

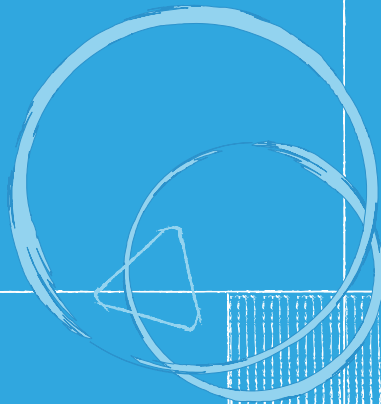


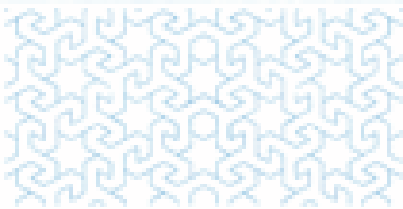
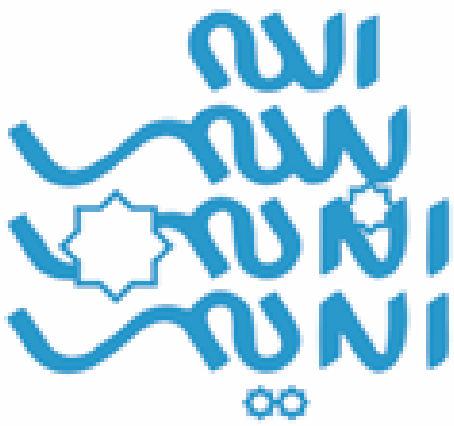
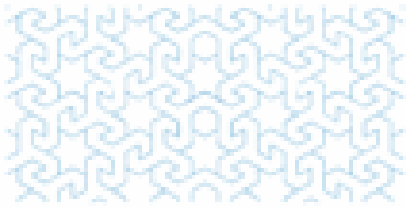
کتاب جمع بندی ریاضی دهم و یازدهم محک

(رشته علوم تجربی)

مجتبی سعیدی
رضا عابدی

تو گر عمرت هدر دادی همه را گر تو پر دادی
مده بر باد باقی را که حکمی چون گهر دارد
تو را باید محک باشد به راهت آن کمک باشد
وگرنه سکه جعلی تو پنداری که زر دارد





به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برگزیده

دانش‌آموزان پایه دوازدهم که مایل به ادامه تحصیل در دانشگاه‌ها و مؤسسات عالی کشور هستند، از یک سو باید مطالب کلاس دوازدهم را دقیق و خیلی عمیق فراگیرند و از سوی دیگر کتاب‌های پایه‌های قبلی خود را مرور نمایند.

کتاب‌های جمع‌بندی دهم و یازدهم محک (مرور حرفه‌ای کنکور) برای این‌گونه دانش‌آموزان کمک بزرگی است. دانش‌آموزان می‌توانند برای مرور مطالب پایه‌های قبلی، در تابستان و قبل از شروع سال تحصیلی جدید، از این کتاب‌ها استفاده کنند.

ما در انتشارات مبتکران برای شما که هدف‌تان قبولی در دانشگاه‌های ممتاز و معتبر کشور است، مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی را به کمک مؤلفان و مدرسان برگزیده تألیف کرده‌ایم.

کتابی که پیش رو دارید «کتاب جمع‌بندی ریاضی دهم و یازدهم تجربی محک» با ویژگی‌های زیر تألیف شده است:

۱- ارائه درس‌نامه خلاصه به همراه نکته‌های مهم تستی و کنکوری برای مرور مطالب

پایه‌های دهم و یازدهم

۲- بررسی سؤال‌های کنکورهای سراسری

۳- حل برخی از سؤال‌ها با چند روش به منظور آموزش نکته‌های تستی

۴- ارائه آزمون‌های تألیفی در هر فصل برای آمادگی بیشتر دانش‌آموزان در آزمون‌ها

۵- ارائه پاسخ‌نامه تشریحی کامل به همراه نکته‌های تستی

با مطالعه این کتاب دانش‌آموزان عزیز می‌توانند در فرصت تابستان، مطالب ریاضی دهم و یازدهم را مرور کرده و خود را برای آزمون‌های آزمایشی و سال دوازدهم آماده کنند.

در پایان وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب، آقایان سعیدی و عابدی و از دبیر محترم مجموعه و از خانم‌ها ستاره عرب و مریم فراهانی که بنا به گزارش مؤلفان در ویراستاری کتاب با آن‌ها همکاری داشته‌اند تشکر کنیم.

همچنین از خانم‌ها ساینه صلح‌جو (حروف چین و صفحه‌آرا)، مریم رسولی (رسم شکل)، بهاره خدای (گرافیک) و زهرا گودرز (طراح جلد) سپاسگزاریم.

@MehakMath

انتشارات مبتکران



فصل اول: آمار..... ۷

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۴
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۷

فصل هشتم: معادله درجه دوم..... ۱۲۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۳۵
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۳۸

فصل دوم: ترکیبیات..... ۲۱

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۸
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۳۱

فصل نهم: تابع..... ۱۴۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۶۸
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۷۱

فصل سوم: احتمال..... ۳۷

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۴۴
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۴۷

فصل دهم: تابع نمایی و لگاریتم..... ۱۷۵

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۸۴
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۸۶

فصل چهارم: الگو و دنباله..... ۵۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۶۴
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۶۷

فصل یازدهم: حد و پیوستگی..... ۱۹۱

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۰۲
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۰۵

فصل پنجم: توان های گویا و عبارات های جبری..... ۷۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۸۱
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۸۳

فصل دوازدهم: هندسه..... ۲۰۹

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۲۲
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۲۶

فصل ششم: معادلات و نامعادلات..... ۸۷

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۹۳
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۹۶

فصل سیزدهم: هندسه تحلیلی..... ۲۳۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۴۰
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۲۴۳

فصل هفتم: مثلثات..... ۱۰۳

آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۱۷
پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای..... ۱۱۹

آمار

آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

جامعه یا جمعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت می‌نامیم و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه گوئیم.

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه می‌نامیم.

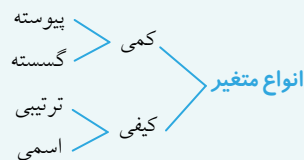
نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه می‌گوئیم و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گوئیم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه می‌نامیم.

سرشماری: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، آنگاه سرشماری کرده‌ایم.

متغیر: یک ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

مقدار متغیر: عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌نامیم.



متغیرهای کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال: تعداد فرزندان یک خانواده

متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال: گروه خونی افراد

متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

متغیر گسسته: متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال: تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه

متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال: سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، لیسانس و ...)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی): متغیر اسمی، متغیری است که ترتیبی نباشد. به عنوان مثال: جنسیت (زن و مرد)

تست: گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

(سراسری تهرمی - ۹۰)

۱ کیفی - اسمی ۲ کیفی - ترتیبی ۳ کمی - پیوسته ۴ کمی - گسسته

پس از گویید

معیارهای گرایش به مرکز:

۱- میانگین: میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها است که آن را با نماد \bar{X} نمایش می‌دهیم. میانگین N داده x_1, x_2, \dots, x_N به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

نکته: (روش محاسبه سریع میانگین): اگر داده‌های x_1, x_2, \dots, x_N اعداد بزرگی باشند، محاسبه میانگین آن‌ها با استفاده از روش گفته شده دشوار خواهد بود. در این حالت بهتر است از روش زیر استفاده کنیم:

اگر کوچک‌ترین داده عدد k باشد، آنگاه عدد k را از تمام داده‌ها کم می‌کنیم و میانگین داده‌های جدید $x_1 - k, x_2 - k, \dots, x_N - k$ را به صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{Y} = \frac{(x_1 - k) + (x_2 - k) + \dots + (x_N - k)}{N}$$

در نهایت میانگین داده‌های اصلی به صورت مقابل قابل محاسبه است:

$$\bar{X} = \bar{Y} + k$$

نکات:

- ۱- میانگین، همواره بین کم‌ترین و بیشترین داده می‌باشد. یعنی: بیشترین داده \leq میانگین \leq کم‌ترین داده
- ۲- اگر هر یک از داده‌های آماری با عدد ثابتی جمع یا تفریق و یا در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم شوند، میانگین نیز به همان صورت تغییر می‌کند. یعنی اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_N برابر \bar{X} باشد، آنگاه میانگین داده‌های $ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \dots, ax_N \pm b$ برابر $a\bar{X} + b$ خواهد بود.
- ۳- اگر میانگین N داده برابر \bar{X} باشد، مجموع داده‌ها برابر $N\bar{X}$ خواهد بود.
- ۴- اگر به مجموع N داده، a واحد اضافه (کم) شود، به حاصل میانگین $\frac{a}{N}$ واحد اضافه (کم) می‌شود.
- ۵- اگر میانگین N داده برابر \bar{X} و میانگین M داده دیگر برابر \bar{Y} باشد، آنگاه میانگین کل داده‌ها به صورت مقابل محاسبه می‌شود:
$$\bar{Z} = \frac{N\bar{X} + M\bar{Y}}{N + M}$$
- ۶- همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد. یعنی:
$$(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_N - \bar{X}) = 0$$

۷- اگر تمام داده‌ها برابر باشند، آنگاه میانگین برابر خود داده‌ها است. یعنی:

$$\bar{X} = x_1 = x_2 = \dots = x_N$$

۸- اگر از میان داده‌های x_1, x_2, \dots, x_N ، نزدیک‌ترین داده به میانگین را حذف کنیم، میانگین جدید نسبت به میانگین قدیم کم‌ترین تغییر را خواهد داشت.

۲- **میانه:** پس از مرتب‌کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

نکته:

۱- اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است.

۲- اگر هر یک از داده‌ها با عدد ثابتی جمع یا تفریق و یا در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم شوند، میانه نیز به همان صورت تغییر می‌کند.

دادهٔ دورافتاده: اگر مقدار داده‌ای خیلی بزرگ‌تر و یا خیلی کوچک‌تر از سایر داده‌ها باشد، آن داده را دادهٔ دورافتاده می‌نامیم.

نکته: میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار می‌گیرد ولی میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین در صورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

معیارهای پراکندگی:

۱- **دامنهٔ تغییرات:** دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با R نمایش می‌دهیم.

نکته: دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

۲- **واریانس:** میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها را واریانس می‌نامیم و از نماد σ^2 برای نمایش آن استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (\bar{X})^2$$

نکته:

۱- اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس برابر صفر خواهد بود و برعکس.

۲- اگر تمام داده‌ها با عدد ثابتی جمع یا تفریق شوند، واریانس تغییر نخواهد کرد.

۳- اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت a ضرب (تقسیم) شوند، واریانس در عدد a^2 ضرب (تقسیم) خواهد شد.

۳- **انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامیم و آن را با نماد σ نمایش می‌دهیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}}$$

نکته:

۱- اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار برابر صفر خواهد بود و برعکس.
 ۲- اگر تمام داده‌ها با عدد ثابتی جمع یا تفریق شوند، انحراف معیار تغییر نخواهد کرد.

۳- اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت a ضرب (تقسیم) شوند، انحراف معیار در عدد $|a|$ ضرب (تقسیم) خواهد شد.

۴- **ضریب تغییرات (CV):** ضریب تغییرات که با CV نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

نکته:

۱- مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.
 ۲- اگر تمام داده‌ها در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم شوند، ضریب تغییرات تغییر نخواهد کرد.

۵- **چارک‌ها:** چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک دوم (Q_2) همان میانه است. میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم.

نکته:

۱- اگر هریک از داده‌ها با عدد ثابتی جمع یا تفریق و یا در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم شوند، چارک‌ها نیز به همان صورت تغییر خواهند کرد.
 ۲- ۵۰ درصد داده‌ها قبل از میانه و ۵۰ درصد داده‌ها بعد از میانه قرار دارند.

۵۰ درصد داده‌ها | میانه | ۵۰ درصد داده‌ها

۳- ۲۵ درصد داده‌ها قبل از چارک اول و ۷۵ درصد داده‌ها بعد از چارک اول قرار دارند.
 ۷۵ درصد داده‌ها | چارک اول | ۲۵ درصد داده‌ها

۴- ۷۵ درصد داده‌ها قبل از چارک سوم و ۲۵ درصد داده‌ها بعد از چارک سوم قرار دارند.
 ۲۵ درصد داده‌ها | چارک سوم | ۷۵ درصد داده‌ها

۵- ۵۰ درصد داده‌ها بین چارک اول و سوم قرار دارند.

۲۵ درصد داده‌ها | چارک سوم | ۵۰ درصد داده‌ها | چارک اول | ۲۵ درصد داده‌ها

تست: میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $0/2$ محاسبه شده است.

(سراسری تهرانی - ۹۵)

میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۲۳۶

۲۳۴

۲۳۲

۲۲۹

پایان کتب

اگر طول اضلاع مربع‌ها را برابر x_1, x_2, \dots, x_N فرض کنیم، آنگاه مساحت مربع‌ها برابر $x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2$ خواهد بود.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (\bar{X})^2$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{X}} \Rightarrow 0.2 = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

$$9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (15)^2 \Rightarrow \text{میانگین مساحت مربع‌ها} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 234$$

تست: در داده آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول و میانگین داده‌های بعد از چارک سوم به ترتیب $21/6$ و 33 و میانگین سایر داده‌ها 25 می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

(سراسری تبریز - فارغ از کشور ۹۵ - با کمی تغییر)

۲۶

۲۵/۸

۲۶/۲

۲۶/۱

پایه نهم

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_5, \quad Q_1 = x_6, x_7, \dots, x_{17}, \quad Q_3 = x_{18}, x_{19}, \dots, x_{23} \\ N_1 = 5, \bar{X}_1 = 21/6 & \quad N_2 = 13, \bar{X}_2 = 25 & \quad N_3 = 5, \bar{X}_3 = 33 \\ \text{میانگین کل داده‌ها} & = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2 + N_3 \bar{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{5 \times 21/6 + 13 \times 25 + 5 \times 33}{23} = 26 \end{aligned}$$

تست: در داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب 30 و 8 می‌باشد. اگر داده‌های ناچور $10, 15, 45, 50$ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱۴/۸۱

۱۴/۷۲

۱۶/۶۶

۱۵/۳۳

پایه نهم

داده‌ها را به صورت $10, x_{25}, x_{24} = 15, x_{23} = 45, x_{22} = 50, x_{21}, \dots, x_1$ فرض می‌کنیم.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 50 + 45 + 15 + 10}{25} = 30 \Rightarrow x_1 + \dots + x_{21} + 120 = 750$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_{21} = 630$$

$$\Rightarrow \text{میانگین جدید} = \bar{X}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + \dots + x_{21}}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{21}^2 + 50^2 + 45^2 + 15^2 + 10^2}{25} - (30)^2$$

$$\Rightarrow 64 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{21}^2 + 4850}{25} - 900$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{21}^2 = 19250$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{21}^2}{21} - (\bar{X}_{\text{جدید}})^2 = \frac{19250}{21} - (30)^2 \approx 16/66$$

تست: در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟ (سراسری تهری - ۹۲)

$$\frac{8}{9} \quad \text{۱}$$

$$\frac{7}{8} \quad \text{۲}$$

$$\frac{5}{6} \quad \text{۳}$$

$$\frac{7}{9} \quad \text{۴}$$

پاسخ کوتاه:

اگر داده‌های اولیه را x_i فرض کنیم، داده‌های جدید $2x_i + 3$ خواهند بود.

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = 2\bar{X}_{\text{اولیه}} + 3 = 2(12) + 3 = 27$$

$$\sigma_{\text{جدید}} = 2\sigma_{\text{اولیه}}$$

$$\frac{cv_{\text{جدید}}}{cv_{\text{اولیه}}} = \frac{\frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{X}_{\text{جدید}}}}{\frac{\sigma_{\text{اولیه}}}{\bar{X}_{\text{اولیه}}}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\sigma_{\text{اولیه}}} \times \frac{\bar{X}_{\text{اولیه}}}{\bar{X}_{\text{جدید}}} = 2 \times \frac{12}{27} = \frac{8}{9}$$

آزمون «بهرگز نماند»

۱. نوع هریک از متغیرهای «درجه‌های افراد در ارتش»، «گروه خونی افراد» و «جنسیت افراد» به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- ۱ کیفی اسمی - کیفی اسمی - کیفی اسمی
 ۲ کمی گسسته - کیفی ترتیبی - کیفی ترتیبی
 ۳ کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کیفی اسمی
 ۴ کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کیفی ترتیبی

۲. چه تعداد از متغیرهای زیر کمی پیوسته هستند؟

- الف) میزان بارندگی
 ب) باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۱۰۰
 پ) میزان تحصیلات افراد
 ت) معدل دانش آموزان
- ۱ ۴
 ۲ ۳
 ۳ ۲
 ۴ ۱

۳. مرحله سوم در علم آمار کدام است؟

- ۱ تحلیل و تفسیر داده‌ها
 ۲ جمع‌آوری اعداد و ارقام
 ۳ سازمان‌دهی و نمایش
 ۴ نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

۴. کدام مورد نادرست است؟

- ۱ آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.
 ۲ تعداد اعضای جامعه را حجم جامعه گویند.
 ۳ مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، نمونه نامیده می‌شود.
 ۴ متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری اند، «متغیرهای کمی» گویند.

۵. اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_6 برابر ۸ و میانگین داده‌های x_4, x_5, x_6 برابر ۱۰ باشد، میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3 کدام است؟

- ۱ ۴
 ۲ ۶
 ۳ ۸
 ۴ ۱۰

۶. اگر میانگین داده‌های $3 - 2x_1, 3 - 2x_2, \dots, 3 - 2x_n$ برابر ۹ باشد، میانگین داده‌های $3 + 2x_1, 3 + 2x_2, \dots, 3 + 2x_n$ کدام است؟

- ۱ ۱۲
 ۲ ۱۸
 ۳ ۲۴
 ۴ ۲۷

۷. میانگین نمرات ۸ درس یک دانش‌آموز در کارنامه $16/5$ ثبت شده است. اگر نمرات ۱۵ و ۱۴ به اشتباه ۱۳ و ۱۴ در نظر گرفته شده باشند، میانگین واقعی نمرات این دانش‌آموز کدام است؟

- ۱ $16/25$
 ۲ $16/75$
 ۳ 17
 ۴ $17/75$

۸. انحراف از میانگین چهار داده آماری برابر $m - 2n$ ، $m - 4$ ، $2m - 4$ ، $n + 1$ ، $3 - 2n$ می باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱ $m = 2n$ ۲ $n = 2m$ ۳ $m = n$ ۴ $m = n = 0$

۹. داده های آماری $a, 9, 11, 14, b, 17, c, 20$ به ترتیب از کوچک تر به بزرگ تر مرتب شده اند. اگر میانه این داده ها برابر ۱۵ باشد، آنگاه در صورت افزودن دو داده ۱۸ و ۱۵ به این داده ها، میانه داده ها چند واحد افزایش می یابد؟

۱ $0/5$ ۲ 1 ۳ $1/5$ ۴ 2

۱۰. اگر انحراف معیار داده های $4x + 3$ ، $4y + 3$ ، $4z + 3$ برابر ۳۲ باشد، واریانس داده های $-\frac{x}{2}$ ، $-\frac{y}{2}$ ، $-\frac{z}{2}$ کدام است؟

۱ 16 ۲ 9 ۳ 4 ۴ 1

۱۱. انحراف معیار نمرات دانش آموزان دو کلاس ۱۲ و ۱۵ نفره به ترتیب ۲ و ۱ می باشد. اگر میانگین دو کلاس برابر باشد، انحراف معیار نمرات کل دانش آموزان دو کلاس کدام است؟

۱ $\frac{7}{3}$ ۲ $\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۳ $\frac{21}{4}$ ۴ $\sqrt{\frac{21}{4}}$

۱۲. واریانس ۶ داده آماری برابر صفر است. اگر داده های ۴، ۶، ۳ و ۵ را به این داده ها اضافه کنیم، میانگین داده های جدید برابر ۶ می شود. واریانس داده های جدید کدام است؟

۱ 4 ۲ 3 ۳ 2 ۴ 1

۱۳. در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۱۰ می باشد. اگر داده های ۱۳، ۱۵، ۴۰، ۴۲ و ۲۰ از میان آنها حذف شوند، واریانس داده های باقی مانده کدام است؟

۱ $81/4$ ۲ $81/3$ ۳ $81/2$ ۴ $81/1$

۱۴. مجموع مجذور انحراف از میانگین ۱۶ داده آماری برابر صفر است. اگر داده های ۲۰، ۱۲، ۱۸ و ۱۰ به آنها اضافه شوند، میانگین داده ها تغییر نمی کند. انحراف معیار ۲۰ داده حاصل کدام است؟

۱ $4/25$ ۲ $\sqrt{4/25}$ ۳ $3/4$ ۴ $\sqrt{3/4}$

۱۵. در داده های آماری ۳، ۱۱، ۱۷، ۱۹، ۱۲، ۱۴، ۲، ۵، ۱۰، ۱۵ و ۱۸، داده های قبل از چارک اول و داده های بعد از چارک سوم را حذف می کنیم. واریانس داده های باقی مانده کدام است؟

۱ $12/6$ ۲ $13/1$ ۳ $13/6$ ۴ $14/1$

۱۶. مجموع مجذورات ۱۲ داده آماری ۱۴۴۰ و میانگین آنها ۱۰ است. انحراف معیار کدام است؟

۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $3\sqrt{5}$ ۳ $4\sqrt{5}$ ۴ $5\sqrt{5}$

۱۷. از میان داده‌های ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱ و ۱۱ کدام داده را حذف کنیم تا میانگین جدید نسبت به میانگین قدیم، کم‌ترین تغییر را داشته باشد؟

- ۱۶ ۱ ۱۵ ۳ ۱۳ ۲ ۱۲ ۴

۱۸. کم‌ترین و بیشترین نمره یک دانشجو ۱۵ و ۱۸ می‌باشد. میانگین نمرات او کدام عدد می‌تواند باشد؟

- ۱۵ ۱ ۱۶ ۳ ۱۸ ۳ ۱۸٫۵ ۴

۱۹. در داده‌های آماری ۲۲۲۱، ۲۲۲۲، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۷، ۲۲۲۸، ۲۲۲۵ و ۲۲۲۵، انحراف از میانگین بزرگ‌ترین داده آماری کدام است؟

- ۴ ۱ ۳ ۲ ۱ ۳ ۲

۲۰. کدام دو داده را به داده‌های آماری ۱۲، ۲، ۳، ۵، ۵، ۸، ۹، ۲، ۵ و ۷ بیفزاییم تا میانگین داده‌های جدید برابر ۶ شود؟

- ۵ و ۶ ۱ ۷ و ۸ ۲ ۴ و ۵ ۳ ۳ و ۴ ۴

پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای

۱. گزینه ۱

۲. گزینه ۲

«میزان بارندگی» و «معدل دانش‌آموزان» متغیرهای کمی پیوسته هستند.

۳. گزینه ۳

مراحل علم آمار عبارتند از:

۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام

۲- سازماندهی و نمایش

۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها

۴- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

۴. گزینه ۴

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود.

۵. گزینه ۵

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 8 &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 48 \\ \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = 10 &\Rightarrow x_4 + x_5 + x_6 = 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 48 - 30 = 18$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

۶. گزینه ۶

می‌دانیم که اگر هر تغییری (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) روی داده‌ها اعمال شود همان تغییر روی میانگین هم اعمال می‌شود.

داده‌ها	$2x_i - 3$	$\xrightarrow{+3}$	$2x_i$	$\xrightarrow{\times 2}$	$4x_i$	$\xrightarrow{+3}$	$4x_i + 3$
میانگین	۹	$\xrightarrow{+3}$	۱۲	$\xrightarrow{\times 2}$	۲۴	$\xrightarrow{+3}$	۲۷

۷. گزینه ۷

$$\frac{x_1 + \dots + x_6 + 13 + 14}{8} = 16/5 \Rightarrow x_1 + \dots + x_6 = 8 \times 16/5 - 13 - 14 = 105$$

$$\text{میانگین واقعی نمرات} = \frac{x_1 + \dots + x_6 + 14 + 15}{8} = \frac{105 + 14 + 15}{8} = 16/75$$

۸. گزینه ۸

می‌دانیم که مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است. بنابراین:

$$m - 2n + 2m - 4 + n + 1 + 3 - 2n = 0 \Rightarrow 3m - 3n = 0 \Rightarrow m = n$$

۹. نکته

$$a, 9, 11, 14, b, 17, c, 20$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{میانۀ} = \frac{14+b}{2} \Rightarrow 15 = \frac{14+b}{2} \Rightarrow b=16 \end{array}$$

با افزودن دو داده ۱۸ و ۱۵ به داده‌های اصلی، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$a, 9, 11, 14, 15, b=16, 17, 18, c, 20 \Rightarrow \text{میانۀ} = \frac{15+16}{2} = 15.5 \quad \text{حالت اول:}$$

$$a, 9, 11, 14, 15, b=16, 17, c, 18, 20 \Rightarrow \text{میانۀ} = \frac{15+16}{2} = 15.5 \quad \text{حالت دوم:}$$

در هر دو حالت به مقدار میانۀ، ۰/۵ واحد اضافه شده است.

۱۰. نکته

جمع و تفریق یک عدد ثابت با داده‌ها، تأثیری در انحراف معیار ندارد. می‌دانیم که

اگر داده‌ها در عدد ثابت a ضرب شوند، انحراف معیار در عدد $|a|$ ضرب می‌شود.

داده‌ها	$4x_i + 3$	$\xrightarrow{-3}$	$4x_i$	$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{4})}$	$-\frac{x_i}{4}$	$\Rightarrow \sigma = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 16$
انحراف معیار	۳۲		۳۲	$\xrightarrow{\times \frac{1}{4} }$	۴	

۱۱. نکته

برای کلاس ۱۲ نفره:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2}{12}} \Rightarrow 4 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2}{12} \\ \Rightarrow 48 &= (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

برای کلاس ۱۵ نفره:

$$1 = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{15} - \bar{y})^2}{15}} \Rightarrow 1 = \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{15} - \bar{y})^2}{15}$$

$$15 = (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{15} - \bar{y})^2$$

$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow$ میانگین نمرات دو کلاس یکسان است

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۱۲ نفره}}{12} \Rightarrow 12\bar{x} = \text{مجموع نمرات کلاس ۱۲ نفره}$$

$$\bar{y} = \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۱۵ نفره}}{15} \Rightarrow 15\bar{y} = 15\bar{x} = \text{مجموع نمرات کلاس ۱۵ نفره}$$

$$\text{مجموع نمرات کلاس ۱۵ نفره} + \text{مجموع نمرات کلاس ۱۲ نفره} = \text{میانگین نمرات کل دانش‌آموزان} = \frac{12\bar{x} + 15\bar{x}}{12+15}$$

$$= \frac{12\bar{x} + 15\bar{x}}{12+15} = \bar{x}$$

بنابراین میانگین نمرات دو کلاس هم برابر \bar{x} است.

$$\sigma_{\text{جدید}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{15} - \bar{y})^2}{12+15}}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{15} - \bar{y})^2}{27}} = \sqrt{\frac{48+15}{27}}$$

$$= \sqrt{\frac{63}{27}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

۱۲. نکته

می‌دانیم که اگر همه داده‌های یک داده آماری با هم برابر باشند، آنگاه واریانس و انحراف معیار برابر صفر است و برعکس.

بنابراین در این سؤال ۶ داده آماری با هم برابر هستند. داده‌ها را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\frac{a, \dots, a, 3, 4, 5, 6}{6} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{6a + 3 + 4 + 5 + 6}{10} \Rightarrow 6 = \frac{6a + 18}{10} \Rightarrow a = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{6 \times (7-6)^2 + (3-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2}{10} = \frac{6+9+4+1}{10} = 2$$

۱۳. نکته

$$\bar{x} = 30 = \frac{x_1 + \dots + x_{20} + 13 + 15 + 40 + 42 + 20}{25} \Rightarrow x_1 + \dots + x_{20} = 620$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + \dots + x_{20}}{20} = \frac{620}{20} = 31$$

$$\sigma^2 = 10^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_{20}^2 + 13^2 + 15^2 + 40^2 + 42^2 + 20^2}{25} - 30^2 \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_{20}^2 = 20842$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_{20}^2}{20} - (\bar{x}_{\text{جدید}})^2 = \frac{20842}{20} - 31^2 = 81/10$$

۱۴. نکته

$$(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{16} = \bar{x}$$

$$\text{میانگین داده‌های جدید} = \frac{x_1 + \dots + x_{16} + 20 + 12 + 18 + 10}{20} = \bar{x} \Rightarrow \frac{16\bar{x} + 60}{20} = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = 15$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{16(15-15)^2 + (20-15)^2 + (12-15)^2 + (18-15)^2 + (10-15)^2}{20}} = \sqrt{\frac{0+25+9+9+25}{20}} = \sqrt{3/4}$$

۱۵. نکته

داده‌های مرتب شده: ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۸, ۱۹

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$

با حذف داده‌های قبل از چارک اول و داده‌های بعد از چارک سوم، داده‌های جدید به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 10, 11, 12, 14, 15, 17 \Rightarrow \bar{x} = \frac{5+10+11+12+14+15+17}{7} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{(5-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 + (15-12)^2 + (17-12)^2}{7}$$

$$= \frac{92}{7} \approx 13,1$$

۱۶. نکته

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1440}{12} - 10^2 = 20 \Rightarrow \sigma = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۷. نکته

نکته: با حذف نزدیک ترین داده به میانگین، میانگین جدید کم ترین تغییر را نسبت به میانگین اولیه خواهد داشت.

$$\bar{x} = \frac{11+11+12+12+12+13+15+16+16}{9} = \frac{118}{9} \approx 13,1$$

نزدیک ترین داده به میانگین عدد ۱۳ می باشد.

۱۸. نکته

نکته: میانگین، همواره بین کم ترین و بیشترین داده است. یعنی: بیشترین داده < میانگین < کم ترین داده

۱۹. نکته

برای محاسبه سریع میانگین ابتدا ۲۲۲۱ را از کل داده ها کم می کنیم و برای داده های جدید میانگین را محاسبه می کنیم. سپس برای محاسبه میانگین داده های اصلی، عدد میانگین به دست آمده را به علاوه ۲۲۲۱ می نماییم.

داده های اصلی: ۲۲۲۱, ۲۲۲۲, ۲۲۲۵, ۲۲۲۷, ۲۲۲۸, ۲۲۲۵

$$\text{داده های جدید: } 0, 1, 4, 6, 6, 7, 4 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{0+1+4+6+6+7+4}{7} = 4$$

میانگین اصلی = ۴ + ۲۲۲۱ = ۲۲۲۵

$$2228 - 2225 = 3 = \text{انحراف از میانگین بزرگترین داده آماری}$$

۲۰. نکته

داده های مرتب شده: ۲, ۲, ۳, ۵, ۵, ۵, ۷, ۸, ۹, ۱۲

اکنون به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$1 \text{ (گزینه ۱)} \quad 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 12 \Rightarrow \text{میان} = \frac{5+5}{2} = 5 \quad \times$$

$$2 \text{ (گزینه ۲)} \quad 2, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 12 \Rightarrow \text{میان} = \frac{5+7}{2} = 6 \quad \checkmark$$

بررسی گزینه های ۳ و ۴ بر عهده شما است.