونی می‌توانید نگاهی به فرمول‌های مرتبط آن بیندازید.

تمام فرمول‌ها و نکات مهم ریاضی تجربی کنکور، به تفکیک فصل و مناسب مرور و تثبیت...

فصل ۷: قدر مطلق و جز صحیح

۱ قدرمطلق:

$|u| \geq 0$

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

۲ قدرمطلق و رادیکال: $\sqrt{u^2} = |u|$

۳ معادله‌ی قدرمطلقی خاص:

$|A| + |B| + |C| = 0 \Rightarrow A = B = C = 0$

۴ نامعادله‌ی قدرمطلقی:

$|u| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq u \leq k$

$|u| \geq k \xrightarrow{k>0} u \geq k$ یا $u \leq -k$

۵ ایجاد قدرمطلق:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$x \leq a \text{ یا } x \geq b \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$$

۶ جزء صحیح:

$[u] \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$

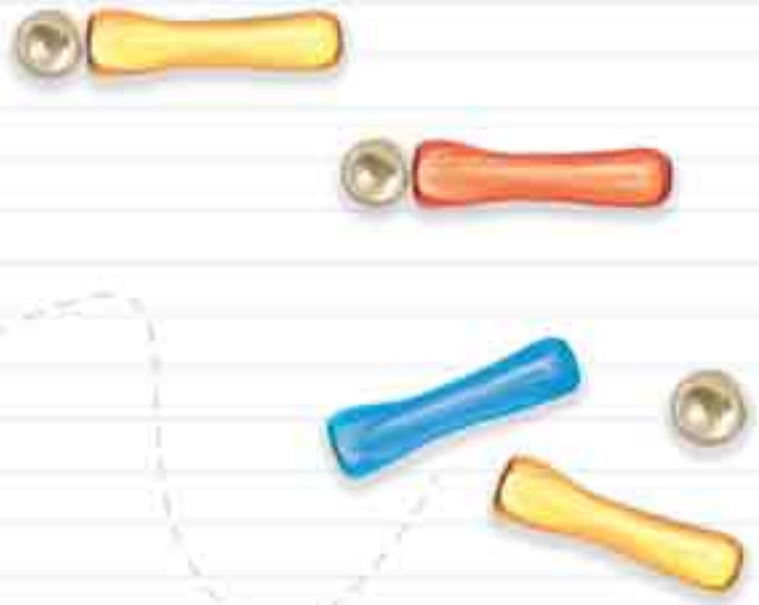
اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن‌وقت $[x]$ می‌شود اولین عدد صحیح قبل از x

۷ ویژگی‌های جزء صحیح:

اگر $m = [a]$ آن‌وقت: $m \leq a < m+1$

$0 \leq u - [u] < 1$

$[x+n] = [x] + n \quad (n \in \mathbb{Z})$



فصل ۸: تابع

۱ مفهوم تابع: $(a, b) \in f \Rightarrow f(a) = b$

۲ برخورد دو تابع: g, f تلاقی $\Rightarrow f(x) = g(x)$

تلاقی f با محور xها: $f(x) = 0$

۳ انواع تابع:

همانی: $f(x) = x$

ثابت: $f(x) = c$

خطی: $f(x) = ax + b$

چندجمله‌ای: $(n \in \mathbb{N})\ f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$

۴ دامنه‌ی تابع:

$u \neq 0 : y = \frac{\square}{u}$

$u \geq 0 : y = \sqrt[2n]{u}$

$u, v > 0, v \neq 1 : y = \log_v u$

۵ برد تابع:

چندجمله‌ای: درجه ۲: $y = ax^2 + bx + c$

درجه فرد: $\mathbb{R}$

$R = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty) : a > 0$

$R = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}] : a < 0$

هموگرافیک: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} : R = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$

۶ تابع وارون:

$R_f = D_{f^{-1}}, D_f = R_{f^{-1}}$

$f(\alpha) = \beta \Rightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ یا $(\alpha, \beta) \in f \Rightarrow (\beta, \alpha) \in f^{-1}$

۷ دو خط وارون هم:

$$\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{c'}$$

۸ اعمال جبری روی دو تابع:

دامنه:

$D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g : g(x) \neq 0$

ضابطه:

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

۹ تابع ترکیبی: $(\frac{f+kg}{h})(\alpha) = \frac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha)}$

۱۰ ضابطه‌ی تابع مرکب:

$(fog)(x) = f(g(x))$

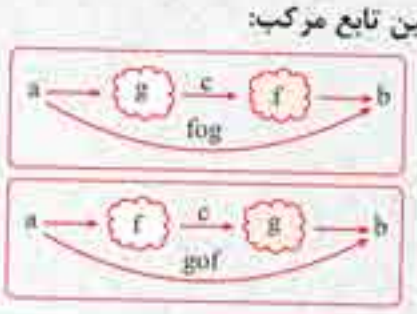
$(gof)(x) = g(f(x))$

۱۱ دامنه‌ی تابع مرکب:

$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$

$D_{gof} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

۱۲ ماشین تابع مرکب:



۱۳ عضو در تابع مرکب:

$(a, b) \in fog \Rightarrow (a, m) \in g, (m, b) \in f$

$(a, b) \in gof \Rightarrow (a, n) \in f, (n, b) \in g$

۱۴ f و f^{-1}:

$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$

$fof^{-1} = \{(a, a) \mid a \in R_f\}$

$f^{-1}of = \{(b, b) \mid b \in D_f\}$

$D_f = R_f$ مگر $fof^{-1} \neq f^{-1}of$

۱۵ پخش شدنِ ۱-:

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

۱۶ بررسی رفتار:

صعودی = صعودی + صعودی

نزولی = نزولی + نزولی

صعودی = صعودی o صعودی

صعودی = نزولی o نزولی

ضرب عدد منفی رفتار تابع را عوض می‌کند ولی عدد مثبت، نه!!

۱۷ رفتار f و f^{-1}:

f صعودی اکید $\Leftrightarrow$ f^{-1} صعودی اکید

f نزولی اکید $\Leftrightarrow$ f^{-1} نزولی اکید