

فهرست



۷
۲۷

فصل اول: تابع
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۴۰
۵۲

فصل دوم: مثلثات
پاسخ سؤال‌های امتحانی



۵۸
۶۹

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۷۶
۹۳

فصل چهارم: مشتق
پاسخ سؤال‌های امتحانی



۱۰۳
۱۱۵

فصل پنجم: کاربرد مشتق
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۲۴
۱۳۶

فصل ششم: هندسه
پاسخ سؤال‌های امتحانی

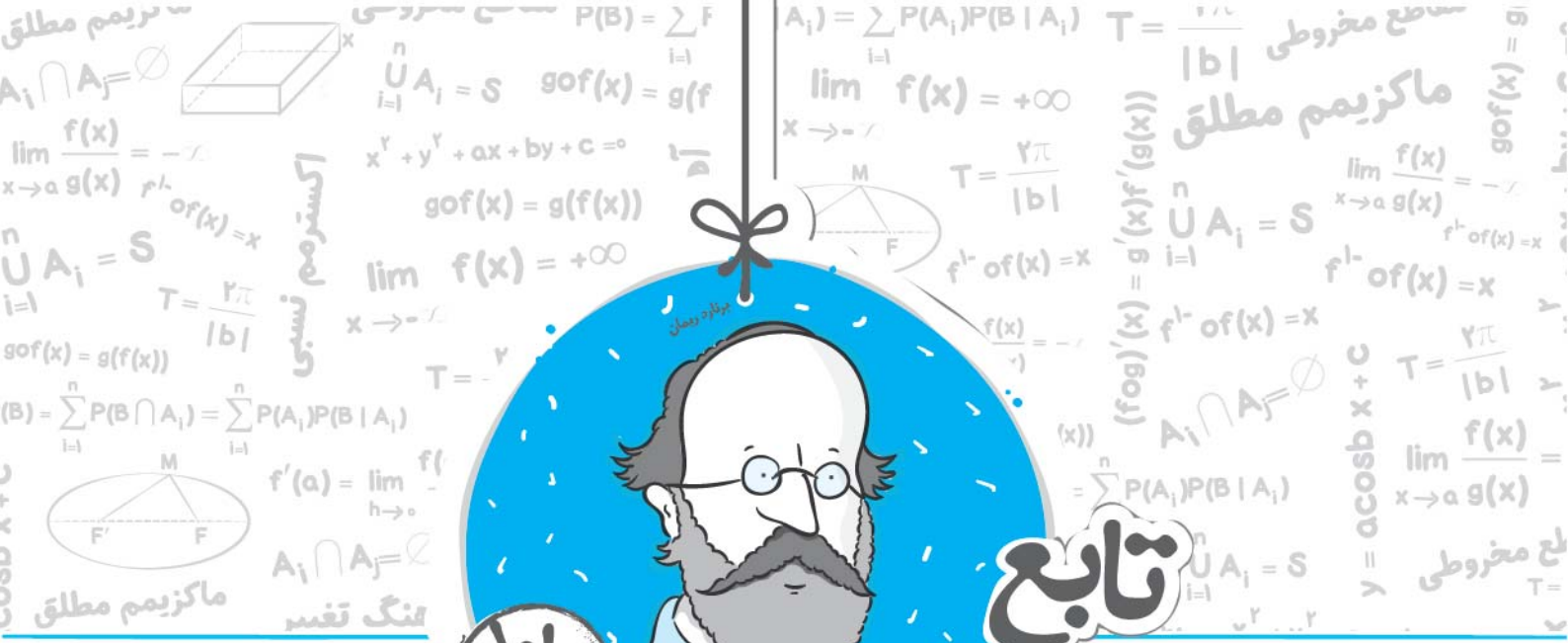


۱۴۳
۱۴۹

فصل هفتم: احتمال
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۵۲
۱۵۵
۱۶۲
۱۶۹

امتحان‌های نیم‌سال اول
امتحان‌های نیم‌سال دوم
پاسخ امتحان‌های نیم‌سال اول
پاسخ امتحان‌های نیم‌سال دوم



فصل اول

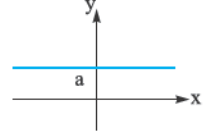
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

در دو سال گذشته با تابع آشنا شدیم. دیدیم تابع را می‌توانیم به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار پیکانی، نمودار مختصاتی یا یک ضابطه جبری نمایش دهیم.

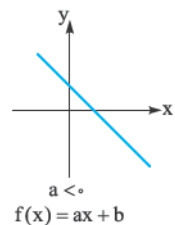
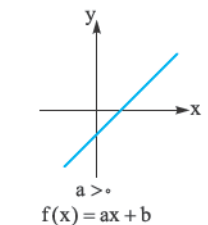
با دامنه تابع یعنی مجموعه مقادیری از x که تابع به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و با برد تابع یعنی مجموعه مقادیر تابع یا y آشنا شدیم. یکی از انواع توابعی که در سال‌های دهم و یازدهم شناختیم توابع چند جمله‌ای بود.

می‌دانیم هر تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چند جمله‌ای است. (ساده‌ترش این‌که توان‌های x باید اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند) مثلاً $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ و $g(x) = 3x$ و $h(x) = -2x + 3$ و $k(x) = x^2 + 2x - 1$ همه یک تابع چند جمله‌ای‌اند. به بزرگ‌ترین توان n در تابع می‌گوییم درجه چند جمله‌ای. در مثال‌های بالا f از درجه صفر، g و h از درجه ۱ و k از درجه ۲ است.

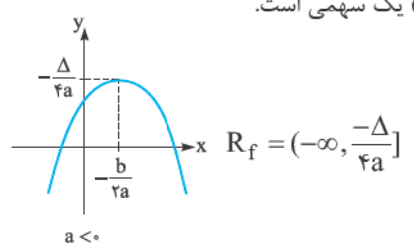
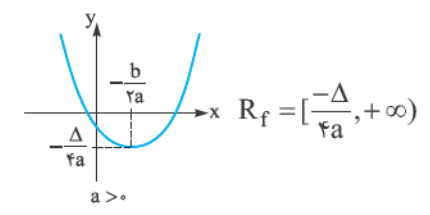
دامنه همه توابع چند جمله‌ای برابر \mathbb{R} است و اگر n فرد باشد، برد تابع نیز برابر \mathbb{R} است. چند مثال از تابع چند جمله‌ای که قبلاً هم دیده‌ایم:



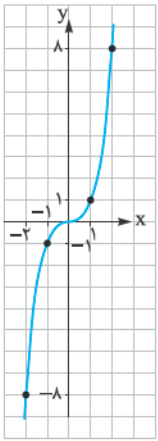
۱ تابع $f(x) = a$ (از درجه صفر) یک تابع ثابت است. که حتماً یادمان هست که بردش برابر است با $R_f = \{a\}$.



۲ تابع $f(x) = ax + b$ (از درجه ۱) یک تابع خطی است که بردش برابر است با $R_f = \mathbb{R}$.



۳ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ (از درجه ۲) یک سهمی است. که بردش برابر است با:



این‌ها تابع‌هایی بودند که در سال دهم و یازدهم با آن‌ها آشنا شدیم. امسال با تابع $f(x) = x^3$ آشنا می‌شویم.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

نمودار تابع $f(x) = x^3$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

نمودار تابع به صورت روبه‌رو است:

حالا با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ و انتقال می‌توانیم نمودار تابع‌هایی به صورت $f(x) = a(x+b)^3$ را رسم کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ رسم کنید.

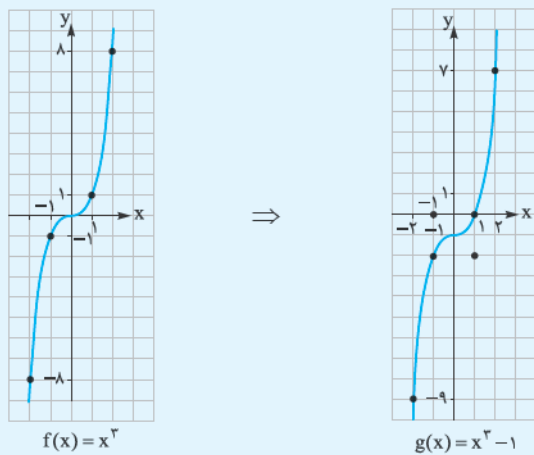
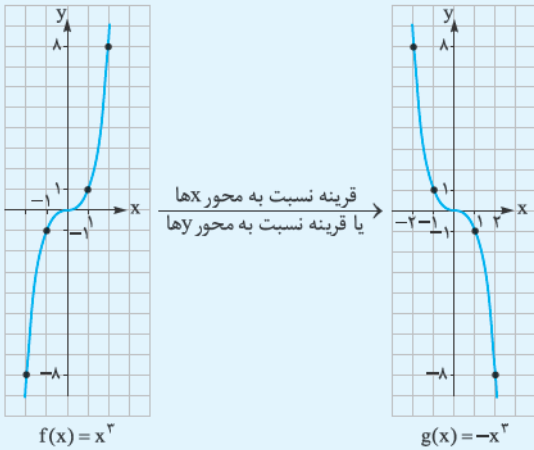
الف) $g(x) = -x^3$ ب) $g(x) = x^3 - 1$ پ) $g(x) = (x-1)^3$

ت) $g(x) = (x+2)^3$ ث) $g(x) = -(x+1)^3 + 2$ ج) $g(x) = (-x+2)^3$

پاسخ: اول نمودار تابع $f(x) = x^3$ را می‌کشیم و بعد هر کدام از نمودارها را با انتقال مناسب از روی نمودار $f(x) = x^3$ رسم می‌کنیم.

الف) تابع $g(x) = -x^3$ برابر است با $y = -f(x)$ یا $y = f(-x)$

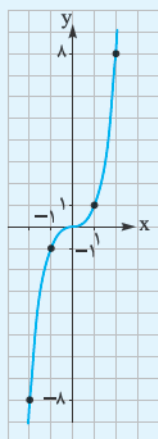
و می‌دانیم برای اولی باید نمودار تابع $f(x) = x^3$ را نسبت به محور x ها و برای دومی آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم که در هر دو حالت نتیجه یکی است:



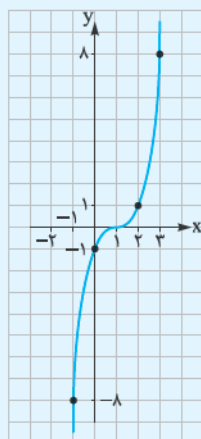
ب) تابع $g(x) = x^3 - 1$ برابر است با $y = f(x) - 1$ و می‌دانیم

برای رسم نمودار $f(x) - 1$ ، باید نمودار تابع f را یک واحد در راستای محور y ها به پایین انتقال دهیم:

$f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f(x) = x$
 $T = \frac{2\pi}{|b|}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$
 لیم مغروطی
 $T =$
 $by + c = 0$
 $f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f(x) = x$
 $f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f(x) = x$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$



$f(x) = x^3$

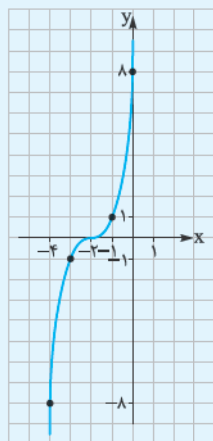


$g(x) = (x-1)^3$

تابع $g(x) = (x-1)^3$ برابر است با $y = f(x-1)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$ باید نمودار f را ۱ واحد در راستای محور x ها به سمت راست انتقال دهیم:



$f(x) = x^3$



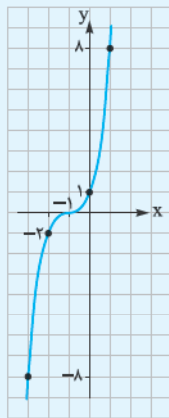
$g(x) = (x+2)^3$

تابع $g(x) = (x+2)^3$ برابر است با $y = f(x+2)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x+2)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم:

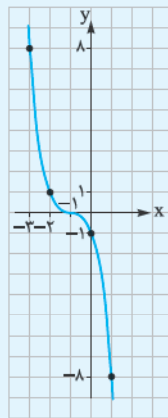
تابع $g(x) = -(x+1)^3 + 2$ برابر است با $y = -f(x+1) + 2$. پس باید نمودار $f(x)$ را اول ۱ واحد در راستای محور x ها به سمت چپ انتقال دهیم (یعنی $f(x+1)$) و بعد آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم (یعنی $-(x+1)^3$) و بعد در راستای محور y ها، ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم (یعنی $-(x+1)^3 + 2$):



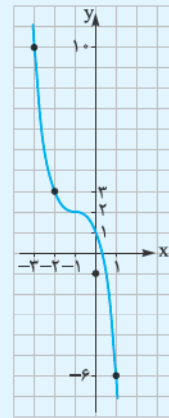
$f(x) = x^3$



$y = (x+1)^3$

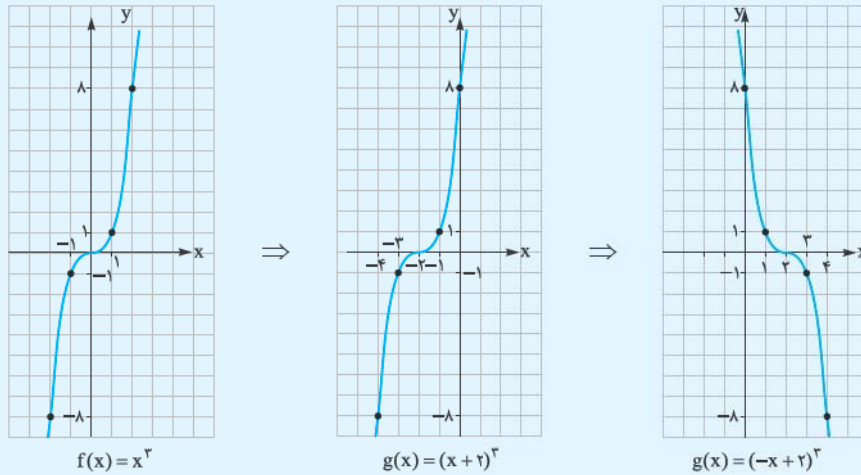


$y = -(x+1)^3$

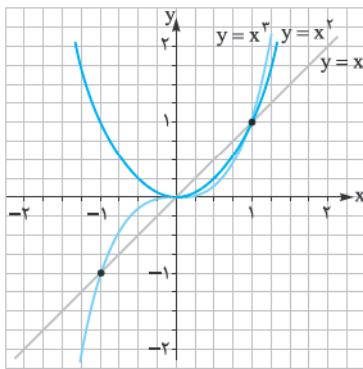


$g(x) = -(x+1)^3 + 2$

ج تابع $g(x) = (-x + 2)^3$ برابر است با $y = f(-x + 2)$. پس باید اول نمودار تابع $f(x + 2)$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم، یعنی نمودار f را در راستای محور x ها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و بعد نمودار $f(-x + 2)$ را رسم کنیم، یعنی قرینه نمودار $f(x + 2)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم:



بررسی نمودار تابع های $y = x^3$ و $y = x^2$ و $y = x$



۱ می دانیم برای $x > 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود، حاصل x^n بزرگتر می شود، پس برای x های بزرگتر از ۱ داریم: $x^3 > x^2 > x$.

۲ در $x = 1$ مقدار x ، x^2 و x^3 مساوی ۱ است، پس هر سه نمودار از نقطه $(1, 1)$ می گذرند.

۳ برای $0 < x < 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود حاصل x^n کوچکتر می شود، پس برای x های بین صفر و ۱ داریم: $x^3 < x^2 < x$.

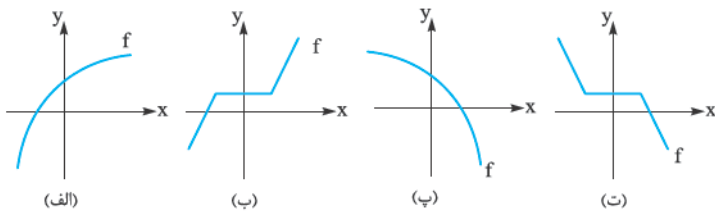
۴ در $x = 0$ مقدار x ، x^2 و x^3 مساوی صفر است، پس هر سه نمودار از نقطه $(0, 0)$ می گذرند.

۵ در $x = -1$ مقدار x و x^3 مساوی -1 است ولی مقدار x^2 مساوی ۱ است.

حالا با توجه به نکات بالا نمودار هر سه تابع را رسم می کنیم. ویژگی های بالا را روی نمودار بررسی کنید.

توابع صعودی و نزولی

به نمودارهای روبه رو نگاه کنید.



در نمودار **الف** با زیاد شدن x ، مقدار y هم زیاد می شود. اگر تابعی این چنین باشد، می گوییم اکیداً صعودی است (اکیداً یعنی همواره و همیشه). در این تابع داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

در نمودار **ب** با زیاد شدن x ، مقدار y یا زیاد می شود و یا ثابت می ماند. این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست (به علت این که بعضی وقت ها با زیاد شدن x ، مقدار y ثابت می ماند). در این تابع داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

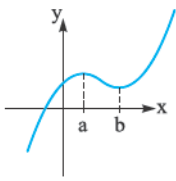
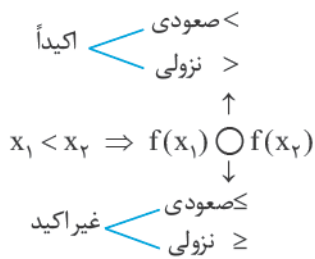
در نمودار **پ** با زیاد شدن x ، مقدار y هم کم می شود. به این تابع می گوییم اکیداً نزولی. در این تابع داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

در نمودار **ت** با زیاد شدن x ، مقدار y کم می شود یا ثابت می ماند. این تابع نزولی است اما اکیداً نزولی نیست. در این تابع داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

اگر بخواهیم آن‌چه را که تا این‌جا دیدیم خلاصه کنیم می‌توانیم بگوییم:

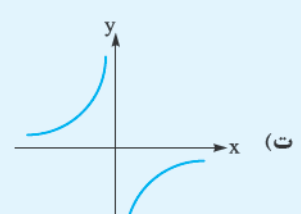
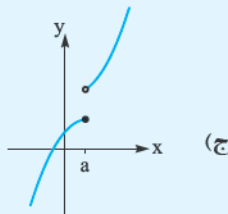
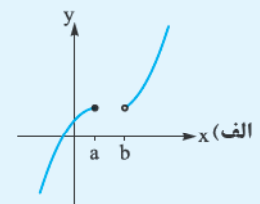
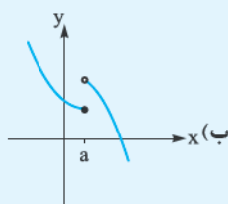
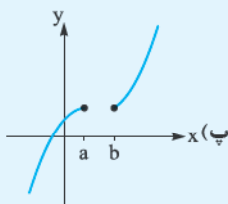


ساده‌ترش این‌که:

در تابع صعودی و اکیداً صعودی جهت تغییرات x و $f(x)$ یکسان است.
 در تابع نزولی و اکیداً نزولی جهت تغییرات x و $f(x)$ مخالف یکدیگر است.
 در تعریف تابع اکیداً صعودی (یا نزولی) مساوی نداریم، اما در تعریف تابع صعودی (یا نزولی) مساوی داریم.
 حالا بیایید به نمودار تابع روبه‌رو نگاه کنیم:
 تابع در بازه $(-\infty, a]$ صعودی اکید، در بازه $[a, b]$ نزولی اکید و در بازه $[b, +\infty)$ صعودی اکید است، اما در کل تابع نه صعودی است و نه نزولی.
 اگر تابعی صعودی باشد (یا نزولی باشد) می‌گوییم یکنوا است. (یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است)
 اگر تابعی اکیداً صعودی باشد (یا اکیداً نزولی باشد) می‌گوییم اکیداً یکنوا است.
 اگر تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی (یعنی در بعضی بازه‌ها صعودی و در بعضی بازه‌ها نزولی باشد) می‌گوییم غیر یکنوا یا نایکنوا است.
 اگر تابعی هم صعودی باشد و هم نزولی، یعنی تابع ثابت است. (می‌توانستیم بگوییم تابع پی‌نوا است!)

مثال و پاسخ

مثال تعیین کنید هر یک از تابع‌های زیر اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، صعودی، نزولی یا غیر یکنوا است.



پاسخ در **پ** با زیاد شدن x مقدار y زیاد می‌شود پس تابع اکیداً صعودی است. اگر **الف** را با **پ** مقایسه کنیم، **الف** هم مثل **پ** است فقط با این تفاوت که عرض دو نقطه به طول‌های a و b یکسان‌اند، پس **الف** صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست (فقط به خاطر همین دو نقطه که عرض برابر دارند). در **ب** هر کدام از شاخه‌ها اکیداً نزولی است اما تابع در کل غیر یکنوا است. چون اگر دو نقطه نزدیک به a ، یکی در سمت چپ و یکی در سمت راست آن انتخاب کنیم، با افزایش x مقدار y هم زیاد می‌شود، پس تابع نه صعودی است و نه نزولی. **ج** هم مثل **پ** است. اگر چه هر کدام از شاخه‌های منحنی صعودی‌اند، اما اگر دو نقطه یکی با طول منفی و دیگری با طول مثبت انتخاب کنیم عرض نقطه کم می‌شود. در **ث** چون یکی از شاخه‌ها صعودی و دیگری نزولی است پس تابع غیر یکنوا است. **ت** یک تابع اکیداً صعودی است، چون مقدار y همواره در حرکت از چپ به راست زیاد می‌شود.

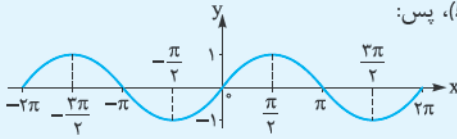
نکته: چند نکته در مورد یکنوایی تابع:

- هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یکنوا هم هست، اما عکس این موضوع درست نیست.
- اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک‌به‌یک نیز هست اما باز هم عکس این موضوع درست نیست، یعنی ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد ولی یکنوا نباشد. (مثل شکل (۴) مثال قبل)
- اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد حتماً اکیداً یکنوا نیست.

مثال و پاسخ

مثال: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید و تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است.

پاسخ: رسم نمودار تابع $y = \sin x$ را از سال قبل یاد گرفتیم. (یادتان هست؟!): پس:



حالا جهت تغییرات تابع را در هر کدام از بازه‌های به طول $\frac{\pi}{2}$ (یعنی ربع دایره مثلثاتی) در یک جدول مشخص می‌کنیم:

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$		صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

سؤال‌های امتحانی

۱- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

(الف) $y = (x+1)^2 - 1$ (ب) $y = (2x-1)^2$ (پ) $y = (-x+2)^2 + 1$ (ت) $y = (-\frac{x}{2} + 1)^2$

۲- نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است و آیا تابع در کل یکنوا (یا اکیداً یکنوا) هست یا نه؟ دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

(الف) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$ (ب) $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x \end{cases}$ (پ) $h(x) = x^2 - 2x + 2$ (ت) $k(x) = \sqrt{x-2} + 1$

۳- نمودار تابع‌های $f(x) = x|x|$ و $g(x) = x^2|x|$ را رسم کنید و بگویید هر کدام در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی اند.

۴- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و بگویید چگونه‌اند؟ صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا غیر یکنوا؟

(الف) $f(x) = x + |x|$ (ب) $g(x) = x - |x|$ (پ) $h(x) = x - [x]$ (ت) $k(x) = x + [x]$

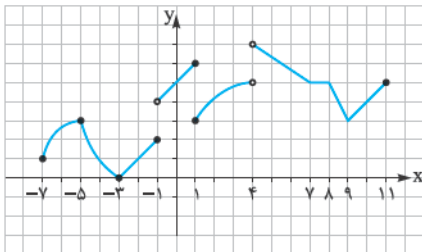
۵- نمودار تابع‌های $y = 2^x + 1$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن چه در سال یازدهم در مورد نمودار

تابع $y = a^x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y = a^x$ با چه شرطی اکیداً صعودی و با چه شرطی اکیداً نزولی است.

۶- نمودار تابع‌های $y = \log_2 x$ و $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن چه در سال یازدهم در مورد

نمودار تابع $y = \log_a x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y = \log_a x$ با چه شرطی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

۷- تعیین کنید تابع با نمودار مقابل در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است؟ (بزرگ‌ترین بازه‌هایی را که ممکن است انتخاب کنید)



۸- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2x$ ، دامنه تابع را چگونه تعریف کنیم که تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی باشد.

۹- بگویید تابع $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ در هر کدام از بازه‌های زیر چگونه است؟ اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، غیر یکنوا؟

- (الف) $[-1, 3]$ (ب) $(-\infty, 0]$ (ج) $[-1, 1]$ (د) $[0, 2]$ (ه) $[2, 4]$ (و) $[0, +\infty)$

ت ترکیب توابع

پارسال با اعمال جبری بین تابع‌ها آشنا شدیم. مثلاً اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشتیم می‌توانستیم دو تابع را (مثل دو عدد) با هم جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کنیم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad \text{یا} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \text{یا} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حالا می‌خواهیم دربارهٔ عملی حرف بزنیم به اسم ترکیب توابع. (این کلمه ترکیب هیچ ربطی به تئریه و ترکیب و ... و عربی و فارسی و شیمی و ... ندارد)

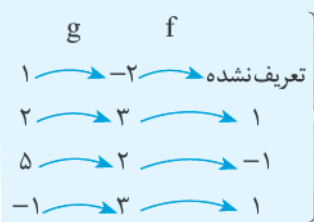
تعریف: اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع‌ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می‌گوییم دو تابع را ترکیب کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccc} \text{g را می‌گذاریم به جای x} & & \text{f را می‌گذاریم به جای x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{g(x)} & \text{و} & \text{f(x)} \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \\ \text{f(g(x))} & = & (\text{f o g})(x) \end{array}$$

ترکیب دو تابع f و g را با $(\text{f o g})(x)$ یا $(\text{fog})(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال و پاسخ

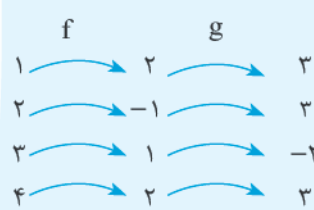
مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (3, 1), (4, 2)\}$ و $g = \{(1, -2), (2, 3), (5, 2), (-1, 3)\}$ باشد، fog و gof را پیدا کنید.



پاسخ: برای پیدا کردن fog اول می‌رویم سراغ تابع g ، می‌بینیم که در تابع g به هر کدام از مقدارهای x ، چه مقداری نسبت داده می‌شود و بعد با توجه به تابع f ، مقدار تابع f را به ازای y های تابع g پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow (\text{fog}) = \{(2, 1), (5, -1), (-1, 1)\}$$

حالا gof را هم پیدا می‌کنیم. منتها این بار، اول می‌رویم سراغ f و بعد g :



$$\Rightarrow (\text{gof}) = \{(1, 3), (2, 3), (3, -2), (4, 3)\}$$

نکته: همان‌طور که در مثال بالا دیدیم، ممکن است fog یا gof به ازای بعضی از x ها تعریف نشوند.

پیدا کردن ضابطه و دامنهٔ ترکیب دو تابع

اگر ضابطهٔ جبری دو تابع f و g را داشته باشیم، برای پیدا کردن ضابطهٔ ترکیب دو تابع در یکی از تابع‌ها (تابع بیرونی)، به جای x ، ضابطهٔ تابع دیگر (تابع درونی) را قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{cc} \text{تابع} & \text{تابع} \\ \text{بیرونی} & \text{درونی} \\ \downarrow & \downarrow \\ (\text{f o g})(x) = f(g(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{تابع} & \text{تابع} \\ \text{بیرونی} & \text{درونی} \\ \downarrow & \downarrow \\ (\text{g o f})(x) = g(f(x)) \end{array}$$

یا به عبارت ساده‌تر، در تابع بیرونی به جای x ، ضابطهٔ تابع درونی را جایگزین می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، ضابطهٔ fog و gof را پیدا کنید.

پاسخ: طبق چیزی که در بالا دیدیم، داریم:

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 2 = 4x^2 - 4x + 1 + 2 = 4x^2 - 4x + 3$$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) - 1 = 2x^2 + 3$$

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم:

نکته: در حالت کلی fog و gof با هم برابر نیستند (یعنی ممکن است بعضی وقت‌ها برابر شوند اما معمولاً برابر نیستند).

مثال و پاسخ

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

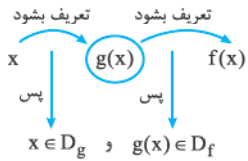
پاسخ: می‌دانیم $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ؛ پس با توجه به این که $f(x) = 2x - 1$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = 2g(x) - 1 \\ (f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2g(x) - 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 2g(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{2} = (x - 1)^2$$

پس $g(x) = (x - 1)^2$ است.

دامنه ترکیب دو تابع



دیدیم که برای پیدا کردن $(f \circ g)(x)$ (یا همان $f(g(x))$)، اول x را می‌گذاریم توی تابع g (تابع درونی) و بعد حاصل $g(x)$ را می‌گذاریم توی تابع f ؛ پس برای این که $f(g(x))$ تعریف شده باشد باید:

بنابراین دامنه $(f \circ g)(x)$ برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

یا اگر بخواهیم دامنه ترکیب دو تابع را به صورت فارسی بنویسیم، می‌شود:

$$\{ \text{دامنه تابع بیرونی} \in (\text{تابع درونی}) \mid \text{دامنه تابع درونی} \} = \text{دامنه ترکیب دو تابع}$$

پس در مورد $f \circ g$ و $g \circ f$ داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین برای پیدا کردن دامنه ترکیب دو تابع باید:

الف دامنه هر کدام از تابع‌ها را پیدا کنیم.

ب تعریف دامنه تابع مرکب را بنویسیم و نتیجه هر کدام از شرط‌های تعریف را پیدا کنیم.

نکته: دامنه تابع مرکب را باید با استفاده از تعریف بالا حساب کنیم، نه از روی ضابطه آن.

اگر دامنه تعریف را با استفاده از ضابطه تابع مرکب پیدا کنیم، ممکن است جواب اشتباه به دست آید.

مثال و پاسخ

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x - 5}$ باشند، دامنه تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

$$g(x) = \sqrt{x - 5} : D_g = [\Delta, +\infty)$$

پاسخ: الف دامنه هر کدام از تابع‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - 1 : D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [\Delta, +\infty) \mid \sqrt{x - 5} \in \mathbb{R}\}$$

ب می‌رویم سراغ تعریف دامنه $f \circ g$ و $g \circ f$:

حالا $x \in [\Delta, +\infty)$ یعنی $x \geq \Delta$ و $\sqrt{x - 5} \in \mathbb{R}$ یعنی حاصل $\sqrt{x - 5}$ یک عدد حقیقی باشد که می‌دانیم حتماً هست، پس دامنه تابع $f \circ g$ می‌شود همان $x \geq \Delta$ یا $[\Delta, +\infty)$:

$$D_{f \circ g} = [\Delta, +\infty)$$

در مورد دامنه $g \circ f$ هم داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - 1) \in [\Delta, +\infty)\}$$

$$= \{\mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq \Delta\} = \{\mathbb{R} \mid x \geq \frac{\Delta + 1}{2}\} = [\frac{\Delta + 1}{2}, +\infty)$$

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم، در حالت کلی دامنه $f \circ g$ و $g \circ f$ با هم برابر نیست. (ولی ممکن است گاهی برابر شود.)

پیدا کردن مقدار عددی fog یا gof

برای پیدا کردن مقدار عددی ترکیب دو تابع، مثلاً مقدار عددی تابع $(f \circ g)(x)$ در نقطه $x = a$ ، کافی است اول مقدار x (یعنی a) را در تابع درونی قرار دهیم و سپس حاصل تابع درونی را در تابع بیرونی جایگزین کنیم؛ یعنی لازم نیست حتماً ضابطه $f \circ g$ را پیدا کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: اگر $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{7x+1}{x^2+1}$ باشد، مقدار $(g \circ f)(1)$ را پیدا کنید.

$$f(1) = \frac{3(1)^2 + 5}{\sqrt{1+3}} = \frac{8}{2} = 4$$

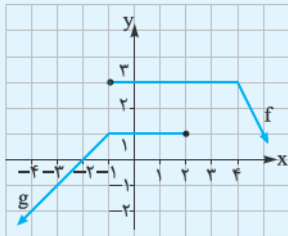
پاسخ: همان طور که گفتیم اول $f(1)$ و بعد $g(f(1))$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(1)) = g(4) = \frac{7(4)+1}{(4)^2+1} = \frac{29}{17}$$

نکته: اگر نمودار دو تابع f و g را داشته باشیم، می‌توانیم مقدار $f \circ g$ یا $g \circ f$ را به ازای یک عدد مشخص از روی نقاط نمودار پیدا کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: نمودار روبه‌رو توابع f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) پیدا کنید.



$(f \circ g)(-2)$, $(f \circ g)(-4)$

$(g \circ f)(4)$, $(g \circ f)(0)$

پاسخ: مقدار هر کدام را از روی شکل پیدا می‌کنیم. فقط قبل از هر چیز باید حواسمان باشد

که f به ازای x های $x \geq -1$ و g به ازای x های $x \leq 2$ تعریف شده است.

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 3$$

$$(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(-2) = \text{تعریف نشده}$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = \text{تعریف نشده}$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1$$

معادله‌های شامل fog یا gof

قبلاً دیدیم که چگونه ضابطه $f \circ g$ یا $g \circ f$ را پیدا کنیم. حالا اگر $(f \circ g)(x) = a$ (که در آن a یک عدد حقیقی است) باشد، با یک معادله سروکار داریم. برای حل معادله $f(g(x)) = a$ می‌توانیم یا اول ضابطه $f(g(x))$ را پیدا کنیم و بعد معادله به دست آمده را حل کنیم (که معمولاً راه فوری نیست چون وقت‌گیر و دشوار است) و یا معادله را به صورت زیر حل کنیم:

برای حل معادله $f(g(x)) = a$:

الف) معادله $f(x) = a$ را حل و جواب‌هایش را پیدا می‌کنیم.

ب) عبارت $g(x)$ را برابر جواب‌های معادله $f(x) = a$ قرار می‌دهیم و معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

بباید با یک مثال این روش را ببینیم.

مثال و پاسخ

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، جواب‌های معادله $(g \circ f)(x) = 8$ را پیدا کنید.

پاسخ: همان طور که گفتیم چون داریم $g(f(x)) = 8$ اول جواب‌های معادله $g(x) = 8$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

حالا $f(x)$ را برابر جواب‌های معادله بالا قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \\ f(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 2x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(1)(3) < 0 \end{cases}$$

جواب ندارد

پس جواب‌های معادله $(g \circ f)(x) = 8$ برابرند با $x = 1$ و $x = -3$.

نوشتن یک تابع به شکل ترکیب دو تابع

دیدیم که می‌توانیم دو تابع f و g را ترکیب کنیم و تابع $f \circ g$ یا $g \circ f$ را به دست آوریم. حالا می‌خواهیم عکس این عمل را انجام دهیم؛ یعنی یک تابع مشخص را به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تابع $h(x) = (x^2 + 1)^3$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم. برای این کار یک قسمت مشخص از ضابطه h را به عنوان تابعی مثل $g(x)$ در نظر می‌گیریم و بعد در تابع h ، به جای آن می‌گذاریم x و $h(x)$ را به $f(x)$ تبدیل می‌کنیم. در این صورت تابع h برابر است با $f \circ g$. مثلاً در مورد $h(x) = (x^2 + 1)^3$ داریم:

$$h(x) = (x^2 + 1)^3 \Rightarrow f(x) = (x + 1)^3 \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = (x + 1)^3 \\ g(x) = x^2 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

$$h(x) = (x^2 + 1)^3 \Rightarrow f(x) = (x)^3 \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = x^3 \\ g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

طور دیگری هم می‌توانستیم این کار را بکنیم:

در حالت کلی یک تابع را می‌توانیم به بی‌شمار شکل به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم.

مثال و پاسخ

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

پاسخ: مثل توضیح بالا می‌نویسیم:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x + 1} \\ g(x) = x^2 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

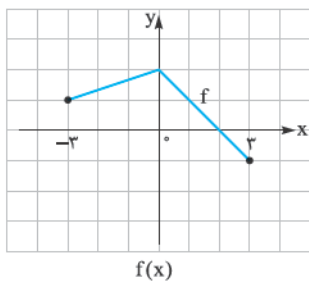
یا می‌توانیم بنویسیم:

انتقال توابع

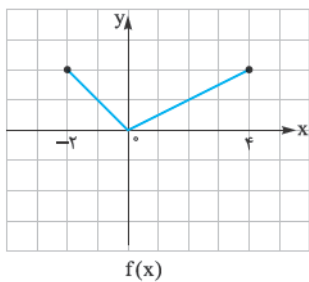
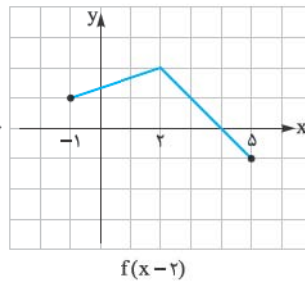
در سال دهم و یازدهم طریقه رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال را یاد گرفتیم. احتمالاً یاد تازان هست اها برای این که فیالمان راحت باشد یک مرور سریع می‌کنیم:

الف) رسم نمودار تابع $y = f(x+a)$

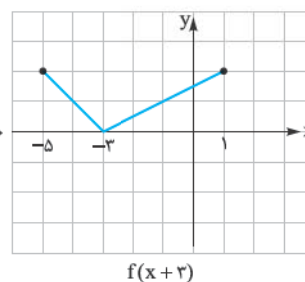
برای رسم نمودار تابع $y = f(x+a)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه $(-a)$ واحد در امتداد محور x انتقال بدهیم $(-a)$ ریشه عبارت $x+a$ است.



انتقال به اندازه $(+2)$ واحد در راستای محور x ها

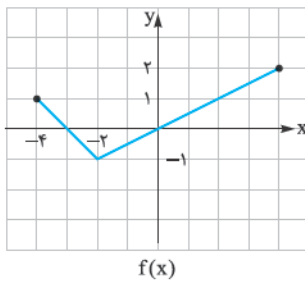


انتقال به اندازه (-3) واحد در راستای محور x ها

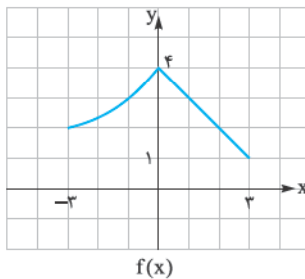
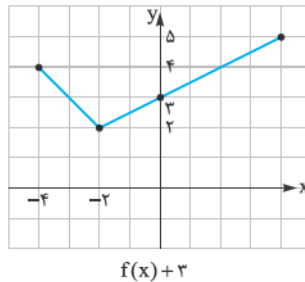


۱۱ رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$

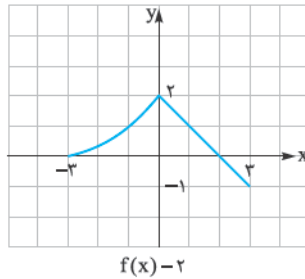
برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد در راستای محور y انتقال دهیم. مثلاً:



انتقال به اندازه $(+3)$ واحد
در راستای محور y



انتقال به اندازه (-2) واحد
در راستای محور y

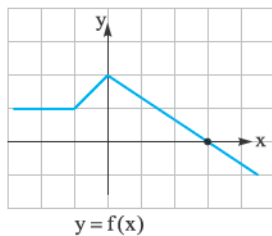


هالا برویم سراغ بقیه درس که مربوط است به امسال!

۱۲ رسم نمودار تابع $y = kf(x)$

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، عرض هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم. اگر $k > 0$ باشد، برای k دو حالت در نظر می‌گیریم:

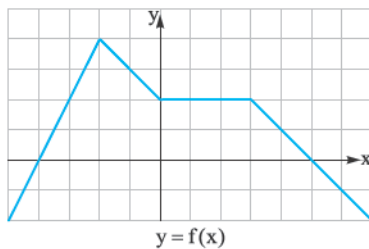
۱ اگر $k > 1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ بزرگ‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور y با نسبت k انبساط عمودی یافته است: (درست مثل این که یک عکس را روی صفحه کامپیوتر در راستای عمودی بکشید، آدم‌ها قدشان بلند می‌شود!)



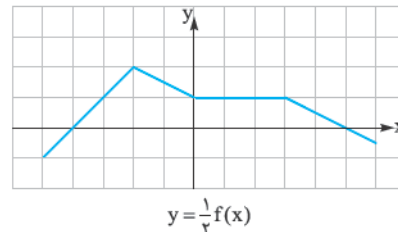
عرض نقاط تابع ۲ برابر شداند.
انبساط عمودی با نسبت ۲



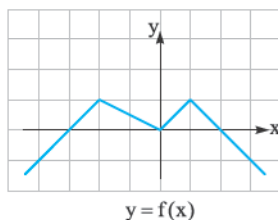
۲ اگر $0 < k < 1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ کوچک‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور y انقباض عمودی یافته است: (همان عکس را روی صفحه کامپیوتر در راستای عمودی جمع کنیم، آدم‌ها قد کوتاه می‌شوند)



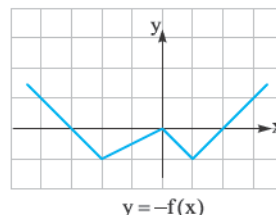
عرض نقاط $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود.
انقباض عمودی با نسبت $\frac{1}{3}$



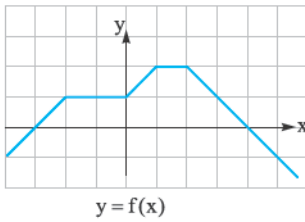
۳ اگر $k = -1$ باشد (یعنی تابع $y = -f(x)$)، نمودار تابع نسبت به محور x قرینه می‌شود:



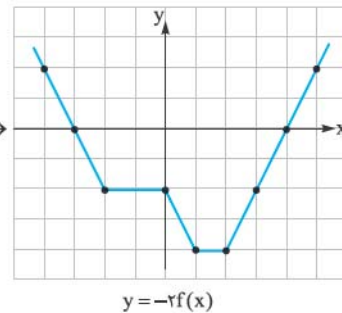
عرض نقاط در (-1) ضرب می‌شود.
قرینه نمودار نسبت به محور x ها



۴ اگر $k < 0$ باشد، عرض تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی بودن k ، مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه و بعد عرض نقاط در $|k|$ ضرب می‌شود:



عرض تمام نقطه‌ها در (-2) ضرب می‌شود.
اول قرینه نسبت به محور x ها و بعد انبساط عمودی با نسبت ۲



۵ دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ یکسان است.

۶ برد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ معمولاً با هم متفاوت است.

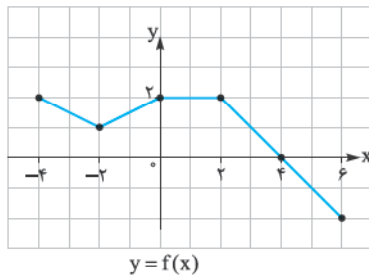
۷ نقاط برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ با محور x ها، یکسان است.

۴(ت) رسم نمودار $y = f(kx)$

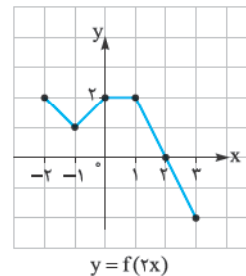
نمودار تابع $y = f(kx)$ با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. اگر $k > 0$ باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور x ها با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود، یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $y = f(kx)$ برابر $\frac{1}{k}$ طول

نقطه متناظرش در نمودار تابع $y = f(x)$ است: (پس $k > 1$ است پس $\frac{1}{k} < 1$ می‌شود. برای همین می‌گوییم با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود)

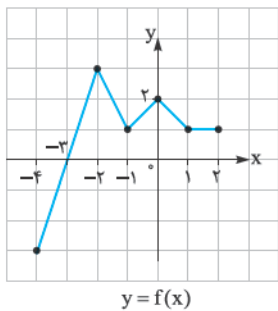


طول هر کدام از نقاط در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌شود.
انقباض افقی با نسبت $\frac{1}{3}$

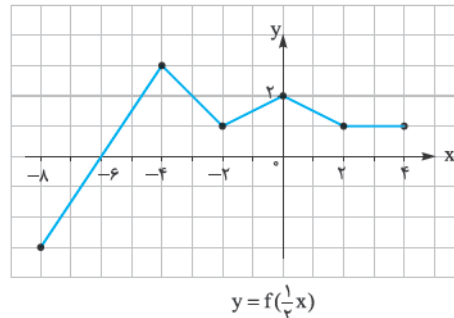


۲ اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور x ها با نسبت $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود (پس $0 < k < 1$ است، پس $\frac{1}{k} > 1$ می‌شود و برای همین می‌شود

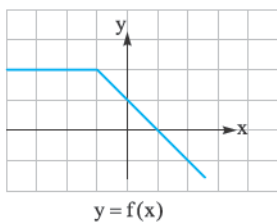
انبساط!)، یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود:



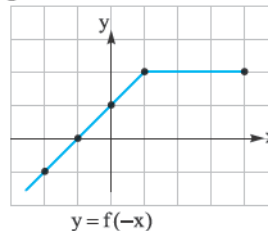
طول هر کدام از نقاط در ۲ ضرب می‌شود.
انبساط افقی با نسبت ۲



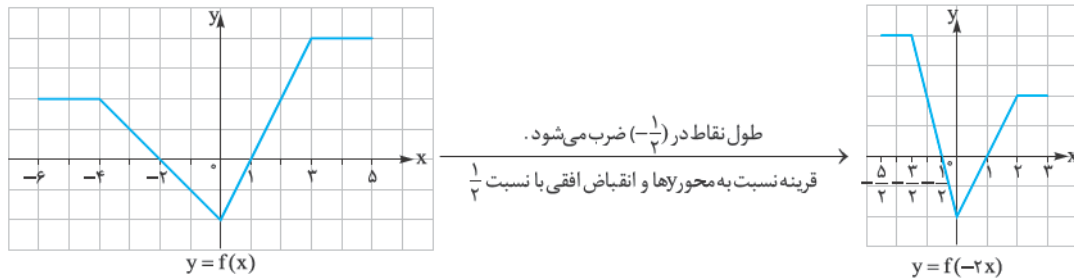
۳ اگر $k = -1$ باشد (یعنی $f(-x)$)، نمودار تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود:



طول هر کدام از نقاط در (-1) ضرب می‌شود.
قرینه نسبت به محور y ها



۴ اگر $k < 0$ باشد، طول تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی بودن k مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه و بعد با نسبت $\frac{1}{|k|}$ منقبض یا منبسط شود:



۵ دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ معمولاً با هم متفاوت است.

۶ برد تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ یکسان است.

۷ نقاط برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ و محور y ها، یکسان است.

رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$

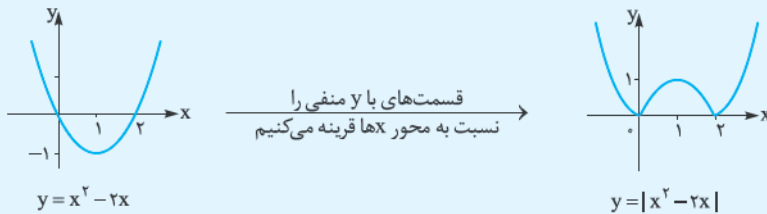
می‌دانیم قدر مطلق تمام مقادیر منفی را به مثبت تبدیل می‌کند، پس برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ باید قسمت‌های منفی نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: نمودار تابع $y = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ یک سهمی است با رأس $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) = (1, -1)$

که از نقاط $(0, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس:



برای این که تمام این‌ها را که دیدیم با هم قاطی نکنیم، همه را در یک جدول می‌آوریم:

تغییر	تأثیر در راستای	نتیجه
$f(x) \Rightarrow f(x+a)$	محور x ها	انتقال به اندازه $(-a)$ واحد در راستای محور x ها
$f(x) \Rightarrow f(kx)$	محور x ها	انبساط یا انقباض با نسبت $\frac{1}{k}$ در راستای محور x ها
$f(x) \Rightarrow f(-x)$	محور x ها	قرینه نسبت به محور y ها
$f(x) \Rightarrow f(x)+a$	محور y ها	انتقال به اندازه a واحد در راستای محور y ها
$f(x) \Rightarrow kf(x)$	محور y ها	انبساط یا انقباض با نسبت k در راستای محور y ها
$f(x) \Rightarrow -f(x)$	محور y ها	قرینه نسبت به محور x ها
$f(x) = f(x) $	محور y ها	قسمت‌های با عرض منفی را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم

سؤال‌های امتحانی

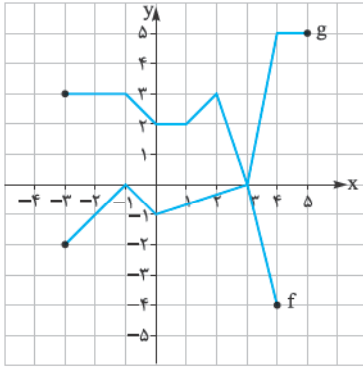
۱۰- در هر کدام از موارد زیر توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

الف) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\}$, $g = \{(-1, 2), (1, 0), (2, 1), (-2, 1)\}$

ب) $f = \{(-1, 0), (1, -1), (2, 1), (-2, 0)\}$, $g = \{(0, 5), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$

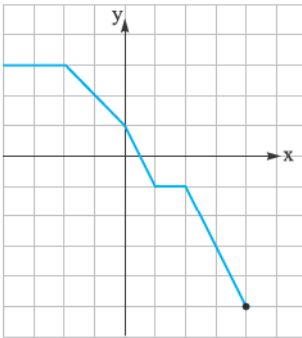
۱۱- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$ باشد، $f \circ f$ و $f \circ f \circ f$ را پیدا کنید.

۱۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع‌های f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) پیدا کنید.



- (fog)(4)
- (fog)(0)
- (gof)(3)
- (gof)(4)

۱۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) بیابید.



- (fof)(-4)
- (fof)(0)
- (fof)(5)
- (fof)(2)

۱۴- اگر $f(x) = x^2 - 2x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، ضابطه $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

۱۵- اگر $f(x) = x^3 + 3$ و $(f \circ g)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

۱۶- اگر $g(x) = 4x + 1$ و $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

۱۷- در هر قسمت دامنه تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

الف) $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x - 4}$

ب) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

ب) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $g(x) = \frac{x+2}{x}$

۱۸- مقدار $(f \circ g)(0)$ و $(f \circ g)(1)$ را در هر کدام از موارد زیر (در صورت وجود) پیدا کنید.

الف) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$

ب) $f(x) = \tan x$, $g(x) = \frac{\pi}{4}(x+1)$

ب) $f(x) = \cos(\pi x)$, $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x$

ت) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^4-1}$

۱۹- هر کدام از تابع‌های زیر را به شکل ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$

ب) $h(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^3 - 5}$

۲۰- در هر کدام از موارد زیر با توجه به ضابطه‌های f و g ، معادله داده‌شده را حل کنید.

الف) $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + x + 5$, $(g \circ f)(x) = 17$

ب) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^2 - 5$, $(f \circ g)(x) = 6$

۲۱- نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف) $y = 2 \sin x$

ب) $y = -\frac{1}{4} \sin x$

پ) $y = \sin 2x$

ت) $y = \sin \frac{x}{4}$

۲۲- ابتدا دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را تعیین کنید. سپس نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر کدام را بنویسید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$

ب) $f(x) = \sqrt{-x}$

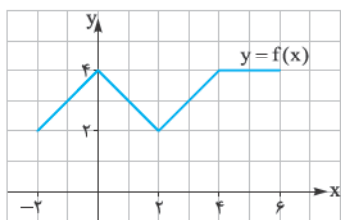
پ) $f(x) = -\sqrt{-x}$

ت) $f(x) = \sqrt{2x}$

ث) $f(x) = -2\sqrt{x}$

ج) $f(x) = \sqrt{-x+2}$

۲۳- اگر نمودار f به شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(2x) - 1$

ب) $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$

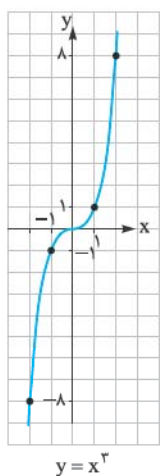
پ) $y = -f(x+1) + 2$

ت) $y = \frac{1}{4}f(-\frac{x}{4})$

ث) $y = |f(-2x) - 3|$

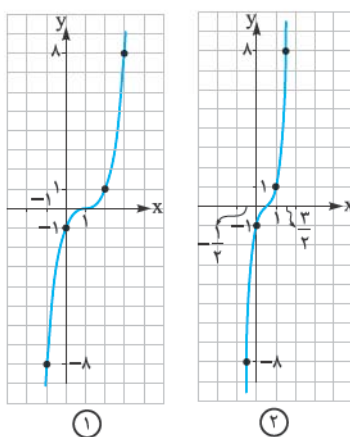
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اول نمودار تابع $y = x^3$ را رسم می‌کنیم و بعد کارهایی را که باید روی نمودار X^3 انجام دهیم تا به نمودار تابع‌های داده‌شده برسیم مشخص می‌کنیم:



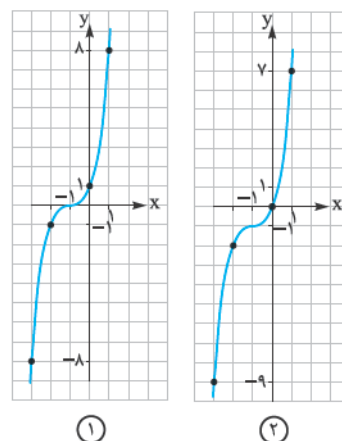
ب) $y = (2x - 1)^3$

- (۱) انتقال (+۱) واحد در راستای محور Xها
- (۲) و انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور Xها



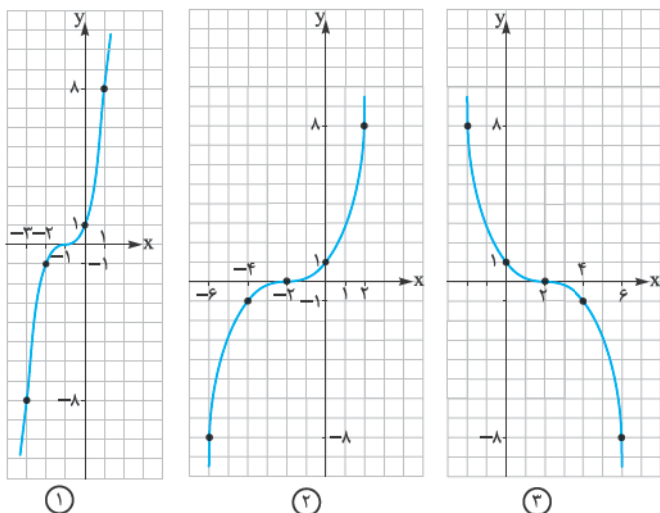
الف) $y = (x + 1)^3 - 1$

- (۱) انتقال (-۱) واحد در راستای محور Xها
- (۲) و انتقال (-۱) واحد در راستای محور Yها



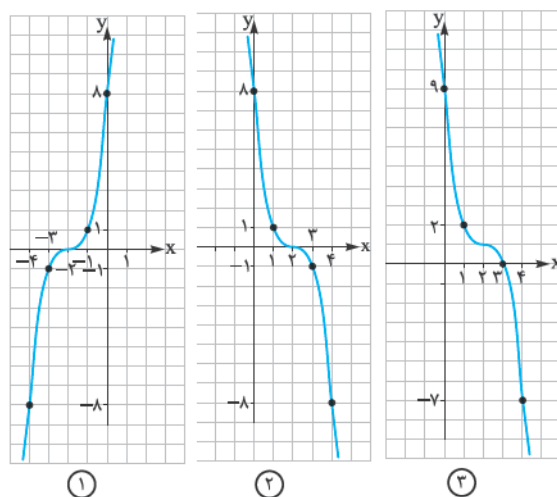
ت) $y = (-\frac{x}{2} + 1)^3$

- (۱) انتقال (-۱) واحد در راستای محور Xها
- (۲) انبساط با نسبت ۲ در راستای محور Xها
- (۳) تقارن نسبت به محور Yها

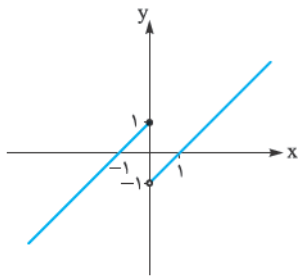


پ) $y = (-x + 2)^3 + 1$

- (۱) انتقال (-۲) واحد در راستای محور Xها
- (۲) تقارن نسبت به محور Yها
- (۳) انتقال (+۱) واحد در راستای محور Yها

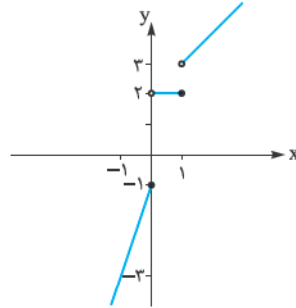


الف) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$



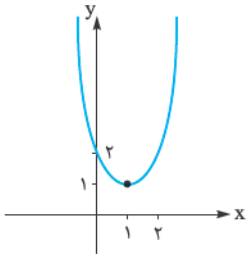
صعودی $(-\infty, 0]$
 صعودی $(0, +\infty)$
 تابع در کل غیریکنوا است.
 دامنه = \mathbb{R} ، برد = \mathbb{R}

ب) $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x \end{cases}$



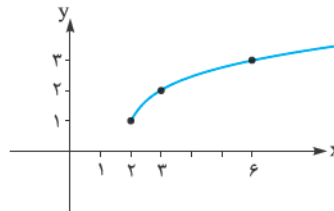
اکیداً صعودی $(-\infty, 0]$
 ثابت $(0, 1]$
 اکیداً صعودی $(1, +\infty)$
 \Rightarrow در کل صعودی
 دامنه = $\mathbb{R} - (0, 1]$
 برد = $(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$

پ) $h(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow h(x) = (x-1)^2 + 1$



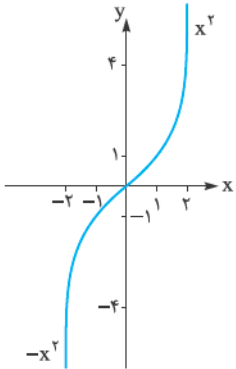
نزولی $(-\infty, 1]$
 صعودی $[1, +\infty)$
 \Rightarrow در کل غیریکنوا
 دامنه = \mathbb{R} ، برد = $[1, +\infty)$

ت) $k = \sqrt{x-2} + 1$



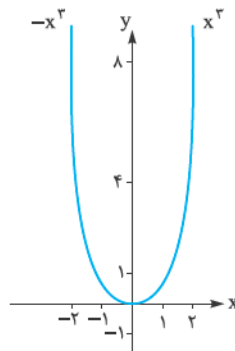
صعودی $[2, +\infty)$
 \Rightarrow در کل اکیداً صعودی
 دامنه = $[2, +\infty)$
 برد = $[1, +\infty)$

$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



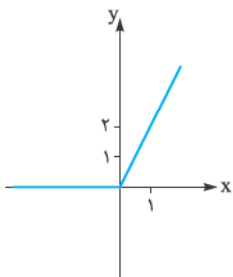
اکیداً صعودی \Rightarrow صعودی $(-\infty, +\infty)$

$g(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$



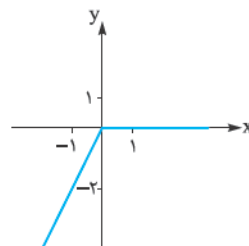
نزولی $(-\infty, 0]$
 صعودی $[0, +\infty)$
 \Rightarrow در کل غیریکنوا

الف) $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



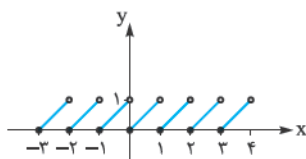
تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

ب) $g(x) = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$



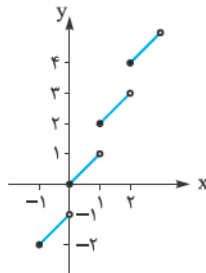
تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

پ) $h(x) = x - [x]$

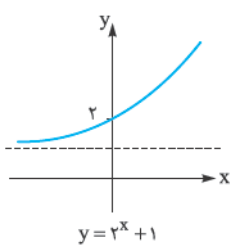


تابع نه صعودی است و نه نزولی

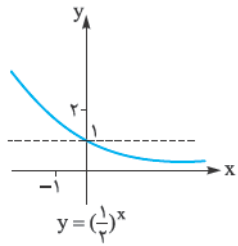
ت) $k(x) = x + [x]$



تابع اکیداً صعودی است.

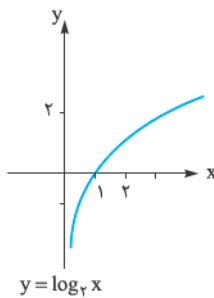


اکیداً صعودی

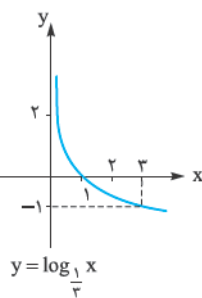


اکیداً نزولی

۵- تابع $y = a^x$ با شرط $a > 1$ اکیداً صعودی و با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است. اگر $a = 1$ باشد، تابع به شکل $y = 1$ تبدیل می‌شود که یک تابع ثابت است و هم صعودی است و هم نزولی.

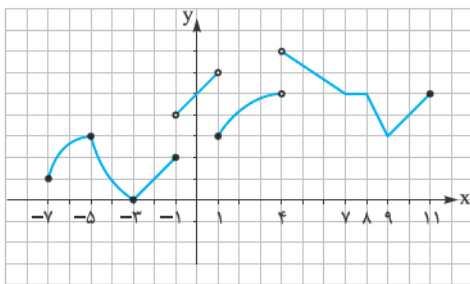


اکیداً صعودی

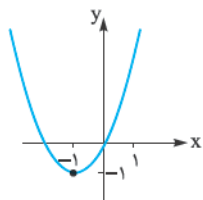


اکیداً نزولی

۶- تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$ اکیداً صعودی و با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است.



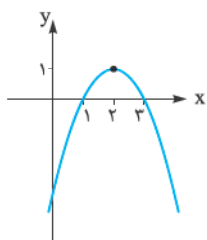
۷- نزولی $[-5, -3]$, صعودی $[-7, -5]$
 صعودی $(1, 4]$, صعودی $[-3, 1]$
 صعودی $[9, 11]$, نزولی $(4, 9]$



$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - 1$

۸- نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار تابع اگر بخواهیم تابع صعودی اکید باشد، باید دامنه آن زیرمجموعه‌ای از بازه $[-1, +\infty)$ باشد.



$f(x) = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 1$

۹- نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$f(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 1$

حالا با توجه به نمودار تابع:

الف) غیریکنوا $[0, +\infty)$
 ت) اکیداً نزولی $[2, 4]$

ب) اکیداً صعودی $(-\infty, 0]$
 ث) اکیداً صعودی $[0, 2]$

پ) غیریکنوا $[1, 3]$
 ج) اکیداً صعودی $[-1, 1]$

الف) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\}$, $g = \{(-1, 2), (1, 0), (2, 1), (-2, 1)\}$

-10

$f \circ g = \{(-1, 1), (2, 2), (-2, 2)\}$, $g \circ f = \{(1, 1), (2, 0), (4, 2)\}$

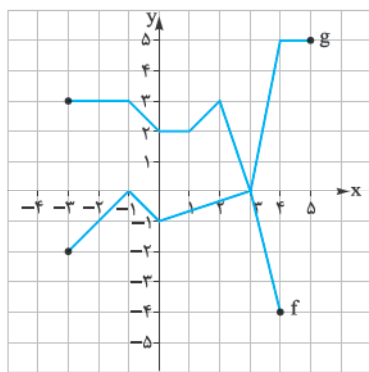
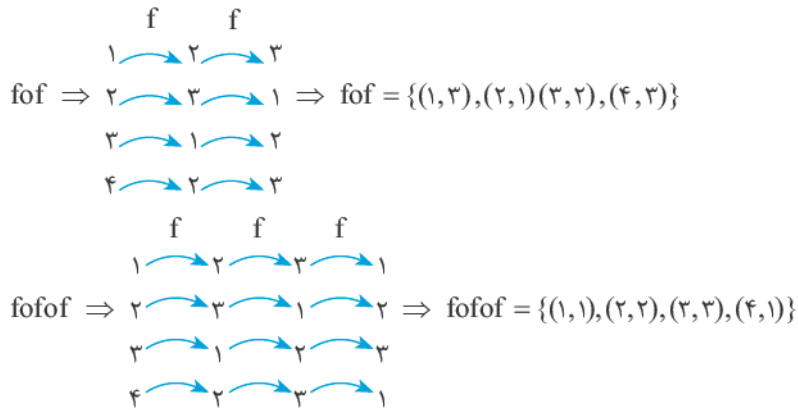
ب) $f = \{(-1, 0), (1, -1), (2, 1), (-2, 0)\}$, $g = \{(0, 5), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$

$f \circ g = \{(3, 1)\}$, $g \circ f = \{(-1, 5), (2, 3), (-2, 5)\}$

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$

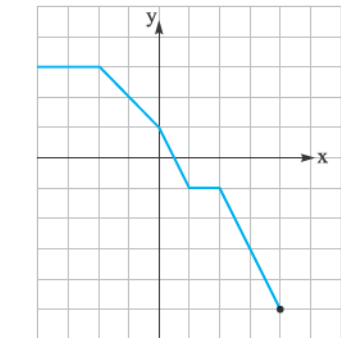
-11

اگر از نمودار پیکانی استفاده کنیم کار راحت‌تر است:



-12

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(5) = \text{تعریف نشده}$
 $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(-1) = 3$
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = -1$
 $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(-4) = \text{تعریف نشده}$



-13

$(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = f(3) = -3$
 $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = -1$
 $(f \circ f)(5) = f(f(5)) = \text{تعریف نشده}$
 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-1) = 2$

$f(x) = x^2 - 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x+1}$

-14 ضابطه $f \circ g$ و $g \circ f$ را با استفاده از تعریف تابع مرکب پیدا می‌کنیم:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 2(\sqrt{x+1})^2 = (x+1) - 2(x+1) = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 = x^2 - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)^2} = |x^2 - 1|$

-15 داریم $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 3$
 $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x^2 + 3x + 2$ } $\Rightarrow (g(x))^2 + 3 = x^2 - 2x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow (g(x))^2 + 3 = (x^2 - 2x^2 + 3x - 1) + 3 \Rightarrow (g(x))^2 = (x-1)^2 \Rightarrow g(x) = x-1$

۱۶- داریم $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} g(f(x)) &= 4f(x) + 1 \\ g(f(x)) &= (2x+1)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4f(x) + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 4f(x) = 4(x^2 + x) \Rightarrow f(x) = x^2 + x$$

الف) $f(x) = x - 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow D_g = [4, +\infty)$

-۱۷

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \in \mathbb{R}\} = [4, +\infty)$
 برقرار است

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\} = [7, +\infty)$

ب) $f(x) = \frac{2x}{x-3} \Rightarrow D_f : x \neq 3$

$g(x) = \frac{x+2}{x} \Rightarrow D_g : x \neq 0$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{x+2}{x} \neq 3\} = \{x \neq 0 \mid x+2 \neq 3x\} = \{x \neq 0 \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq 3 \mid \frac{2x}{x-3} \neq 0\} = \{x \neq 3 \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

پ) $f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow D_f : x \neq 1$

$g(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow D_g : x \geq 4$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq 1\} = \{x \geq 4 \mid x-4 \neq 1\} = \{x \geq 4 \mid x \neq 5\} = [4, +\infty) - \{5\}$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq 1 \mid \frac{x}{x-1} \geq 4\}$

برای حل نامعادله $\frac{x}{x-1} \geq 4$ باید همه عوامل را بیاوریم یک طرف و کسر ساده شده را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{x}{x-1} \geq 4 \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-4x+4}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x+4}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	۱	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$\frac{-3x+4}{x-1}$	+	+	-	-
$\frac{x-1}{x-1}$	-	+	+	+
$\frac{-3x+4}{x-1}$	-	تن	+	-

$\Rightarrow 1 < x \leq \frac{4}{3}$

$D_{g \circ f} = \{x \neq 1 \mid 1 < x \leq \frac{4}{3}\} = (1, \frac{4}{3}]$

پس دامنه $g \circ f$ برابر است با:

الف) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(\sqrt{0-1}) =$ تعریف نشده

-۱۸

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{2-1}) = f(1) = 3$

ب) $f(x) = \cos(\pi x)$, $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = \cos(0) = 1$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1 - \frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $f(x) = \tan x$, $g(x) = \frac{\pi}{4}(x+1)$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(\frac{\pi}{4}(0+1)) = f(\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ تعریف نشده

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\frac{\pi}{4}(1+1)) = f(\frac{\pi}{2}) = \tan \frac{\pi}{2} =$ تعریف نشده

ت) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^4-1}$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(\sqrt{0-1}) =$ تعریف نشده

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{1-1}) = f(0) = \sqrt{1-0} = 1$

-۱۹

$$\text{الف) } h(x) = \sqrt{3x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{3x - 1} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{3x - 1} \\ \Rightarrow g(x) = x^2 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

$$\text{ب) } h(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1} \\ \Rightarrow g(x) = x^2 \\ h(x) = (f \circ g)(x) \end{array} \right.$$

الف) $f(x) = 3x + 2, g(x) = x^2 + x + 5, (g \circ f)(x) = 17$

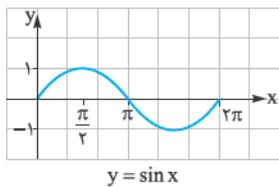
$$(g \circ f)(x) = 17 \Rightarrow g(x) = 17 \Rightarrow x^2 + x + 5 = 17 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \Rightarrow 3x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ f(x) = -4 \Rightarrow 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

ب) $f(x) = x^2 - x, g(x) = x^2 - 5, (f \circ g)(x) = 6$

$$(f \circ g)(x) = 6 \Rightarrow f(x) = 6 \Rightarrow x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

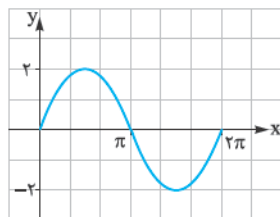
$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = 3 \Rightarrow x^2 - 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ g(x) = -2 \Rightarrow x^2 - 5 = -2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$$



۲۱- اول نمودار تابع $y = \sin x$ را با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم و بعد نمودار تابع‌های خواسته شده را از روی آن رسم می‌کنیم:

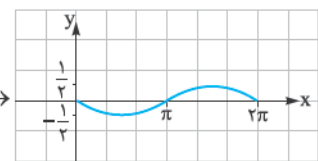
الف) $y = 2 \sin x$

عرض نقاط در ۲ ضرب می‌شوند.



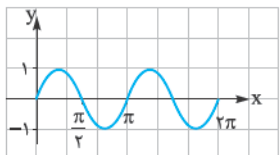
ب) $y = -\frac{1}{4} \sin x$

نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود و عرض نقاط در $(+\frac{1}{4})$ ضرب می‌شود.



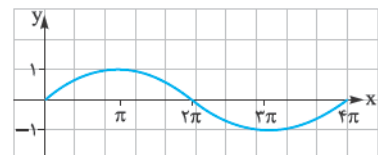
ب) $y = \sin 2x$

نمودار با نسبت $\frac{1}{2}$ در راستای محور xها منقبض می‌شود.



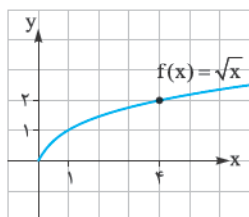
ت) $y = \sin \frac{x}{2}$

نمودار با نسبت ۲ در راستای محور xها منبسط می‌شود.



۲۲- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم و دامنه و بردش را تعیین می‌کنیم:

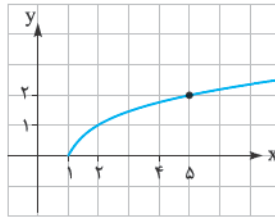
$$D_f = [0, +\infty), R_f = [0, +\infty)$$



الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$

انتقال (+1) واحد در راستای محور xها

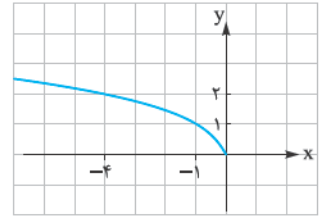
دامنه = $[1, +\infty)$ ، برد = $[0, +\infty)$



ب) $f(x) = \sqrt{-x}$

تقارن نسبت به محور yها

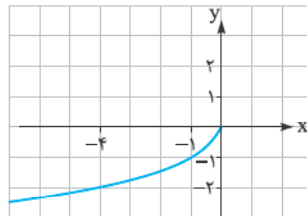
دامنه = $(-\infty, 0]$ ، برد = $[0, +\infty)$



پ) $f(x) = -\sqrt{-x}$

تقارن نسبت به محور yها و بعد تقارن نسبت به محور xها

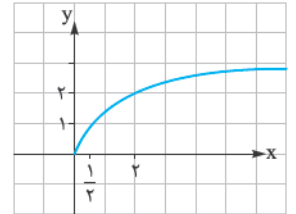
دامنه = $(-\infty, 0]$ ، برد = $(-\infty, 0]$



ت) $f(x) = \sqrt{2x}$

انقباض با نسبت 1/2 در راستای محور xها

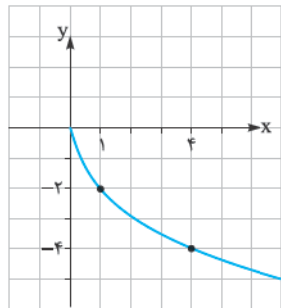
دامنه = $[0, +\infty)$ ، برد = $[0, +\infty)$



ث) $f(x) = -2\sqrt{x}$

عرض نقاط در (-2) ضرب می شود

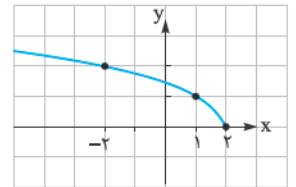
دامنه = $[0, +\infty)$ ، برد = $(-\infty, 0]$



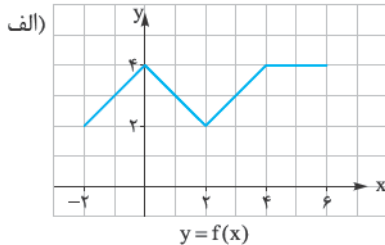
ج) $f(x) = \sqrt{-x+2}$

انتقال به اندازه (-2) واحد در راستای محور xها و بعد تقارن نسبت به محور yها

دامنه = $(-\infty, 2]$ ، برد = $[0, +\infty)$



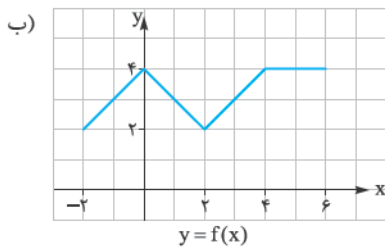
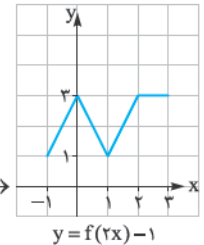
۲۳- در هر کدام از موارد نمودار توابع خواسته شده را مرحله به مرحله رسم می کنیم:



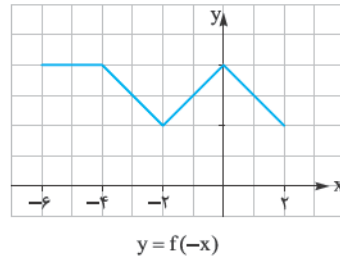
انقباض با ضریب 1/2 در راستای محور xها



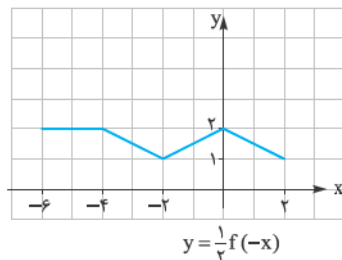
انتقال به اندازه (-1) واحد در راستای محور yها



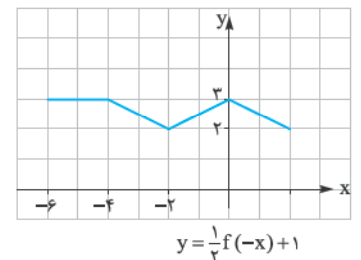
تقارن نسبت به محور yها



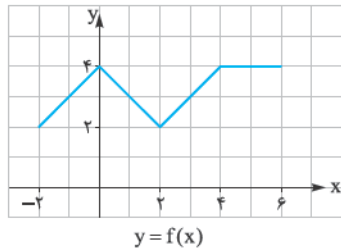
انقباض با نسبت 1/3 در راستای محور yها



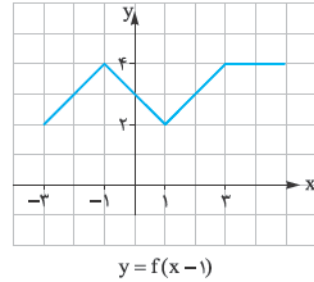
انتقال به اندازه (+1) واحد در راستای محور yها



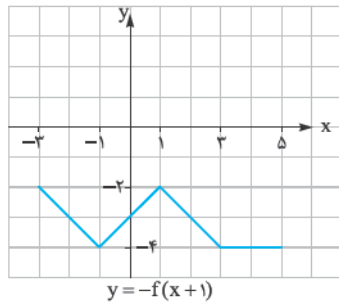
پ) $y = -f(x+1) + 2$



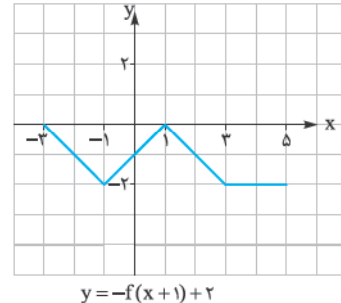
انتقال به اندازه (-1) واحد در راستای محور x ها



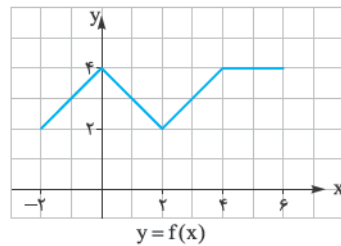
تقارن نسبت به محور x ها



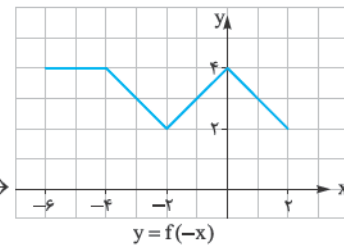
انتقال به اندازه $(+2)$ واحد در راستای محور y ها



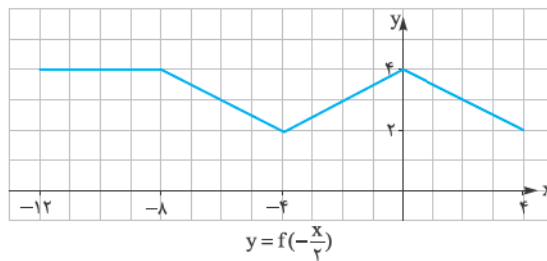
ت) $y = \frac{1}{2}f\left(-\frac{x}{2}\right)$



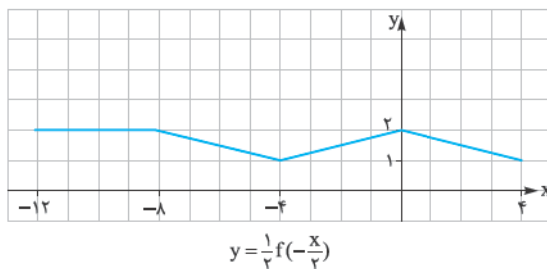
تقارن نسبت به محور y ها



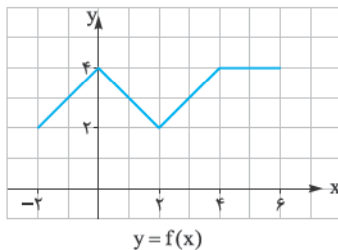
انقباض با ضریب 2 در راستای محور x ها



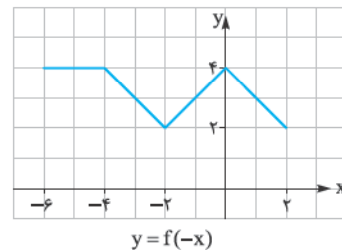
انقباض با نسبت $\frac{1}{2}$ در راستای محور y ها



ث) $y = |f(-2x) - 3|$



تقارن نسبت به محور y ها



$f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f(x) = x$
 $T = \frac{2\pi}{|b|}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 تابع معرّوفی
 $T =$
 $by + c = 0$
 $x =$
 ماکزیمم
 $(g(x))$
 مقاطع
 $f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f^{-1} \circ f(x) = g(f(x))$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
 $f^{-1} \circ f(x) = x$
 $f(x) = x$



$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

انقباض با نسبت $\frac{1}{3}$
در راستای محور x ها



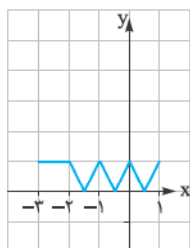
$$y = f(-2x)$$

انتقال به اندازه (-3) واحد
در راستای محور y ها



$$y = f(-2x) - 3$$

قرینه‌ی قسمت‌های با عرض منفی
نسبت به محور x ها



$$y = |f(-2x) - 3|$$

